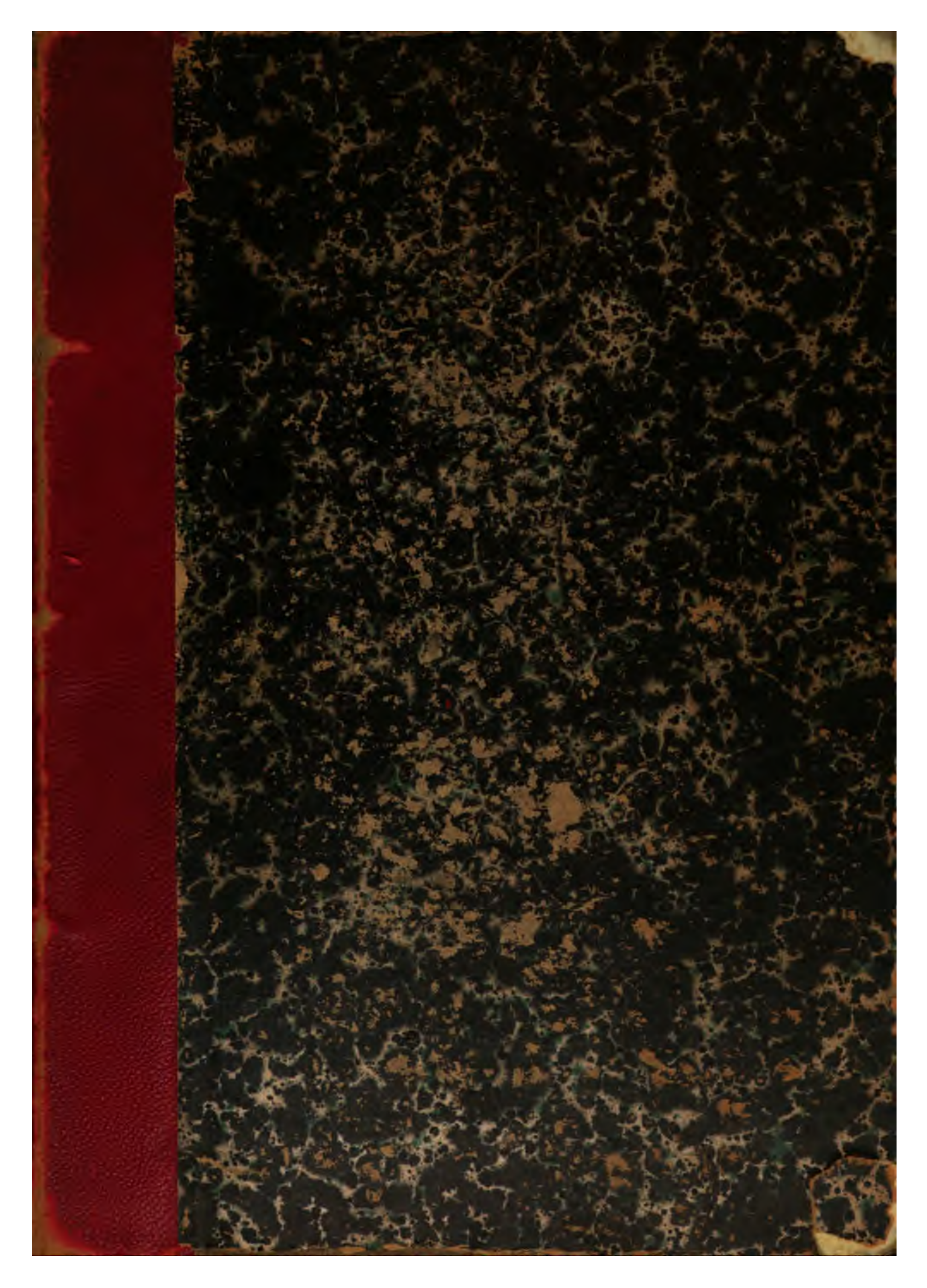
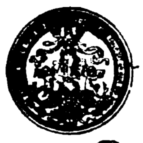


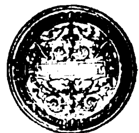

VE
RI
TAS
CHRISTO ET ECCLESIAE
SIGILLUM ACADEMIAE HARVARDIANAE IN NOV ANG



1885, Sep. 14 - 1888, Mar. 1.
Haven fund.

385. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 384. — Schlussheft. — Seite I—XXIV.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 384. — Seite I—XXIV.
(Schlussheft.)

Inhalt:

Titelblätter, Widmungsblatt, Vorwort und ausführliches Inhaltsverzeichnis.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten**. Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

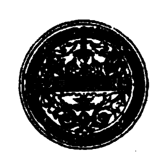
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung**

Kleyers



Encyklopädie



der gesamten

mathematischen, technischen und exakten

Natur-Wissenschaften.

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie.

Lehrbuch

der

ebenen Trigonometrie.

Eine Sammlung

von

1049 gelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben

und

178 ungelösten, oder mit Andeutungen versehenen, trigonometrischen Aufgaben

aus der

angewandten Mathematik

mit

797 Erklärungen, 563 in den Text gedruckten Figuren und 65 Anmerkungen

nebst einem

ausführlichen Formelnverzeichnis

von über 500 Formeln

zum

Gebrauch an niederen und höheren Schulen, sowie zum Selbststudium
und zum Nachschlagen

bearbeitet

nach eigenem System

von

Adolph Kleyer.

Stuttgart.
Verlag von Julius Maier.
1888.

Druck der Stuttgarter Vereins-Buchdruckerei.

SERENISSIMO AC POTENTISSIMO

PRINCIPI

LUDOVICO IV

MAGNO DUCI HASSIAE ET AD RHENUM

HUNC LIBRUM DEDICAT

AUTOR

FRANCOFURTENSIS D. XII. MENSIS SEPTEMBRIS
ANNI MDCCCLXXXVII.

Vorwort.

Beim Durchblättern des vor mir liegenden Lehrbuchs der ebenen Trigonometrie erinnere ich mich, während ich dieses Vorwort schreibe, an das mir von einem Züricher Abonnenten meiner Encyklopädie kürzlich zugesendete Citat:

> „Und eh' man nur den halben Weg erreicht,
> „Muss wohl ein armer Teufel sterben. —"

aus Göthes Faust.

In diesem Ausspruch Wageners in Göthes Faust liegt leider eine furchtbare Wahrheit, eine Wahrheit, die fast Jeder schon erkannt, der in Wissenschaften einzudringen sucht; — auch bei einer oberflächlichen Durchsicht des in diesem Lehrbuch enthaltenen Materials kommt man dazu, die Wahrheit jener Worte bekennen zu müssen.

Die ebene Trigonometrie ist nur ein besonderer Zweig der Mathematik und zwar nur ein Zweig der Geometrie; sie beschäftigt sich mit der Aufstellung der Beziehungen zwischen irgend welchen Strecken und Winkeln, welche Bestimmungsstücke von Dreiecken oder anderen geometrischen Gebilden sind, oder welche in irgend welchem geometrischen Zusammenhang stehen. Solche Beziehungen gibt es unzählige, wie aus vorliegendem Buch ersichtlich ist.

Das Studium der Trigonometrie hat, wie das Studium einer jeden Wissenschaft, stets einen doppelten Zweck; der eine dieser Zwecke besteht darin, mittels des Studiums einer Wissenschaft dieselbe zu erkennen und zwar soweit, als sie bereits von Anderen herangebildet ist, um dann an dem weiteren Aufbau und der Vervollkommnung jener Wissenschaft Teil nehmen zu können; der andere jener Zwecke, für die Meisten der eigentliche Zweck des Studiums einer Wissenschaft, besteht darin, die Lehren dieser Wissenschaft für andere Wissenschaften und das praktische Leben verwerten zu können. Wie mannigfach solche

Verwertungen der trigonometrischen Lehren sein können, ist ebenfalls aus diesem Lehrbuch ersichtlich.

Ein Lehrbuch der ebenen Trigonometrie kann somit nur einen Teil der unzähligen trigonometrischen Lehren enthalten, es kann die mannigfachen Verwertungen trigonometrischer Lehren nur in geringem Mass an einigen Beispielen zeigen.

Will oder soll ein Studierender mittels des Studiums eines Lehrbuchs der Trigonometrie auch nur den halben Weg zu einem damit beabsichtigten Zweck erreichen, und soll ihm Zeit, Lust und Kraft übrig bleiben, auch in anderen Wissenschaften nur den halben Weg erreichen zu können, so muss ein solches Lehrbuch die Bedingung erfüllen, dass in demselben jener gedachte Teil der Trigonometrie auch so vorgeführt ist, damit der Studierende in der möglichst kürzesten Zeit, mit dem geringsten Aufwand seiner Kräfte den Hauptinhalt und das Wesen der Wissenschaft, so weit sie bereits von Anderen herangebildet wurde, erkennen kann; ein solches Lehrbuch muss aber auch die Bedingung erfüllen, dass es dem Studierenden den Zweck und den Wert der Lehren jener Wissenschaft zeigt, und somit nicht allein die Lust zum Studium einer Wissenschaft wach erhält, sondern auch den Studierenden zur Erkenntnis dessen führt, was bereits viele Andere vor ihm, Jahrhunderte vor ihm, erdachten oder erkannten.

Die ebene Trigonometrie ist eine Wissenschaft, welche ihrem Wesen nach darin besteht, Beziehungen zwischen solchen Strecken und Winkeln aufzusuchen, welche in irgend welchem geometrischen Zusammenhang stehen; da nun solche Beziehungen abhängig sind von der Art des Zusammenhangs der gedachten Strecken und Winkel, so ist die Trigonometrie an und für sich eine Wissenschaft, welche sich mit der Lösung von solchen Problemen beschäftigt, in welchen ein bestimmter Zusammenhang der betreffenden Strecken und Winkel vorausgesetzt oder gegeben ist; dementsprechend enthält das vorliegende Lehrbuch, abgesehen von Definitionen, nur Probleme, welchen teilweise in Form von Fragen, teilweise in Form von Aufgaben Ausdruck verliehen ist.

Die in vorliegendem Buch enthaltenen Probleme sind teilweise gelöst, teilweise mit Andeutungen zu den Lösungen versehen; der Grund, warum dies geschah, ergibt sich aus dem vorstehend Gesagten — der Studierende soll durch das Studium dieses Lehrbuchs in der möglichst kürzesten Zeit und mit dem geringsten Aufwand seiner eigenen Kraft, den Inhalt, das Wesen, den Zweck und den Wert der Trigonometrie erkennen; es soll ihm durch die gegebenen Lösungen und Andeutungen Zeit, Mühe und somit die Kraft erspart werden, welche er aufwenden müsste, um solche Beziehungen wieder aufzusuchen, die vor ihm bereits viele Andere in derselben Weise gefunden und festgestellt haben, welche Zeit, Mühe und Kraft er aber verwenden kann, um auch in andere Wissenschaften, deren

Studium zu seinen besonderen Zwecken erforderlich ist, in derselben Weise, wenn auch da nur bis zum halben Weg, einzudringen. —

Da die frische, gesunde geistige Entwickelung eines Menschen gefördert wird durch das Studium der Erfahrungen Anderer, sobald dieses Studium derart gemacht werden kann, dass es nicht in einem, meist bei jüngeren Studierenden oft erfolglosen Abmühen des Geistes selbst, sondern in einer Befriedigung des wissenschaftlichen Dranges besteht, so wird durch die Angabe der Arten und Weisen, wie man die vorhin erwähnten Beziehungen finden kann, welche durch die Erfahrungen Anderer bereits festgestellt wurden, der geistigen Entwickelung Vorschub geleistet.

Das in den Auflösungen und Andeutungen Gesagte soll der Studierende, ohne sich abzumühen und ohne hierdurch geistig zu erschlaffen, nur verstehen lernen, er soll sich hierdurch die Erfahrungen Anderer zu eigen machen; wodurch er, ausgerüstet mit den Erfahrungen Anderer, geistig erzogen durch dieselben, die nötige geistige Frische und Kraft sich bewahren kann, um die verstandenen Lehren nicht allein verwerten, sondern auch weiter entwickeln zu können; — dies letztere ist eine Forderung, welche um so gebieterischer an die kommenden Geschlechter herantritt, als sämtliche Wissenschaften, trotz mancherlei gewaltiger Fortschritte, noch ihrer Vervollkommnung harren.

Der lebhafte Beifall, welchen die früheren nach meinem System bearbeiteten elf Lehrbücher in den weitesten Kreisen des In- und Auslandes gefunden haben, berechtigt mich zu der Hoffnung, dass auch dieses, mein zwölftes Lehrbuch — d. i. der dreizehnte Band meiner Encyklopädie der mathematisch-, technischen und der exakten Natur-Wissenschaften — eine ebensolche Aufnahme finden wird; diese Hoffnung glaube ich um so eher erfüllt zu sehen, als von Seiten der Verlagshandlung Julius Maier, von Seiten der Vereins-Buchdruckerei und von Seiten der xylographischen Anstalt Heinrich Weber, sämtlich in Stuttgart, keine Mühe und keine Opfer gescheut wurden, um diesem Buch eine solche Ausstattung zu geben, dass ich sagen darf, das Buch steht in dieser Beziehung unerreicht da.

Bei der Auswahl der in diesem Buch enthaltenen Aufgaben benutzte ich, abgesehen von den von mir selbst verfertigten Aufgaben, die besten und neuesten der bestehenden trigonometrischen Aufgabensammlungen.

Relationen zwischen den goniometrischen Funktionen sind in diesem Buch, entgegen allen übrigen bestehenden Lehrbüchern der Trigonometrie, nicht entwickelt, in Erklärungen aber an geeigneten Stellen vorgeführt, da dieselben in meinem Lehrbuch der Goniometrie in ausführlicher Weise abgehandelt sind, und da das vorliegende Buch ein Lehrbuch der Trigonometrie, nicht aber ein Lehrbuch der Goniometrie und der Trigonometrie

sein soll; — mein Lehrbuch der Goniometrie und die Teile der Encyklopädie, welche ebenfalls über Geometrie handeln, sind Ergänzungen zu diesem Lehrbuch der Trigonometrie.

Was das Studium dieses Lehrbuchs anbetrifft, so sind an geeigneten Stellen in Anmerkungen die nötigen Hinweise gegeben.

Zum Zweck des Nachschlagens der in anderen Wissenschaften und in der Technik so vielfach gebräuchlichen trigonometrischen Formeln ist diesem Buch ein ausführliches Formelnverzeichnis beigegeben, was besonders Fachleuten sehr erwünscht sein wird.

Wie bei jeder Entstehung keine höchste Vollkommenheit des Entstehenden vorausgesetzt werden kann, so ist es auch mit diesem Lehrbuch, deshalb bitte ich bei Beurteilung desselben die entsprechende Nachsicht zu üben; ich bitte Verbesserungsfähiges, Berichtigungen etc. mir gefälligst mitzuteilen, damit solches in einer neuen Auflage berücksichtigt, und so mit der Zeit das Bestmögliche erreicht werden kann.

Frankfurt a. M., den 12. September 1887.

A. Kleyer.

Inhaltsverzeichnis.

Ebene Trigonometrie.

Trigonometrische Aufgaben.

Formelnverzeichnis.

A) Grundformeln über das Dreieck.

Die

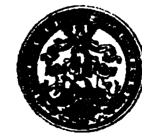
ebene Trigonometrie

und

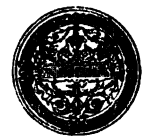
deren Anwendung.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

4. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Inhalt: **Ebene Trigonometrie.** Berechnungs-Aufgaben. I. Teil. Das rechtwinkl. Dreieck. Seite 1–16.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Berechnungs-Aufgaben. I. Teil. Das rechtwinklige Dreieck. Seite 1—16.

Inhalt:

Stuttgart.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch **die überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

Ebene Trigonometrie.

Berechnungs-Aufgaben. 1. Teil.

Das rechtwinklige Dreieck.

I.

Erläuternde Fragen mit Antworten, über: die Trigonometrie im allgemeinen, — die ebene Trigonometrie, — die Winkelfunktionen.

Frage 1. Mit was beschäftigt sich die **Trigonometrie** und was lehrt dieselbe?

Antwort. Die **Trigonometrie** beschäftigt sich mit der Dreiecksmessung, bezw. mit der Dreiecksberechnung und lehrt aus 3 gegebenen Stücken eines Dreiecks die übrigen Stücke desselben zu bestimmen.

Frage 2. Welche Erweiterung erleidet die Trigonometrie und welchen besonderen Namen führt alsdann dieselbe?

Antwort. Die Trigonometrie erleidet eine Erweiterung, wenn sie zur Berechnung von Polygonen — durch Zerlegung der letzteren in Dreiecken — angewandt wird; und heisst in diesem Falle **Polygonometrie** (Vielecksberechnung).

Frage 3. In welche 2 Hauptteile zerfällt die Trigonometrie?

Erkl. 1. Ein sphärisches, sphäroidisches oder Kugeldreieck ist ein Teil der Oberfläche einer Kugel, welcher von drei Bogen begrenzt wird, die drei grössten Kreisen (Erkl. 2) der Kugel angehören.

Erkl. 2. Unter grössten Kreisen einer Kugel versteht man solche Kreise, deren Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

Antwort. Die Trigonometrie zerfällt, in:

1) die **ebene** Trigonometrie, wenn sie sich mit der Berechnung von ebenen Dreiecken beschäftigt, und

2) in die **sphärische, sphäroidische** oder **körperliche** Trigonometrie, wenn sie sich mit der Berechnung von sphärischen, sphäroidischen oder Kugeldreiecken (Erkl. 1) beschäftigt.

Frage 4. In welche 2 Hauptteile zerfällt die **ebene** Trigonometrie?

Antwort. Die **ebene** Trigonometrie zerfällt, in:

1) die **Goniometrie,** welche sich nur mit der Aufstellung der Beziehungen zwischen den sogenannten goniometrischen Funktionen beschäftigt; — die Goniometrie ist mithin der Inbegriff aller Sätze und Formeln, die nur Beziehungen zwischen Winkeln ausdrücken; — und

2) in die **eigentliche Trigonometrie,** welche sich speziell mit der Berechnung der Dreiecke beschäftigt.

Frage 5. Worin besteht der Grundgedanke der **ebenen** Trigonometrie?

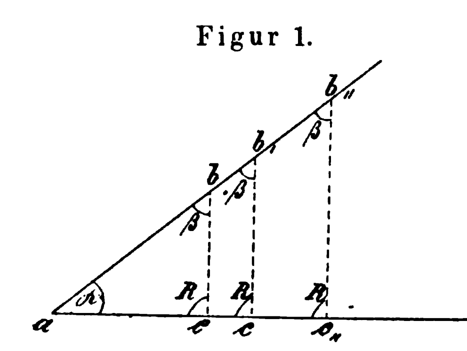
Antwort. Der **Grundgedanke** der ebenen Trigonometrie besteht darin, dass die Grösse der Winkel in einem Dreiecke abhängig ist von dem Verhältnisse der Dreiecksseiten — **nicht** von der **Länge** der Seiten.

Frage 6. Warum ist die **Grösse der Winkel** eines Dreiecks von dem **Verhältnisse** der Dreiecksseiten abhängig?

Antwort. Die **Grösse der Winkel** eines Dreiecks ist deshalb von dem Verhältnisse der Dreiecksseiten abhängig, weil alle Dreiecke, in welchen das Verhältniss der drei Seiten dasselbe ist, **ähnlich** und in **ähnlichen** Dreiecken die **homologen** Winkel **einander gleich sind.**

Frage 7. Auf welche Weise wird die Grösse eines Winkels von dem Verhältnisse **zweier Strecken** abhängig gemacht?

Figur 1.



Antwort. Die **Grösse** eines Winkels kann man auf folgende Weise von dem Verhältnisse **zweier Strecken** abhängig machen:

Fällt man von beliebigen Punkten des einen Winkelschenkels, Fig. 1, die Perpendikel bc, b_1c_1, b_2c_2, etc. auf den andern Winkelschenkel des Winkels α, so entstehen die rechtwinkligen und ähnlichen Dreiecke:

$$abc,\ ab_1c_1,\ ab_2c_2,\ \text{etc.}$$

in denselben sind die sämmtlichen homologen Winkel gleich und finden folgende Proportionen statt:

$\frac{ab}{bc} = \frac{a\,b_,}{b_,c_,} = \frac{a\,b_{,,}}{b_{,,}c_{,,}}$ .... oder:

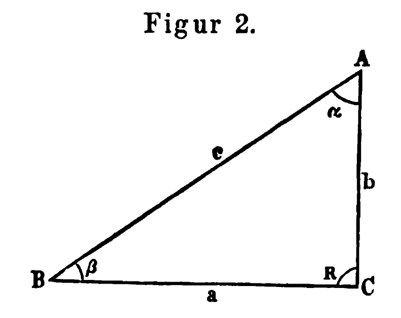
$\frac{ab}{ac} = \frac{ab_,}{ac_,} = \frac{ab_{,,}}{ac_{,,}}$ .... oder:

$\frac{ac}{bc} = \frac{ac_,}{b_,c_,} = \frac{a\,c_{,,}}{b_{,,}c_{,,}}$. Ist somit eines dieser Verhältnisse gegeben, so kann der Winkel α (und β) durch Konstruktion des rechtwinkligen Dreiecks gefunden werden und umgekehrt.

Anmerkung 1. Zur Feststellung der Grösse eines Winkels, mittelst des Verhältnisses **zweier** Strecken wird daher das **rechtwinklige** Dreieck benutzt.

Frage 8. Wie werden in der Trigonometrie die Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet?

Figur 2.



Antwort. In der Trigonometrie bezeichnet man die Bestimmungsstücke eines rechtwinkligen Dreiecks, wie folgt:

Die drei Seiten des rechtwinkligen Dreiecks bezeichnet man mit den kleinen Buchstaben: a, b und c, und zwar erhält die Hypotenuse stets den Buchstaben c; — ferner erhalten die Ecken und Winkel des Dreiecks zur Bezeichnung die Buchstaben: A, B und C, bezw. α, β und γ, — entsprechend der diesen Ecken, bezw. Winkeln gegenüberliegenden Seiten (siehe Figur 2).

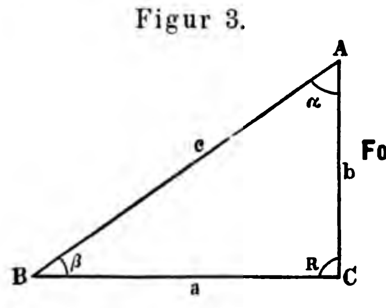
Frage 9. Welche **denkbare** Verhältnisse zweier Seiten im rechtwinkligen Dreiecke gibt es und welche besondere Namen führen dieselben in Bezug auf die Winkel des Dreiecks:

Antwort. In dem rechtwinkligen Dreiecke, Figur 3, gibt es **sechs** denkbare Verhältnisse zwischen 2 Seiten; — dieselben führen in Bezug auf die Winkel des Dreiecks, folgende Namen:

1) Das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse nennt man den **Sinus** des dieser Kathete **gegenüberliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel I. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; ebenso: $\sin\beta = \frac{b}{c}$

Figur 3.



2) Das Verhältnis einer Kathete zur Hypotenuse nennt man den **Kosinus** des dieser Kathete **anliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel II. $\cos\alpha = \frac{b}{c}$; ebenso: $\cos\beta = \frac{a}{c}$

3) Das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete nennt man die **Kosekante** des dieser Kathete **gegenüberliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel III. $\operatorname{cosec}\alpha = \frac{c}{a}$; ebenso: $\operatorname{cosec}\beta = \frac{c}{b}$

4) Das Verhältnis der Hypotenuse zu einer Kathete nennt man die **Sekante** des dieser Kathete **anliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel IV. $\sec\alpha = \frac{c}{b}$; ebenso: $\sec\beta = \frac{c}{a}$

5) Das Verhältnis einer Kathete zur anderen nennt man die **Tangente** (trigonometrische Tangente) des **der ersteren Kathete gegenüberliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel V. $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$; ebenso: $tg\,\beta = \frac{b}{a}$

6) Das Verhältnis einer Kathete zur anderen nennt man die **Kotangente** des der ersteren Kathete **anliegenden** spitzen Winkels, in Zeichen:

Formel VI. $ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$; ebenso: $ctg\,\beta = \frac{a}{b}$

Frage 10. Was versteht man unter **Funktion** im allgemeinen, was unter den **goniometrischen-** oder **trigonometrischen-** oder **Winkelfunktionen?**

Antwort. Unter **Funktion** im allgemeinen versteht man jede veränderliche Grösse, welche von einer andern veränderlichen Grösse auf irgend eine Weise abhängig ist. So ist die Grösse der Winkel im rechtwinkligen Dreiecke abhängig von dem Verhältnisse zweier Seiten und umgekehrt. Die Winkel sind mithin Funktionen der Verhältnisse zweier Seiten; man nennt daher die in obiger Antwort angeführten Verhältnisse **trigonometrische-** oder **goniometrische-** oder **Winkelfunktionen.**

Anmerkung 2. Von den in der Antwort der Frage 9 angeführten sechs Winkelfunktionen sind die 4 unter Formel I., II., V. und VI., nämlich: *Sinus, Kosinus, Tangente* und *Kotangente*, als von **besonderer Wichtigkeit**, dem **Gedächtnisse einzuprägen**, während die beiden anderen, unter Formel III. und IV., nämlich *Kosekante* und *Sekante*, von geringerer Bedeutung sind und vernachlässigt werden können.

Anmerkung 3. Bei näherer Betrachtung der Formeln I. bis VI. ergibt sich, dass:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$$

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} = ctg\,\beta$$

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} = tg\,\beta$$

ist, d. h. — da: $\alpha + \beta = 90^0$ ist —

Satz 1. Jede trigonometrische Funktion eines Winkels ist gleich der Kofunktion seines Komplementwinkels, und umgekehrt — (siehe Anmerkung 4) —

in Zeichen:

$$\sin\alpha = \cos(90 - \alpha)$$
$$\cos\alpha = \sin(90 - \alpha)$$
$$tg\,\alpha = ctg\,(90 - \alpha)$$
$$ctg\,\alpha = tg\,(90 - \alpha)$$

Dann ergibt sich, aus:

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{und:} \quad tg\,\alpha = \frac{a}{b}$$

Satz 2. Die Tangente eines Winkels ist gleich dem reciproken (umgekehrten) Werte der Kotangente desselben Winkels, und umgekehrt — (siehe Anmerkung 5) —

in Zeichen:

Formel VII. $$tg\,\alpha = \frac{1}{ctg\,\alpha}$$

" VIII. $$ctg\,\alpha = \frac{1}{tg\,\alpha}$$

Ferner ergibt sich, aus:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}; \quad \sec\alpha = \frac{c}{b} \quad \text{und}$$

Anmerkung 4. Nebenstehender Satz 1 findet eine praktische Verwertung in den logarithmisch trigonometrischen Tafeln, indem in denselben nur die Logarithmen der trig. Funktionen bis zu 45° angegeben sind, weil für die übrigen Winkel bis zu 90° die Kofunktionen der Komplementwinkel gesetzt werden können, z. B.:

$$\sin 60^0 = \cos 30^0$$
$$\log ctg\, 57^0 = \log tg\, 33^0$$

u. s. f.

Anmerkung 5. Nebenstehender Satz 2 findet Anwendung, wenn im Nenner eines Bruches die *tg* (oder *ctg*) eines Winkels vorkommt; indem man alsdann in den Zähler dieses Bruches die *ctg* (oder *tg*) desselben Winkels setzen kann, wodurch die vorherige Division in Multiplikation übergeführt wird.

$sin\, \alpha = \frac{a}{c}$; $cosec\, \alpha = \frac{c}{a}$, der

Satz 3. Die Sekante eines Winkels ist gleich dem reciproken Werte des Kosinus desselben Winkels, und die Kosekante eines Winkels ist gleich dem reciproken Werte des Sinus desselben Winkels — in Zeichen:

$$sec\, \alpha = \frac{1}{cos\, \alpha} \text{ und}$$

$$cosec\, \alpha = \frac{1}{sin\, \alpha}$$

Anmerkung 6. Die 4 Haupt-Winkel-Funktionen: *Sinus*, *Kosinus*, *Tangente* und *Kotangente* genügen zur nachstehenden vollständigen Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks.

Die Goniometrie ist in späteren Heften — als ein besonderes Kapitel — behandelt.

II.

Die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks — allgemeine Aufgaben über die 4 möglichen Fälle.

Frage 11. Wie viele und welche Hauptfälle können bei der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks vorkommen?

Figur 4.

A α c b B β R C a

Antwort. Bei der Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks, Figur 4, können folgende 4 Hauptfälle vorkommen:

1) es kann gegeben sein: a und b (zwei Katheten);

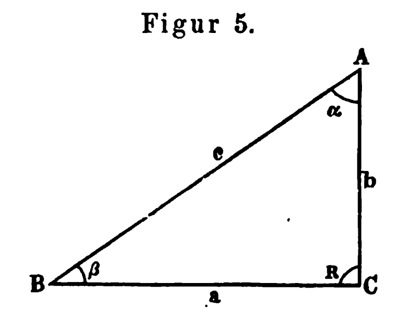
2) " " " " a und c, oder b und c (eine Kathete u. die Hypotenuse);

3) " " " " a und α, oder b und α (eine Kathete u. ein spitz. Winkel);

4) " " " " c und α, oder c und β (die Hypotenuse u. 1 spitzer Winkel).

Anmerkung 7. Zur raschen Berechnung ist den Studierenden zu empfehlen, sich nach und nach nebenstehende Folgerungen einzuprägen:

Figur 5.



Folgerungen.

Aus: $sin\ \alpha = \frac{a}{c}$, folgt:

$a = c \,.\, sin\ \alpha$ . . . d. h. 1) Eine Kathete ist gleich der Hypotenuse mal dem *Sinus* des dieser Kathete gegenüberliegenden spitzen Winkels.

und:

$c = \frac{a}{sin\ \alpha}$ . . . . d. h. 2) Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete dividiert durch den *Sinus* des dieser Kathete gegenüberliegenden spitzen Winkels.

Aus: $cos\ \alpha = \frac{b}{c}$, folgt:

$b = c \,.\, cos\ \alpha$ . . . d. h. 3) Eine Kathete ist gleich der Hypotenuse mal dem *Kosinus* des dieser Kathete anliegenden spitzen Winkels.

und:

$c = \frac{b}{cos\ \alpha}$ . . . . d. h. 4) Die Hypotenuse ist gleich einer Kathete, dividiert durch den *Kosinus* des dieser Kathete anliegenden spitzen Winkels.

Aus: $tg\ \alpha = \frac{a}{b}$, folgt:

$a = b \,.\, tg\ \alpha$ . . . d. h. 5) Eine Kathete ist gleich der anderen Kathete, mal der *Tangente* des der ersteren gegenüberliegenden Winkels.

Aus: $ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$, folgt:

$b = a \,.\, ctg\ \alpha$ . . . d. h. 6) Eine Kathete ist gleich der anderen Kathete, mal der *Kotangente* des der letzteren gegenüberliegenden Winkels.

Anmerkung 8. Im nachfolgenden sind die 4 möglichen Fälle über das rechtwinklige Dreieck in Form von allgemeinen Aufgaben behandelt.

1ter Fall.

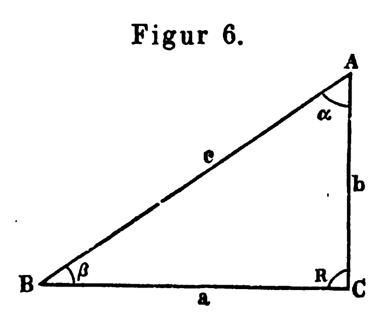
Aufgabe 1. Die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sind gegeben; wie gross sind die übrigen Stücke desselben?

Formel: $tg\ \alpha = \frac{a}{b}$

" $ctg\ \alpha = \frac{b}{a}$

Gegeben: a und b.
Gesucht: α, β, c und F (Flächeninhalt).

Figur 6.



Erkl. 3. Bei allen Berechnungen ist es Grundsatz, sich so oft wie möglich, „Kontrolle" für die Richtigkeit dieser Berechnungen zu verschaffen; dazu ist erforderlich, dass die einzelnen Stücke unabhängig von einander berechnet werden.

Erkl. 4. Der pythagoräische Lehrsatz heisst: „Das Quadrat über der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich der Summe der Quadrate über den beiden Katheten."

Erkl. 5. Die Formel zur Berechnung des Flächeninhalts eines Dreiecks, ist: Grundlinie (eine beliebige Seite) mal der zugehörigen Höhe, geteilt durch 2.

Wird im rechtwinkligen Dreiecke die eine Kathete als Grundlinie angenommen, so ist die andere Kathete die zugehörige Höhe.

Auflösung.

Um die gesuchten Stücke berechnen zu können, müssen sie mit den gegebenen Stücken in irgend welche Beziehung gebracht werden.

Zur Berechnung des Winkels α, mit Hülfe der beiden Katheten a und b, kann man obige goniometrische Relationen:

$$tg\,\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{oder:} \quad ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

benutzen.

Aus jeder dieser Gleichungen lässt sich Winkel α direkt berechnen.

Den Winkel β kann man auf 2 Arten bestimmen; entweder durch Abzug, weil

$\alpha + \beta = R$, mithin

$\beta = R - \alpha$ ist und Winkel α bereits gefunden wurde; oder durch direkte Berechnung, indem, mit Benutzung obiger goniometrischer Relationen:

$$tg\,\beta = \frac{b}{a} \quad \text{oder:} \quad ctg\,\beta = \frac{a}{b}$$

gesetzt werden kann. Hieraus kann man β, unabhängig von α, berechnen (Erkl. 3). Im letzteren Falle besteht eine Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung darin, dass die gefundenen Werte für α und β zusammen 90° betragen müssen.

Die Hypotenuse c kann man auf einfachem geometrischem Wege, mittelst des pythagoräischen Lehrsatzes (Erkl. 4) berechnen, hiernach ist:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Endlich ist der Flächeninhalt des Dreiecks nach Erkl. 5:

Formel IX. . . . . . $F = \frac{a.b}{2}$

2ter Fall.

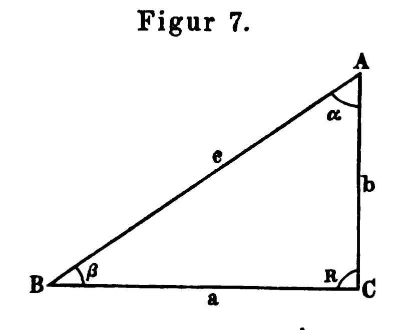
Aufgabe 2. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse und eine der Katheten bekannt; wie gross sind die sämmtlichen übrigen Stücke des Dreiecks?

Formel: $sin\,\alpha = \frac{a}{c}$

" $cos\,\alpha = \frac{b}{c}$

Gegeben: a und c (oder c und b).
Gesucht: α, β, b und F (Flächeninhalt).

Figur 7.



Erkl. 6. Die Grösse des Winkels α ist nur dann eine bestimmte, d. h. kann nur dann wirklich berechnet werden, wenn für a und b Zahlen gegeben sind.

Erkl. 7. Die spitzen Winkel im rechtwinkligen Dreiecke ergänzen sich zu 90°.

Erkl. 8. Aus dem pythagoräischen Lehrsatze ergibt sich der Satz:
„Das Quadrat über einer Kathete ist gleich dem Quadrate über der Hypotenuse minus dem Quadrate über der anderen Kathete.

Erkl. 9. Das negative Vorzeichen der Wurzel wurde, als der Kathete nicht entsprechend, weggelassen.

Erkl. 10. Die Differenz zweier Quadrate kann in ein Produkt verwandelt werden, dessen einer Faktor die Summe und dessen anderer Faktor die Differenz der Basen jener Quadrate ist.

Auflösung.

Die gesuchten Stücke des Dreiecks müssen in irgend welche Beziehung zu den gegebenen Stücken gebracht werden; dies kann bezüglich der gesuchten Winkel mittelst goniometrischen, bezüglich der gesuchten Kathete und des gesuchten Flächeninhalts mittelst geometrischen Gleichungen geschehen.

Für die Berechnung des Winkels α hat man die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

aus welcher Gleichung die Grösse des Winkels α berechnet werden kann (Erkl. 6).

Den Winkel β kann man wiederum auf 2 Arten bestimmen:

a) durch Abzug des bereits gefundenen Winkels α von 90° (Erkl. 7), oder

b) durch Aufstellung der goniometrischen Gleichung:

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

Letztere Art der Berechnung ist vorzuziehen, da hierdurch für die Richtigkeit der Berechnung der Winkel α und β die Kontrolle besteht, dass

$$\alpha + \beta = 90^0$$

sein muss.

Ferner kann man die Kathete b auf einfachem geometrischem Wege mittelst eines Zusatzes (Erkl. 8) des pythagoräischen Lehrsatzes finden; nach demselben ist: $b^2 = c^2 - a^2$

hieraus findet man für b:

$$b = \sqrt{c^2 - a^2} \text{ (Erkl. 9)}$$

oder:

$$b = \sqrt{(c+a)\,(c-a)} \text{ (Erkl. 10)}$$

Dieser letzte Ausdruck für die Kathete b ist besonders beim Ausrechnen von Zahlenbeispielen zu empfehlen.

Um endlich eine Inhaltsformel für das rechtwinklige Dreieck herzustellen, welche nur die gegebenen Stücke enthält, beachte man, dass nach dem 1. Falle

$$F = \frac{a \cdot b}{2}$$

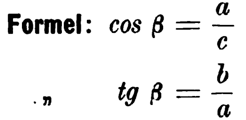
ist. Setzt man in diese Gleichung den

soeben für b gefundenen Wert ein, so ist die gesuchte Inhaltsformel:

Formel X. . . . $F = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{(c+a)(c-a)}$

3ter Fall.

Aufgabe 3. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist eine Kathete a und ein spitzer Winkel β gegeben; wie gross sind die sämmtlichen übrigen Stücke des Dreiecks?



Formel: $\cos\beta = \frac{a}{c}$

„ $tg\,\beta = \frac{b}{a}$

Gegeben: a und β.
Gesucht: α, b, c und F (Inhalt)

Auflösung.

Mit Kenntnis obenstehender goniometrischer Relationen können Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken des Dreiecks aufgestellt werden.

Den Winkel α findet man einfach durch Abzug des gegebenen Winkels β von 90^0.

Für die gesuchte Kathete b hat man die Relation:

$$tg\,\beta = \frac{b}{a}$$

folglich: $b = a \, . \, tg\,\beta$ (Folger. 5. Seite 7).

Zur Bestimmung der Hypotenuse c kann man die Relation:

$$\cos\beta = \frac{a}{c} \text{ benutzen,}$$

indem hieraus folgt:

$$c = \frac{a}{\cos\beta} \text{ (Folgerung 4).}$$

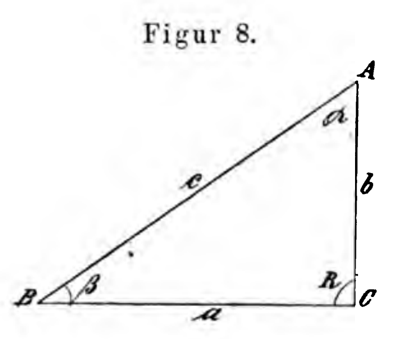
Eine Kontrolle für die Richtigkeit der Berechnung von b und c besteht darin, dass

$$a^2 = c^2 - b^2 \text{ sein muss.}$$

Um schliesslich noch eine Flächeninhaltsformel aus den gegebenen Stücken für das rechtwinklige Dreieck abzuleiten, muss man beachten, dass

$$F = \frac{a \, . \, b}{2} \text{ (Erkl. 5) ist.}$$

Figur 8.



Nun ist die Kathete b in der Aufgabe nicht gegeben; für dieselbe kann aber, wie vorhin angegeben, der Wert $a \,.\, tg\,\beta$ substituiert werden, wonach:

$$F = \frac{a \,.\, a \,.\, tg\,\beta}{2} \quad \text{oder:}$$

Formel XI. . . . . $F = \frac{a^2}{2} \,.\, tg\,\beta$

gefunden wird.

4ter Fall.

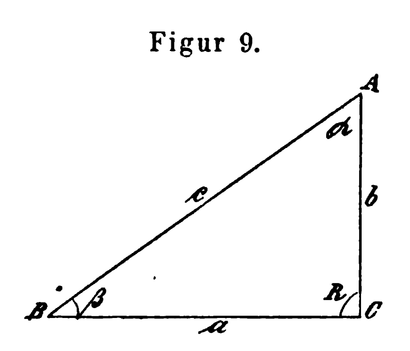
Aufgabe 4. Von einem rechtwinkligen Dreiecke ist die Hypotenuse c und der spitze Winkel α gegeben; die sämmtlichen übrigen Stücke des Dreiecks sind zu suchen.

Formel: $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

" $\cos\alpha = \frac{b}{c}$

Gegeben: c und α.
Gesucht: β, a, b und F (Flächeninhalt).

Figur 9.



Auflösung.

Zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken des rechtwinkligen Dreiecks ABC, Figur 9, kann man mit Hülfe obiger trigonometrischer Relationen Beziehungen herstellen aus welchen die gesuchten Stücke gefunden werden können.

Der gesuchte Winkel β kann einfach durch Abzug gefunden werden, da

$$\beta = 90^\circ - \alpha \text{ ist.}$$

Zur Auffindung der Kathete a besteht die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

hieraus findet man:

$$a = c \,.\, \sin\alpha \text{ (Folgerung 1. Seite 7).}$$

Ferner kann man die Kathete b auf zwei Arten bestimmen, entweder geometrisch mit Hülfe der bereits berechneten Kathete a, aus:

$$b^2 = c^2 - a^2$$

oder trigonometrisch aus der Gleichung:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \text{ oder aus:}$$

$$b = c \,.\, \cos\alpha \text{ (Folgerung 3).}$$

Schliesslich ist die Formel für den Inhalt des rechtwinkligen Dreiecks, nach Erkl. 5:

$$F = \frac{a \cdot b}{2}$$

Erkl. 11. Für den *Sinus* eines doppelten Winkels kann das doppelte Produkt aus dem *Sinuse* und dem *Kosinuse* des einfachen Winkels gesetzt werden, in Zeichen:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

Diese Formel gehört in das Gebiet der Goniometrie und wird in den Heften, welche hierüber handeln, bewiesen.

In dieser Formel sind aber die beiden Katheten a und b nicht gegeben; dieselben müssen zunächst in die gegebenen Stücke ausgedrückt werden. Für a und b wurde bereits gefunden:

$$a = c \cdot \sin\alpha; \text{ und: } b = c \cdot \cos\alpha$$

Diese Werte für a und b substituiert, gibt:

$$F = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot c \cdot \cos\alpha}{2} = \frac{c^2 \sin\alpha \cos\alpha}{2}$$

oder nach der in Erkl. 11 stehenden goniometrischen Hülfsformel, ist:

Formel XII. . . . . $F = \frac{c^2 \sin 2\alpha}{2 \cdot 2} = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha$

wenn vorher Zähler und Nenner mit 2 multipliziert wurde.

III.
Praktische Aufgaben.

Aufgabe 5. Ein Turm von 36,83 m. Höhe wirft einen Schatten von 25,72 m. Länge; welchen Winkel bilden in diesem Augenblicke die Sonnenstrahlen mit der Erdoberfläche?

Figur 10.

Erkl. 12. Nach der täglichen scheinbaren Bewegung der Sonne scheint sich dieselbe von morgens bis mittags über den Horizont zu erheben, von mittags bis abends nach demselben wieder zu senken.

Eine Folge dieser scheinbaren Bewegung

Formel: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

" $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

Gegeben: $a = 36{,}83$ m.
$b = 25{,}72$ m.
Gesucht: Winkel $\alpha = x$.

Auflösung.

Die Sonnenstrahlen können wegen der grossen Entfernung der Sonne von der Erde als **„unter sich parallele Linien“** betrachtet werden; — ist daher der Winkel gefunden, welchen einer dieser Strahlen in dem Augenblicke (Erkl. 12) mit der Erdoberfläche bildet, in welchem die Schattenlänge des Turmes gleich der gegebenen ist, so ist hiermit vorstehende Aufgabe gelöst.

der Sonne [in Wirklichkeit macht die Erde diese Bewegung] ist, dass die Sonnenstrahlen in jedem Augenblicke unter einem andern Winkel die Erdoberfläche treffen, dass sich mithin auch die Schattenlängen hoher (aller) Gegenstände in jedem Augenblicke ändern; und zwar, von morgens bis mittags ab-, von mittags bis abends zunehmend.

Erkl. 13. Wird durch eine Linie, welche senkrecht zu einer Ebene steht (z. B. durch die Höhe des Turmes, welche senkrecht zur Oberfläche der Erde ist) eine zweite Ebene gelegt, so steht diese Ebene senkrecht auf der ersten Ebene.

Erkl. 14. Zur Bestimmung des Winkels $\alpha = x$ hätte man auch die Gleichung:

$$ctg\,\alpha = \frac{b}{a}$$

benutzen können; da jedoch in der logarithmischen Berechnung des Zahlenbeispiels die „partes proportionales“ bei den sogenannten „Kofunktionen“ *(Kosinus* und *Kotangente)* subtrahiert werden müssen (siehe die Hefte, welche über Logarithmen und Goniometrie handeln), dies oft umständlich ist, so wird gewöhnlich die *Tangente,* bezw. der *Sinus* zur Berechnung verwendet.

Erkl. 15. Die Gleichungen in welchen unbekannte Winkel vorkommen, werden „goniometrische Gleichungen“ genannt.

Ferner ist der in Betracht kommende Teil der Erdoberfläche, im Verhältnis zu der ganzen sphärischen Oberfläche der Erde, so klein, dass derselbe als eine **ebene Fläche** angenommen werden kann.

Unter diesen Voraussetzungen muss eine Ebene, welche man durch die Höhe (Achse) des Turmes und durch die Längsrichtung dessen Schattens gelegt denkt, das rechtwinklige Dreieck ABC, Fig. 10, enthalten (Erkl. 13), dessen eine Kathete BC die Höhe $a = 36{,}83^{m.}$ des Turmes, dessen andere Kathete AC die Länge $b = 25{,}72^{m.}$ des Schattens und dessen Hypotenuse AB ein durch den höchsten Punkt des Turmes gehender Sonnenstrahl ist.

Zur Bestimmung des Winkels $\alpha = x$, welchen der Sonnenstrahl SA mit der Erdoberfläche AC bildet, hat man in dem rechtwinkligen Dreiecke ABC die Relation:

$$tg\,x = \frac{a}{b} \text{ (Erkl. 14).}$$

Substituiert man in diese goniometrische Gleichung (Erkl. 15) für a und b die gegebenen Zahlenwerte, so ist:

$$tg\,x = \frac{36{,}83}{25{,}72}$$

Aus dieser Gleichung muss man nun den unbekannten Winkel x auf logarithmischem Wege, wie folgt, berechnen:

$$log\,tg\,x = log\,36{,}83 - log\,25{,}72$$

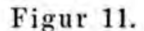
Nun ist: $log\,36{,}83 = 1{,}5662017$
$- log\,25{,}72 = -1{,}4102710$

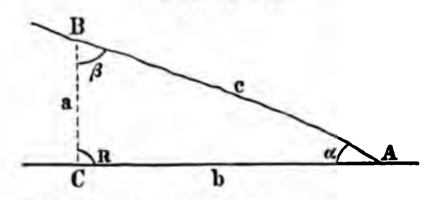
mithin: $log\,tg\,x = 0{,}1559307$

		8940
folglich:	$x = 55^{0}4'10''$	367
	$+8''$	359,2
	$+0{,}2''$	7,8
	$x = 55^{0}4'18{,}2''$	8,9

In dem Augenblicke in welchem die Schattenlänge des Turmes gleich der gegebenen ist, bilden also die Sonnenstrahlen mit der Erdoberfläche einen Winkel von $55^{0}4'18{,}2''$.

Aufgabe 6. Eine Chaussee hat 8,5 % (Prozent) Steigung; wie gross ist ihr Neigungswinkel?


Figur 11.



Formel: $tg\,\alpha = \frac{a}{b}$

Gegeben: $b : a = 100 : 8{,}5$.
Gesucht: Winkel $\alpha = x$.

Auflösung.

Unter dem Neigungswinkel der Chaussee (Strasse) versteht man den Neigungswinkel, welchen die Ebene der Chaussee mit der Horizontalebene (Erklärung 16) bildet.

Wird durch die Achse der Chaussee eine zur Horizontalebene senkrechte Ebene — eine sogenannte Vertikalebene — gelegt gedacht, so schliessen die Durchschnittslinien AB und AC, Figur 11, welche diese Vertikalebene mit der Ebene der Chaussee und der Horizontalebene bildet, den Neigungswinkel α beider Ebenen (Erkl. 17), mithin auch den gesuchten Neigungswinkel ($\alpha = x$) der Chaussee ein.

Die Grösse dieses, vorstehend definierten, Neigungswinkels der Chaussee ist abhängig von der Steigung derselben.

Die Steigung der Chaussee soll 8,5 % (Prozent) betragen; d. h. ist die horizontale Projektion (Erkl. 18) $AC (= b)$ eines Stückes AB der Chausseeachse $= 100$ irgend welchen Längeneinheiten, so soll der Punkt B dieser Achse um 8,5 derselben Längeneinheiten höher, als der Punkt A der Achse liegen, es soll also $BC = a = 8{,}5$ von den angenommenen Längeneinheiten sein.

In dem rechtwinkligen Dreiecke ABC besteht nach Vorstehendem zur Auffindung des Winkels $\alpha = x$, die Relation:

$$tg\, x = \frac{a}{b}$$

Die Grösse a in dieser goniometrischen Gleichung bedeutet die Erhebung des Punktes B über die Horizontale AC und ist $= 8{,}5$; die Grösse b bedeutet die Projektion des Stückes AB der Strassenachse und ist $= 100$ (welche Längeneinheiten $a = 8{,}5$ und $b = 100$

Erkl. 16. Die Horizontalebene ist diejenige Ebene, welche senkrecht zur Richtung der Schwerkraft gedacht wird.

Ein stillstehendes Wasser bildet mit seiner Oberfläche eine horizontale Ebene; daher der Gebrauch der Libellen, Wasserwagen, zur Herstellung horizontaler Ebenen.

Erkl. 17. Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen ist der Winkel zu verstehen, welchen die 2 Linien mit einander bilden, die in einem beliebigen Punkte der Durchschnittslinie beider Ebenen errichtet werden; und zwar so, dass die eine dieser Senkrechten in die eine Ebene, die andere aber in die zweite Ebene zu liegen kommt.

Erkl. 18. Die Projektion einer Strecke auf eine Ebene ist die Verbindungslinie der Fusspunkte der Perpendikel, welche von den Endpunkten der Strecke auf diese Ebene gefällt werden.

In Figur 11 fällt der Fusspunkt des Perpendikels von A mit dem Punkte A zusammen.

Erkl. 19. Die trig. Tangente eines Winkels ist durch das Verhältnis der beiden Katheten gegeben; welche Längeneinheiten diesem Verhältnisse zu Grunde liegen, hat auf die Grösse des Winkels keinen Einfluss.

beigelegt werden, ist für die Ausrechnung gleichgültig. Erkl. 19.)

Substituiert man diese Zahlenwerte in vorstehende Gleichung, so wird:

$$tg\, x = \frac{8,5}{100}$$

oder:

$$tg\, x = 0,085$$

Dies logarithmisch berechnet, gibt zunächst:

$$log\, tg\, x = log\, 0,085$$

Nun ist:

$$log\, 0,085 = 0,9294189 - 2 \text{ (Erkl. 20)},$$

mithin:

$$log\, tg\, x = 0,9294189 - 2 + 10 \text{ (Erkl. 21)}$$

oder:

$$\left.\begin{array}{r} log\, tg\, x = 8,9294189 \\ x = 4^{0}51'30'' \quad 4073 \end{array}\right\} \text{Diff. } 2494$$

$$\overline{\quad 116}$$

aus der Proportion (Erkl. 22):

$$10'' : y'' = 2494 : 116$$

findet man für $y = 0,46''$

hiernach ergibt sich:

$$x = 4^{0}51'30''$$
$$\underline{+\; 0,46'' (= y)}$$

oder: $x = 4^{0}51'30,46''$

Sonach ist die Neigung einer jeden Chaussee, welche 8,5 % Steigung hat $= 4^{0}51'30,46''$

Erkl. 20. Der Logarithmus eines Decimalbruchs mit 0 Ganzen, hat zur Kennziffer soviele negative Einheiten, als direkt vor und hinter dem Komma Nullen stehen.

Erkl. 21. Die Logarithmen der trig. Funktionen der Winkel sind in den Logarithmentafeln um 10 Einheiten zu gross angegeben; es mussten also an dieser Stelle der Auflösung, um den Logarithmus der trig. Funktion des Winkels x finden zu können, auf der rechten Seite der Gleichung 10 Einheiten zuaddiert werden.

Erkl. 22. Bei kleinem Wachstum von Zahlen, bezw. von Winkel, kann angenommen werden, dass die Logarithmen dieser Zahlen, bezw. die Logarithmen der trig. Funktionen dieser Winkel, proportional denselben wachsen, was in der Proportion (siehe diese Stelle der Auflösung) ausgesprochen ist.

Anmerkung 9. Die Steigung einer Chaussee darf für den bequemen Verkehr, höchstens 5 % betragen. Vorstehendes Beispiel ist mithin ein Ausnahmefall.

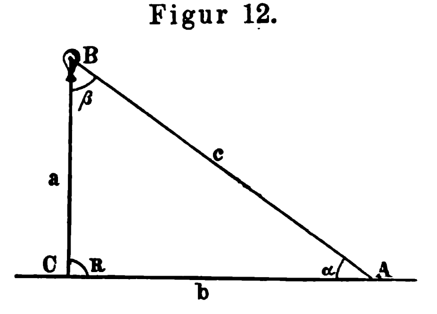
IV.
Anhang ungelöster Aufgaben.

Aufgabe 1. Wie weit ist ein Luftballon entfernt, wenn derselbe unter einem Elevationswinkel α von 42°19′8,5″ erscheint und in demselben Augenblicke eine Entfernung $a = 2267{,}02^{meter}$ von der Erde hat?

Andeut. $\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $c = \frac{a}{\sin\alpha}$

Resultat. $c = 3367{,}237^{meter.}$

Figur 12.

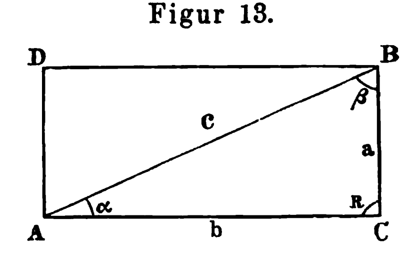


Aufgabe 2. Den Inhalt eines Rechtecks aus seiner Seite a und dem Winkel β, welchen diese Seite mit einer Diagonale bildet, zu bestimmen, wenn $a = 162{,}63^{m.}$ und $\beta = 65°43'40''$ ist.

Andeut. $F = \triangle ABC + \triangle ABD = 2.\triangle ABC$
$F = 2.\frac{1}{2}a^2 \, tg\,\beta$ (siehe Aufgabe 3, Formel XI.)

Resultat. $F = 58652{,}78$ □meter.

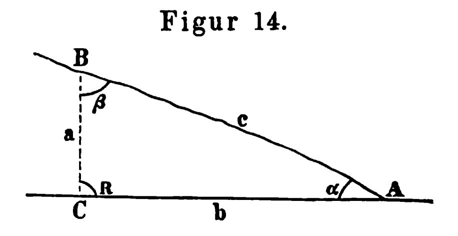
Figur 13.



Aufgabe 3. Wie hoch ist ein Berg, wenn ein ebener Weg c, welcher vom Fusspunkte bis zur Spitze desselben unter einem Neigungswinkel α von 8° 46′38″ führt, gleich $18129{,}27^{meter}$ gemessen wurde?

Resultat. $a = 2766{,}4^{meter.}$

Figur 14.



Ferner:

Aufgabe 4. Aus den Seiten $a = 393^{m.}$ und $b = 479^{m.}$ eines Rechtecks die Winkel zu berechnen, welche dieselben mit einer Diagonale bilden.

Aufgabe 5. Die Diagonalen einer Raute sind $0{,}623^{m.}$ und $0{,}0897^{m.}$; wie gross sind die Winkel dieser Raute?

Aufgabe 6. Man soll den Winkel berechnen, welchen 2 Tangenten eines Kreises mit einander bilden, und zwar wenn gegeben ist: die Entfernung c ihres Durchschnittes vom Mittelpunkte mit $c = 40^{m.}$ und der Radius r des Kreises $= 2{,}698^{m.}$

Aufgabe 7. Von einem Parallelogramme kennt man den Flächeninhalt $F = 20000$ □m., ferner ist eine Seite $a = 200^{m.}$ und ein Winkel $= 40°30'15{,}5''$; wie gross ist die andere Seite des ▱grs?

Aufgabe 8. Man soll die Höhe eines auf einer Ebene stehenden Turmes finden, welcher in einer Entfernung von $700^{m.}$ unter einem Winkel von 13°35″ erscheint.

Heft 23. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 16.)
„ 24. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 14.)
„ 25. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 22.)
„ 26. **Die Reihen.** (Forts. von Heft 17.)
„ 27. **Ebene Trigonometrie.** (Forts. von Heft 15.)
„ 28. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 25.)
„ 29. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 24.)
„ 30. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 6.)
„ 31. **Statik; oder die Lehre vom Gleichgewicht fester Körper.**
„ 32. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 28.)
„ 33. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 29.)
„ 34. **Goniometrie.**
„ 35. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 23.)
„ 36. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 32.)
„ 37. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 30.)
„ 38. **Statik.** (Forts. von Heft 31.)
„ 39. } **Das Apollonische Berührungs-**
„ 40. } **Problem.** (Forts. v. Heft 33.)
„ 41. **Potenzen und Wurzeln.**
„ 42. **Logarithmen.**
„ 43. **Goniometrie.** (Forts. von Heft 34).
„ 44. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.**
„ 45. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 41.)
„ 46. **Logarithmen.** (Forts. von Heft 42.)
„ 47. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 36.)
„ 48. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 37.)
„ 49. **Statik.** (Forts. von Heft 38.)
„ 50. **Zinseszinsrechnung.** (Forts. von Heft 35.)
„ 51. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 45.)
„ 52. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 46.)
„ 53. **Das Apollonische Berührungs-Problem.** (Forts. von Heft 40.)

Heft 54. **Gleichungen vom 1. Grade mit einer Unbekannten.** (Forts. von Heft 44.)
„ 55. **Goniometrie.** (Forts. v. Heft 43.)
„ 56. **Potenzen und Wurzeln.** (Forts. von Heft 51.)
„ 57. **Logarithmen.** (Forts. v. Heft 52.)
„ 58. **Die regulären Polyeder.** (Forts. von Heft 47.)
„ 59. **Differential-Rechnung.** (Forts. von Heft 48.)
„ 60. **Goniometrie.** (Forts. v. Heft 55.)
„ 61. **Die Potenzen.** — Faktorenzerlegung etc. — (Forts. von Heft 56.)
„ 62. **Die Potenzen.** — Faktorenzerlegung etc. — (Forts. von Heft 61.)
„ 63. **Die Potenzen.** Reduktionen mittelst Heben. (Forts. von Heft 62.)
„ 64. **Die Potenzen.** Reduktionen mittelst Vereinigung von Brüchen. — (Forts. von Heft 63.)
„ 65. **Die Potenzen.** Das Potenzieren mit der Zahl Null und mit negativen Exponenten. (Forts. von Heft 64.)
„ 66. **Die Potenzen.** (Forts. v. Heft 65.)
„ 67. **Die Potenzen.** Anhänge u. Schluss der Potenzen.
„ 68. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 57.)
„ 69. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 68.)
„ 70. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 69.)
„ 71. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 70.)
„ 72. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 71.)
„ 73. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 72).
„ 74. **Die Logarithmentafeln.**
„ 75. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 73.)
„ 76. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 75.)
„ 77. **Die Logarithmen.** (Forts. von Heft 76.)
„ 78. **Die Logarithmentafeln.** (Forts. von Heft 74.)
„ 79. **Die Logarithmentafeln.** (Forts. von Heft 78.)
„ 80. **Die Logarithmen.** (Forts. und Schluss von Heft 77.)
u. s. f. u. s. f.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

15. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie. 2. Teil.
Seite 17—32.
Das gleichschenkl. Dreieck.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken-** u. **Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.
2. Teil. — Seite 17—32.

Das gleichschenklige Dreieck.

Inhalt:
Erläuternde Fragen mit Antworten über die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. — Aufgaben über die fünf möglichen Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart 1884.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vorläufige Inhaltsverzeichnis der Hefte 101—160 befindet sich auf der Rückseite.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — **nach** besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord.**, **gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen**, techn. **Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, August 1883. **Die Verlagshandlung.**

2. Teil.

Das gleichschenklige Dreieck.

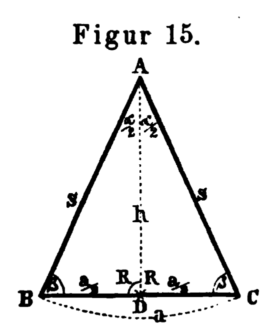
Inhalt:

I.

Erläuternde Fragen mit Antworten über die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks.

Frage 1. Auf welche Weise wird in der ebenen Trigonometrie ein **gleichschenkliges** Dreieck berechnet?

Figur 15.



Antwort. Die Berechnung eines **gleichschenkligen** Dreiecks wird auf die Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks (siehe 1. Teil) zurückgeführt; indem man, Figur 15, die zur Grundlinie BC $(= a)$ gehörige Höhe AD $(= h)$ fällt, wodurch — nach einem planimetrischen Satze — das gleichschenklige Dreieck ABC in die zwei **kongruenten rechtwinkligen** Dreiecke ABD und ACD zerlegt wird.

Frage 2. Welche **Relationen** finden im gleichschenkligen Dreiecke zwischen dessen Bestimmungsstücken (Winkel α an der Spitze, Basiswinkel β, Basis a, Schenkel s und Höhe h) statt?

Antwort. Zwischen den Bestimmungsstücken: α, β, a, s und h eines gleichschenkligen Dreiecks, Figur 15, finden nach der Antwort der Frage 9, 1. Teil, folgende Relationen statt:

$$1). \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} : s = \frac{a}{2s} (= \cos\beta)$$

$$2). \ldots \cos\frac{\alpha}{2} = h : s = \frac{h}{s} (= \sin\beta)$$

$$3). \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} : h = \frac{a}{2h} (= \operatorname{ctg}\beta)$$

$$4). \ldots \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = h : \frac{a}{2} = \frac{2h}{a} (= \operatorname{tg}\beta)$$

ferner hat man:

5) . . . $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$

und

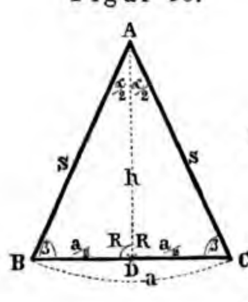
6) . . . $s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$

Frage 3. Welches sind die wichtigsten **Formeln**, die zur Berechnung des **Inhaltes** eines gleichschenkligen Dreiecks aus dessen Bestimmungsstücken: α, β, a, s und h dienen?

Antwort. Zur Berechnung des **Inhaltes** eines gleichschenkligen Dreiecks aus den Bestimmungsstücken α, β, a, s und h, dienen, je nachdem zwei dieser Bestimmungsstücke als **bekannt** vorausgesetzt werden dürfen, folgende Formeln:

Formel XIII. . . . $F = \frac{a \cdot h}{2}$ (siehe Formel IX, Seite 8)

Figur 16.



Nach dem pythagoräischen Lehrsatze, ist: $h = \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$; diesen Wert für h in vorstehende Formel substituiert, gibt:

Formel XIV. . . . $F = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

Ferner ist nach dem pythagoräischen Lehrsatze: $\frac{a}{2} = \sqrt{s^2 - h^2}$; diesen Wert für $\frac{a}{2}$ in Formel XIII substituiert, gibt:

Formel XV. . . . $F = h\sqrt{s^2 - h^2}$

Will man den Inhalt in die Basis a und den Winkel α an der Spitze ausdrücken, so beachte man, dass:

$$h : \frac{a}{2} = ctg\,\frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$h = \frac{a}{2}\,ctg\,\frac{\alpha}{2} \text{ ist.}$$

Diesen Wert für h in Formel XIII substituiert, gibt:

$$F = \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}\,ctg\,\frac{\alpha}{2}$$

oder:

Formel XVI. . . . $F = \frac{a^2}{4}\,ctg\,\frac{\alpha}{2}$

(oder: $F = \frac{a^2}{4}\,tg\,\beta$, nach Satz I, Seite 5)

Will man ferner den Inhalt in die Höhe h und den Winkel α ausdrücken, so beachte man, dass:

$$\frac{a}{2} : h = tg\frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$\frac{a}{2} = h \cdot tg\frac{\alpha}{2} \text{ ist.}$$

Diesen Wert für $\frac{a}{2}$ in Formel XIII substituiert, gibt:

$$F = h \,.\, tg\frac{\alpha}{2} \cdot h$$

oder:

Formel XVII. . . . $F = h^2 \,.\, tg\frac{\alpha}{2}$

(oder: $F = h^2 \,.\, ctg\,\beta$ nach Satz I, Seite 5)

Will man schliesslich den Inhalt in den Schenkel s und den Winkel α ausdrücken, so beachte man, dass

1). . . . $\frac{a}{2} : s = sin\frac{\alpha}{2}$

oder:

$$a = 2 \,.\, s \,.\, sin\frac{\alpha}{2}$$

und

2). . . . $h : s = cos\frac{\alpha}{2}$

oder:

$$h = s \,.\, cos\frac{\alpha}{2} \text{ ist.}$$

Diese Werte für a und h in Formel XIII substituiert, gibt:

$$F = \frac{2 \cdot s \cdot sin\frac{\alpha}{2} \cdot s \cdot cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

oder:

$$F = \frac{s^2 \cdot 2 \cdot sin\frac{\alpha}{2}\, cos\frac{\alpha}{2}}{2}$$

oder nach Erkl. 1:

Formel XVIII. . . . $F = \dfrac{s^2 \cdot sin\,\alpha}{2}$

Da in dem gleichschenkligen Dreiecke, Figur 16, $\alpha + 2\beta = 180^\circ (= 2R)$ und nach einem goniometrischen Satze (Erkl. 2) der Sinus eines Winkels (α) gleich dem Sinus des Supplementwinkels (2β) ist, so geht auch Formel XVIII über, in:

$$F = \frac{s^2\, sin\, 2\beta}{2}$$

Erkl. 1. In dem 1. Teile, Erkl. 11, ist bereits eine goniometrische Hülfsformel angeführt, welche heisst:

$$sin\,2\alpha = 2\,sin\,\alpha\; cos\,\alpha$$

Setzt man hierin, für:

$$2\alpha = \beta, \text{ so ist}$$

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

und diese Formel geht über, in:

$$sin\,\beta = 2\,sin\frac{\beta}{2} \cdot cos\frac{\beta}{2}$$

(siehe die Teile, welche über Goniometrie handeln).

Erkl. 2. Der Sinus eines Winkels α ist gleich dem Sinus des Supplementwinkels: $180 - \alpha$ (siehe die Teile, welche über Goniometrie handeln).

Anmerkung 1. Die Formeln, welche in den Antworten der vorstehenden Fragen 2 und 3 angegeben sind, genügen zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks, brauchen jedoch dem Ge-

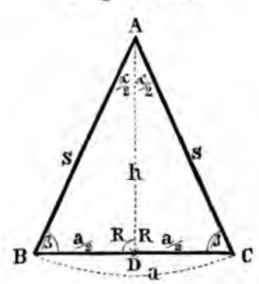
dächtnisse **nicht** anvertraut zu werden, da sich dieselben aus dem rechtwinkligen Dreiecke — wie vorgeführt — leicht ableiten lassen.

Frage 4. Welche Aufgaben werden auf die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks zurückgeführt?

Antwort. Auf die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks werden unter anderem die Aufgaben über die Berechnung der **regulären Polygone**, des Kreisab- und Kreisaus-Schnittes (Kreissegment und Kreissektor) und viele stereometrische und praktische Aufgaben zurückgeführt.

Frage 5. Wie viele und welche Hauptfälle können bei der Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks in Bezug auf die 4 Bestimmungsstücke a, s, α und β desselben vorkommen?

Figur 17.



Antwort. In Bezug auf die 4 Bestimmungsstücke: a, s, α und β, Fig. 17, eines gleichschenkligen Dreiecks, können bei Berechnung desselben, folgende fünf Fälle eintreten.

Es kann gegeben sein:

1). a und s

oder:

2). a „ α

oder:

3). a „ β

oder:

4). s „ α

und schliesslich:

5). s „ β.

Anmerkung 2. Im nachstehenden sind die 5 verschiedenen Fälle in Form von Aufgaben näher behandelt.

II.

Aufgaben über die fünf möglichen Fälle.

Aufgabe 1. Von einem gleichschenkligen Dreiecke sei die Basis $a = 648{,}72$ m und der Schenkel $s = 376{,}8$ m gegeben; wie gross sind die sämmtlichen übrigen Stücke dieses Dreiecks?

Formeln:

1). $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2s}$; $\cos\beta = \frac{a}{2s}$

2). $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0$

3). $F = \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$

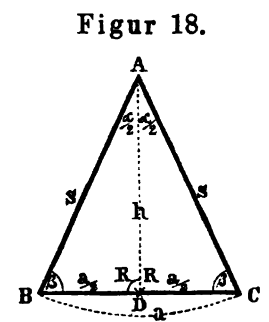
Gegeben: $a = 648{,}72\text{m}$
$s = 376{,}8\text{m}$
Gesucht: α, β und F.

Auflösung.

Fällt man die zur Basis gehörige Höhe AD, so hat man in jedem der kongruenten rechtwinkligen Dreiecken ABD und ACD, die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2s} \text{ (siehe Antwort, Frage 2)}$$

Figur 18.



oder: $$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{648{,}72}{2.376{,}8}$$

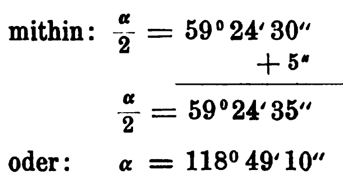
$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{324{,}36}{376{,}8}$$

Dies logarithmisch berechnet, gibt:

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = \log 324{,}36 - \log 376{,}8$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} & (+1) \qquad (-1) \\ \log 324{,}36 = & 2{,}5110273 \text{ (Erkl. 3)} \\ -\log 376{,}8 = & -2{,}5761109 \\ \hline & 0{,}9349164 - 1 \\ & +10 \qquad \text{(Erkl. 4)} \\ \hline \log\sin\frac{\alpha}{2} = & 9{,}9349164 \\ & 9104 \\ \hline & 60 \end{array}$$



mithin: $\frac{\alpha}{2} = 59^{\circ}\,24'\,30''$
$+\,5''$

$\frac{\alpha}{2} = 59^{\circ}\,24'\,35''$

oder: $\alpha = 118^{\circ}\,49'\,10''$

Da ferner:

$\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^{\circ}$, so ist:

$$\beta = 90^{\circ} - \frac{\alpha}{2} = 90^{\circ} - 59^{\circ}\,24'\,35''$$

oder: $\beta = 30^{\circ}\,35'\,25''$ (siehe Anm. 3)

Zur Berechnung des Flächeninhaltes kann man die Formel XIV. (siehe Antwort, Frage 3):

$$F = \frac{a}{2}\sqrt{s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \text{ benutzen.}$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte erhält man:

Erkl 3. Da negative Logarithmen stets zu vermeiden sind, so addiert man dem kleineren positiven Summanden eine Einheit zu und nimmt dieselbe wieder weg, wodurch man nach der Addition einen positiven Logarithmus, nur mit negativer Kennziffer erhält (siehe: Kleyers Lehrbuch der Logarithmen.)

Erkl. 4. Analog der Erkl. 21, Seite 15.

$$F = \frac{648,72}{2}\sqrt{376,8^2 - \left(\frac{648,72}{2}\right)^2}$$

oder: $F = 324,36\sqrt{(376,8 + 324,36)(376,8 - 324,36)}$ (Erkl

$$F = 324,36\sqrt{701,16 \,.\, 52,44}$$

$$\log F = \log 324,36 + \frac{1}{2}(\log 701,16 + \log 52,44)$$

Nun ist: $\log 701,16 = 2,8458171$

Erkl. 5. Analog der Erkl. 10, Seite 9.

$+ \log 52,44 = 1,7196627$

$4,5654798$

$\frac{1}{2}(\log 701,16 + \log 52,44) = 2,2827399$

$+ \log 324,36 = 2,5110273$

$\log F = 4,7937672$

7625

47

41,8

5,2

mithin: $\underline{\underline{F = 62196,68 \text{ qm}}}$ 5,5

Anmerkung 3. Es kann nicht oft genug erwähnt werden, dass bei allen Berechnungen die gesuchten Stücke **unabhängig** von bereits berechneten bestimmt werden müssen, denn sind letztere falsch, so pflanzt sich dieser Fehler weiter fort. In vorstehender Aufgabe hätte der Winkel β **unabhängig** von α, also mit Hülfe der Formel: $\cos\beta = \frac{a}{2s}$ berechnet werden müssen, alsdann würde auch die **Kontrolle** bestehen, dass $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0$ sein muss.

Aufgabe 2. Von einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis $a = 62,8$ m und der Winkel α an der Spitze $= 35^0\,10'36''$; wie gross sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Figur 19.

A, B, C, D, s, s, h, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{\alpha}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, R, R, β, β, a

Formeln:

1). $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\,.\,s}$

2). $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^0$

3). $F = \frac{a^2}{4}\,ctg\,\frac{\alpha}{2}$

Gegeben: $a = 62,8$ m
$\alpha = 35^0\,10'36''$
Gesucht: s, β und F.

Auflösung.

Zur Berechnung des Schenkels s dient die Relation:

$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2\,.\,s}$ (siehe Antw. Frage 2).

Erklärung 6.

$$\begin{aligned} \log\sin 17^\circ 35' 10'' &= 9{,}4802065-10 \text{ (Erkl. 7)} \\ 8'' &= \quad +532 \\ \hline \log\sin 17^\circ 35' 18'' &= 9{,}4802597-10 \\ &= 0{,}4802597-1 \end{aligned}$$

Erkl. 7. Die Logarithmen der trigonometrischen Funktionen sind in den Tabellen um 10 Einheiten zu gross angegeben, diese 10 Einheiten müssen daher beim Aufschlagen der betr. Logarithmen **weggenommen**, bezw. abgezogen werden.

Erklärung 8.

$$\begin{aligned} \log ctg\, 17^\circ 35' 10'' &= 0{,}4990066 \quad \text{(Erkl. 9)} \\ 8'' &= (x) - 584{,}8 \text{ (Erkl.10 u.11)} \\ \hline \log ctg\, 17^\circ 35' 18'' &= 0{,}4989481 \end{aligned}$$

Erkl. 9. Bei den Logarithmen der trig. Funktionen, welche die Kennziffer 0 haben, sind die in Erkl. 7 angegebenen 10 Einheiten bereits abgezogen (siehe: die Logarithmen).

Erkl. 10. Da mit wachsendem Winkel die Kotangente und der Kosinus, mithin auch die Logarithmen derselben abnehmen, so müssen bei diesen zwei trigonometrischen Funktionen, die *partes proportionales* stets **abgezogen** werden (siehe: die Logarithmen, bezw. die Goniometrie).

Erkl. 11. Nach der Erkl. 22, Seite 15, besteht die Proportion:

$$10'' : 8'' = 731 : x$$

oder:

$$10x = 8 . 7{,}31$$

Hieraus erhält man:

$$x = \frac{8 . 731}{10} = 8 . 73{,}1 = 584{,}8$$

Dieselbe nach s aufgelöst, gibt:

$$s = \frac{a}{2 . \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlen hat man:

$$s = \frac{62{,}8}{2 \cdot \sin\frac{35^\circ 10' 36''}{2}}$$

oder:

$$s = \frac{31{,}4}{\sin 17^\circ 35' 18''}$$

Nun ist:

$$\log s = \log 31{,}4 - \log\sin 17^\circ 35' 18''$$

$$\begin{aligned} \log 31{,}4 &= 1{,}4969296 \\ -\log\sin 17^\circ 35' 18'' &= 0{,}4802597-1 \text{ (Erkl. 6)} \\ &\quad - \qquad\qquad + \\ \hline \log s &= 1{,}0166699+1 \end{aligned}$$

oder: $\log s = 2{,}0166699$

$$\begin{array}{r} 6573 \\ \hline 126 \\ 125{,}4 \end{array}$$

mithin: $\underline{s = 103{,}913 \text{ m}}$

Den Winkel β kann man durch Abzug des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ von 90° finden; man erhält:

$$\beta = 90^\circ - 17^\circ 35' 18'' = \underline{72^\circ 24' 42''}$$

Zur Berechnung des Flächeninhaltes, benutzt man die Formel XVI:

$$F = \frac{a^2}{4} ctg\frac{\alpha}{2} = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot ctg\frac{\alpha}{2} \quad \text{(s. Antw. Frage 3)}$$

Mit Berücksichtigung der gegebenen Zahlen, erhält man:

$$F = \left(\frac{62{,}8}{2}\right)^2 ctg\, 17^\circ 35' . 18''$$

oder:

$$F = 31{,}4^2 \; ctg\, 17^\circ 35' 18''$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$\log F = 2 . \log 31{,}4 + \log ctg\, 17^\circ 35' 18''$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 31{,}4 &= 1{,}4969296 \\ &\qquad\qquad . 2 \\ \hline &\quad 2{,}9938592 \\ +\log ctg\, 17^\circ 35' 18'' &= 0{,}4989481 \text{ (Erkl. 8)} \\ \hline \log F &= 3{,}4928073 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 8023 \\ \hline 50 \\ 41{,}7 \\ \hline 8{,}3 \end{array}$$

mithin: $\underline{F = 3110{,}336 \text{ qm}}$

Aufgabe 3. Von einem gleichschenkligen Dreieck sei die Basis $a = 157,86$ m und der anliegende Winkel $\beta = 36^0 48' 15''$ gegeben; wie gross sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Formeln:

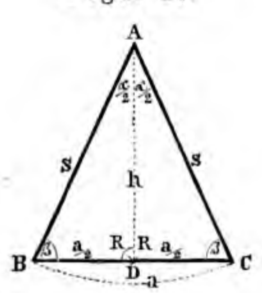
$$1).\quad \cos\beta = \frac{a}{2s}$$

$$2).\quad F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot tg\,\beta$$

Gegeben: $a = 157,86$ m
$\beta = 36^0\,48'\,15''$

Gesucht: s, α und F.

Figur 20.



Erklärung 12.

$$\log\cos 36^0 48' 10'' = 9,9034711-10 \quad \text{(Erkl. 7)}$$
$$5'' = \quad -79 \quad (\text{„ } 10)$$
$$\log\cos 36^0 48'' 15' = 9,9034632-10$$
$$\text{oder:} \quad = 0,9034632-1$$

Auflösung.

Zur Berechnung des Schenkels s, Figur 20, dient die Relation:

$$\cos\beta = \frac{a}{2 \,.\, s} \quad \text{(siehe Antwort, Frage 2)}$$

dieselbe nach s aufgelöst, gibt:

$$s = \frac{a}{2\cos\beta}$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlen, hat man:

$$s = \frac{157,86}{2\,.\cos 36^0 48' 15''} = \frac{78,93}{\cos 36^0 48' 15''}$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$\log s = \log 78,93 - \log\cos 36^0\,48'\,15''$$

Nun ist:

$$\log 78,93 = 1,8972421$$
$$-\log\cos 36^0\,48'\,15'' = 0,9034632-1 \text{ (Erkl. 12)}$$
$$\quad - \qquad + $$
$$0,9937789+1$$

$$\text{oder:} \quad \log s = 1,9937789$$
$$7756$$
$$33$$
$$30,8$$

mithin: $\underline{s = 98,5777 \text{ m}}$

Den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ findet man durch Abzug des Winkels β von 90^0, mit $53^0\,11'\,45''$, folglich: $\underline{\alpha = 106^0\,23'\,30''}$

Den gesuchten Flächeninhalt findet man mit Hülfe der Formel XVI:

$$F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 \cdot tg\,\beta \quad \text{(siehe Antw. Frage 3)}$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlen, hat man:

$$F = \left(\frac{157,86}{2}\right)^2 tg\,36^0\,48'\,15''$$

$$F = 78,93^2\,tg\,36^0\,48'\,15''$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$\log F = 2\,.\log 78,93 + \log tg\,36^0 48'\,15''$$

Nun ist: $\log 78{,}93 = 1{,}8972421$
$\quad .2$
$3{,}7944842$
$+ \log tg\, 36^\circ 48' 15'' = 9{,}8740010-10$
$+219{,}5$
$\log F = 13{,}6685072-10$
oder: $\log F = 3{,}6685072$
5071
1
mithin: $\underline{F = 4661{,}302 \text{ qm}}$

Aufgabe 4. Von einem gleichschenkligen Dreieck sei der Schenkel $s = 347$ m und der Winkel α an der Spitze $= 64^\circ 24'$ gegeben; wie gross sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Formeln:

1). $\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2s}$

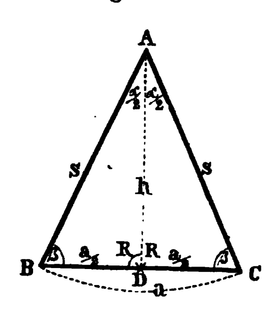
2). $F = \frac{s^2}{2} \sin \alpha$

Gegeben: $s = 347$ m

$\alpha = 64^\circ 24'$; $\frac{\alpha}{2} = 32^\circ 12'$

Gesucht: a, β und F.

Figur 21.



Auflösung.

Die Basis a kann man mit Hülfe der Relation:

$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2s}$ (Siehe Antwort, Frage 2)

berechnen; dieselbe nach a aufgelöst, gibt:

$a = 2 \,.\, s \,.\, \sin \frac{\alpha}{2}$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlen, ist:

$a = 2 \,.\, 347 \,.\, \sin \frac{64^\circ 24'}{2}$

oder:

$a = 694 \sin 32^\circ 12'$.

Dies logarithmiert, gibt:

$\log a = \log 694 + \log \sin 32^\circ 12'$

Nun ist: $\log 694 = 2{,}8413595$
$+ \log \sin 32^\circ 12' = 9{,}7266264-10$
$12{,}5679859-10$
oder: $\log a = 2{,}5679859$
9787
72
$70{,}2$
mithin: $\underline{a = 369{,}816 \text{ m}}$

Ferner ist:

$\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = 90^\circ - 32^\circ 12' = \underline{57^\circ 48'}$

Den Flächeninhalt F kann man mit Hülfe der Formel XVIII:

$$F = \frac{s^2}{2} \sin\alpha \quad \text{(siehe Antw. Frage 3)}$$

berechnen. Die gegebenen Zahlenwerte in diese Formel substituiert, gibt:

$$F = \frac{347^2}{2} \cdot \sin 64^\circ 24'$$

Nun ist:

$$\log F = 2 \,.\, \log 347 + \log\sin 64^\circ 24' - \log 2$$

$$\begin{aligned}
\log 347 &= 2{,}5403295 \\
&\quad\;\; .2 \\
&\quad 5{,}0806590 \\
+ \log\sin 64^\circ 24' &= 9{,}9551259-10 \\
&\quad 15{,}0357849-10 \\
\text{oder:} &\quad 5{,}0357849 \\
-\log 2 &= -0{,}3010300 \\
\log F &= 4{,}7347549 \\
&\qquad\quad 7518 \\
&\qquad\qquad 31 \\
&\qquad\qquad 32
\end{aligned}$$

mithin: $\underline{F = 54294{,}4 \text{ qm}}$

Aufgabe 5. Von einem gleichschenkligen Dreiecke ist der Schenkel $s = 18{,}794$ m und ein Basiswinkel $\beta = 30^\circ\, 18'\, 45''$; wie gross sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Formeln: 1). $\cos\beta = \frac{a}{2 \,.\, s}$

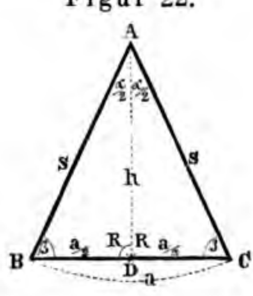
2). $F = \frac{s^2 \sin 2\beta}{2}$

Gegeben: $s = 18{,}794$ m

$\beta = 30^\circ\, 18'\, 45''$

Gesucht: a, α und F.

Figur 22.



Auflösung.

Zur Berechnung der Basis a, hat man die Relation:

$$\cos\beta = \frac{a}{2 \,.\, s} \quad \text{(siehe Antw., Frage 2)}$$

dieselbe nach a aufgelöst, gibt:

$$a = 2s \,.\, \cos\beta$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte, hat man:

$$a = 2 \,.\, 18{,}794 \,.\, \cos 30^\circ\, 18'\, 45''$$

Dies kann man, wie folgt, logarithmisch berechnen:

$$\log a = \log 2 + \log 18{,}794 + \log\cos 30^\circ 18' 45''$$

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300 \\
+ \log 18{,}794 &= 1{,}2740192 \\
+ \log\cos 30^\circ\, 18'\, 45'' &= 0{,}9361544-1 \quad \text{(Erkl. 13)} \\
&\quad 2{,}5112036-1 \\
\text{oder:} \quad \log a &= 1{,}5112036 \\
&\qquad\quad 2013 \\
&\qquad\qquad 23 \\
&\qquad\qquad 26{,}3
\end{aligned}$$

mithin: $\underline{a = 32{,}4492 \text{ m}}$

Erklärung 13.

$$\begin{aligned}
\log\cos 30^\circ\, 18'\, 40'' &= 9{,}9361606-10 \\
5'' &= \quad -61{,}5 \quad \text{(Erkl. 10)} \\
\log\cos 30^\circ 18' 45'' &= 9{,}9361544-10 \\
\text{oder:} &= 0{,}9361544-1
\end{aligned}$$

Ferner ist der Winkel $\frac{\alpha}{2} = 90^\circ - \beta = 90^\circ - 30^\circ 18' 45'' = 59^\circ 41' 15''$

mithin: $\underline{\underline{\alpha = 119^\circ 22' 30''}}$

Um den Flächeninhalt F zu berechnen, benutze man die von der Formel XVIII. abgeleitete Formel:

$$F = \frac{s^2 \sin 2\beta}{2} \quad \text{(siehe Antw. Frage 3)}$$

Setzt man hierin die gegebenen Zahlenwerte: $s = 18{,}794$ und $2\beta = 2 . (30^\circ 18' 45'') = 60^\circ 37' 30''$ ein, so wird:

$$F = \frac{18{,}794^2}{2} \cdot \sin 60^\circ 37' 30''.$$

Dies logarithmiert, gibt:

$$\log F = 2 . \log 18{,}794 + \log \sin 60^\circ 37' 30'' - \log 2$$

Nun ist: $\log 18{,}794 = 1{,}2740192$
$.2$
$2{,}5480384$
$+ \log \sin 60^\circ 37' 30'' = 9{,}9402315 - 10$
$12{,}4882699 - 10$

oder: $2{,}4882699$
$- \log 2 = - 0{,}3010300$
$\log F = 2{,}1872399$
2386
13
0
13
14,1

mithin: $\underline{\underline{F = 153{,}9005 \text{ qm}}}$

III.

Praktische Aufgaben.

Aufgabe 6. Eine Formel zur Berechnung des Inhalts eines **regulären** n**-Ecks** aufzustellen, wenn der Radius R des umgeschriebenen Kreises gegeben ist?

Erkl. 14. Siehe Planimetrie, die regulären Polygone.

Erkl. 15. Ein **reguläres** Polygon ist ein solches, in welchem alle Seiten und alle Winkel einander gleich sind. — Die Seiten sind **Sehnen** des umschriebenen Kreises, und da zu gleichen Sehnen gleiche Centriewinkel gehören, so ist jeder der Winkel α am Centrum, Fig. 23, $= \frac{360^\circ}{n}$ (s. Planimetrie, die regulär. Polygone).

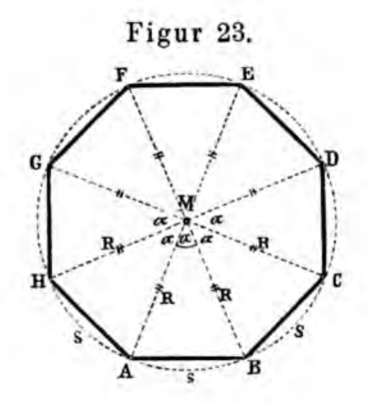
Gegeben: R, Radius des umgeschriebenen Kreises.
Gesucht: F, Flächeninhalt des regulären n-Ecks.

Auflösung.

Jedes **reguläre** n-Eck (Polygon), Figur 23, kann man in soviele **kongruente gleichschenklige** Dreiecke — sogenannte **Bestimmungsdreiecke** — zerlegen, als die Zahl n der Seiten (Ecken) des n-Ecks beträgt (Erkl. 14).

Der Flächeninhalt F eines **regulären**

Figur 23.



n-Ecks ist somit $= n$ mal dem Inhalte eines der **Bestimmungsdreiecke** des n-Ecks. Die Bestimmungsdreiecke jeden n-Ecks, Figur 23, sind gleichschenklige Dreiecke, deren Schenkeln $= R$ und deren Winkel α an der Spitze $= \frac{360^0}{n}$ sind (Erkl. 15). Der Inhalt eines dieser Bestimmungsdreiecke ist somit, unter Zugrundelegung der Formel XVIII:

$$F = \frac{s^2}{2} sin\, \alpha \text{ (siehe Seite 19)}$$

$= \frac{R^2}{2} sin \frac{360^0}{n}$. Für den Flächeninhalt F eines regulären n-Ecks hat man somit die allgemeine Formel:

Formel XIX. . . . $F = \frac{n \,.\, R^2}{2} \cdot sin \frac{360^0}{n}$

Aufgabe 7. Wie gross ist der Inhalt eines regulären 9-Ecks, wenn der Radius R des umschriebenen Kreises gleich 16,45m ist?

Formel: $F = \frac{n \,.\, R^2}{2} \cdot sin \frac{360^0}{n}$

Gegeben: $R = 16{,}45$ m
$n = 9$
Gesucht: $F = ?$

Auflösung.

Da der Radius des umschriebenen Kreises des regulären 9-Ecks, Figur 24, gegeben ist, so dient zur Berechnung des Flächeninhaltes F obige Formel:

$$F = \frac{n \,.\, R^2}{2} \cdot sin \frac{360^0}{n} \text{ (siehe Aufg. 6)}$$

Setzt man in diese Formel für R u. n die gegebenen Zahlenwerte ein, so wird:

$$F = \frac{9 \,.\, 16{,}45^2}{2} \cdot sin \frac{360^0}{9}$$

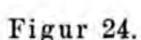
oder: $F = \frac{9 \,.\, 16{,}45^2}{2} \cdot sin\, 40^0$

Dies wird, wie folgt, logarithmisch berechnet:

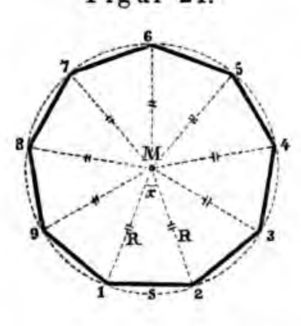
$$log\, F = log\, 9 + 2 \,.\, log\, 16{,}45 + log\, sin\, 40^0 - log\, 2$$

Nun ist: $log\, 9 = 0{,}9542425$
$+ 2\, log\, 16{,}45 = 2 \,.\, 1{,}2161659 = 2{,}4323318$
$+ log\, sin\, 40^0 = 9{,}8080675 - 10$
$13{,}1946418 - 10$
oder: $3{,}1946418$
$- log\, 2 = -0{,}3010300$
$log F = 2{,}8936118$
6064
54
50,4

mithin: $\underline{F = 782{,}729 \text{ qm}}$

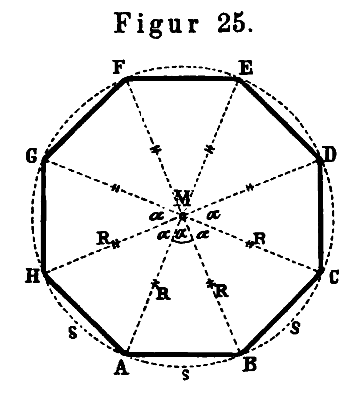


Figur 24.



Aufgabe 8. Eine Formel zur Berechnung des Inhaltes eines **regulären** n-Ecks aufzustellen, wenn eine Seite s desselben gegeben ist.

Figur 25.



Gegeben: s, eine Seite des regul. n-Ecks.
Gesucht: F, Flächeninhalt desselben.

Auflösung.

Analog der Auflösung der Aufgabe 6, ist der Inhalt F eines regulären n-Ecks $= n$ mal dem Inhalte eines der **Bestimmungsdreiecke.**

Der Inhalt eines der Bestimmungsdreiecke — bezw. der gleichschenkligen Dreiecke, Figur 25, — in die Basis s und den Winkel α an der Spitze ausgedrückt, ist nach der Formel XVI:

$$F = \frac{a^2}{4} ctg \frac{\alpha}{2} \text{ (siehe Seite 18)}$$

$= \frac{s^2}{4} ctg \frac{360^0}{2 . n}$; mithin ist die allgemeine Formel zur Berechnung des Flächeninhalts F eines regulären n-Ecks, wenn die Seite s desselben gegeben ist:

$$F = \frac{n . s^2}{4} ctg \frac{360^0}{2 . n}$$

oder:

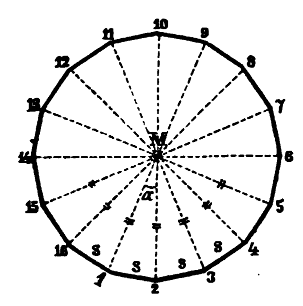
Formel XX. . . . $F = \frac{n . s^2}{4} ctg \frac{180^0}{n}$

Aufgabe 9. Wie gross ist der 16-eckige *Cirque national* in den *Champs élysées* zu Paris, wenn eine Seite 6,12 m misst?

Formel: $F = \frac{n . s^2}{4} ctg \frac{180^0}{n}$

Gegeben: $s = 6{,}12\text{m}$
$n = 16$
Gesucht: $F = ?$

Figur 26.



Auflösung.

Der Grundriss, Bodenfläche, des 16-eckigen *Cirque national* in den *Champs élysées* zu Paris, bildet ein **reguläres** 16-Eck, Fig. 26, dessen Seite s gemessen werden kann. Zur Berechnung der Bodenfläche F desselben dient daher obige Formel:

$$F = \frac{n . s^2}{4} ctg \frac{180^0}{n} \text{ (siehe Aufgabe 8)}$$

Setzt man in diese Formel für n und s die gegebenen Zahlenwerte ein, so wird:

$$F = \frac{16 . 6{,}12^2}{4} \cdot ctg \frac{180^0}{16}$$

oder:

$$F = 4 . 6{,}12^2 ctg\, 11^0\, 15'$$

Dies wird, wie folgt, logarithmisch berechnet:

$$log\, F = log\, 4 + 2 . log\, 6{,}12 + log\, ctg\, 11^0\, 15'$$

Nun ist: $\log 4 = 0{,}6020600$

$+ 2 \,.\, \log 6{,}12 = 2 \,.\, 0{,}7867514 = 1{,}5735028$

$+ \log ctg\, 11^\circ 15' = 0{,}7013382$

$\log F = 2{,}8769010$

8988

22

mithin: $F = 753{,}184\,\text{qm}$ 22,8

Aufgabe 10. Eine Formel zur Berechnung des Inhaltes eines **regulären** n-Ecks aufzustellen, wenn der Radius r des eingeschriebenen Kreises gegeben ist.

Gegeben: r, Radius des eingeschr. Kreises.
Gesucht: F, Flächeninhalt d. regul. n-Ecks.

Auflösung.

Die in einem der Bestimmungsdreiecke des regulären n-Ecks, Figur 27, auf die Seite s gefällte Höhe h ist ein Radius r des dem n-Eck eingeschriebenen Kreises.

Figur 27.

Der Inhalt s eines der Bestimmungsdreiecke, ausgedrückt in die Höhe $h = r$ und den Winkel α an der Spitze, ist somit nach der Formel XVII:

$$F = h^2 \,.\, tg\, \frac{\alpha}{2} \quad \text{(siehe Seite 19)}$$

und analog der Aufgabe 6 $= r^2 \,.\, tg\, \frac{360^\circ}{2 \,.\, n}$

Die allgemeine Formel zur Berechnung des Inhaltes F eines regulären n-Ecks, wenn der Radius r des eingeschriebenen Kreises gegeben, ist somit:

$$F = n \,.\, r^2\, tg\, \frac{360^\circ}{2 \,.\, n}$$

oder:

Formel XXI. . . . $F = n \,.\, r^2 tg\, \frac{180^\circ}{n}$

Aufgabe 11. Wie gross ist der Inhalt des um einen Kreis beschriebenen regelmässigen 72-Ecks, wenn der Inhalt K des Kreises 1800 qm enthält?

Formeln: 1). $K = r^2 \pi$

2). $F = n \,.\, r^2 \,.\, tg\, \frac{180^\circ}{n}$

Gegeben: $K = r^2 \pi = 1800\,\text{qm}$
$n = 72$
Gesucht: F.

Auflösung.

Da der Inhalt K $(= r^2 \pi = 1800\,\text{qm})$ des Kreises gegeben ist und aus diesem Inhalte der Radius r berechnet werden kann, so dient zur Berechnung des Inhalts des in den Kreis eingeschriebenen regulären 72-Ecks, die Formel:

$$F = n \,.\, r^2\, tg\, \frac{180^\circ}{n} \quad \text{(siehe Aufg. 10)}$$

Aus vorstehender Formel 1:

$$K = r^2\pi \quad \text{(Erkl. 16)}$$

findet man: $r^2 = \frac{K}{\pi}$

Diesen Wert für r^2 in vorstehende Formel 2 substituiert, gibt:

$$F = n \cdot \frac{K}{\pi}\, tg\, \frac{180^0}{n}$$

Mit Berücksichtigung der gegebenen Zahlenwerte, erhält man:

$$F = \frac{72 \,.\, 1800}{3{,}14\ldots}\, tg\, \frac{180^0}{72}$$

oder:

$$F = \frac{72 \,.\, 1800}{3{,}14\ldots}\, tg\, 2^0\, 30'$$

Dies wird wie folgt logarithm. berechnet:

$$\log F = \log 72 + \log 1800 + \log tg\, 2^0\, 30' - \log 3{,}14\ldots$$

Nun ist: $\log 72 = 1{,}8573325$
$+ \log 1800 = 3{,}2552725$
$+ \log tg\, 2^0\, 30' = 8{,}6400931 - 10$
$13{,}7526981 - 10$
oder: $= 3{,}7526981$
$- \log 3{,}14\ldots = -0{,}4971499$ (Erkl. 17)
$\log F = 3{,}2555482$
5378
104
96,4
7,6
7,2

mithin: $F = 1801{,}143$ qm

Erkl. 16. Die Formel zur Berechnung des Inhaltes eines Kreises mit dem Radius r, ist:

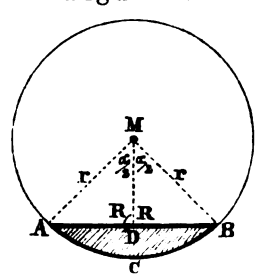
$$K = r^2\pi$$

In dieser Formel bedeutet π die irrationale Zahl: 3,14159265 .....
d. i. der Umfang eines Kreises, dessen Durchmesser = 1 ist (siehe Planimetrie: Berechnungsaufgaben über den Kreis).

Erkl. 17. Der Logarithmus der irrationalen Zahl π (= 3,14...) ist meistens in den Logarithmentafeln besonders genau angegeben, mit: $\log \pi = 0{,}4971499$.

Aufgabe 12. Eine Formel für den Inhalt eines **Kreissegments** (Kreisabschnitts) aufzustellen, wenn der Radius r des Kreises und der zugehörige Centriewinkel α gegeben sind.

Figur 28.



Erkl. 18. Der Inhalt eines **Kreissektors** verhält sich zum Inhalte ($r^2\pi$) des zugehörigen Kreises wie der Centriewinkel (α^0) des Sektors zu 360°; in Zeichen:

$$\text{Sektor} : r^2\pi = \alpha^0 : 360^0$$

hieraus erhält man:

$$\text{Sektor} = \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot r^2\pi$$

(s. Planimetrie, Berechnungsaufg. über d. Kreis).

Gegeben: r, Radius des Kreises,
α, der Centriewinkel.
Gesucht: F, Inhalt des Segments.

Auflösung.

Der Inhalt des **Kreissegments** (Kreisabschnitts) ABC, Figur 28, wird gefunden, wenn man von dem Inhalte des Kreissektors (Kreisausschnitts) $MACB$ den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks MAB abzieht; man hat somit die Gleichung:

$$Sgt = Sektor - \triangle MAB \;.\;.\;.\; 1)$$

Nun ist der Inhalt des Kreissektors $MACB$ nach Erkl. 18 $= \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot r^2\pi$; dann ist der Inhalt des Dreiecks ABM weil dasselbe ein gleichschenkliges ist, nach Formel XVIII:

$$F = \frac{s^2 \sin\alpha}{2} \quad \text{(siehe Seite 19)}$$

$$= \frac{r^2}{2} \sin\alpha.$$

Für den gesuchten Inhalt des Segments erhält man somit, nach Gleichung 1:

$$Sgt = \frac{\alpha^0}{360^0} r^2\pi - \frac{r^2 \sin\alpha}{2}$$

oder:

Formel XXII. . . . $$Sgt = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0 . \pi}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

Anmerkung 4. . . . . In vorstehender Formel XXII. bedeutet der erste Ausdruck in der Klammer, nämlich: $\frac{\alpha^0\pi}{180^0}$, den **arcus** α ($arc\,\alpha$), d. i. **der zum Centriewinkel α gehörige Bogen eines Kreises, dessen Radius gleich der Einheit ist** (Erkl. 19).

Hat man daher eine Tabelle, welche die Bogen sämmtlicher Winkel — der Radius des zugehörigen Kreises $= 1$ angenommen — enthält, so kann man den Wert für $\frac{\alpha^0\pi}{180^0}$, bezeichnet durch: $arc\,\alpha^0$, aus dieser Tabelle entnehmen, wodurch die Ausrechnung bedeutend vereinfacht wird. Die Formel XXII. geht nach dieser Anmerkung über, in:

Erkl. 19. Ein Bogen verhält sich zur ganzen Peripherie ($2r\pi$) des zugehörigen Kreises, wie der zu dem Bogen gehörige Centriewinkel α^0 zu 360^0; in Zeichen:

$$bog\,\alpha^0 : 2r\pi = \alpha^0 : 360^0$$

Wird der **Radius** gleich der **Einheit** ($= 1$) angenommen, so bezeichnet man einen Bogen des Kreises mit dem lateinischen Worte *arcus* (Bogen).

Für $r = 1$ geht sonach vorstehende Proportion über, in:

$$arc\,\alpha^0 : 2\pi = \alpha^0 : 360^0$$

hieraus erhält man:

$$arc\,\alpha^0 = \frac{2\pi . \alpha^0}{360^0} = \frac{\alpha^0\pi}{180^0}$$

Formel XXIIa. . . . $$Sgt = \frac{r^2}{2}(arc\,\alpha - \sin\alpha)$$

Aufgabe 13. Wie gross ist der Inhalt eines **Kreissegments**, wenn der Radius r des zugehörigen Kreises 4,562 m und der zugehörige Centriewinkel $\alpha = 44^0 20' 10''$ beträgt?

Formel: $$Sgt = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0\pi}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

Gegeben: $r = 4{,}562$m
$\alpha = 44^0 20' 10''$
Gesucht: Inhalt des Segments.

Auflösung.

Da der Radius r des Kreises und der Centriewinkel α gegeben ist, so dient zur Berechnung des Segments obige Formel:

$$Sgt = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0\pi}{108^0} - \sin\alpha\right) \text{ (siehe: Aufg. 12).}$$

Mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte hat man:

1). . . . $$Sgt = \frac{4{,}562^2}{2}\left(\frac{44^0 20' 10'' . 3{,}14 \ldots .}{360^0} - \sin 44^0 20' 10''\right)$$

Die Summanden in der Klammer müssen zunächst einzeln berechnet werden.

In dem ersten Summanden drücken die Winkel $44^0 20' 10''$ und 360^0 nur ein **Verhältnis** aus (siehe Erkl. 18), müssen

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der ausführliche Prospekt und das ausführliche Inhaltsverzeichnis der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung gratis und portofrei bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Vorläufiges Inhaltsverzeichnis

der demnächst erscheinenden Hefte 101—160.

Heft 101. Körperberechnungen. 2. Buch.

Inhalt: Praktische Aufgaben über die fünf einfachen geometrischen Körper, als: Berechnung von Behältern, Gräben, Feldschanzen, Eisenbahndämmen u. Schwellen, Planken, Balken, Bohlen, Turmdächer, Röhrenleitungen, cylindr. Gefässen, Baumstämmen, Mörsern, Ringmauern, Dachkändeln, Schiffsmasten, Gewölben, Brunnenschachten, Trichtern, Granaten, Bassins etc.

Heft 102. Die arithmetischen, geometrischen und harmonischen Reihen. (Forts. von Heft 26.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben über die nied. arithm. und die geometr. Reihen.

Heft 103. „ 104. „ 105. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 101.)

Inh.: Die gegenseitigen Beziehungen der 5 einfachen Körper und der regul. Polyeder (auch Aehnlichkeit), Aufgaben.

Heft 106. „ 107. „ 108. Die arithmetischen, geometr. und harmonischen Reihen, Schluss. (Forts. von Heft 102.)

Inh.: Gemischte prakt. Aufgaben auch über die harmonischen Reihen. Polygonal- und Pyramidalzahlen. — Solche Aufgaben, welche auf Diophantische Gleichungen, Kettenreihen und Kettenbrüche führen. — Schluss dieses Kapitels, Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelverzeichnis etc.

Heft 109. „ 110. „ 111. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 105.)

Inh.: Ueber zusammengesetzte Körper. Lerechnung solcher Körper, welche sich in Teile zerlegen lassen, die mittelst den im 1. Buch aufgestellten Formeln berechnet werden können. — Auch Berechnung von Krystallkörpern.

Heft 112. Zinseszinsrechnungen. Schluss. (Forts. von Heft 50.)

Inh.: Weitere gemischte praktische Aufgaben und Schluss der Zinseszinsrechnung.

Heft 113. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 114. | (Forts. von Heft 111.)
Inh.: Ueber Maxima u. Minima der Körper unter gewissen Bedingungen.

Heft 115. | **Rentenrechnung als Fortsetz.**
„ 116. | der Zinseszinsrechnung.
„ 117. |
Inh.: Aufstellung der Formeln, nebst den mannigfaltigsten Aufgaben über die Zeitrenten.

Heft 118. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. v. Heft 114.)
Inh.: Einfache Rotationskörper. Ueber die Berechnung solcher Rotationskörper, welche sich auf die einfachen Körper zurückführen lassen.

Heft 119. |
„ 120. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 121. | (Forts. von Heft 118.)
„ 122. |
Inh.. Simpson'sche Körperregel, Berechnung des Prismatoids, Obelisken, Pontons, Keils, des schief abgeschnittenen Prismas, Cylinders u. Kegels (Cylinder- und Kegelhuf), des Ellipsoids, Sphäroids und des Fasses etc.

Heft 123. Rentenrechnung. — Schluss. (Forts. von Heft 117.)
Inh.: Schluss der Rentenrechnung. — Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis etc. über die Zinseszins- und Rentenrechnungen.

Heft 124. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 122.)
Inh.: Schiefe Körper. Berechnung des schiefen Prismas, schiefen Cylinders und Kegels, sowie der schiefen Pyramide.

Heft 125. | **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 126. | **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft. 54.)
Inh.: Ueber das Auflösen besond. Gleichungen, Wurzel- und Exponentialgleichungen etc.

Heft 127. |
„ 128. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 129. | (Forts. von Heft 124.)
„ 130. |
Inh.: Ebene Trigonometrie angewandt auf stereometrische Berechnungen

Heft 131. | **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 132. | **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 126.)

Heft 133. Körperberechnungen. 2. Buch. (Forts. von Heft 130.)
Inh.: Aufgaben aus der mathem. Geographie.

Heft 134. Gleichungen des 1. Grades mit einer Unbekannten. (Forts. v. Heft 132.)
Inh.: Ueber das Auflösen d. Gleichungen mittelst der Regula falsi, Regula lancium.

Heft 135. |
„ 136. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 137. | (Forts. von Heft 133.)
„ 138. |
Inh.: Stereometr. Aufgaben über einzelne Teile der Physik, als: Trägheitsmoment der Körper. — Elastizität und Festigkeit der Körper. — Gleichgewicht u. Druck tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen (hydrostatische Presse). — Gleichgewicht zwischen tropfbar flüssigen u. festen Körpern (archimedisches Prinzip, schwimmende Körper). — Spezif. Gewicht fester und flüssiger Körper. — Bewegung des Wassers (Ausfluss aus Röhren). — Gleichgewicht und Druck der Luft (Mariotte'sches Gesetz, Barometer, Luft- und Wasserpumpe, Luftballon). — Bewegung und Widerstand der Luft. — Ausdehnung der Körper durch Wärme, Wärmekapazität (Calorie, spezif. Wärme). — Dichtigkeit, Volumen und Expansivkraft der Wasserdämpfe; Geradlinige Fortpflanzung des Lichts (Beleuchtung). — Berechnung und Zerlegung des Lichts durch Prismen etc.

Heft 139. | **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 140. | **einer Unbekannten.**
(Forts. von Heft 134.)
Inh.: Allgemeine Wortaufgaben.

Heft 141. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 142. | (Forts. von Heft 138.)
Inh.: Guldini'sche Körperregel. Berechnung von Rotationskörpern, als: der Kugelteile, der Ringkörper, des Paraboloids, Neiloids, Paraboloidenstumpfes, Neiloidenstumpfes, des Fasses etc.

Heft 143. | **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 144. | **einer Unbekannten.**
(Forts. v. Heft 140.)
Inh.: Aufgaben über gleichförmige Bewegung.

Heft 145. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 146. | (Forts. von Heft 142.)
Inh.: Stereometr. Berechnungen gelöst durch sphär. Trigonometrie und solche stereometr. Berechnungen, welche auf kubische Gleichungen führen.

Heft 147. | **Gleichungen des 1. Grades mit**
„ 148. | **einer Unbekannten.** Schluss.
„ 149. | (Forts. v. Heft 144.)
Inh.: Mischungsaufgaben etc. — Schluss des Kapitels, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhaltsverzeichn. etc.

Heft 150. | **Körperberechnungen. 2. Buch.**
„ 151. | Schluss. (Forts. v. Heft 146.)
Inh.: Die Poinsot'schen (sternförmigen) Körper. — Schluss des 2. Buchs der Körperberechnungen, nebst Titelblatt, Vorwort, Inhalts- und Formelnverzeichnis der Körpermasse etc.

Heft 152. Magnetismus und Elektrizität.
Inh.: Anwendung des Magnetismus und der Elektrizität in der neueren Technik etc.

Heft 153. | **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 154. | gaben, gelöst durch geometr.
„ 155. | **Analysis.** (Forts. von Heft 2.)

Heft 156. | **Planimetrie: Konstruktionsauf-**
„ 157. | gaben, gelöst durch algebr.
| **Analysis.** (Forts. von Heft 8.)

Heft 158. Trigonometrie. (Forts. von Heft 27.)
Inh.: Das schiefwinklige Dreieck mit vielen praktischen Aufgaben.

Heft 159. | **Differentialrechnung.** (Forts.
„ 160. | von Heft 59.)
Inh.: Entwicklung des Differentialquotienten [illegible] plizierter Funktionen.

u. s. w., u. s. w.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

27. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Inhalt: Ebene Trigonometrie. 2. Teil.
Das gleichschenklige Dreieck.
Seite 33—48.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstgebrauch —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie. 2. Teil. Seite 33—48.

Das gleichschenklige Dreieck.

Inhalt:
Praktische Aufgaben über die Berechnung des Kreissegments, Kreissektors, Kreisbogens, scheinbare Grösse runder Gegenstände, geograph. Breite etc. Anhang ungelöster Aufgaben.

Stuttgart 1881.
Verlag von Julius Maier.

—— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. ——
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesammtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwicklung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesammtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbstständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandtheil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, tech. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbl. Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständniss** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem

Hülfsrechnung.

1). $44^0\,20'\,10'' = 44.60' + 20' + \left(\frac{10}{60}\right)'$

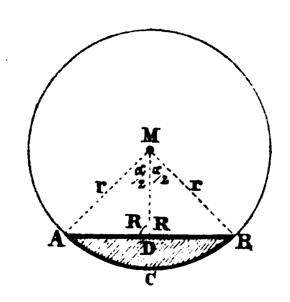
$= 2640' + 20' + \frac{1}{6}'$

$= \left(\frac{15961}{6}\right)'$

Ebenso sind:

$180^0 = 180.60' = 10800'$

Figur 29.



Erkl. 20. Man findet den Nummerus zu einem Logarithmus, welcher eine **negative** Kennziffer hat, indem man den Nummerus **ohne Rücksicht** der negativen Kennziffer sucht, dann **aber soviele** Nullen vor den aufgesuchten Nummerus setzt als die negative Kennziffer Einheiten hat und die erste Null durch ein Komma abtrennt.

deshalb in ein gleiches Mass, z. B. beide in Minuten, ausgedrückt werden.

Nach Hülfsrechnung 1) geht der erste Summand: $\frac{\alpha\pi}{180} = \frac{44^0\,20'\,10''.3,14\ldots}{180^0}$

über, in: $\frac{15961.3,14\ldots}{6.10800} = \frac{15961.3,14\ldots}{64800}$

Dies weiter logarithmisch berechnet, gibt:

$log\frac{15961.3,14\ldots}{64800} = log\,15961 + log\,3,14\ldots - log\,64800$

Nun ist:

$log\,15961 = 4,2030601$

$log\,3,14\ldots = 0,4971499$ (Erkl. 17)

$(+1)\,4,7002100\,(-1)$ (Erkl. 8, Seit. 21)

$-log\,64800 = -4,8115750$

$log\frac{15961.3,14\ldots}{64800} = 0,8886350-1$

6343

7

mithin:

2)... $\frac{\alpha^0\pi}{180^0} = \frac{15961.3,14\ldots}{64800} = 0,773811$ (Erkl. 20)

Der zweite Summand: $sin\,44^0\,20'\,10''$ kann man entweder aus einer Tafel entnehmen, welche die **trigonometrischen Funktionen** sämmtlicher Winkel enthält, oder, wenn eine solche Tafel nicht vorhanden ist, kann man den *log* des *sin* α aus der **logarithm. trigonometrischen Tafel** entnehmen und den Nummerus hierzu aufschlagen. Hiernach erhält man:

$log\,sin\,44^0\,20'\,10'' = 9,8443940-10$

$= 0,8443940-1$

3902

38

mithin ist: 37,2

3) ... $sin\,44^0\,20'\,10'' = 0,698866$ (Erkl. 20)

Setzt man nun die in den Gleich. 2) u. 3) berechneten Werte in Gleich. 1) ein, so erhält man:

$Sgt = \frac{4,562^2}{2}\,(0,773811 - 0,698866)$

oder:

$Sgt = \frac{4,562^2}{2}\cdot 0,074945$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$log\,Sgt = 2.log\,4,562 + log\,0,074945 - log\,2$

Nun ist: $log\,4,562 = 0,6591553$

.2

1,3183106

$$\begin{aligned} & 1,3183106 \\ + \log 0,074945 = & \; 0,8747427-2 \text{ (Erkl. 2, S. 15)} \\ & 2,1930533-2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{oder:} \; & (+1)\, 0,1930533(-1) \text{ (Erkl. 5, S. 21)} \\ -\log 2 = & -0,3010300 \\ \log Sgt. = & \; 0,8920233-1 \\ & \quad 0222 \\ & \quad 11 \\ \text{mithin:} & \quad 11,2 \end{aligned}$$

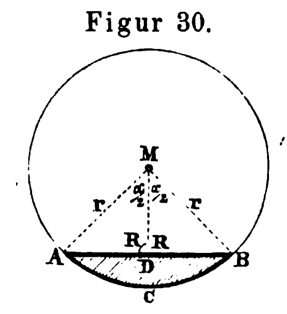
$$Sgt = 0,779872 \text{ qm (Erkl. 20)}$$

Aufgabe 14. Wie gross ist der Inhalt eines Kreisabschnitts (Segments), dessen Centriewinkel $\alpha = 29^0\, 38'\, 15''$ und dessen Bogen $= 8,793624$ m ist?

Gegeben: $\alpha = 29^0\, 38'\, 15''$
$bog\, ACB = 8,793624$ m

Gesucht: F, Inhalt des Segments.

Figur 30.



Erkl. 21. Denkt man sich in Figur 30 den zu dem Sektor $MACB$ gehörigen Bogen ACB in lauter unendlich kleine Teilchen: δ, $\delta_{,,}$ $\delta_{,,,}$ $\delta_{,,,,}$ .... zerlegt und die Endpunkte dieser Teilchen mit dem Mittelpunkte M verbunden, so wird hierdurch der Sektor in lauter kleine Dreieckchen zerlegt, deren Grundlinien die unendlich kleinen Teilchen: δ, $\delta_{,}$, $\delta_{,,}$, $\delta_{,,,}$.... sind, welche als gerade Strecken betrachtet werden können, und deren Höhen alle gleich dem Radius r des Kreises sind.

Der **Inhalt des Sektors** besteht somit aus der Summe der Inhalte aller der kleinen Dreieckchen, und es besteht die Gleichung:

$$Sektor = \frac{\delta \cdot r}{2} + \frac{\delta_{,} \cdot r}{2} + \frac{\delta_{,,} \cdot r}{2} + \frac{\delta_{,,,} \cdot r}{2} + \ldots.$$

oder:

$$Sektor = \frac{r}{2}(\delta + \delta_{,} + \delta_{,,} + \delta_{,,,} + \ldots\ldots)$$

Da die Summe aller der kleinen Teilchen: δ, $\delta_{,}$, $\delta_{,,}$ .... gleich dem Bogen ACB ist, so hat man:

$$Sektor = \frac{r \cdot bog\, ACB}{2} \quad \text{d. h.:}$$

Der Inhalt eines Sektors ist gleich dem Inhalte eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem in gerader Linie ausgestreckten des zum Sektor gehörigen Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

Auflösung.

Der gesuchte Inhalt des Kreissegments ABC, Figur 30, ist gleich dem Inhalte des Kreissektors (-Ausschnittes) $MACB$ weniger dem Inhalte des gleichschenkligen Dreiecks MAB. Es besteht somit die Gleichung:

$$1)\ldots\; Sgt. = Sekt.\, MACB - \triangle\, MAB$$

Nun ist der Inhalt des Sektors $MACB$ nach Erkl. 21 $= \frac{r \cdot bog\, ACB}{2}$; dann ist der Inhalt des Dreiecks MAB, weil dasselbe ein gleichschenkliges ist, nach Formel 18:

$$F = \frac{s^2 \cdot \sin\alpha}{2} \text{ (siehe Seite 19)}$$

$$\triangle\, MAB = \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

Hiernach ist:

$$Sgt. = \frac{r \cdot bog\, ACB}{2} - \frac{r^2 \cdot \sin\alpha}{2} \text{ oder:}$$

$$2)\ldots\; Sgt. = \frac{r}{2}(bog\, ACB - r \cdot \sin\alpha)$$

Zur weiteren Berechnung des Segments aus den gegebenen Stücken: bog und α, muss die noch unbekannte Grösse r zunächst gefunden werden.

Nach der Erkl. 19, Seite 32, besteht die Proportion:

$$2r\pi : bog\, ACB = 360^0 : \alpha^0 \text{ oder:}$$

$$2r\pi : 8,793624 = 360 \cdot 60' : \frac{7113'}{4}$$

mithin: (Erkl. 22)

$$2r\pi \cdot \frac{7113}{4} = 8,793624 \cdot 21600 \text{ oder:}$$

Erkl. 22. $360^\circ = 360^\circ \cdot 60' = 21600'$

$\alpha = 29^\circ\, 38'\, 15''$ oder:

$\alpha = 29 \cdot 60' + 38' + \frac{15'}{60}$

$\alpha = 1740' + 38' + \frac{1'}{4}$

$\alpha = 1778\frac{1'}{4}$

$\alpha = \frac{7113'}{4}$

Hülfsrechnungen.

1). $\log \pi = 0{,}4971499$ (Erkl. 17, S. 81)
$+ \log 7113 = 3{,}8520528$
$(\log \pi + \log 7113) = 4{,}3492027$

2). $\log 17 \cdot \sin 29^\circ 38' 15'' = \log 17 + \log \sin 29^\circ 38' 15''$

Nun ist: $\log 17 = 1{,}2304489$
$+ \log \sin 29^\circ 38' 15'' = 9{,}6941573 - 10$ (Erkl. 7, S. 23)
$+ 185$
$10{,}9246247 - 10$

oder: $= 0{,}9246247$
6204
43
45,9

mithin:
$17 \cdot \sin 29^\circ\, 38'\, 15'' = 8{,}40669$

3). $0{,}386934 \cdot 8{,}5$
1934670
3095472
3,2889390

$r = \frac{8{,}793624 \cdot 21600 \cdot 4}{2 \cdot \pi \cdot 7113}$ und:

$3) \ldots r = \frac{8{,}793624 \cdot 43200}{\pi \cdot 7113}$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$\log r = \log 8{,}793624 + \log 43200 - (\log \pi + \log 7113)$

Nun ist: $\log 8{,}793624 = 0{,}9441667$
$+ 9{,}8$
$1{,}9$
$0{,}9441679$
$+ \log 43200 = 4{,}6354837$
$5{,}5796516$
$-(\log \pi + 7113) = -4{,}3492027$ (Hülfsr. 1).
$\log r = 1{,}2304489$

mithin: $r = 17$ m

Setzt man diesen Wert für r in Gleichung 2) ein, so erhält man mit Rücksicht der übrigen gegebenen Stücke:

$Sgt. = \frac{17}{2}(8{,}793624 - 17 \cdot \sin 29^\circ 38' 15'')$

oder nach Hülfsrechnung 2):

$Sgt. = \frac{17}{2} \cdot (8{,}793624 - 8{,}40669)$

$Sgt. = 8{,}5 \cdot 0{,}386934$

mithin nach Hülfsrechnung 3):

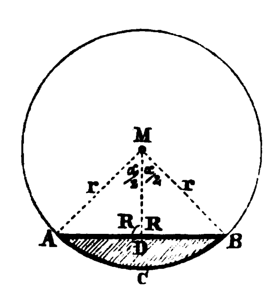
$Sgt. = 3{,}288939$ qm.

Aufgabe 15. In einem Kreise, dessen Radius $= 65$ m ist, wird eine Sehne von 77,70644 m gezogen; wie gross ist der kleinere der von dieser Sehne gebildeten Kreisabschnitte?

Formel: $Sgt. = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180^0} - \sin \alpha\right)$

Gegeben: $r = 65$ m
$AB = s = 77{,}70644$ m
Gesucht: F, Inhalt des kleineren Segments (ABC).


Figur 31.



Auflösung.

Die gegebene Sehne $AB = s$, Fig. 31, teilt den Kreis in zwei Teile, jeder derselben wird ein **Kreissegment** genannt.

Zur Berechnung des gesuchten **kleineren** Segments ABC hat man nach vorstehender Formel:

$Sgt. = \frac{r^2}{2}\left(\frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180^0} - \sin \alpha\right)$ (s. Formel 22, Seite 32)

die Gleichung:

$1) \ldots Sgt. = \frac{65^2}{2}\left(\frac{\alpha^0 \cdot \pi}{180^0} - \sin \alpha\right)$

Hülfsrechnungen.

1). $\alpha = 73^\circ 25'$
$= 73 \,.\, 60' + 25'$
$= 4380' + 25'$
$= 4405'$

ebenso ist: $180^\circ = 180 \,.\, 60' = 10800'$

2). $\frac{\alpha^0 \pi}{180^0} = \frac{4405 \,.\, 3{,}14 \ldots.}{10800}$

$log \frac{\alpha^0 \,.\, \pi}{180^0} = log\, 4405 + log\, 3{,}14 \ldots. - log\, 10800$

Nun ist: $log\, 4405 = 3{,}6439459$
$+ log\, 3{,}14 \ldots (\pi) = 0{,}4971499$ (Erkl. 17, S. 81)
$4{,}1410958$
$- log\, 10800 = -4{,}0334238$
$log \frac{\alpha \,.\, \pi}{180} = 0{,}1076720$
6508
212
203,4

mithin:
$\frac{\alpha^0 \pi}{180^0} = 1{,}28136$

3). $log\, sin\, 73^\circ 25' = 9{,}9815494 - 10$ (Erkl. 7, S. 23)
oder: $= 0{,}9815494 - 1$
5468
26
27

mithin:
$sin\, 73^\circ 25' = 0{,}958406$ (Erkl. 23)

4. $log\, 0{,}161477 = 0{,}2080918 - 1$ (Erkl. 20, S. 15)
$+ 188$
$= 0{,}2081106 - 1$

Erkl. 23. Man findet den Nummerus zu dem Logarithmus mit einer **negativen** Kennziffer, indem man den Nummerus ohne Rücksicht auf diese **negative** Kennziffer der Tafel entnimmt und dem so gefundenen Nummerus soviele Nullen voranschreibt, als die negative Kennziffer **Einheiten** enthält, alsdann das erste dieser Nullen durch ein Decimalkomma abtrennt (siehe: Die Logarithmen).

In dieser Gleichung ist der Winkel α noch unbekannt und muss zunächst bestimmt werden.

In dem gleichschenkligen Dreieck MAB steht die Halbierungslinie MD des Winkels α senkrecht auf der Linie AB ($= s = 77{,}70644$ m) und halbiert dieselbe; man hat somit in dem rechtwinkligen Dreieck MAD, die Relation:

$$sin \frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{AM} = \frac{\frac{s}{2}}{r} = \frac{s}{2r} \quad \text{oder:}$$

$$sin \frac{\alpha}{2} = \frac{77{,}70644}{2 \,.\, 65}$$

$$2) \ldots sin \frac{\alpha}{2} = \frac{77{,}70644}{130}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, sin \frac{\alpha}{2} = log\, 77{,}70644 - log\, 130$$

Nun ist:

$log\, 77{,}70644 = 1{,}8904546$
$+ 22$
$2{,}2$
$(+1)\, 1{,}8904570\, (-1)$ (Erkl. 3, Seite 21)
$- log\, 130 = -2{,}1139434$
$0{,}7765136 - 1$
$+ 10$ (Erkl. 21, S. 15)

$log\, sin \frac{\alpha}{2} = 10{,}7765136 - 1$ oder:

$log\, sin \frac{\alpha}{2} = 9{,}7765136$

mithin: $\frac{\alpha}{2} = 36^\circ 42' 30''$ oder:

3). . . . . $\alpha = 73^\circ 25'$

Setzt man diesen Wert für α in Gleichung 1) ein und drückt in dem Bruche: $\frac{\alpha^0 \pi}{180^0}$ sowohl α als auch 180° in ein **gleiches Mass**, z. B. in Minuten aus, und berechnet diesen Bruch, so erhält man nach den Hülfsrechnungen 1) und 2):

$$Sgt. = \frac{65^2}{2} (1{,}28136 - sin\, 73^\circ 25')$$

$$Sgt. = \frac{65^2}{2} (1{,}28136 - 0{,}958406) \text{(Hülfsr. 3)}$$

oder:

$$Sgt. = \frac{65^2}{2} \cdot 0{,}322954 = 65^2 \,.\, 0{,}161477$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, Sgt. = 2 \,.\, log\, 65 + log\, 0{,}161477$$

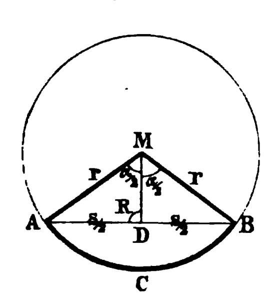
Nun ist: $log\,65 = 1{,}8129134$
$.2$
$3{,}6258268$
$+log\,0{,}161477 = 0{,}2081106-1$ (Hülfsr. 4).
$log\,Sgt. = 3{,}8339374-1$

oder: $log\,Sgt. = 2{,}8339374$
9372
mithin: 2
$\underline{Sgt. = 682{,}2404\,qm}$ 2,5

Aufgabe 16. In einem Kreise hat eine Sehne von 6 m einen 4 m langen Abstand vom Mittelpunkte, wie gross ist der zu dieser Sehne gehörige Kreis-**Sektor?**

Gegeben: $AB = s = 6\,m$
$MD = 4\,m$
Gesucht: F, Inhalt des Sektors $MACB$.

Figur 32.



Auflösung.

Zur Berechnung des Inhaltes eines **Kreissektors** (Kreisausschnittes) sind aus der Planimetrie 2 Formeln bekannt:

1) . . . $Sektor = \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot r^2 \pi$ (siehe Erkl. 18, Seite 31)

2) . . . $Sektor = \frac{r \cdot bog\,ACB}{2}$ (siehe Erkl. 21, Seite 34)

Benutzt man zur Auflösung der gestellten Aufgabe, die erste dieser Formeln, nämlich:

1) . . . $Sektor = \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot r^2 \pi$

so ist sofort ersichtlich, dass zunächst der zu dem Sektor gehörige Centriewinkel α und der Radius r des zugehörigen Kreises gesucht werden müssen.

Für den Winkel α hat man in dem rechtwinkligen Dreieck MDA, die Relation:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{AD}{MD}$$ oder mit Rücksicht der gegebenen Zahlen:

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{6}{2}}{4} = \frac{3}{4}$$

Nach Hülfsr. 1) erhält man somit:

$$\frac{\alpha}{2} = 36^0\,52'\,12''$$ oder:

a) . . . $\underline{\alpha = 73^0\,44'\,24''}$

Ferner hat man zur Berechnung des Radius r, in dem rechtwinkligen Dreieck MAD, nach dem pythagoreischen Lehrsatze, die Relation:

Hülfsrechnung.

1). $log\,tg\,\frac{\alpha}{2} = log\,3 - log\,4$

Nun ist: $log\,3 = 0{,}4771213$ (+1) (−1) (Erkl. 8, S. 21)
$-\,log\,4 = -\,0{,}6020600$
$0{,}8750613-1$
$+\,10$ (Erkl. 21, S. 15)
$log\,tg\,\frac{\alpha}{2} = 9{,}8750613$
0541
mithin: 72
87,8

$\frac{\alpha}{2} = \underline{36^0\,52'\,12''}$

$$\overline{MA}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{MD}^2 \text{ oder:}$$

$$r^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4^2$$

$$r^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$$

mithin:

$$r = \pm\sqrt{25} \text{ oder:}$$

b) . . . $\underline{r = 5\,\text{m}}$

Setzt man die für α und r gefundenen Werte in die Gleichung 1) ein und drückt zugleich α als auch 360° in ein und dasselbe Mass, z. B. in Minuten aus, so erhält man nach Hülfsrechnung 2):

$$Sektor = \frac{22122 \,.\, 5^2 \,.\, \pi}{5 \,.\, 21600} = \frac{22122 \,.\, 5 \,.\, \pi}{21600}$$

oder:

A). . . $Sektor = \frac{110610 \,.\, \pi}{21600}$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\,Sekt. = log\,110610 + log\,\pi - log\,21600$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\,110610 &= 5{,}0437954 \\ + log\,\pi\,(3{,}14...) &= 0{,}4971499 \text{ (Erkl. 17, S. 31)} \\ &\ 5{,}5409443 \\ - log\,21600 &= -4{,}3344538 \\ log\,Sektor &= 1{,}2064905 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r} 4751 \\ \hline 154 \\ 135{,}5 \\ \hline 18{,}5 \\ 18{,}9 \end{array}$$

mithin:

c) . . . $\underline{Sektor = 16{,}08757\,\text{qm}}$

Benutzt man zur Auflösung der Aufgabe die zweite der angegebenen Formeln, nämlich:

2) . . . $Sektor = \frac{r \,.\, bog\,ACB}{2}$ (siehe Erkl. 21, Seite 34)

so hat man, da $r = 5\,\text{m}$ bereits gefunden wurde, noch den Bogen ACB zu berechnen, und zwar muss dieser Bogen nach der Entwicklung dieser Formel in in der Erkl. 21, Seite 34, in **Längeneinheiten** (hier in Meter) ausgedrückt werden.

Dies geschieht wie folgt:

Hülfsrechnung.

2). $\alpha = 73^\circ\, 44'\, 24''$

$$= 73 \,.\, 60' + 44' + \frac{24'}{60}$$

$$= 4380' + 44' + \frac{2'}{5}$$

$$= 4424\,\frac{2'}{5}$$

$$= \frac{22122'}{5}$$

ebenso ist:

$$360^\circ = 360 \,.\, 60' = 21600'$$

Nach der Erkl. 19, Seite 32, besteht die Proportion:

$$bog\,ACB : 2r\pi = \alpha^0 : 360^0$$

(siehe auch Aufgabe 18)

oder für α den bereits gefundenen Wert eingesetzt:

$$bog\,ACB : 2r\pi = 73^0 44' 24'' : 360^0$$

oder nach der Hülfsrechnung 2):

$$bog\,ACB : 2r\pi = \frac{22122}{5} : 21600$$

mithin ist:

$$bog\,ACB = \frac{2r \,.\, \pi \,.\, 22122}{21600 \,.\, 5} = \frac{2 \,.\, 5 \,.\, \pi \,.\, 22122}{21600 \,.\, 5}$$

$$bog\,ACB = \frac{2 \,.\, \pi \,.\, 22122}{21600}$$ Meter; diesen Wert für $bog\,ACB$ in vorstehende Gleichung 2) substituiert, gibt:

$$Sektor = \frac{r \,.\, 2 \,.\, \pi \,.\, 22122}{2 \,.\, 21600}$$ oder:

$$Sektor = \frac{5 \,.\, \pi \,.\, 22122}{21600}$$

$$\text{B)} \ldots\; Sektor = \frac{110610 \,.\, \pi}{21600}$$

Man hat somit für den Sektor denselben Ausdruck, wie unter der Gleichung A).

Aufgabe 17. Von drei Kreisen mit den Halbmessern 1, 2, 3 Meter berühren sich je zwei von aussen. Wie gross ist die zwischen ihnen liegende Fläche?

Erkl. 24. Ein planimetrischer Lehrsatz, heisst:

„Berühren sich zwei Kreise (von aussen oder von innen), so liegt der Berührungspunkt der beiden Kreise auf der Verbindungslinie der Mittelpunkte (der Centralen) dieser beiden Kreise.“

Auflösung.

Zur Berechnung des Flächenstücks ABC, Figur 33, welches zwischen den drei sich von aussen berührenden Kreisen liegt, dient folgende Betrachtung.

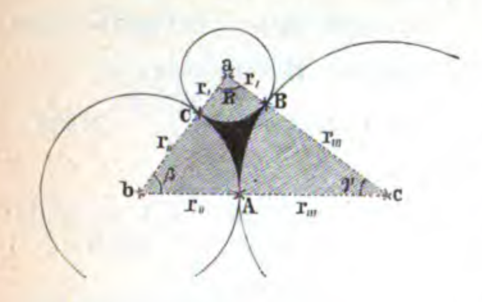
Nach der Erkl. 24 liegen die Punkte A, B und C auf den Seiten des **Dreiecks** abc, welches durch die Mittelpunkte der drei sich von aussen berührenden Kreisen bestimmt ist.

Man hat somit für die Berechnung des Flächenstücks ABC, die Gleichung:

$$1) \ldots\; F.\,ABC = \triangle abc - (Sektor\; aBC + Sektor\; bAC + Sektor\; cBA)$$

Nun ist das Dreieck abc ein bei a **rechtwinkliges**, weil die Dreiecksseiten:

Figur 33.



Erkl. 25. Die Formel zur Berechnung des Inhalts J eines Kreises, dessen Radius $= r$, heisst:

$$J = r^2 \pi.$$

Hülfsrechnungen.

1). $\log \sin \beta = \log 4 - \log 5$

Nun ist:
$$\log 4 = \overset{(+1)}{0},60206\overset{(-1)}{0}0 \quad \text{(Erkl. 3, S. 21)}$$
$$-\log 5 = -0,6989700$$
$$0,9030900-1$$
$$+10 \quad \text{(Erkl. 21, S. 15)}$$
$$\log \sin \beta = 9,9030900$$
0768
132
126,4

mithin:

$\underline{\beta = 53^0\, 7'\, 48''}$

2). $\beta = 53^0\, 7'\, 48''$

$$= 53 \,.\, 60' + 7' + \frac{48}{60}$$
$$= 3180' + 7' + \frac{4}{5}$$
$$= 3187 \frac{4}{5}$$
$$= \frac{15939'}{5}$$

ebenso ist:

$$360^0 = 360 \,.\, 60' = 21600'$$

$$ab = aC + bC = 1 + 2 = 3\text{m}$$
$$ac = aB + cB = 1 + 3 = 4\text{m}$$
$$bc = bA + cA = 2 + 3 = 5\text{m}$$

sind, mithin zwischen diesen Dreiecksseiten die Relation:

$$\overline{bc}^2 = \overline{ac}^2 + \overline{ab}^2 \text{ oder:}$$
$$5^2 = 4^2 + 3^2 \text{ (d. i. } 25 = 25)$$

besteht; denn nach der **Umkehrung** des pythagoreischen Lehrsatzes ist ein Dreieck ein **rechtwinkliges**, wenn die

Summe der Quadrate über zwei seiner Seiten gleich dem Quadrate über der dritten Seite ist.

Der Inhalt des Dreiecks abc ist sonach, wenn man die eine Kathete ac als Grundlinie, die andere Kathete ab als Höhe betrachtet:

$$\triangle abc = \frac{ac \,.\, ab}{2} = \frac{4 \,.\, 3}{2} \text{ oder:}$$

a). . . $\underline{\triangle abc = 6\text{qm}}$

Dann ist der Sektor aBC, weil der zugehörige Centriewinkel $BaC = 90^0$ $(= R)$ ist, ein **Quadrant**, mithin gleich dem 4ten Teile des ganzen Kreises um a; also:

$$\text{Sektor } aBC = \frac{1}{4} \cdot r_{,}^2 \cdot \pi \text{ (Erkl. 25)}$$

oder, da $r_{,} = 1\text{m}$ ist:

$$\text{Sektor } aBC = \frac{1}{4} \cdot 1^2 \cdot \pi \text{ und}$$

b). . . $\underline{\text{Sektor } aBC = \frac{\pi}{4}\text{qm}}$

Ferner hat man für den Sektor bAC nach der Erkl. 18, S. 31, die Relation:

$$\text{Sektor } bAC = \frac{\beta^0}{360^0} r_{,,}^2 \pi$$

Zur Berechnung des noch unbekannten Winkels β kann man in dem rechtwinkligen Dreieck abc, die Relation:

$$\sin \beta = \frac{ac}{bc}, \text{ beziehungsweise}$$
$$\sin \beta = \frac{4}{5} \text{ benutzen.}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 1) und 2) erhält man, mit Rücksicht,

dass $r_{,,} = 2$ m ist, für den Sektor bAC, die Gleichung:

c). . . $Sektor\,bAC = \frac{15939 \cdot 2^2 \cdot \pi}{5 \cdot 21600}$

Schliesslich hat man für den Sektor cAB nach der Erkl. 18, Seite 31, die Relation:

$$Sektor\,cAB = \frac{\gamma^0}{360^0} \cdot r_{,,,}^2 \cdot \pi$$

Zur Berechnung des noch unbekannten Winkels γ kann man in dem rechtwinkligen Dreieck abc die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{ab}{bc}, \text{ beziehungsweise}$$

$$\sin\gamma = \frac{3}{5} \text{ benutzen.}$$

Nach nebenstehenden Hülfsrechnungen 3) und 4) erhält man, mit Rücksicht, dass $r_{,,,} = 3$ m ist, für den Sektor cAB, die Gleichung:

d). . . $Sektor\,cAB = \frac{11061 \cdot 3^2 \cdot \pi}{5 \cdot 21600}$

Setzt man endlich in Gleichung 1) die Werte aus den Gleichungen a, b, c und d) ein, so erhält man:

$$F.ABC = 6 - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{15939 \cdot 2^2 \cdot \pi}{5 \cdot 21600} + \frac{11061 \cdot 3^2 \cdot \pi}{5 \cdot 21600}\right]$$

oder:

$$F.ABC = 6 - \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{15939 \cdot 4 + 11061 \cdot 9}{5 \cdot 21600}\right)$$

$$F.ABC = 6 - \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{63756 + 99549}{5 \cdot 21600}\right)$$

$$F.ABC = 6 - \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{163305}{5 \cdot 21600}\right)$$

$$F.ABC = 6 - \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{32661}{21600}\right)$$

$$F.ABC = 6 - \pi\left(\frac{5400 + 32661}{21600}\right)$$

$$F.ABC = 6 - \pi \cdot \frac{38061}{21600}$$

mithin nach Hülfsrechnung 5):

$$F.ABC = 6 - 5{,}53575$$

oder:

$$F.ABC = \underline{0{,}46425\,\text{qm}}$$

Hülfsrechnungen.

3). $\log\sin\gamma = \log 3 - \log 5$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 3 &= \overset{(+1)}{0{,}4771213} \quad \text{(Erkl. 8, S. 21)} \\ -\log 5 &= -0{,}6989700 \\ & \quad 0{,}7781513 - 1 \\ & \quad +10 \quad \text{(Erkl. 21, S. 15)} \\ \log\sin\gamma &= 9{,}7781513 \\ & \quad 1467 \\ & \quad 46 \\ & \quad 56 \end{aligned}$$

mithin:

$\underline{\gamma = 36^0\,52'\,12''}$ (siehe Erkl. 26)

4).
$$\begin{aligned} \gamma &= 36^0\,52'\,12'' \\ &= 36 \cdot 60' + 52' + \frac{12'}{60} \\ &= 2160 + 52 + \frac{1}{5} \\ &= 2212\frac{1}{5} \\ &= \frac{11061}{5} \end{aligned}$$

ebenso ist:

$$360^0 = 360 \cdot 60' = 21600'$$

Erkl. 26. Die beiden spitzen Winkel β und γ des rechtwinkligen Dreiecks abc sind unabhängig von einander berechnet worden. Zur Kontrolle für die Richtigkeit der Berechnungen von β und γ, dient die Gleichung:

$$\beta + \gamma = 90^0$$

nun ist:
$$\begin{aligned} \beta &= 53^0\;\;7'\,48'' \\ \gamma &= 36^0\,52'\,12'' \\ \beta + \gamma &= 90^0 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung.

5). $\log\frac{\pi \cdot 38061}{21600} = \log\pi + \log 38061 - \log 21600$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log\pi &= 0{,}4971499 \quad \text{(Erkl. 17, Seite 31)} \\ \log 38061 &= 4{,}5804802 \\ & \quad 5{,}0776301 \\ -\log 21600 &= -4{,}3344538 \\ & \quad 0{,}7431763 \\ & \quad 1725 \\ & \quad 38 \\ & \quad 39{,}5 \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\pi \cdot 38061}{21600} = \underline{5{,}53575}$$

Aufgabe 18. Aus dem Radius $r = 17$m und der Länge einer Sehne $s = 16$m eines Kreises den zu dieser Sehne gehörigen **Bogen**

a). in Graden und

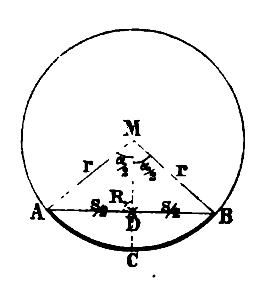
b). in Längeneinheiten

zu berechnen.

Gegeben: $r = 17$m
$s = 16$m

Gesucht: a). *bog ACB* in Graden,
b). „ „ in Längeneinheiten.

Figur 34.



Auflösung.

1). Verbindet man in Figur 34 die Endpunkte A und B der gegebenen Sehne s mit dem Mittelpunkte M, so schliessen diese Verbindungslinien den zu der gegebenen Sehne, bezw. zu dem gesuchten Bogen ACB gehörigen Centriewinkel α ein.

Dieser Winkel α ist das **Mass** des in **Grade** ausgedrückten Bogens.

Zur Berechnung des Winkels α dient in dem rechtwinkligen Dreieck MAD, die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r = \frac{s}{2r}, \text{ bezw.}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{16}{2 . 17} \text{ oder:}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{17}$$

Nach nebenstehender Hülfsrechnung 1) erhält man:

$$\frac{\alpha}{2} = 28^\circ 4' 21'' \text{ oder:}$$

$$\alpha = 56^\circ 8' 42''$$

Da dieser Winkel das **Mass** des Bogens ACB ist, so ist der Bogen ACB **in Grade** ausgedrückt

$$= \underline{56^\circ 8' 42''}$$

Hülfsrechnung.

1). $\log\sin\frac{\alpha}{2} = \log 8 - \log 17$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 8 &= \overset{(+1)}{0},903090\overset{(-1)}{0} \quad \text{(Erkl. 8, S. 21)} \\ -\log 17 &= -1,2304489 \\ &\quad\; 0,6726411-1 \\ &\quad +10 \quad \text{(Erkl. 21, S. 15)} \\ \log\sin\frac{\alpha}{2} &= 9,6726411 \\ &\qquad\quad 6373 \\ &\qquad\quad\;\; 38 \\ &\qquad\quad\;\; 39,5 \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\alpha}{2} = \underline{28^0 4' 21''}$$

2). Soll ferner der Bogen ACB in dieselben **Längeneinheiten** wie der Radius, nämlich in **Meter**, ausgedrückt werden, so kann dies mit Hülfe der Proportion:

$$2r\pi : bog\,ACB = 360^\circ : \alpha^\circ$$

(siehe Erkl. 19, Seite 32)

geschehen, wenn man für r die gegebene Länge $= 17$m und für α den bereits berechneten Centriewinkel: $56^\circ 8' 42''$ einführt, dabei aber die Glieder des Verhältnisses: $\frac{360^0}{\alpha^0}$ in ein und dasselbe **Mass**, z. B. in Minuten, ausdrückt.

Hülfsrechnung.

2). $\alpha = 56^0\,8'\,42''$

$= 56 \,.\, 60' + 8' + \frac{42'}{60}$

$= 3360' + 8' + \frac{7'}{10}$

$= 3368 \frac{7'}{10}$

$= \frac{33687'}{10}$

ebenso ist:

$360^0 = 360 \,.\, 60' = 21600'$

Nach Hülfsrechnung 2) erhält man:

$$2 \,.\, 17 \,.\, \pi : bog\, ACB = 21600 : \frac{33687}{10}$$

oder:

$$bog\, ACB = \frac{2 \,.\, 17 \,.\, \pi \,.\, 33687}{21600 \,.\, 10}$$

oder:

$$bog\, ACB = \frac{34 \,.\, \pi \,.\, 33687}{216000}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\, bog\, ACB = log\, 34 + log\, \pi + log\, 33687 - log\, 216000$$

Nun ist: $log\, 34 = 1{,}5314789$
$+ log\, \pi\, (3{,}14...) = 0{,}4971499$ (Erkl. 17, S. 31)
$+ log\, 33687 = 4{,}5274623$
$6{,}5560911$
$- log\, 216000 = -\, 5{,}3344538$
$log\, bog\, ACB = 1{,}2216373$
6229
144
130

mithin:
$bog\, ACB = 16{,}6585$

Der in **Längeneinheiten** ausgedrückte Bogen, ist somit
$= \underline{16{,}6585}$ Meter.

Aufgabe 19. Wie dick muss ein Leuchtturm sein, um in einer Entfernung von $e = 5$ Seemeilen noch gesehen zu werden, wenn der Sehwinkel α, das ist der scheinbare Durchmesser des Turmes, 32″ betragen darf?

Gegeben: $e = 5$ Seemeilen
$\alpha = 32''$
Gesucht: der Durchmesser $AC = d$.

Auflösung.

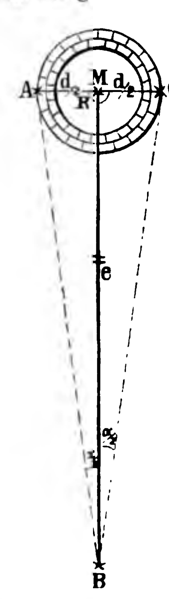
Wegen der grossen Entfernung ($e =$ 5 Seemeilen) des Beobachters B, Figur 35, vom Mittelpunkte M (Erkl. 27) des Turmes im Verhältnisse zu dessen Durchmesser AC, bezw. dessen Radius MA, welcher nur einige Meter betragen kann, darf man ohne einen nennenswerten Fehler zu begehen (siehe nachstehende Anmerkung 4) annehmen, dass die Sehstrahlen BA und BC vom Auge des Beobachters, tangential nach dem Turme gezogen, Tangenten an den **Endpunkten** des **Durchmessers** AC sind.

Da ferner die Tangenten, welche man von einem Punkte an einen Kreis ziehen kann, **gleich lang** sind, so ist in der

Erkl. 27. Unter **Entfernung** eines Punktes von einem **runden** Gegenstand (wie der Turm in seinem Querschnitt) versteht man fast ausschliesslich die Verbindungslinie des Punktes mit dem Mittelpunkte des gedachten runden Gegenstandes.

Erkl. 28. Unter **Seh-** oder **Gesichtswinkel** — auch **scheinbaren Grösse** — versteht man den Winkel, welchen die Sehstrahlen miteinander bilden, die man sich vom Auge nach den äussersten Konturen des betreffenden Gegenstandes gezogen denken kann.

Figur 35.
Querschnitt des gedachten Turmes.



Erkl. 29. Da der gesuchte Durchmesser d des Turmes jedenfalls in **ein kleineres Mass** als Seemeilen, z. B. in Meter, ausgedrückt werden soll, so muss auch die Entfernung e in Meter ausgedrückt werden.

Nun ist für alle Staaten:

1 Seemeile = 1,855 Kilometer oder
= 1855 Meter, mithin sind
5 Seemeilen = 5 . 1855 = 9275 Meter.

Erkl. 30. In den kleineren **logarithmisch-trigonometrischen** Tafeln sind die Logarithmen von kleinen Winkeln, wie hier z. B. 16″, nicht mehr genau angegeben. In den meisten grösseren (siebenstelligen) Logarithmentafeln sind deshalb besondere Tabellen enthalten, welche die Logarithmen der trigonom. Funktionen für kleine Winkel von **Sekunde zu Sekunde** angeben. Eine solche Tabelle wurde hier zum Aufschlagen von: $log\,tg\,16''$ benutzt (siehe Anmerkung 5).

Figur 35 das Dreieck ABC ein **gleichschenkliges.**

In diesem gleichschenkligen Dreieck BAC ist die Höhe $BM = e = 5$ Seemeilen, die Basis AC = dem gesuchten Durchmesser d des Turmes und der Sehwinkel α (Erkl. 28) an der Spitze $B = 32''$. Zwischen diesen Stücken besteht die Relation:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} : e = \frac{d}{2e}$$

mithin ist:

$$1) \ldots\ldots d = 2 . e . tg\frac{\alpha}{2}$$

oder mit Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte und der Erkl. 29:

$$d = 2 . 9275 . tg 16''$$

$$2) \ldots\ldots d = 18550 . tg 16''$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\,d = log\,18550 + log\,tg\,16''$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\,18550 &= 4{,}2683439 \\ +\,log\,tg\,16'' &= 5{,}8896949-10 \quad \text{(Erkl. 30)} \\ \hline log\,d &= 10{,}1580388-10 \end{aligned}$$

oder: $log\,d = 0{,}1580388$

0306
82
90,6

mithin:

$$d = 1{,}43893.$$

Der gesuchte Durchmesser, bezw. die Dicke AC des Turmes, ist somit

= 1,439 m.

Anmerkung 4. **Streng genommen**, gehen die Tangenten, bezw. Sehstrahlen BA und BC, welche man sich von dem Beobachtungspunkte B, Figur 36, an die Peripherie des Kreises um M (bezw. des Querschnittes des Turmes) gezogen denkt, **nicht** durch die Endpunkte eines

Durchmessers, weil sonst diese Sehstrahlen **parallel** sein müssten, sondern es entstehen die beiden, bei A und C rechtwinkligen (kongruenten) Dreiecke: BMA und BMC. Die nebenstehende Figur 36 ist somit die **richtigere.** Dessenungeachtet ergeben die beiden Auffassungen sozusagen **dasselbe Resultat.**

Denn in dem rechtwinkligen Dreiecke BMA, ist:

$$sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} : e = \frac{d}{2e} \text{ oder:}$$

a) . . . $d = 2 \,.\, e \,.\, sin\frac{\alpha}{2}$

oder nach Erkl. 29:

$$d = 2 \,.\, 9275 \,.\, sin\, 16''$$

mithin:

b) . . . $d = 18550 \,.\, sin\, 16''$

Weil aber der **Sinus** und die **Tangente** von sehr kleinen Winkeln, wie hier $= 16''$, auf viele Decimalstellen übereinstimmen (siehe Anmerkung 5), so kann, ohne die erforderliche Genauigkeit der auszuführenden Berechnung zu beeinträchtigen, sowohl diese Gleichung b):

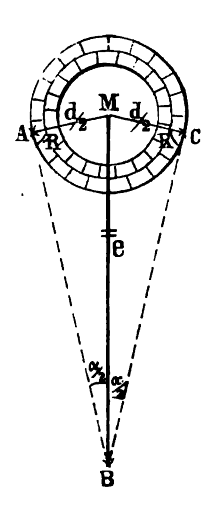
$$d = 18550 \,.\, sin\, 16''$$

als auch die in vorhergehender Auflösung entwickelte Gleichung 2):

$$d = 18550 \,.\, tg\, 16''$$

benutzt werden.


Figur 36.



Alle weitere ähnliche Aufgaben sollen stets nach der in Figur 36 angegebenen **richtigeren** Auffassung gelöst werden.

Anmerkung 5. Liegt keine Tabelle vor, welche die trigonometrischen, bezw. die logarithm.-trigonometrischen Funktionen von **Sekunde zu Sekunde** enthält, so kann man, wie folgt verfahren:

Ist α ein sehr kleiner Winkel (Sekunde), so stimmen — siehe Goniometrie: Berechnung der trigonometrischen Funktionen — in einer **gewissen Anzahl** von Decimalstellen: $sin\, \alpha$, $tg\, \alpha$ und $arcus\, \alpha$ (d. i. der zum Centriewinkel α gehörige Bogen in Längeneinheiten des betr. Radius ausgedrückt, wobei dieser Radius selbst gleich der Längeneinheit angenommen wird) überein.

Nun kann man sich den $arc\, 1''$ aus der Proportion:

$$2r\pi : bog\, \alpha = 360^0 : \alpha^0$$

(siehe Erkl. 19, Seite 32)

beziehungsweise, da $r = 1$ sein soll, aus der Proportion:

$$2\pi : arc\,1'' = 360.60.60'' : 1''$$

berechnen, und man erhält:

$$arc\,1'' = \frac{2\pi.1}{360.60.60} = \frac{2.3{,}14....}{360.60.60}$$

oder:

$$arc\,1'' = \frac{3{,}14....}{648000} = 0{,}00000484813....$$

Verwandelt man den Decimalbruch 0,00000484813.... in einen gewöhnlichen Bruch, dessen Zähler = 1 ist, so erhält man:

$$1) \ldots arc\,1'' = \frac{1}{206264{,}8}$$

Analog würde man, z. B. für *arc* 16″, erhalten: $= \frac{1.16}{206264{,}8}$

Somit kann man z. B. schreiben.

$$arc\,16'' = 16.arc\,1''$$

und hiernach:

$$sin\,16'' = 16.sin\,1'' = 16.arc\,1''$$

ebenso:

$$tg\,16'' = 16.tg\,1'' = 16.arc\,1''$$

Wobei man sich den *arc* 1″ als eine **konstante** Grösse, nämlich $= \frac{1}{206264{,}8}$ und:

$$2) \ldots log\,206264{,}8 = \underline{5{,}3144251}$$

merken kann.

Berechnung des Ausdrucks:

$$d = 18550.tg\,16''$$ (siehe die Gleichung 2 in voriger Auflösung)

oder:

$$d = 18550.sin\,16''$$ (siehe die Gleichung b in Anmerkung 4)

nach nebenstehender Anmerkung 5:

$$d = 18550.16.tg1'' = 18550.16.sin1''$$

oder: $d = 18550.16.arc\,1''$

Für *arc* 1″ den Wert aus Gleichung 1 in Anmerkung 5 eingeführt, gibt:

$$d = 18550\cdot 16\cdot \frac{1}{206264{,}8}$$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$log\,d = log\,18550 + log\,16 - log\,206264{,}8$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} log\,18550 &= 4{,}2683439 \\ +\,log\,16 &= 1{,}2041200 \\ &\ 5{,}4724639 \\ -\,log\,206264{,}8 &= -\,5{,}3144251 \text{ (Gleich. 2, Anm. 5)} \\ log\,d &= \ 0{,}1580388 \end{aligned}$$

mithin:

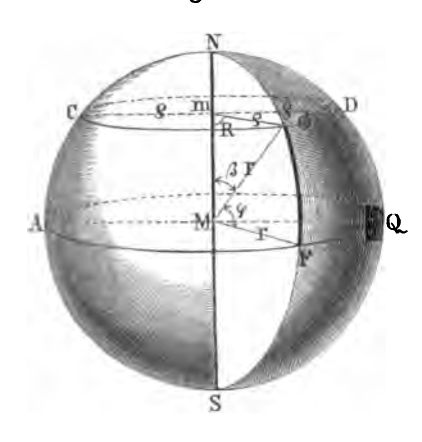
$d = \underline{1{,}439\text{m}}$, übereinstimmend mit der Lösung in voriger Aufgabe.

Aufgabe 20. In welcher geographischen Breite beträgt ein Grad des Parallelkreises 100 Kilometer, wenn der Halbmesser der Erde = 6377,4 Kilometer angenommen wird?

Auflösung.

Stellt in Figur 37 die Kugel um *M* die Erdkugel dar und ist der grösste Kreis *AQ* der Aequator, der hierzu parallele Kreis *CD* derjenige Parallelkreis von welchem $1^\circ = 100$ Kilometer beträgt, so ist nach Erkl. 31 der Winkel φ, weil er die Grösse des Bogens *OF*. in Graden ausgedrückt, bezw. die **geographische Breite** des Parallelkreises *CD* angibt, gesucht.

Figur 37.



Erkl. 81. Unter der **geographischen Breite** eines Ortes (bezw. des Parallelkreises CD) versteht man den Abstand jenes Ortes (bezw. eines Punktes dieses Parallelkreises) vom Aequator, und zwar gemessen durch den zwischen diesem Orte (bezw. zwischen einem Punkte des Parallelkreises) und dem Aequator gelegenen Bogen des durch jenen Ort (bezw. Punkt) gelegten **Meridians**.

Je nach der nördlichen oder südlichen Lage vom Aequator unterscheidet man **nördliche** oder **südliche** Breite. Die geographische Breite wird durch den griech. Buchstaben φ (Phi) bezeichnet (siehe: **Mathematische Geographie**).

Hülfsrechnung.

1). $-(\log 2 + \log \pi + \log 6377{,}4) =$

$\log 2 = 0{,}3010300$

$\log \pi = 0{,}4971499$ (Erkl. 17, S. 31)

$+ \log 6377{,}4 = 3{,}8046437$

$= -4{,}6028236$

Nach der Figur 37, ist:

1) . . . . . $\varphi = 90^0 - \beta$

Den Winkel β kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck MmO, nach der Relation:

2) . . . $\sin\beta = \frac{\varrho}{r}$ berechnen, da man den Radius ϱ des Parallelkreises CD, von welchem $1^0 = 100$ Kilometer sein soll, aus der Proportion:

$$2\varrho\pi : bog\, 1^0 = 360^0 : 1^0$$

(siehe Erkl. 19, S. 32)

beziehungsweise aus:

$$2\varrho\pi : 100 = 360 : 1$$

berechnen kann.

Hiernach erhält man:

$$2\varrho\pi = 360 . 100 \text{ oder:}$$

3). . . . . $\varrho = \frac{36000}{2\pi}$ Diesen Wert für ϱ in Gleichung 2) substituiert, gibt:

$$\sin\beta = \frac{36000}{2\pi . r}$$ oder für den Radius r der Erde $= 6377{,}4$ km gesetzt:

4) . . . $\sin\beta = \frac{36000}{2 . \pi . 6377{,}4}$

Da ferner: $\varphi + \beta = 90^0$ ist, das heisst α und β **Complementwinkel** sind, so kann man nach dem Satze 1, Seite 5:

$$\sin\beta = \cos\varphi \text{ setzen,}$$

und man erhält den Winkel φ direkt aus der Gleichung:

5) . . . $\cos\varphi = \frac{36000}{2 . \pi . 6377{,}4}$

Diese Gleichung logarithmiert, gibt:

$$\log\cos\varphi = \log 36000 - (\log 2 + \log \pi + \log 6377{,}4)$$

Nun ist:

$\log 36000 = \overset{(+1)}{4{,}5563025}$ $\overset{(-1)}{}$ (Erkl. 8, S. 21)

$-(\log 2 + \log\pi + \log 6377{,}4) = -4{,}6028236$

$0{,}9534789 - 1$

$+10$ (Erkl. 21, S. 15)

$\log\cos\varphi = 9{,}9534789$

$$log\,cos\,\varphi = 9{,}9534789$$
$$\begin{array}{r} 4751 \\ \hline 38 \\ 30{,}9 \\ \hline 7{,}1 \\ 7{,}2 \end{array}$$

mithin:

$$\varphi = 26^0\,3'$$
$$\underline{\quad -3{,}7''} \text{ (siehe Erkl. 10, S. 23)}$$
$$\varphi = 26^0\,2'\,56{,}3''$$

Die geographische Breite des gedachten Parallelkreises ist somit:

$26^0\ 2'\ 56{,}3''$

und zwar kann dies **nördliche** und **südliche** Breite sein (siehe Erkl. 31).

IV.

Anhang ungelöster Aufgaben.

Aufgabe 1. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks misst 8,2m, ein Schenkel 12,75m; wie gross sind dessen Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

Aufgabe 2. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks misst 7,45m, der Winkel an der Spitze 32⁰ 4′ 12,5″; wie gross ist der Inhalt des Dreiecks?

Aufgabe 3. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks misst 120,53m, ein ihr anliegender Winkel 32⁰ 12′ 8,7″; wie gross ist ein Schenkel und der Inhalt des Dreiecks?

Aufgabe 4. Die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks misst 80,45m, die zugehörige Höhe 95,635m; wie gross sind die Schenkel und die Winkel desselben?

Aufgabe 5. Wie gross ist der Inhalt eines regulären 8-Ecks, wenn der Radius des umschriebenen Kreises = 20,45m misst?

Aufgabe 6. Wie gross ist der Inhalt eines regulären 12-Ecks, wenn die Seite desselben = 7,53m lang ist?

Aufgabe 7. Wie gross ist der Inhalt eines regulären 11-Ecks, wenn der Radius des eingeschriebenen Kreises = 0,237m misst?

Aufgabe 8. Wie gross ist der Inhalt eines Kreissegments, wenn der Radius des zugehörigen Kreises 20,73cm und der zugehörige Centriewinkel 32⁰ 20′ misst?

Aufgabe 9. In einem Kreise ist eine Sehne 21m, der zugehörige Centriewinkel 24⁰ 16′ 39″; wie gross ist der Radius des Kreises?

Aufgabe 10. Der zu einer Sehne gehörige Centriewinkel ist 47⁰ 28′ 46,6″, der Abstand dieser Sehne vom Mittelpunkte ist 5m; wie gross ist diese Sehne, der Radius des Kreises, das zugehörige Kreissegment und der zugehörige Kreissektor?

Aufgabe 11. Der Sehwinkel (die scheinbare Grösse) eines Körpers sei =3 5′. Wie vielmal übertrifft seine Entfernung seine wahre Grösse?

Aufgabe 12. Wie gross ist jeder Grad eines Parallelkreises der Erde, welcher eine geographische Breite $\varphi = 51^0\,41'$ hat? Der Umfang des Aequators sei = 5400 geogr. Meilen.

Aufgabe 13. Von einem gleichschenkligen || Trapez (Antiparallelogramm) ist der Flächeninhalt $F = 3{,}48$qm, die beiden parallelen Seiten seien bezw. $a = 5$ und $b = 3$m. Wie gross sind die Winkel des || Trapezes?

Aufgabe 14. Wie gross muss der Durchmesser eines Luftballons sein, wenn er in einer Entfernung von 10000m von einem unbewaffneten scharfen Auge noch gesehen werden soll? (Sehwinkel 40″).

Aufgabe 15. Den Inhalt eines Kreisstückes zu berechnen, welches zwischen einem Durchmesser von 5m und einer hierzu parallelen Sehne von 3m Länge, liegt.

toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwerthungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Dieses Werk, welches durch sein **fortlaufendes** Erscheinen **stets auf der Höhe der Zeit steht,** kann Jedermann empfohlen werden — jedes Heft hat einen **reellen Wert** und bildet sozusagen ein abgeschlossenes Ganze. — Es wird mit den Jahren ein **mathematisch-naturwissenschaftliches Lexikon,** in welchem die **mannigfaltigsten, praktischsten Verwertungen — die Früchte der mathemathischen Disciplinen** — von Stufe zu Stufe aufzufinden sind.

Der Verfasser hat somit eine **gute, brauchbare und praktische mathemathische - technische - naturwissenschaftliche - 25 - Pfennig - Bibliothek** geschaffen.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart, Oktober 1881. — Die Verlagshandlung.

Inhalts-Verzeichnis.

Am Schlusse der nachstehend verzeichneten Hefte, ausgenommen Heft 10 und 14, ist je eine Anzahl ungelöster Aufgaben angeführt. Die Auflösungen derselben sollen — analog den entsprechenden, gelösten Aufgaben — gesucht werden, wodurch bezweckt wird, dass der Studierende sich zum selbstständigen Arbeiter heranbildet. Die Lösungen dieser Aufgaben werden später in besonderen Heften zur Ausgabe gelangen.

Der Inhalt jedes Heftes erleidet nur bei Raummangel eine kleine Abänderung, resp. Kürzung.

einer konstant. Grösse, eines Produktes, eines Bruches, einer Exponentialgrösse, einer logarithmischen Grösse, der trig. und cyklometr. Funktionen etc. — mit vielen gelösten und Anhängen von ungelösten Aufgaben.

Heft 7. Algebra: Die Proportionen. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über Verhältnisse und Proportionen. — Die arithm. Proportionen (Fragen mit Antworten). — Die geometr. Proportionen — Lehrsätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die Summen u. Differenzensätze — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Die laufenden Proportionen. — Gegebene Proport. in laufende zu verwandeln — (Fragen mit Antworten) — Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 8. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. (1. Teil.)

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Konstruktion planimetr. Aufgaben durch die algebraische Analysis. — Einfache algebr. Ausdrücke — Hülfssätze — Konstruktion der einfachen algebr. Ausdrücke — Konstruktion der vierten, dritten u. mittleren Proportionalen. — Konstruktion zusammengesetzter algebraischer Ausdrücke. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 9. Algebra: Die Reihen. (1 Teil.) Die niederen arithmet. Reihen (arithmetische Progressionen).

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Reihen im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: arithmet. Reihen, — Entwicklung der Formeln, Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Prakt. Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgab.

Heft 10. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs-(Taktions-) Problem. (1. Teil.)

Inhalt: Vorbemerkung. — Aufstellung der 10 mögl. Fälle. — Die 10 mögl. Fälle mit vielen sich daraus ergebenden besonderen Kreiskonstruktionsaufgaben.

Heft 11. Algebra: Die Reihen. (2. Teil.) Die geometrischen Reihen.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: geometrischen Reihen. — Entwicklung der Formeln — Aufstellung der 20 verschied. Fälle. — Allgemeine Aufgaben über die 20 verschied. Fälle. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 12. Stereometrie: Körperberechnungen. (2. Teil.) Die Pyramide.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Definition, Erzeugung, Bestandteile etc. der Pyramide im allgemeinen. — Erläuternde Fragen mit Antworten über die: Berechnung der Pyramiden, besonders der geraden Pyramiden; — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über die gerade Pyramide. — Anhang ungelöst. Aufgab.

Heft 13. Stereometrie: Körperberechnungen. (3. Teil.) Der Pyramidenstumpf.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über die Definition, Eigenschaften, Bestandteile etc. des Pyramidenstumpfes im allgemeinen. — Erläut. Fragen mit Antworten, über die: Berechnung des Pyramidenstumpfes — besonders d. geraden Pyramidenstumpfes — Entwicklung der vorkommenden Formeln. — Prakt. Aufgaben über den geraden Pyramidenstumpf. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 14. Planimetrie: Konstruktions-Aufgaben. Das Apollonische Berührungs-(Taktions) Problem. (2. Teil.)

Heft 15. Trigonometrie: Berechnungs-Aufg. (2. Teil.) Das gleichschenklige Dreieck.

Inhalt: Erläut. Fragen mit Antworten, über die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks. — Aufgaben über die 5 mögl. Fälle. Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 16. Algebra: Zinseszinsrechg. (2. Teil.)

Inhalt: Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermehrt wird. — Praktische Aufgaben. — Entwicklung der Zinseszinsformeln, wenn am Ende eines jeden Jahres das auf Zinseszinsen stehende Kapital um eine gewisse Summe vermindert wird. — Praktische Aufgaben. — Anhang ungelöster Aufgaben.

Heft 17. Algebra: Die Reihen. (3. Teil.)

Inhalt: Gemischte praktische Aufgaben über die arithmetischen und geometrischen Reihen.

Heft 18. Stereometrie: Körperberechnungen. (4. Teil.) Der Cylinder.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Cylinder im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des Cylinders. — Praktische Aufgaben.

Heft 19. Stereometrie: Körperberechnungen. (5. Teil.) Der Kegel.

Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegel im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegels. — Praktische Aufgaben.

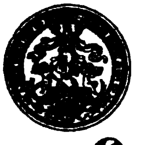
Heft 20. Stereometrie: Körperberechnungen. (6. Teil.) Der Kegelstumpf.

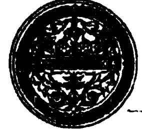
Inhalt: Erläuternde Fragen mit Antworten über den Kegelstumpf im allgemeinen. — Entwicklung der Formeln für Mantel, Oberfläche und Volumen des geraden Kegelstumpfes. — Praktische Aufgaben.

☛ **Inhalt von Heft 21—40 siehe Heft 28.**

Buchdruckerei von Hammer & Liebich in Stuttgart.

254. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. von Heft 27. — Seite 49—64. Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 27. — Seite 49—64. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Ueber die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks. — Aufstellung der diesbezüglichen trigonometrischen Sätze.

Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—160

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch** zu **verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16,** entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

5). Ueber die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

Frage 15. Auf welche Weise be-

Auflösung. Wie bereits in Antwort

Benachrichtigung.

Der vierte Bogen der „Ebenen Trigonometrie" schliesst sich nicht mehr genau an die früher ausgegebenen Bogen 1 bis 3 oder an die Hefte 4, 15 und 27 an, indem diese drei Hefte inzwischen in ganz neuer Bearbeitung erschienen sind. Die geehrten Abnehmer werden daher auf diese durchaus neu bearbeitete Auflage dieser drei Hefte mit der Bemerkung aufmerksam gemacht, dass sie, um eine Uebereinstimmung mit dem hiermit zur Ausgabe gelangenden vierten Bogen zu erzielen, dieselben in der neu bearbeiteten Auflage nachbeziehen können.

Die Verlagshandlung.

gegeben sein.

Der unter b) erwähnte zweite Nebenfall lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle weitere Nebenfälle zu:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

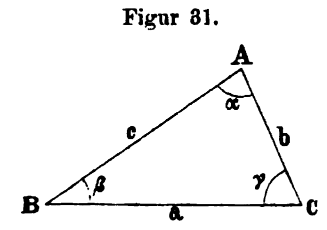
PROSPEKT.

gaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

5). Ueber die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks.

Frage 15. Auf welche Weise bezeichnet man in der ebenen Trigonometrie die Bestimmungsstücke eines schiefwinkligen Dreiecks?

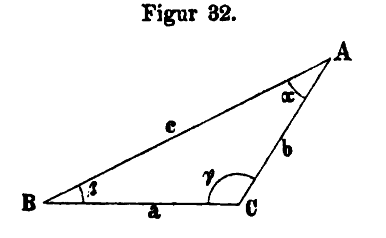


Figur 31.

Auflösung. Wie bereits in Antwort der Frage 5 angedeutet, bezeichnet man, siehe die Figuren 31 und 32, die Bestimmungsstücke eines schiefwinkligen Dreiecks wie folgt:

Die drei Seiten bezeichnet man mit den kleinen lateinischen Buchstaben a, b und c; die drei Ecken bezeichnet man mit den grossen lateinischen Buchstaben A, B und C, und zwar so, dass die Ecken mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten gleichnamige Buchstaben erhalten; die drei Winkel schliesslich bezeichnet man mit den griechischen Buchstaben α, β und γ, und zwar so, dass die Winkel mit den ihnen gegenüberliegenden Seiten ebenfalls gleichnamige Buchstaben erhalten.

Frage 16. Wieviele und welche Hauptfälle kommen bei der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks in bezug auf die gegebenen Bestimmungsstücke in Betracht?



Figur 32.

Antwort. In bezug auf die gegebenen Stücke kommen bei der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks fünf Hauptfälle in Betracht, nämlich:

1) es können gegeben sein eine Seite und zwei Winkel.

Dieser Fall lässt in bezug auf die gegebenen Winkel zwei Nebenfälle zu, nämlich:

a) es können gegeben sein eine Seite, ein derselben anliegender und der derselben gegenüberliegende Winkel
und

b) es können gegeben sein eine Seite und die beiden derselben anliegenden Winkel.

Der erste dieser Nebenfälle lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle weitere Nebenfälle zu:

α) es können die Seite a u. die Winkel α u. β
oder
β) „ „ „ „ a „ „ „ α „ γ
oder
γ) „ „ „ „ b „ „ „ α „ β
oder
δ) „ „ „ „ b „ „ „ β „ γ
oder
ε) „ „ „ „ c „ „ „ α „ γ
oder
η) „ „ „ „ c „ „ „ β „ γ
gegeben sein.

Der unter b) erwähnte zweite Nebenfall lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle weitere Nebenfälle zu:

α) es können die Seite a u. die Winkel β u. γ
oder

β) „ „ „ „ b „ „ „ α „ γ
oder

γ) „ „ „ „ c „ „ „ α „ β
gegeben sein.

2) es können gegeben sein zwei Seiten und der von beiden eingeschlossene Winkel.

Dieser Fall lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle Nebenfälle zu:

α) es können die Seiten a u. b u. der Winkel γ
oder

β) „ „ „ „ a „ c „ „ „ β
oder

γ) „ „ „ „ b „ c „ „ „ α
gegeben sein.

3) es können gegeben sein die drei Seiten; und

4) es können gegeben sein zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel.

Dieser Fall lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle Nebenfälle zu:

α) unter der Voraussetzung, dass $a > b$ ist, können gegeben sein die Seiten a und b und der Winkel α;

β) unter der Voraussetzung, dass $b < a$ ist, können gegeben sein die Seiten a und b und der Winkel β;

γ) unter der Voraussetzung, dass $a > c$ ist, können gegeben sein die Seiten a und c und der Winkel α;

δ) unter der Voraussetzung, dass $c > a$ ist, können gegeben sein die Seiten a und c und der Winkel γ;

ε) unter der Voraussetzung, dass $b > c$ ist, können gegeben sein die Seiten b und c und der Winkel β;

η) unter der Voraussetzung, dass $c > b$ ist, können gegeben sein die Seiten b und c und der Winkel γ.

5) es können gegeben sein zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel (s. die Erkl. 79).

Dieser Fall lässt in bezug auf die verschiedenen Seiten eines Dreiecks folgende specielle Nebenfälle zu:

α) unter der Voraussetzung, dass $a < b$ ist, können gegeben sein die Seiten a und b und der Winkel α;

β) unter der Voraussetzung, dass $b < a$ ist, können gegeben sein die Seiten a und b und der Winkel β;

Erkl. 79. Die in nebenstehender Antwort aufgestellten Fälle ergeben sich aus den Kongruenzsätzen über das Dreieck; dieselben lauten:

Kongruenzsatz 1.

„Dreiecke sind kongruent, wenn eine Seite und zwei Winkel in dem einen Dreieck so gross sind als eine Seite und die beiden gleichliegenden Winkel im andern Dreieck.“

Nach diesem Satz ist ein Dreieck vollkommen bestimmt durch eine Seite und zwei Winkel.

Kongruenzsatz 2.

„Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der von beiden eingeschlossene Winkel in dem einen Dreieck so gross sind als in dem andern Dreieck.“

Nach diesem Satz ist ein Dreieck vollkommen bestimmt durch zwei Seiten und den von beiden eingeschlossenen Winkel.

Kongruenzsatz 3.

„Dreiecke sind kongruent, wenn die drei Seiten in dem einen Dreieck so gross sind als in dem andern Dreieck.“

Nach diesem Satz ist ein Dreieck vollkommen bestimmt durch drei Seiten.

Kongruenzsatz 4.

„Dreiecke sind kongruent, wenn zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel in dem einen Dreieck so gross sind als zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel im andern Dreieck.“

Nach diesem Satz ist ein Dreieck vollkommen bestimmt durch zwei Seiten und den der grösseren von beiden gegenüberliegenden Winkel. Sind hingegen von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren von beiden gegenüberliegende Winkel gegeben, so ergeben sich stets zwei Dreiecke, welche den Bedingungen entsprechen.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

γ) unter der Voraussetzung, dass $a < c$ ist, können gegeben sein die Seiten a und c und der Winkel α;

δ) unter der Voraussetzung, dass $c < a$ ist, können gegeben sein die Seiten c und a und der Winkel γ;

ε) unter der Voraussetzung, dass $b < c$ ist, können gegeben sein die Seiten b und c und der Winkel β;

η) unter der Voraussetzung, dass $c < b$ ist, können gegeben sein die Seiten b und c und der Winkel γ.

Frage 17. In welcher Weise findet die Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks statt?

Antwort. Die Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks findet in der Weise statt, dass man nach bekannten trigonometrischen Sätzen (s. die Antwort der Frage 18) zwischen den gegebenen und durch allgemeine Zahlzeichen bezeichneten Stücken und zwischen den gesuchten Stücken Relationen, Beziehungen oder Gleichungen aufzustellen sucht und dieselben in bezug auf die gesuchten Stücke auflöst; hierbei aber stets im Auge behält, dass man für die gesuchten Stücke solche Ausdrücke oder Formeln erhält, auf welche sich die logarithmischen Sätze anwenden lassen, damit bei numerischen Ausrechnungen, wenn also für jene allgemeine Zahlzeichen specielle Zahlenwerte gesetzt werden, die Vorteile, welche die Rechnung mittels Logarithmen bietet, benutzt werden können.

Frage 18. Welches sind und wie heissen die zwei trigonometrischen Fundamentalsätze, welche der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks zu Grunde liegen; und durch welche Formeln werden diese Sätze symbolisch dargestellt?

Erkl. 80. Aus der nebenstehenden Formel 86 ergeben sich die specielleren Formeln:

Formel 86b. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

Formel 86c. $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

Formel 86d. $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

Erkl. 81. Die Erfindung der so wichtigen Sinusregel, aus welcher man auch auf analytische Weise, wie in Antwort der Frage 20 in dem Beweis II gezeigt ist, die Kosinusregel ableiten kann, schreibt man den Arabern zu.

Antwort. Die zwei wichtigsten trigonometrischen Sätze, welche der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks zu Grunde liegen, sind:

a) der Sinussatz oder die Sinusregel und

b) der Kosinussatz oder die Kosinusregel.

Die Sinusregel lautet:

„In jedem Dreieck verhalten sich die Seiten wie die Sinus der den Seiten gegenüberliegenden Winkel.“

In Rücksicht der in Antwort der Frage 15 gegebenen Bezeichnung der Be-

Erkl. 82. Die Planimetrie lehrt, dass in einem Dreieck oder in kongruenten Dreiecken gleichen Seiten gleiche Winkel gegenüberliegen müssen, dass ferner auch der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüber liegen muss, und umgekehrt; sie lehrt aber nicht, in welcher Weise die Winkel abhängig sind von dem Verhältnis der Seiten, und dieses Abhängigkeitsverhältnis wird durch die Sinusregel ausgedrückt. Die Sinusregel ist somit eine Ergänzung jener planimetrischen Sätze über das Dreieck.

Erkl. 83. Aus der Formel 86a ergibt sich, dass der Quotient, welchen man erhält, wenn man eine Dreieckseite durch den Sinus des derselben gegenüberliegenden Winkels dividiert, konstant ist. Wie sich aus den Gleichungen a), b) und c) in dem Beweis II in Antwort der Frage 19 ergibt, ist dieser konstante Quotient (in gewissem Sinne auch Winkelmodulus genannt, im Gegensatz zu dem reciproken Wert desselben, welcher der Seitenmodulus heisst) gleich dem Durchmesser des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.

Erkl. 84. Die Sinusregel findet dann Anwendung, wenn eine Relation zwischen solchen vier Stücken eines Dreiecks, die paarweise gegenüberliegen, erforderlich ist, also:

a) wenn von einem Dreieck eine Seite und zwei Winkel (s. die gelöste Aufgabe 117)
oder
b) wenn zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind (s. die gelösten Aufgaben 120 und 121) und das vierte, jene Bedingung erfüllende Stück gesucht ist.

Erkl. 85. Die Formeln 86 und 87, durch welche die Sinusregel und die Kosinusregel symbolisch dargestellt werden, heissen die Fundamentalformeln oder Grundgleichungen, indem man mittels derselben jedes Dreieck berechnen kann; denn sind in einem Dreieck drei Stücke gegeben, so sind in Rücksicht, dass der dritte Winkel stets gleich der Ergänzung der beiden andern zu $2R$ ist, nur zwei Stücke zu suchen, und zwei der in den Formeln 86 und 87 enthaltenen Gleichungen genügen vollkommen jene zwei unbekannte Stücke zu bestimmen.

Erkl. 86. Die in nebenstehender Antwort aufgestellten Formeln 86 und 87 haben Gültigkeit, einerlei ob das Dreieck, auf welche sie sich beziehen, ein spitz- oder ein stumpfwinkliges oder sonst irgend ein besonderes Dreieck (rechtwinkliges, gleichschenkliges, gleichseitiges) ist, wie in den Antworten der Fragen 19 und 20 gezeigt wird.

Erkl. 87. Mittels der Kosinusregel, siehe die Formeln 87, kann man jede Seite durch die zwei andern und die anliegenden Winkel ausdrücken; sie findet jedoch eine direkte Anwendung selten, da sie logarithmisch unbequem ist, dient aber zur Herleitung weiterer wichtiger trigonometrischer Sätze und Formeln (s. die Antworten der Fragen 22 bis 25.

stimmungsstücke eines Dreiecks, siehe die Figuren 33 und 34, wird diese Sinusregel symbolisch durch die Formeln:

Formel 86. $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$
oder:

Formel 86a. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\gamma}$

welche Sinusformeln heissen, dargestellt (siehe Antwort der Frage 19 und die Erkl. 80 bis 84).

Die Kosinusregel lautet:

„In jedem Dreieck ist eine Seite gleich der Summe der Produkte, welche gebildet werden aus je einer der beiden andern Seiten und dem Kosinus des Winkels, welchen diese betreffende Seite mit jener Seite bildet.

Diese Kosinusregel wird, siehe die Figuren 33 und 34, symbolisch durch die analogen Formeln:

Formel 87. $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$

Formel 87a. $b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$

Formel 87b. $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$

dargestellt, welche Kosinusformeln heissen (siehe Antwort der Frage 26 und die Erkl. 85 bis 87).

Frage 19. In welcher Weise kann man die Richtigkeit der in vorstehender Antwort erwähnten und durch die Formeln:

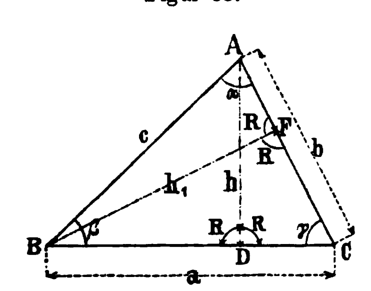
Formel 86. $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

oder

Formel 86a. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

symbolisch dargestellten Sinusregel nachweisen?

Figur 33.



Antwort. Die Richtigkeit der in voriger Antwort erwähnten und durch die Formeln:

Formel 86. $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

oder

Formel 86a. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

symbolisch dargestellten Sinusregel kann man auf folgende Arten nachweisen:

Beweis I.

A). für ein spitzwinkliges Dreieck.

Hat man, siehe Figur 33, das Dreieck ABC, in welchem sämtliche Winkel spitze Winkel sind, und man fällt z. B. die zu a gehörige Höhe h, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und ADC. Nach Antwort der Frage 6 erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB die Relation:

$$\sin\beta = \frac{h}{c}$$

und hieraus ergibt sich für die Höhe h:

a) . . . $h = c \cdot \sin\beta$ (s. auch die Erkl. 50)

In analoger Weise erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{h}{b}$$

und hieraus ergibt sich für die Höhe h:

b) . . . $h = b \cdot \sin\gamma$ (s. auch die Erkl. 50)

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich die Gleichung:

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$$

und hieraus erhält man die Proportion:

$$1^{a}) \;.\;.\; \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder auch die Proportion:

$$1) \;.\;.\;.\;.\; \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Fällt man ferner in dem Dreieck ABC noch eine zweite Höhe, z. B. die zur Seite b gehörige Höhe h_1, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke BFA und BFC. Wie vorhin

Erkl. 88. Hat man mehrere gleiche Verhältnisse oder Quotienten, z. B. die gleichen Quotienten (oder geometrischen Verhältnisse):

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{10}{20}, \frac{17}{34}, \ldots$$

oder die gleichen Quotienten:

$$\frac{a}{x}, \frac{b}{y}, \frac{c}{z}, \frac{d}{u}, \ldots$$

und man verbindet dieselben durch das Gleichheitszeichen, wie folgt:

$$\text{a)} \ldots \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{10}{20} = \frac{17}{34} = \ldots$$

und

$$\text{b)} \ldots \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \frac{d}{u} = \ldots$$

so nennt man eine solche Verbindung mehrerer gleichen geometrischen Verhältnisse oder Quotienten eine laufende Proportion.

Die unter a) und b) dargestellten laufenden Proportionen schreibt man gewöhnlich in der Form:

$$1) \ldots 1:2:3:10:17 = 2:4:6:20:34$$

bezw. in der Form:

$$2) \ldots a:b:c:d = x:y:z:u$$

Für solche laufende Proportionen, welche die unter 1) oder 2) dargestellte Form haben, kann man sich also stets laufende Proportionen substituiert denken, welche die unter a) und b) dargestellte Form haben, und umgekehrt. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Arithmetik, bezw. das Heft No. 7 der Kleyerschen Encyklopädie.)

erhält man aus diesen Dreiecken die Relationen:

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{c}$$

und

$$\sin\gamma = \frac{h_1}{a}$$

bezw. die Relationen:

c) . . . $h_1 = c \cdot \sin\alpha$
und (s. auch die Erkl. 50)
d) . . . $h_1 = a \cdot \sin\gamma$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich die weitere Gleichung:

$$a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha$$

und hieraus erhält man die Proportion:

$$2^{a}) \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder auch die Proportion:

$$2) \ldots \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Aus den Gleichungen 1^{a}) und 2^{a}) ergibt sich nunmehr, dass

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

ist. Aus dieser laufenden Proportion erhält man schliesslich nach der Erkl. 88 die zu beweisende Formel 86:

$$a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

B). für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Hat man, siehe Figur 34, das Dreieck ABC, in welchem der Winkel γ ein stumpfer Winkel ist, und man fällt eine der Höhen, die zu den diesen stumpfen Winkel einschliessenden Seiten gehören, z. B. die zu BC gehörige Höhe h, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und ADC.

Nach Antwort der Frage 6 erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB die Relation:

$$\sin\beta = \frac{h}{c}$$

und hieraus ergibt sich für die Höhe h:

f) . . . $h = c \cdot \sin\beta$ (s. auch die Erkl. 50)

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC, in welchem der an der Ecke C liegende Winkel als

Supplementwinkel des Winkels γ
$= 2R - \gamma$
ist, die Relation:

$$\sin(2R - \gamma) = \frac{h}{b}$$

oder, da nach dem in der Erkl. 66 erwähnten goniometrischen Satz für

$$\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$$

gesetzt werden kann, die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{h}{b}$$

und hieraus ergibt sich für die Höhe h:

g) . . . $h = b \cdot \sin\gamma$ (s. auch die Erkl. 50)

Aus den Gleichungen f) und g) folgt nunmehr die Gleichung:

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$$

und hieraus erhält man die Proportion:

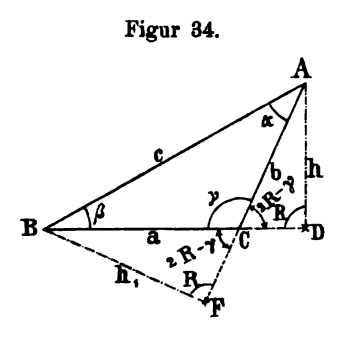
3 a) . . $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

oder auch die Proportion:

3) . . . . $\frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$

[vergleiche hiermit die vorstehende Proportion 1)].

Figur 34.



Fällt man ferner in dem Dreieck ABC, siehe Figur 34, noch eine zweite Höhe, z. B. die zur Seite b gehörige Höhe h_1, so entstehen die beiden rechtwinkligen Dreiecke BFA und BFC. Wie vorhin erhält man aus dem Dreieck BFA die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{c}$$

woraus sich:

h) . . . $h_1 = c \cdot \sin\alpha$ (s. auch die Erkl. 50)

ergibt; ferner erhält man aus dem Dreieck BFC, in welchem der an der Ecke C liegende Winkel BCF als Supplementwinkel des Winkels $\gamma = 2R - \gamma$ ist

$$\sin(2R - \gamma) = \frac{h_1}{a}$$

oder da nach dem in der Erkl. 66 erwähnten Satz

$$\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$$

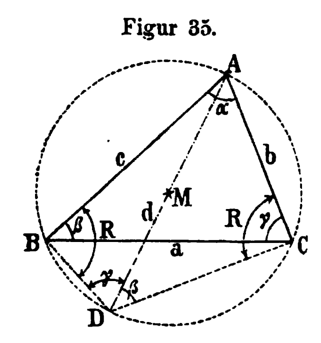
ist:

$$\sin\gamma = \frac{h_1}{a}$$

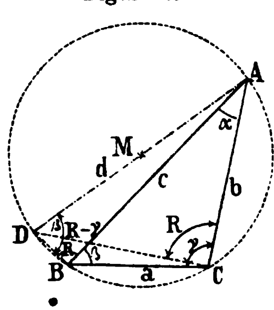
woraus sich:

i) . . . $h_1 = a \cdot \sin\gamma$ (s. auch die Erkl. 50)

Figur 35.



Figur 36.



Erkl. 89. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Alle Peripheriewinkel eines Kreises über einem Durchmesser desselben sind **rechte Winkel.**"

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 90. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Alle Peripheriewinkel eines Kreises (oder kongruenter Kreise) über ein und demselben Bogen sind einander gleich."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

ergibt. Aus den Gleichungen h) und i) folgt die Gleichung:

$$a \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\alpha$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich die Proportion:

$$4^{a}) \;..\; \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder die Proportion:

$$4) \;....\; \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Wie vorhin aus den Proportionen 1^{a}) und 2^{a}) ergibt sich auch aus den Proportionen 3^{a}) und 4^{a}) die laufende Proportion:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

welche man nach der Erkl. 88 in der Form:

$$a:b:c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

schreiben kann. Der durch die Formeln 86 symbolisch dargestellte **Sinussatz** hat somit sowohl für **spitzwinklige** als auch für **stumpfwinklige** Dreiecke volle Gültigkeit (s. Erkl. 86).

Beweis II. Beschreibt man, siehe die Figuren 35 und 36, um das Dreieck ABC einen Kreis und zieht durch einen der Eckpunkte, z. B. durch A den Durchmesser AD und verbindet den Endpunkt D dieses Durchmessers mit C (und mit B), so erhält man nach dem in der Erkl. 89 angeführten planimetrischen Satz das bei C rechtwinklige Dreieck ACD, in welchem nach dem in der Erkl. 90 angeführten planimetrischen Satz der Winkel ADC gleich dem Winkel β ist. Aus diesem rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nach Antwort der Frage 6, wenn man die Seite AD desselben, welche gleich dem Durchmesser des Kreises ist, mit d bezeichnet, die Relation:

$$\sin\beta = \frac{b}{d}$$

und hieraus erhält man:

$$a) \;...\; d = \frac{b}{\sin\beta}$$

In analoger Weise erhält man, wenn man D mit B verbindet, aus dem hierdurch entstehenden rechtwinkligen Dreieck ABD, in welchem bei Figur 35 der

Winkel $ADB = \gamma$ und bei Figur 36 $= 2R - \gamma$ ist (siehe Erkl. 91):

$$\sin\gamma = \frac{c}{d} \text{ (s. Erkl. 92)}$$

oder

$$\text{b)} \ldots d = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Ebenso erhält man, wenn man durch einen der andern Eckpunkte des Dreiecks einen Durchmesser zieht und sich in analoger Weise ein rechtwinkliges Dreieck bildet, die Relation:

$$\text{c)} \ldots d = \frac{a}{\sin\alpha}$$

Aus den Gleichungen a) bis c) folgt

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder nach der Erkl. 88:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

nämlich die zu beweisende Formel 86.

Erkl. 91. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel $= 2R$."

Nach diesem Lehrsatz ist in dem Sehnenviereck $ACBD$, siehe Figur 36, Winkel $ACB +$ Winkel $ADB = 2R$, da nun $\sphericalangle ACD = \gamma$, so ist $\sphericalangle ADB = 2R - \gamma$.

Erkl. 92. Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck der Figur 36 erhält man:

$$\sin(2R - \gamma) = \frac{c}{d}$$

oder da nach der Erkl. 66:

$$\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma \text{ ist:}$$

$$\sin\gamma = \frac{c}{d}$$

Frage 20. In welcher Weise kann man die Richtigkeit der in Antwort der Frage 18 erwähnten und durch die Formeln:

Formel 87. $a = b\cos\gamma + c\cos\beta$

Formel 87a. $b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$

Formel 87b. $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$

symbolisch dargestellten Kosinusregel nachweisen?

Antwort. Die Richtigkeit der in Antwort der Frage 18 erwähnten und durch die Formeln 87 symbolisch dargestellten Kosinusregel kann man auf folgende Arten nachweisen:

Beweis I

(synthetischer Beweis, s. Erkl. 93).

A). für ein spitzwinkliges Dreieck.

Ist, siehe Figur 37, ABC ein Dreieck, in welchem die beiden der Seite a anliegenden Winkel spitze Winkel sind, und man fällt die zu a gehörige Höhe h, so wird die Seite a in die beiden Abschnitte m und n zerlegt. Für diese Abschnitte m und n erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken ADB und ADC die Relationen:

$$\cos\beta = \frac{m}{c}$$

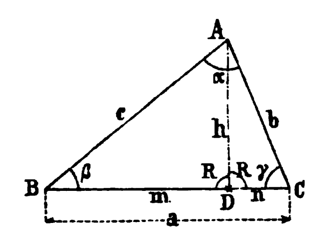
und

$$\cos\gamma = \frac{n}{b}$$

Aus denselben ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} \text{a)} \ldots m &= c \cdot \cos\beta \\ \text{und} \quad \text{b)} \ldots n &= b \cdot \cos\gamma \end{aligned}\right\} \text{(siehe die Erkl. 51)}$$

Figur 37.



Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

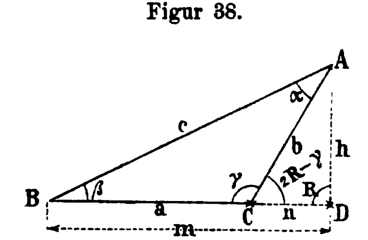
$$n + m = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $n + m = a$ ist:

1) . . . $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$

B). für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Figur 38.



Ist ferner, siehe Figur 38, ABC ein Dreieck, in welchem einer der beiden der Seite a anliegenden Winkel, z. B. der Winkel γ ein stumpfer Winkel ist, und man fällt die zu a gehörige Höhe h, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ADB und ADC; bezeichnet man die Katheten BD und CD dieser Dreiecke mit m und n, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB die Relation:

$$\cos\beta = \frac{m}{c}$$

und hieraus erhält man:

c) . . . $m = c \cdot \cos\beta$ (s. Erkl. 51)

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC die Relation:

$$\cos(2R - \gamma) = \frac{n}{b}$$

und hieraus erhält man:

$$n = b \cdot \cos(2R - \gamma) \text{ (s. Erkl. 51)}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 94:

$$\cos(2R - \gamma) = -\cos\gamma$$

gesetzt werden kann, die Relation:

d) . . . $n = -b \cdot \cos\gamma$

Durch Subtraktion der Gleichung d) von Gleichung c) erhält man:

$$m - n = c \cdot \cos\beta - (-b \cdot \cos\gamma)$$

oder

$$m - n = c \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\gamma$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $m - n = a$ ist:

2) . . . $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$

nämlich abermals die Formel 87.

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Formeln 87a und 87b nachweisen, woraus sich die Richtigkeit der Kosinusregel ergibt.

Beweis II

(analytischer Beweis, s. Erkl. 93).

Nach dem in Antwort der Frage 18 aufgestellten Sinussatz ist:

Erkl. 93. In der Mathematik versteht man unter einem synthetischen Beweis einen solchen, bei welchem man von den gemachten Voraussetzungen (der Annahme, der Hypothesis) ausgeht, um zu der zu beweisenden Aussage (der Thesis) zu gelangen und zwar im Gegensatz zu dem sog. analytischen Beweis, bei welchem man, umgekehrt, die gemachte Aussage einstweilen als richtig annimmt und durch logische Folgerungen auf einen bereits bewiesenen Satz zu kommen sucht.

Unter einem analytischen Beweis versteht man auch in der Mathematik und zwar in der Geometrie einen solchen, bei welchem die Richtigkeit der gemachten Aussage lediglich durch Rechnung bewiesen wird und zwar im Gegensatz zu solchen Beweisen, die mittels Hülfe von Figuren und bewiesener geometrischer Sätze geführt werden.

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

also

$$\text{a)} \; . \; . \; . \; a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass man nach der Erkl. 66 und in Rücksicht, dass α und $(\beta + \gamma)$ Supplementwinkel sind

$$\sin\alpha = \sin(\beta + \gamma)$$

setzen kann, so erhält man:

$$a = \frac{b \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin\beta}$$

entwickelt man nunmehr $\sin(\beta + \gamma)$ nach der in der Erkl. 95 angeführten goniometrischen Formel, so erhält man:

$$a = \frac{b \cdot (\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma)}{\sin\beta}$$

oder

$$a = \frac{b\sin\beta\cos\gamma}{\sin\beta} + \frac{b\cos\beta\sin\gamma}{\sin\beta}$$

$$\text{b)} \; . \; . \; . \; a = b \cdot \cos\gamma + \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \cos\beta$$

Da ferner nach dem Sinussatz:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

also

$$\frac{b\sin\gamma}{\sin\beta} = c$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung b):

$$a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$$

nämlich die zu beweisende Formel 87.

Erkl. 94. Ein goniometrischer Satz heisst: „Der Kosinus eines stumpfen Winkels ist gleich dem negativen Kosinus dessen Supplementwinkels.“

Bezeichnet man mit γ einen spitzen, also mit $(2R - \gamma)$ einen stumpfen Winkel, so ist nach diesem Satz:

$$\cos(2R - \gamma) = -\cos\gamma$$

(Siehe die Formel 20 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 95. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

(siehe Formel 41 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Frage 21. Welche weiteren trigonometrischen Sätze kommen bei der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks hauptsächlich zur Anwendung, wie heissen dieselben und durch welche Formeln werden sie symbolisch dargestellt?

Antwort. Bei der Berechnung eines schiefwinkligen Dreiecks kommen im weiteren hauptsächlich folgende trigonometrische Sätze zur Anwendung:

1) der Projektionssatz, auch der Carnot sche Satz oder der allgemeine pythagoreische Lehrsatz genannt;
2) die Mollweide schen Sätze und
3) der Tangenten- oder Tangentialsatz.

Der Projektionssatz lautet:

„In jedem Dreieck ist das Quadrat einer Seite gleich der Summe

der Quadrate der beiden andern Seiten vermindert um das doppelte Produkt aus diesen beiden Seiten und dem Kosinus des von ihnen eingeschlossenen Winkels.“

In Rücksicht der in Antwort der Frage 15 gegebenen Bezeichnung der Bestimmungsstücke eines Dreiecks, wird dieser Projektionssatz, siehe die Figuren 31 und 32, symbolisch durch die Formeln:

Formel 88. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

Formel 88a. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$

Formel 88b. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

dargestellt, welche auch den Namen „die quadratischen Fundamentalgleichungen“ oder die „Quadratenformeln“ führen (siehe die Erkl. 96 bis 109 und die Antwort der Frage 22).

Die Mollweideschen Sätze lauten:

1) „In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zur dritten Seite wie der Kosinus der halben Differenz der dieser Seite anliegenden Winkel zum Kosinus der halben Summe dieser Winkel“ und

2) „in jedem Dreieck verhält sich die Differenz zweier Seiten zur dritten Seite wie der Sinus der halben Differenz der dieser Seite anliegenden Winkel zum Sinus der halben Summe dieser Winkel.“

Diese beiden Sätze werden, siehe die Figuren 31 und 32, durch die Formeln:

Formel 89. $(a+b):c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 89a. $(a+c):b = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 89b. $(b+c):a = \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

und

Formel 90. $(a-b):c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 90a. $(a-c):b = \sin\frac{\alpha-\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 90b. $(b-c):a = \sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

Erkl. 96. Der in nebenstehender Antwort aufgestellte Projektionssatz, welcher durch die sogen. quadratischen Fundamentalgleichungen, bezw. durch die Quadratenformeln, siehe die Formeln 88, symbolisch dargestellt ist, wurde von dem Mathematiker Carnot, gestorben 1823 zu Paris, in seiner Schrift: „Geometrie de position 1803, zuerst angegeben und wird deshalb nach ihm auch der Carnotsche Satz genannt.

Erkl. 97. Der in nebenstehender Antwort vorgeführte Projektionssatz hat diesen Namen von seiner ursprünglichen Herleitung erhalten (s. Beweis I in Antwort der folgenden Frage), da bei demselben die Projektion einer Seite des Dreiecks auf die andere Seite, siehe Erkl. 112, in Sprache kommt.

Erkl. 98. Der Projektionssatz, siehe nebenstehende Antwort, heisst auch „allgemeiner pythagoreischer Lehrsatz“, da sich aus demselben der pythagoreische Lehrsatz ableiten lässt; setzt man nämlich z. B. in der Formel 88, $\alpha = 90^0$ und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 99

$$\cos 90^0 = 0$$

ist, so erhält man die Relation:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

nämlich den pythagoreischen Lehrsatz.

Erkl. 99. Die wichtigsten der bei der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks vorkommenden Grenzwerte der trigonometrischen Funktionen sind folgende:

1) $\sin 0^0 = 0$
2) $\sin 90^0 = 1$
3) $\sin 180^0 = 0$

4) $\cos 0^0 = +1$
5) $\cos 90^0 = 0$
6) $\cos 180^0 = -1$

7) $\mathrm{tg}\, 0^0 = 0$
8) $\mathrm{tg}\, 90^0 = \infty$
9) $\mathrm{tg}\, 180^0 = 0$

10) $\mathrm{ctg}\, 0^0 = \infty$
11) $\mathrm{ctg}\, 90^0 = 0$
12) $\mathrm{ctg}\, 180^0 = \infty$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt 10.)

dargestellt, welche nach ihrem Erfinder die Mollweide schen Formeln heissen, (siehe die Erkl. 110 und die Antworten der Fragen 23 und 24).

Erkl. 100. Die quadratischen Fundamentalgleichungen, siehe die Formeln 88, finden, da sie logarithmisch unbequem sind, weniger eine direkte Anwendung bei etwaigen Berechnungen, werden aber vielfach zur analytischen Herleitung weiterer Berechnungsformeln für das schiefwinklige Dreieck angewandt.

Der Tangentensatz lautet:

„In jedem Dreieck verhält sich die Summe zweier Seiten zur Differenz derselben wie die Tangens der halben Summe der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel zur Tangens der halben Differenz dieser Winkel."

Dieser Tangentensatz wird, siehe die Figuren 31 und 32, symbolisch durch die Formeln:

Formel 91. $(a+b):(a-b)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

Formel 91a. $(a+c):(a-c)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2}:\operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$

Formel 91b. $(b+c):(b-c)=\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}:\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$

dargestellt (siehe die Erkl. 111 und die Antwort der Frage 25).

Erkl. 101. Den in nebenstehender Antwort durch die Formeln 88 dargestellten quadratischen Fundamentalgleichungen gibt man auch oft die Formen:

Formel 88c. $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

„ **d.** $a^2 = (b-c)^2 + (2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{bc})^2$

„ **e.** $a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

„ **f.** $a^2 = (b+c)^2 - (2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc})^2$

„ **g.** $a^2 = (b+c+2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc})\,(b+c-2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc})$

„ **h.** $a^2 = \left[(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b-c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2$

„ **i.** $b^2 = (a-c)^2 + 4ac\sin^2\frac{\beta}{2}$

„ **k.** $b^2 = (a-c)^2 + (2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{ac})^2$

„ **l.** $b^2 = (a+c)^2 - 4ac\cos^2\frac{\beta}{2}$

„ **m.** $b^2 = (a+c)^2 - (2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac})^2$

„ **n.** $b^2 = (a+c+2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac})\,(a+c-2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac})$

„ **o.** $b^2 = \left[(a+c)\sin\frac{\beta}{2}\right]^2 + \left[(a-c)\cos\frac{\beta}{2}\right]^2$

„ **p.** $c^2 = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$

Formel 88 q. $c^2 = (a-b)^2 + \left(2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)^2$

" **r.** $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$

" **s.** $c^2 = (a+b)^2 - \left(2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)^2$

" **t.** $c^2 = \left(a+b+2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)\left(a+b-2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)$

" **u.** $c^2 = \left[(a+b)\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\right]^2 + \left[(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^2$

Die Richtigkeit dieser Formeln, z. B. der Formeln 88c bis 88h ergibt sich aus Folgendem:

Setzt man in der Formel 88:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\gamma$$

nach der Erkl. 102:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

und hieraus erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder nach der Erkl. 103:

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

nämlich die Formel 88c und aus dieser Relation erhält man:

$$a^2 = (b-c)^2 + 2^2\left(\sqrt{bc}\right)^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$a^2 = (b-c)^2 + \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)^2$$

nämlich die Formel 88d.

Setzt man ferner in jener Formel 88 nach der Erkl. 104 für:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

so erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

oder nach der Erkl. 105:

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

nämlich die Formel 88e und aus dieser Relation erhält man weiter:

$$a^2 = (b+c)^2 - 2^2\cdot\left(\sqrt{bc}\right)^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$a^2 = (b+c)^2 - \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{bc}\right)^2$$

nämlich die Formel 88f.

Aus dieser Formel 88f folgt nach der Erkl. 87:

$$a^2 = \left(b + c + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)\left(b + c - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)$$

nämlich die Formel 88g.

Multipliziert man ferner die Formel 88c mit $\cos^2\frac{\alpha}{2}$ und die Formel 88e mit $\sin^2\frac{\alpha}{2}$, so erhält man:

$$a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b-c)^2\cos^2\frac{\alpha}{2} + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und

$$a^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2\sin^2\frac{\alpha}{2} - 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Diese Gleichungen addiert geben die Gleichung:

$$a^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + a^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = (b-c)^2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + (b+c)^2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$a^2\left(\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}\right) = \left[(b-c)\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b+c)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 106:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1 \text{ ist}$$

$$a^2 = \left[(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2$$

nämlich die zu beweisende Formel 88h.

In ganz analoger Weise kann man die Formel 88i bis 88u herleiten.

Erkl. 102. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

(siehe Formel 51a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

Erkl. 103. Aus der Lehre der Potenzen ist bekannt, dass:

a) . . . $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

oder dass:

b) . . . $(-a+b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

ist. Analog der Gleichung a) kann man somit auch:

$$b^2 - 2bc + c^2 = (b-c)^2 \text{ setzen}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln).

Erkl. 104. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

(siehe die Formel 52a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

Erkl. 105. Aus den Lehren der Potenzen ist bekannt, dass:

a) . . . $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

oder dass

b) . . . $(-a-b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

ist. Analog der Gleichung a) kann man somit auch:

$$b^2 + 2bc + c^2 = (b + c)^2$$

setzen. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln).

Erkl. 106. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(siehe Formel 13 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

Nach dieser Formel ist, wenn man an der Stelle von α den Wert $\frac{\alpha}{2}$ setzt:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2} = 1$$

Erkl. 107. Die Formeln 88c bis 88u haben gegen die Formeln 88 bis 88b den Vorzug, dass deren rechte Seiten je nur aus zwei Gliedern (Summanden) bestehen, während die rechten Seiten der letztern Formeln je aus drei Gliedern (Summanden) bestehen.

Erkl. 108. Der in nebenstehender Antwort aufgestellte Projektions- oder Carnotsche Satz wird auch oft statt des in Antwort der Frage 18 angeführten zweiten Satzes Kosinussatz und dementsprechend werden oft auch die diesbezüglichen Formeln Kosinusformeln genannt.

Erkl. 109. Die in nebenstehender Antwort aufgestellten Formeln 88 bis 91 haben Gültigkeit, einerlei ob das Dreieck ein spitzwinkliges oder ein stumpfwinkliges Dreieck ist, wie in den Beweisen in den Antworten der Fragen 22 bis 25 gezeigt wird.

Erkl. 110. Die in nebenstehender Antwort aufgestellten Formeln 89 und 90 wurden zuerst von dem Mathematiker Mollweide in L. Zachs monatlicher Korrespondenz 1808 aufgestellt; deren praktische Anwendung wird in späteren Abschnitten gezeigt.

Erkl. 111. Der in nebenstehender Antwort aufgestellte Tangentensatz liefert die bequemste Formel zur Berechnung zweier Winkel eines Dreiecks und wird stets mit Vorteil da angewandt, wo es sich um die Berechnung zweier Winkel eines Dreiecks handelt.

Frage 22. In welcher Weise kann man die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln:

Formel 88. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

Formel 88a. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

und

Formel 88b. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

symbolisch dargestellten Projektions- oder Carnotschen Satzes nachweisen?

Antwort. Die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln 88 symbolisch dargestellten Projektionssatzes kann man auf folgende Arten beweisen:

Beweis I

(synthetischer Beweis).

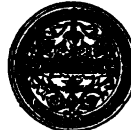
A). für ein spitzwinkliges Dreieck.

Nach dem in der Erkl. 112 erwähnten erweiterten pythagoreischen Lehr-

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

255. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. von Heft 254. — Seite 65—80. Mit 11 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 254. — Seite 65—80. Mit 11 Figuren.

Inhalt:

Ueber die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks, Fortsetzung. — Gelöste Aufgaben.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

—— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. ——
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale** lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

satz besteht z. B. für die Seite a des durch die Figur 39 dargestellten Dreiecks, welche dem spitzen Winkel α gegenüberliegt, die Relation:

a) . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot m$

Berücksichtigt man nunmehr, dass in der Figur 39 die Projektion m der Seite c auf die Seite b eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks BDA ist, und dass man nach der Erkl. 51 für m:

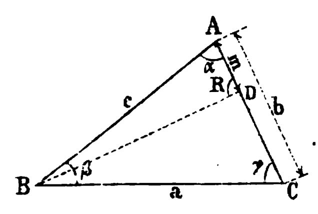
$$m = c \cdot \cos\alpha$$

setzen kann, so erhält man:

b) . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot bc \cos\alpha$

nämlich die Formel 88 und zwar für den Fall, dass die Seite a einem spitzen Winkel gegenüberliegt.

Figur 39.



B). für ein stumpfwinkliges Dreieck.

Ferner besteht nach dem in der Erkl. 112 erwähnten Satz für die Seite a des durch die Figur 40 dargestellten Dreiecks, welche dem stumpfen Winkel α gegenüberliegt, die Relation:

c) . . . $a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot m$

Berücksichtigt man, dass in der Fig. 40 die Projektion m der Seite c auf die Seite b, bezw. auf deren Verlängerung eine Kathete des rechtwinkligen Dreiecks BDA ist, und dass man somit nach der Erkl. 51 und in Rücksicht, dass der Winkel $BAD = 2R - \alpha$ ist, für m:

$$m = c \cdot \cos(2R - \alpha)$$

setzen kann, so geht die Gleichung c) über in:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot c \cdot \cos(2R - \alpha)$$

und hieraus erhält man, wenn man nach der Erkl. 94:

$$\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha$$

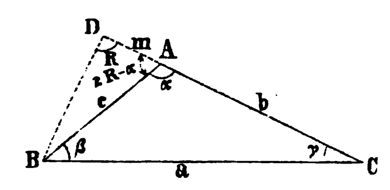
setzt und reduziert:

d) . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

nämlich wiederum die zu beweisende Formel 88 und zwar für den Fall, dass die Seite a einem stumpfen Winkel gegenüberliegt

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Formeln 88a und 88b nachweisen, woraus sich die Richtigkeit jenes Satzes ergibt.

Figur 40.



Erkl. 112. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Dreieck ist das Quadrat über einer Seite gleich der Summe der Quadrate über den beiden anderen Seiten vermehrt oder vermindert um das doppelte Rechteck aus einer dieser beiden Seiten und der Projektion der andern auf sie, und zwar vermehrt, wenn jene erste Seite einem stumpfen Winkel gegenüberliegt, vermindert, wenn dieselbe einem spitzen Winkel gegenüberliegt."

Dieser Satz ist unter dem Namen der erweiterte pythagoreische Lehrsatz bekannt. (Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz hat man für die Seite a des durch die Figur 39 dargestellten Dreiecks:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2b \cdot m$$

und für die Seite a des durch die Figur 40 dargestellten Dreiecks:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b \cdot m$$

Beweis II

(analytischer Beweis).

Nach der in Antwort der Frage 18 angeführten Kosinusregel ist:

1) . . . $a = b \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\beta$

2) . . . $b = a \cdot \cos\gamma + c \cdot \cos\alpha$

und

3) . . . $c = a \cdot \cos\beta + b \cdot \cos\alpha$

Zum Beweis der Formel 88 multipliziere man die Gleichung 1) mit $-a$, die Gleichung 2) mit b und die Gleichung 3) mit c, man erhält alsdann die drei weiteren Gleichungen:

a) . . . $-a^2 = -ab \cdot \cos\gamma - ac \cdot \cos\beta$

b) . . . $b^2 = ab \cdot \cos\gamma + bc \cdot \cos\alpha$

und

c) . . . $c^2 = ac \cdot \cos\beta + bc \cdot \cos\alpha$

und aus diesen drei Gleichungen erhält man durch Addition derselben:

$$-a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cdot bc \cdot \cos\alpha$$

oder durch Umformung:

A) . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

nämlich die zu beweisende Formel 88.

Die Formeln 88a und 88b kann man in ganz analoger Weise herleiten und zwar indem man einmal die Gleichung 2) mit $-b$, die Gleichung 1) mit a und die Gleichung 3) mit c, ein andermal die Gleichung 3) mit $-c$, die Gleichung 1) mit a und die Gleichung 2) mit b multipliziert und die jedesmal erhaltenen drei neuen Gleichungen addiert.

Frage 23. In welcher Weise kann man die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln:

Formel 89. $(a+b):c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 89a. $(a+c):b = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 89b. $(b+c):a = \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

symbolisch dargestellten ersten Mollweideschen Satzes nachweisen.

Antwort. Die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln 89 symbolisch dargestellten ersten Mollweideschen Satzes kann man auf folgende Arten nachweisen:

Beweis I

(synthetischer Beweis).

Hat man, siehe Figur 41, das beliebige Dreieck ABC und man bildet sich sowohl die Summe der Seiten a und b als auch deren Differenz, indem man die kleinere Seite, in der Figur die Seite b, einmal von C aus nach CD auf der Verlängerung von a, ein andermal nach CF auf der Seite a selbst abträgt, und

verbindet dann A mit D und F, so erhält man:

a) das gleichschenklige Dreieck ACD

In diesem Dreieck ist jeder der Winkel CAD und $ADC = \frac{\gamma}{2}$ (s. Erkl. 113), ferner ist der Winkel $ACD = \alpha + \beta$ (s. Erkl. 113) oder auch $= 2R - \gamma$ als Nebenwinkel von γ.

b) das gleichschenklige Dreieck ACF

In diesem Dreieck ist jeder der Winkel FAC und $AFC = \frac{\alpha + \beta}{2}$ (s. Erkl. 113).

c) das Dreieck FAD

Dieses Dreieck ist nach der Erkl. 89 ein bei A rechtwinkliges Dreieck, da nach der Konstruktion die Ecke A auf der Peripherie eines Halbkreises um C liegt.

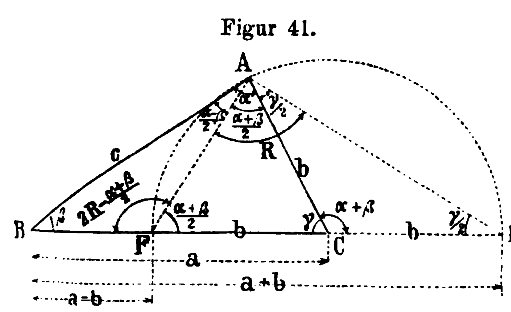
d) das Dreieck ABD

In diesem Dreieck ist BD gleich der Summe $a + b$ der Seiten a u. b; ferner ist der Winkel $BAD = \alpha + \frac{\gamma}{2}$

e) das Dreieck ABF

In diesem Dreieck ist BF gleich der Differenz $a - b$ der Seiten a und b, ferner ist der Winkel $BAF = \sphericalangle BAC - \sphericalangle FAC$ $= \alpha - \frac{\alpha + \beta}{2}$ also $= \frac{\alpha - \beta}{2}$

Figur 41.



Erkl. 113. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Dreieck ist jeder Aussenwinkel gleich der Summe der beiden ihm nicht anliegenden Innenwinkel des Dreiecks."

Nach diesem Satz ist in der Figur 41:

$$\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD + \sphericalangle ADC$$

da nun $\sphericalangle ACB = \gamma$ und $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC$ ist, weil das Dreieck ACD nach Konstruktion ein gleichschenkliges ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = \frac{\gamma}{2} \text{ ist.}$$

Aus demselben Grund ist jeder der Basiswinkel FAC und AFC des gleichschenkligen Dreiecks $CAF = \frac{1}{2} \sphericalangle ACD$ oder $= \frac{\alpha + \beta}{2}$

Aus dem Dreieck ABD ergibt sich nunmehr nach der Sinusregel und in Rücksicht des vorstehend gesagten, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{a + b}{c} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass $\frac{\gamma}{2}$ und $\frac{\alpha + \beta}{2}$ Komplementwinkel sind, dass man also nach der Erkl. 19

$$\text{b)} \ldots \sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

setzen kann, dass ferner, wie aus den Bezeichnungen der Winkel in der Figur 41 ersichtlich,

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = \frac{\alpha - \beta}{2} + R$$

ist, so erhält man zunächst:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2} + R\right)}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man nach der Erkl. 114

$$\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+R\right)=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

setzt:

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

nämlich die zu beweisende Formel 89. In ganz analoger Weise kann man die Formeln 89^a u. 89^b herleiten, wenn man sich Figuren herstellt, welche der Figur 41 analog sind und in welchen bezw. die Summen und Differenzen $a+c$ und $a-c$, bezw. $b+c$ und $b-c$ enthalten sind.

Erkl. 114. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(R+\alpha)=\cos\alpha$$

(siehe Formel 35a in Kleyers **Lehrbuch der** Goniometrie).

Setzt man in dieser Formel an Stelle von α den Wert $\frac{\alpha-\beta}{2}$ so erhält man:

$$\sin\left(R+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Beweis II

(analytischer Beweis).

Nach der in Antwort der Frage 18 aufgestellten Sinusregel ist:

$$\text{a)}\ \ldots\ \frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

und

$$\text{b)}\ \ldots\ \frac{b}{c}=\frac{\sin\beta}{\sin\gamma},$$

Aus Gleichung a) erhält man:

$$\text{c)}\ \ldots\ a=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

und aus Gleichung b) erhält man:

$$\text{d)}\ \ldots\ b=\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Erkl. 115. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

(Siehe Formel 66 in Kleyers **Lehrbuch der** Goniometrie.)

Addiert man die Gleichungen c) und d), so erhält man:

$$a+b=\frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}+\frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der in der Erkl. 115 erwähnten goniometrischen Formel für:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und dass nach der in der Erkl. 52 angeführten Formel, wenn man in derselben $2\alpha=\gamma$ und demnach $\alpha=\frac{\gamma}{2}$ setzt, für

$$\sin\gamma=2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Da nun $(\alpha+\beta)$ und γ als Winkel eines Dreiecks Supplementwinkel sind, so sind $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel und man kann in letzterer Gleichung nach der Erkl. 19:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

setzen; man erhält hiernach:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{2 \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2 \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

In analoger Weise kann man die Formeln 89a und 89b herleiten, woraus sich die Richtigkeit des Projektionssatzes ergibt.

Frage 24. In welcher Weise kann man die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln

Formel 90. $(a-b):c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 90a. $(a-c):b = \sin\frac{\alpha-\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 90b. $(b-c):a = \sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

symbolisch dargestellten zweiten Mollweideschen Satzes nachweisen?

Antwort. Die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln 90 symbolisch dargestellten zweiten Mollweideschen Satzes kann man auf folgende Arten nachweisen:

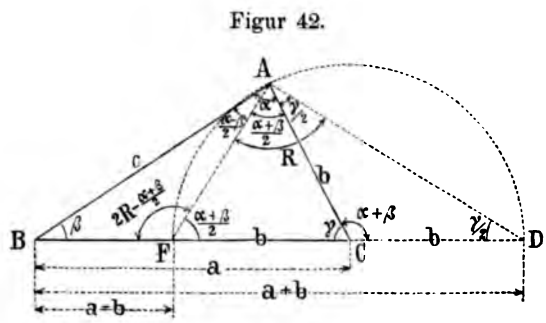
Beweis I

(synthetischer Beweis).

Ist, siehe Figur 42, ABC ein beliebiges Dreieck, so bilde man zum Beweis der Formel 90 sowohl die Summe $a+b$ $(=BD)$ als auch die Differenz $a-b$ $(=BF)$ der Seiten a und c, verbinde dann A mit D und F und drücke, wie in dem Beweis I in Antwort der vorigen Frage gezeigt wurde und wie in der Figur 42 angedeutet ist, die in dieser Figur vorkommenden Winkel in die Winkel α, β und γ des Dreiecks ABC

aus. Aus dem Dreieck ABF erhält man nach der Sinusregel die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\left(2R-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$



Figur 42.

Berücksichtigt man nunmehr, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ einen spitzen und dass somit $2R-\frac{\alpha+\beta}{2}$ einen stumpfen Winkel vorstellt, so kann man nach der Erkl. 66 für:

$$\sin\left(2R-\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

setzen und man erhält aus Gleichung a):

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}},$$

nämlich die zu beweisende Formel 90.

In ganz analoger Weise kann man die Formeln 90a und 90b herleiten, wenn man sich Figuren herstellt, welche der Figur 42 analog sind und in welchen bezw. die Summen und Differenzen $a+c$, $a-c$ bezw. $b+c$ und $b-c$ enthalten sind.

Beweis II
(analytischer Beweis).

Nach der Sinusregel ist:

$$\text{a)} \ldots \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

$$\text{b)} \ldots \frac{b}{c} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man:

$$\text{c)} \ldots a = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

und

$$\text{d)} \ldots b = \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Subtrahiert man diese Gleichungen c) und d), so erhält man:

$$a-b = \frac{c\cdot\sin\alpha}{\sin\gamma} - \frac{c\cdot\sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der in der Erkl. 116 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und nach der in der Erkl. 52 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\sin\gamma = 2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Da nun $(\alpha+\beta)$ und γ als Winkel eines Dreiecks Supplementwinkel, also $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, so kann man in letzterer Gleichung nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

setzen; man erhält hiernach:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{2\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cdot\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

oder

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

nämlich die Formel 90.

In derselben Weise kann man die Richtigkeit der Formeln 90a und 90b nachweisen, woraus sich die Richtigkeit des vorstehenden Satzes ergibt.

Erkl. 116. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(Siehe Formel 67 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Frage 25. In welcher Weise kann man die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln:

Formel 91. $(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

Formel 91a. $(a+c):(a-c) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$

Formel 91b. $(b+c):(b-c) = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$

symbolisch dargestellten Tangentensatzes nachweisen?

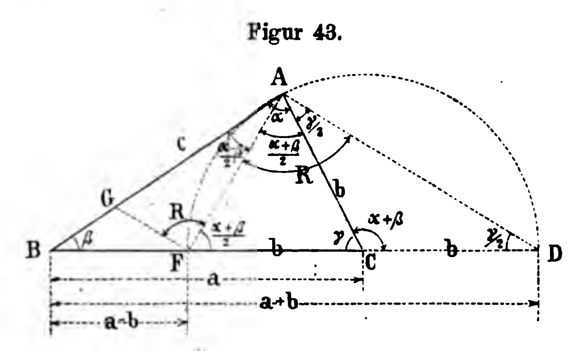
Antwort. Die Richtigkeit des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln 91 symbolisch dargestellten Tangentensatzes kann man auf folgende Arten beweisen:

Beweis I

(synthetischer Beweis).

Ist, siehe Figur 43, ABC ein beliebiges Dreieck, so bilde man

Figur 43.



zum Beweis der Formel 91 sowohl die Summe $a+b (= BD)$ als auch die Differenz $a-b$ $(= BF)$ der Seiten a und b, verbinde dann A mit D und F und drücke, wie in dem Beweis I in Antwort der Frage 23 gezeigt wurde und wie in der Figur 43 angedeutet ist, die in dieser Figur vorkommenden Winkel in die Winkel α, β und γ des Dreiecks ABC aus. Aus dem bei A rechtwinkligen Dreieck FAD erhält man zunächst die Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{AD}{AF}$$

Zieht man ferner $FG \parallel AD$, so ist nach der Erkl. 117 das Dreieck AFG ein bei F rechtwinkliges Dreieck und aus diesem Dreieck ergibt sich die weitere Relation:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{FG}{AF}$$

Durch Division der Gleichungen a) und b) erhält man nunmehr:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{AD}{AF} : \frac{FG}{AF}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{AD}{FG}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 118 die Proportion besteht:

$$\text{d)} \ldots \frac{AD}{FG} = \frac{BD}{BF} = \frac{a+b}{a-b}$$

so erhält man schliesslich aus den Gleichungen c) und d):

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{a+b}{a-b}$$

oder

$$(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

nämlich die zu beweisende Formel 91.

In ganz analoger Weise kann man die Formeln 91a und 91b herleiten, wenn man sich Figuren herstellt, welche

Erkl. 117. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Werden zwei parallele Linien von einer dritten Linie durchschnitten, so sind die inneren Wechselwinkel einander gleich."
(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)
Nach diesem Satz ist in der Figur 43:

$$\sphericalangle GFA = \sphericalangle FAD$$

weil $FG \parallel AD$ nach Konstruktion ist.

Erkl. 118. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Zieht man zu einer Seite eines Dreiecks eine Parallele, welche die beiden andern Seiten schneidet, so schneidet diese ein Dreieck ab, das jenem Dreieck ähnlich ist."
(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

der Figur 43 analog sind und in welchen bezw. die Summen und Differenzen $a+c$ und $a-c$, bezw. $b+c$ und $b-c$ enthalten sind.

Beweis II

(erster analytischer Beweis).

Nach dem Sinussatz besteht zwischen den zwei Seiten a und b eines Dreiecks und den denselben gegenüberliegenden Winkeln α und β die Relation:

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Aus dieser Proportion erhält man nach dem in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach den in der Erkl. 115 und 116 angeführten goniometrischen Formeln:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

und

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

gesetzt werden kann, so geht vorstehende Gleichung in Rücksicht dessen über in:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Dividiert man nunmehr Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch $2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}}{\dfrac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}}$$

oder unter Anwendung der in der Erkl. 120 erwähnten goniometrischen Formel:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Erkl. 119. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe der Glieder des zweiten Verhältnisses wie die entsprechenden Differenzen."

Ist die Proportion:

$$\text{a)}\ \ldots\ \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

gegeben, so ist nach diesem Satz:

$$1)\ \ldots\ \frac{a+b}{c+d}=\frac{a-b}{c-d}$$

oder, da man die inneren (mittleren) Glieder in jeder Proportion vertauschen kann:

$$2)\ \ldots\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Arithmetik oder Heft 7 der Kleyerschen Encyklopädie.)

Erkl. 120. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

(Siehe Formel 7 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Diese Formel ergibt sich durch Division der in Antwort der Frage 6 aufgestellten Gleichung 3), in die Gleichung 1) und in Rücksicht der Gleichung 9) jener Antwort.

nämlich die Formel 91. In analoger Weise kann man die Formeln 91a und 91b herleiten, woraus sich die Richtigkeit des Tangentensatzes ergibt.

Beweis III

(zweiter analytischer Beweis).

Durch Division der Formel 90 in Formel 89 erhält man:

$$\frac{a+b}{c}:\frac{a-b}{c}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}:\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

$$\frac{a+b}{c}\cdot\frac{c}{a-b}=\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Erkl. 121. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

(siehe Formel 8 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Diese Formel ergibt sich auch durch Division der in Antwort der Frage 6 aufgestellten Gleichung 8) durch Gleichung 1) und in Rücksicht der Gleichung 11) jener Antwort.

Berücksichtigt man nunmehr, dass man nach der Erkl. 120:

$$\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und nach der Erkl. 121:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

setzen kann, so erhält man:

$$\frac{a+b}{a-b}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 15:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

setzt:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}\text{,}$$

nämlich die Formel 91. In analoger Weise kann man die Formeln 91a und 91b herleiten.

Anmerkung 7. Dem Studierenden wird empfohlen, die bei Lösung einer Aufgabe erforderlichen und in nachstehendem entwickelten Formeln stets von neuem selbständig herzuleiten, wie nachstehend gezeigt ist; und die hergeleiteten Formeln in Worten auszudrücken und zwar in analoger Weise, wie es in vorstehendem mit den Formeln 86 bis 91 geschehen ist. Durch letzteres wird der Studierende die Analogien gewisser Formeln bald erkennen und infolge dessen die Hauptformeln leicht im Gedächtnis behalten (siehe folgende Anmerkung).

Anmerkung 8. Die in folgendem Abschnitt aufgestellten speciellen Formeln, mittels welcher man direkt einzelne Stücke eines Dreiecks aus gewissen gegebenen Stücken desselben berechnen kann, sollen nicht dazu dienen, dass der Studierende dieselben geradezu zum Auflösen entsprechender Aufgaben benutzt (siehe Anmerkung 7), sondern sie sollen einesteils demselben nur zur Anleitung und zur Kontrolle für selbständig zu machende bezw. gemachte Entwicklungen dienen, und andernteils sollen sie dazu dienen, dass der Praktiker, der aus irgend welchen gegebenen Stücken eines Dreiecks ein anderes Stück zu berechnen hat, dies mittels einer oder der andern dieser Formeln, welche am Schlusse des Buches noch zu diesem Zweck übersichtlich zusammengestellt sind, direkt ausführen kann (siehe Anmerkung 1).

Anmerkung 9. Bemerkt sei ferner hier noch, dass es bei der Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks Fälle gibt, bei welchen es unbequem und umständlich wäre, wenn man, wie es in Antwort der Frage 10 unter b) im allgemeinen gefordert wird, die gesuchten Stücke stets direkt aus den gegebenen Stücken berechnen wollte, und dass man in solchen Fällen oft auf einfachere, raschere und sicherere Weise zum Ziele gelangt, wenn man zuerst passend gewählte andere Stücke (Hülfsstücke) berechnet und dann mittels dieser berechneten Stücke, für deren Richtigkeit man sich allerdings auf irgend eine Weise Kontrolle verschaffen muss, die geforderten Stücke bestimmt. Bei den nachstehend gelösten Aufgaben sind an geeigneten Stellen in den Erklärungen diesbezügliche Hinweise gegeben.

a). Gelöste Aufgaben.

Aufgabe 117. Von einem schiefwinkligen Dreieck seien gegeben die Seite:

$$a = 370{,}648\,\text{m}$$

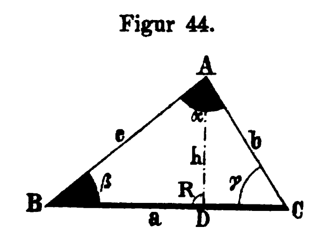
und die beiden Winkel:

$$\alpha = 47^0\,31'\,40{,}5''$$

$$\text{und } \beta = 62^0\,13'\,28{,}7''$$

Man soll die übrigen Bestimmungsstücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Figur 44.



Gegeben: $\begin{cases} a = 370{,}648\,\text{m} \\ \alpha = 47^0\,31'\,40{,}5'' \\ \beta = 62^0\,13'\,28{,}7'' \end{cases}$

Gesucht: γ, b, c und F (der Flächeninhalt).

Auflösung 1. Zur Berechnung des gesuchten Winkels γ, siehe Figur 44, beachte man, dass $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist. Hiernach erhält man:

Formel 92. $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

In Rücksicht der für α und β gegebenen Zahlenwerte ist also:

$$\gamma = 180^0 - (47^0 31' 40{,}5'' + 62^0 13' 28{,}7'')$$

$$\gamma = 180^0 - 109^0\,45'\,9{,}2''$$

oder

$$\text{A)} \ldots \gamma = 70^0\,14'\,50{,}8''$$

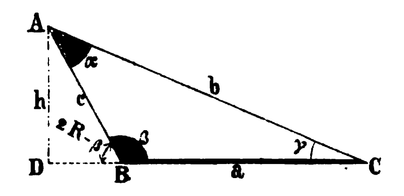
Zur Berechnung der gesuchten Seite b beachte man, dass nach der Sinusregel die Relation besteht:

$$\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$$

Hieraus erhält man:

Formel 93. $b = \dfrac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$ Längeneinheiten.

Figur 45.



Hülfsrechnung 1.

Aus

$$b = \frac{370,648 \cdot \sin 62^0\, 13'\, 28,7''}{\sin 47^0\, 31'\, 40,5''}$$

erhält man b wie folgt:

$\log b = \log 370,648 + \log \sin 62^0\, 13'\, 28,7'' - \log \sin 47^0\, 31'\, 40,5''$

Nun ist: $\log 370,648 =$	2,5689523
	+ 93,6
	2,5689617
$+ \log \sin 62^0\, 13'\, 28,7'' =$	9,9468361 — 10*
	12,5157978 — 10
$- \log \sin 47^0\, 31'\, 40,5'' = \pm$	9,8678247 ∓ 10**
$\log b =$	2,6479731
	9695
	36
	38,8

* s. Hülfsr. 2. ** s. Hülfsr. 3

mithin:

$$b = 444,604$$

Hülfsrechnung 2.

$\log \sin 62^0\, 13'\, 28,7'' =$	9,9468264 — 10
	+ 88,8
	+ 7,8
	9,9468361 — 10

Hülfsrechnung 3.

$\log \sin 47^0\, 31'\, 40,5'' =$	9,8678237 — 10
	+ 0
	+ 9,6
	9,8678247 — 10

Erkl. 122. Bei der Berechnung der gemäss der Aufgabe 117 gesuchten Seite c mittels der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Formel 94 beachte man, dass die Summe der Winkel α und β einen stumpfen Winkel vorstellt und dass man nach der Erkl. 66 für den Sinus dieses stumpfen Winkels: $(\alpha + \beta)$ den Sinus des Supplementwinkels γ, also nach der nebenstehenden Gleichung A):

$$\sin 70^0\, 14'\, 50,8''$$

setzen kann.

Hülfsrechnung 4.

Aus

$$c = \frac{370,648 \cdot \sin 70^0\, 14'\, 50,8''}{\sin 47^0\, 31'\, 40,5''}$$

erhält man c wie folgt:

$\log c = \log 370.648 + \log \sin 70^0\, 14'\, 50,8'' - \log \sin 47^0\, 31'\, 40,5''$

In Rücksicht der für α, β und a gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass sich die für a gegebene Masszahl auf „Meter“ bezieht, erhält man hiernach:

$$b = \frac{370,648 \cdot \sin 62^0\, 13'\, 28,7''}{\sin 47^0\, 31'\, 40,5''} \text{ Meter}$$

oder nach Hülfsrechnung 1:

B) . . . $b = 444,604$ m

Zur Berechnung der gesuchten Seite c beachte man, dass nach der Sinusregel, analog wie vorhin, die Relation besteht:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin \gamma}{\sin \alpha}$$

Hieraus erhält man:

$$c = \frac{a \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass γ und $(\alpha + \beta)$ Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 66:

$$\sin \gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

gesetzt werden kann:

Formel 94. $c = \dfrac{a \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$ Längeneinheiten.

In Rücksicht der für α, β und a gegebenen Zahlenwerte, in Rücksicht der Erkl. 122 und in Rücksicht, dass sich die für a gegebene Masszahl auf „Meter“ bezieht, erhält man hiernach:

$$c = \frac{370,648 \cdot \sin 70^0\, 14'\, 50.8''}{\sin 47^0\, 31'\, 40,5''} \text{ Meter}$$

oder nach der Hülfsrechnung 4:

C) . . . $c = 472,934$ m

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F hat man nach der in der Erkl. 34 aufgestellten planimetrischen Formel, wenn man die zur gegebenen Seite a gehörige Höhe, siehe die Figuren 44 und 45, einstweilen mit h bezeichnet, die Relation:

a) . . . $F = \dfrac{a \cdot h}{2}$

Da die Höhe h nicht gegeben ist, so muss man dieselbe in die gegebenen Bestimmungsstücke auszudrücken suchen, dies geschieht wie folgt:

Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADB, siehe die Figuren 44 und 45, erhält man:

$$\sin \beta = \frac{h}{c} \quad \text{(s. Erkl. 123)}$$

Nun ist: $\log 370{,}648 = 2{,}5689523$
$+ 93{,}6$
$2{,}5689617$
$-\log \sin 70^0\,14'\,50{,}8'' = +\ 9{,}9736639 - 10$*
$12{,}5426256 - 10$
$-\log \sin 47^0\,31'\,40{,}5'' = \pm\ 9{,}8678247 \mp 10$**
$\log c = 2{,}6748009$
7969
40
36,4

* s. Hülfsr. 5. ** s. Hülfsr. 3

mithin:

$c = 472{,}934$

Hülfsrechnung 5.

$\log \sin 70^0\,14'\,50{,}8'' = 9{,}9736633 - 10$
$+ 00$
$+ 6$
$9{,}9736639 - 10$

Erkl. 123. Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADB in Figur 45 erhält man:

$$\sin(2R - \beta) = \frac{h}{c}$$

Da nun $(2R - \beta)$ und β Supplementwinkel sind, so kann man nach der Erkl. 66:

$$\sin(2R - \beta) = \sin \beta$$

setzen und man erhält:

$$\sin \beta = \frac{h}{c}$$

Erkl. 124. Hat man zwei ähnliche Dreiecke, in welchen je zwei Winkel $= \alpha$ und β (siehe Erkl. 8) und in welchen die dem Winkel α gegenüberliegenden Seiten bzw. a und a_1 sind, so hat man für die Inhalte F und F_1 dieser ähnlichen Dreiecke nach der nebenstehenden Formel 95:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha}$$

und

$$\text{b)} \ldots F = \frac{a_1^2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Dividiert man diese Gleichungen ineinander und reduziert, so erhält man die Proportion:

$$\text{c)} \ldots F : F_1 = a^2 : a_1^2$$

oder den planimetrischen Satz:

„Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Seiten."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Hülfsrechnung 6.

Aus

$$F = \frac{370{,}648^2 \cdot \sin 70^0\,14'\,50{,}8'' \cdot \sin 62^0\,18'\,28{,}7''}{2 \cdot \sin 47^0\,31'\,40{,}5''}$$

erhält man F wie folgt:

$\log F = 2 \cdot \log 370{,}648 + \log \sin 70^0\,14'\,50{,}8'' + \log \sin 62^0\,18'\,28{,}7'' - (\log 2 + \log \sin 47^0\,31'\,40{,}5'')$

oder

$$\text{b)} \ldots h = c \cdot \sin \beta \text{ (s. auch die Erkl. 50)}$$

Berücksichtigt man ferner, dass man nach der Formel 94 für c:

$$\text{c)} \ldots c = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha}$$

setzen kann, so erhält man für h:

$$h = \frac{a \sin(\alpha + \beta)}{\sin \alpha} \cdot \sin \beta$$

und somit nach Gleichung a) für F:

$$F = \frac{a \cdot a \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha}$$

oder

Formel 95. $$F = \frac{a^2 \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin \alpha}$$

Flächeneinheiten (s. Erkl. 124).

Substituiert man hierin die für α, β und a gegebenen Zahlenwerte, so erhält man in Rücksicht, dass $(\alpha + \beta)$ gemäss der Aufgabe einen stumpfen Winkel vorstellt, dass man also:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \gamma = \sin 70^0\,14'\,50{,}8''$$

setzen kann (siehe die Erkl. 122 und die vorstehende Gleichung A) und dass sich die Masszahl a auf „Meter" bezieht:

$$F = \frac{370{,}648^2 \cdot \sin 70^0\,14'\,50{,}8'' \cdot \sin 62^0\,18'\,28{,}7''}{2 \cdot \sin 47^0\,31'\,40{,}5''} \text{ qm}$$

oder nach Hülfsrechnung 6:

$$F = 77905{,}61 \text{ qm}$$

(s. die Erkl. 125).

Auflösung 2. Zunächst bestimme man, wie in Auflösung 1 gezeigt ist, den dritten Winkel γ und bringe dann die Mollweideschen Formeln 89 und 90 in Anwendung. Aus der Formel 89b erhält man für die Summe der gesuchten Seiten b und c:

Formel 96. $$b + c = \frac{a \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\beta + \gamma}{2}} \text{ Längeneinheiten.}$$

und aus der Formel 90b erhält man für die Differenz der gesuchten Seiten b und c:

Formel 96a. $$b - c = \frac{a \cdot \sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\beta + \gamma}{2}} \text{ Längeneinheiten.}$$

Sind für a, β und γ (bezw. für α) Zahlenwerte gegeben, so kann man mit-

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 370{,}648 &= 2{,}5689523\\
&\quad\;\; + 93{,}6\\
&\quad\; 2{,}5689617\\
&\quad\;\; \cdot 2\\
&\quad\; 5{,}1379234\\
+ \log\sin 70^0\,14'\,50{,}8'' &= + 9{,}9736639 - 10^{*}\\
+ \log\sin 62^0\,13'\,28{,}7'' &= + 9{,}9468361 - 10^{**}\\
&\quad\; 25{,}0604234 - 20\\
-(\log 2 + \log\sin 47^0\,31'\,40{,}5'') &= \mp 10{,}1688547 \mp 10^{***}\\
\log F &= 14{,}8915687 - 10\\
\text{oder } \log F &= 4{,}8915687
\end{aligned}$$

5653
34
33,6
0,4
0,56

* s. Hülfsr. 5. ** s. Hülfsr. 2.
*** s. Hülfsr. 7.

mithin:

$$F = 77905{,}61$$

Hülfsrechnung 7.

$$\begin{aligned}
\log 2 &= 0{,}3010300\\
\log\sin 47^0\,31'\,40{,}5 &= + 9{,}8678247 - 10^{*}\\
\log 2 + \log\sin 47^0\,31'\,40{,}5'' &= 10{,}1688547 - 10
\end{aligned}$$

* s. Hülfsrechnung 3.

Erkl. 125. Ist in der Aufgabe 117 einer der gegebenen Winkel ein stumpfer Winkel, so muss man bei einer numerischen Berechnung der gesuchten Stücke in den Formeln 93 bis 95 für den Sinus jenes stumpfen Winkels den Sinus von dessen Supplementwinkel setzen (s. Erkl. 66).

Erkl. 126. Ein goniometrischer Satz heisst:

„Der Kosinus eines negativen Winkels ist gleich dem Kosinus desselben positiven Winkels"

in Zeichen: $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 32.)

Erkl. 127. Ein goniometrischer Satz heisst:

„Der Sinus eines negativen Winkels ist gleich dem negativen Sinus desselben positiven Winkels"

in Zeichen: $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 31.)

Hülfsrechnung 8.

Aus

$$b + c = \frac{370{,}648 \cdot \cos 4^0\,0'\,41{,}05''}{\cos 66^0\,14'\,9{,}75}$$

erhält man $(b + c)$ wie folgt:

$$\log(b + c) = \log 370{,}648 + \log\cos 4^0 0'\,41{,}05'' - \log\cos 66^0\,14'\,9{,}75''$$

tels dieser Formeln $b + c$ und $b - c$ berechnen und dann auf einfache Weise jede der Seiten b und c bestimmen.

In Rücksicht der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass nach der Gleichung A) in der Auflösung 1:

$$\gamma = 70^0\,14'\,50{,}8''$$

ist, erhält man hiernach:

$$1)\; b + c = \frac{370{,}648 \cdot \cos\dfrac{62^0\,13'\,28{,}7'' - 70^0\,14'\,50{,}8''}{2}}{\cos\dfrac{62^0\,13'\,28{,}7'' + 70^0\,14'\,50{,}8''}{2}}$$

und

$$2)\; b - c = \frac{370{,}648 \cdot \sin\dfrac{62^0\,13'\,28{,}7'' - 70^0\,14'\,50{,}8''}{2}}{\sin\dfrac{62^0\,13'\,28{,}7'' + 70^0\,14'\,50{,}8''}{2}}$$

oder

$$3)\; b + c = \frac{370{,}648 \cdot \cos\left(-\dfrac{8^0\,1'\,22{,}1''}{2}\right)}{\cos\dfrac{132^0\,28'\,19{,}5''}{2}}$$

und

$$4)\; b - c = \frac{370{,}648 \cdot \sin\left(-\dfrac{8^0\,1'\,22{,}1''}{2}\right)}{\sin\dfrac{132^0\,28'\,19{,}5''}{2}}$$

oder

$$5)\; b + c = \frac{370{,}648 \cdot \cos(-4^0\,0'\,41{,}05'')}{\cos 66^0\,14'\,9{,}75''}$$

und

$$6)\; b - c = \frac{370{,}648 \cdot \sin(-4^0\,0'\,41{,}05'')}{\sin 66^0\,14'\,9{,}75''}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 126:

$$\cos(-4^0\,0'\,41{,}05'') = \cos 4^0\,0'\,41{,}05''$$

und dass nach der Erkl. 127:

$$\sin(-4^0\,0'\,41{,}05'') = -\sin 4^0\,0'\,41{,}05''$$

ist, so erhält man:

$$7)\; b + c = \frac{370{,}648 \cdot \cos 4^0\,0'\,41{,}05''}{\cos 66^0\,14'\,9{,}75''}$$

und

$$8)\; b - c = -\frac{370{,}648 \cdot \sin 4^0\,0'\,41{,}05''}{\sin 66^0\,14'\,9{,}75''}$$

Aus der Gleichung 7) ergibt sich nunmehr nach der Hülfsrechnung 8:

9) . . . $b + c = 917{,}538$

Nun ist: $\log 370{,}648 = 2{,}5689523$
$+93{,}6$
$2{,}5689617$
$-\log\cos 4^0\,0'\,41{,}05'' = +\;9{,}9989347 - 10$*
$12{,}5678964 - 10$
$-\log\cos 66^0\,14'\,9{,}75'' = \pm\;9{,}6052724 \mp 10$**
$\log(b+c) = 2{,}9626240$
6203
37
37,6

* s. Hülfsr. 9. ** s. Hülfsr. 10.

mithin:

$$b + c = 917{,}538$$

Hülfsrechnung 9.

$\log\cos 4^0\,0'\,41{,}05'' = 9{,}9989349 - 10$
-2 (s. nachstehende Gleichung a).
$9{,}9989347 - 10$

Die für 1,05″ zu subtrahierenden Proportionalteile x findet man aus der Proportion:

$$1{,}05'' : 10'' = x : 15$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{1{,}05 \cdot 15}{10}$$
$$x = 0{,}105 \cdot 15$$
$$x = 1{,}575$$

oder, abgerundet

$$\text{a)} \ldots x = 2$$

Hülfsrechnung 10.

$\log\cos 66^0\,14'\,9{,}75'' = 9{,}6053190 - 10$
$\left.\begin{matrix}-430{,}2\\ -33{,}46\\ -2{,}39\end{matrix}\right\} = -466{,}05$
$9{,}6052724 - 10$

Hülfsrechnung 11.

Aus

$$b - c = -\frac{370{,}648 \cdot \sin 4^0\,0'\,41{,}05''}{\sin 66^0\,14'\,9{,}75''}$$

erhält man $(b - c)$ wie folgt:

Man setze für den positiven Wert des Quotienten rechts einstweilen den Buchstaben y, also:

$$1) \ldots b - c = -y$$

und berechne diesen Wert auf logarithmische Weise; man erhält in Rücksicht jener Substitution:

$$\log y = \log 370{,}648 + \log\sin 4^0\,0'\,41{,}05'' - \log\sin 66^0\,14'\,9{,}75''$$

Nun ist: $\log 370{,}648 = 2{,}5689523$
$+93{,}6$
$2{,}5689617$
$+\log\sin 4^0\,0'\,41{,}05'' = +\;8{,}8448188 - 10$*
$11{,}4137805 - 10$
$-\log\sin 66^0\,14'\,9{,}75'' = \pm\;9{,}9615224 \mp 10$**
$\log y = 1{,}4522581$
2466
115
122,4

* s. Hülfsr. 12. ** s. Hülfsr. 13.

mithin:

$$y = 28{,}3308$$
$$\text{oder } y = 28{,}001$$

Für die Differenz $b - c$ erhält man also nach Gleichung 1):

$$b - c = -28{,}331\,^*$$

* Der negative Wert für $b - c$ deutet an, dass c grösser als b ist.

Aus der Gleichung 8) ergibt sich ferner nach der Hülfsrechnung 11:

$$10) \ldots b - c = -28{,}331$$

Aus den Gleichungen 9) und 10) erhält man durch Addition:

$$2b = 917{,}538 - 28{,}331$$
$$2b = 889{,}207$$
$$b = \frac{889{,}207}{2}$$

oder

$$B_1) \ldots b = 444{,}604 \text{ m}$$

vergleiche hiermit die Gleichung B) in Auflösung 1.

Aus den Gleichungen 9) und 10) erhält man ferner durch Subtraktion:

$$2c = 917{,}538 + 28{,}331$$
$$2c = 945{,}869$$
$$c = \frac{945{,}869}{2}$$

oder

$$C_1) \ldots c = 472{,}934 \text{ m}$$

vergleiche hiermit die Gleichung C) in Auflösung 1 (s. Erkl. 128). Den Inhalt berechne man wie in Auflösung 1.

(Siehe die Erkl. 129 bis 137.)

Hülfsrechnung 12.

$$\text{og}\sin 4^0\,0'\,41{,}05'' = 8{,}8447873 - 10$$
$$+\,315 \text{ (s. nachstehende}$$
$$\overline{8{,}8448188 - 10} \text{ Gleich. a)}$$

Die für 1,05'' zu addierenden Proportionalteile x findet man aus der Proportion:

$$1{,}05'' : 10'' = x : 3001$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{3001 \,.\, 1{,}05}{10}$$
$$x = 300{,}1 \,.\, 1{,}05$$
$$x = 315{,}105$$

oder abgerundet:

a) . . . $x = 315$

Hülfsrechnung 13.

$$\log\sin 66^0\,14'\,9{,}75'' = 9{,}9615133 - 10$$
$$+\,83{,}7$$
$$+\,6{,}51$$
$$+\,0{,}46$$
$$\overline{9{,}9615224 - 10}$$

Erkl. 128. Bei der logarithmischen Berechnung der Summe $(a+b)$ und der Differenz $(a-b)$ in nebenstehender Auflösung 2 beachte man, dass man z. B. die Logarithmen des Kosinus von $\frac{\beta-\gamma}{2}$ und des Sinus von $\frac{\beta-\gamma}{2}$, desgleichen des Kosinus und des Sinus von $\frac{\beta+\gamma}{2}$ gleichzeitig aufschlagen kann, wodurch die Rechnung etwas vereinfacht wird.

Erkl. 129. Sind, siehe Figur 46, von einem Dreieck die Seite a und die beiden Winkel α und γ gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts des Dreiecks folgende Formeln:

Formel 97. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

„ **98.** $b = \frac{a \cdot \sin(\alpha+\gamma)}{\sin\alpha}$

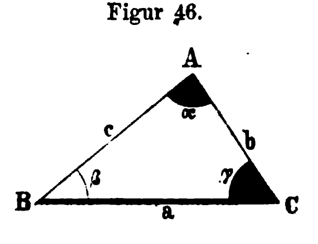
„ **99.** $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

„ **100.** $F = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha+\gamma) \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin\alpha}$

(s. Erkl. 137)

b und c kann man auch mittels der Formeln 96 und 96a berechnen.

Figur 46.



Erkl. 130. Sind, siehe Figur 47, von einem Dreieck die Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts des Dreiecks folgende Formeln:

Formel 101. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

„ **102.** $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$

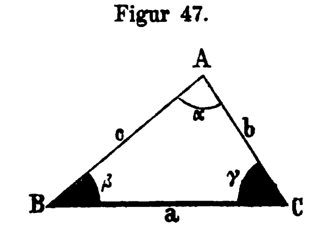
„ **103.** $a = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$

„ **104.** $F = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \cdot \sin(\beta+\gamma)}$

(s. Erkl. 137)

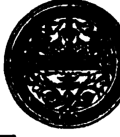
b und c kann man auch mittels der Formeln 96 und 96a berechnen.

Figur 47.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

259. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 255. — Seite 81—96. Mit 9 Figuren.


Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 255. — Seite 81—96. Mit 9 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile der reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den Schulunterricht** geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 181. Sind, siehe Figur 48, von einem Dreieck die Seite b und die beiden Winkel α und β gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 105. $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

„ 106. $a = \frac{b \cdot \sin \cdot \alpha}{\sin \beta}$

„ 107. $c = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta}$

oder

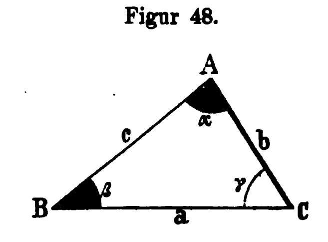
„ 108. $a + c = b \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} : \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}$

und

„ 108a. $a - c = b \cdot \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$

„ 109. $F = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \sin \beta}$

(s. Erkl. 137)



Figur 48.

Erkl. 182. Sind, siehe Figur 49, von einem Dreieck die Seite b und die beiden Winkel α und γ gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 110. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

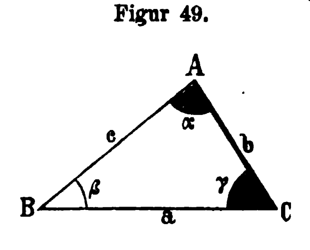
„ 111. $a = \frac{b \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$

„ 112. $c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$

„ 113. $F = \frac{b^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma}{2 \cdot \sin(\alpha + \gamma)}$

(s. Erkl. 127)

a und c kann man auch mittels der Formeln 108 und 108a berechnen.



Figur 49.

Erkl. 183. Sind, siehe Figur 50, von einem Dreieck die Seite b und die beiden Winkel β und γ gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 114. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

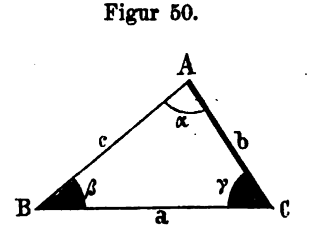
„ 115. $a = \frac{b \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta}$

„ 116. $c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$

„ 117. $F = \frac{b^2 \cdot \sin \gamma \cdot \sin(\beta + \gamma)}{2 \cdot \sin \beta}$

(s. Erkl. 137.)

a und c kann man auch mittels der Formeln 108 und 108a berechnen.



Figur 50.

Erkl. 184. Sind, siehe Figur 51, von einem Dreieck die Seite c und die beiden Winkel α und β gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 118. $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

„ **119.** $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

„ **120.** $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

oder

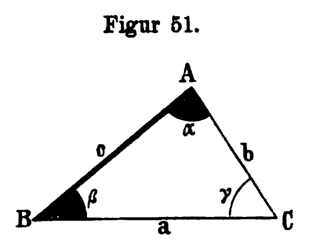
Formel 121. $a + b = c \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} : \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$

„ **121a.** $a - b = c \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2} : \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$

und

Formel 122. $F = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}$

(siehe Erkl. 137.)



Figur 51.

Erkl. 135. Sind, siehe Figur 52, von einem Dreieck die Seite c und die beiden Winkel α und γ gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 123. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

„ **124.** $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

„ **125.** $b = \frac{c \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\gamma}$

„ **126.** $F = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{2 \cdot \sin\gamma}$

(s. Erkl. 137.)

a und b kann man auch mittels der Formeln 121 und 121a berechnen.

Figur 52.

Erkl. 136. Sind, siehe Figur 53, von einem Dreieck die Seite c und die beiden Winkel β und γ gegeben, so bestehen zur Bestimmung der übrigen Stücke und des Inhalts dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 127. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

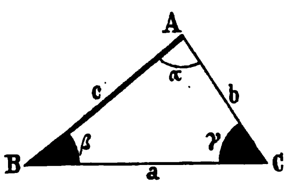
„ **128.** $a = \frac{c \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin\gamma}$

„ **129.** $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

„ **130.** $F = \frac{c^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin(\beta + \gamma)}{2 \cdot \sin\gamma}$

(s. Erkl. 137.)

a und b kann man auch mittels der Formeln 121 und 121a berechnen.



Figur 53.

Erkl. 137. Die in den Erkl. 129 bis 136 aufgestellten Formeln kann man in ganz analoger Weise als die in nebenstehender Auflösung aufgeführten Formeln 92 bis 96a herleiten.

Aufgabe 118. Man kennt von einem schiefwinkligen Dreieck die zwei Seiten:

$$a = 104{,}76 \text{ km}$$

und $$b = 22{,}55 \text{ km}$$

und den von beiden eingeschlossenen Winkel:

$$\gamma = 9^0\, 1'\, 1{,}2''$$

und soll aus diesen Angaben die übrigen Bestimmungsstücke des Dreiecks und dessen Inhalt berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 104{,}76 \text{ km} \\ b = 22{,}55 \text{ km} \\ \gamma = 9^0\, 1'\, 1{,}2'' \end{cases}$

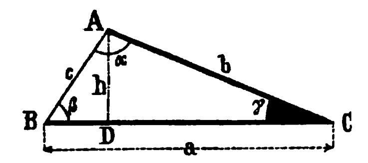
Gesucht: α, β, c und F (der Flächeninhalt).

Auflösung 1. Zur Berechnung der gesuchten Winkel α und β beachte man, dass die Summe α und β dieser Winkel bezw. die halbe Summe $\frac{\alpha + \beta}{2}$ leicht bestimmt werden kann, indem:

Formel 131. $\alpha + \beta = 2R - \gamma$

ist, und dass man hiernach die Winkel α und β auf einfache Weise bestimmen könnte, wenn auch deren Differenz $\alpha - \beta$ bezw. deren halbe Differenz bekannt wäre. Diese Differenz kann man mittels des in Antwort der Frage 21 erwähnten und durch die Formeln 91 symbolisch dargestellten Tangentensatzes wie folgt bestimmen:

Figur 54.



Aus der Formel 91:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} \text{ erhält man:}$$

Formel 131a . . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

nach welcher man $\alpha - \beta$ berechnen kann, sobald für $a-b$, $a+b$ und $\alpha+\beta$ Zahlenwerte substituiert werden.

In Rücksicht der in der Aufgabe für α und β gegebenen Zahlenwerte erhält man zunächst nach der Formel 131:

$$\alpha + \beta = 180^0 - 9^0\ 1'\ 1{,}2''$$

oder

a) . . . $\alpha + \beta = 170^0\ 58'\ 58{,}8''$

und hiernach:

b) . . . $\frac{\alpha+\beta}{2} = 85^0\ 29'\ 29{,}4''$

Substituiert man in vorstehender Formel 131ª die für a und b gegebenen Zahlenwerte und den soeben für $\frac{\alpha+\beta}{2}$ berechneten Wert, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{104{,}76-22{,}55}{104{,}76+22{,}55}\cdot\operatorname{tg}85^0\ 29'\ 29{,}4'$$

oder nach der Hülfsrechnung 1:

c) . . . $\frac{\alpha-\beta}{2} = 83^0\ 2'\ 17{,}44''$

mithin:

d) . . . $\alpha - \beta = 166^0\ 4'\ 34{,}88''$

Aus den Gleichungen a) und d) erhält man nunmehr durch Addition derselben:

$$2\alpha = 337^0\ 3'\ 33{,}68''$$

oder

A) . . . $\alpha = 168^0\ 31'\ 46{,}84''$

Aus den Gleichungen a) und d) er-

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{104{,}76-22{,}55}{104{,}76+22{,}55}\cdot\operatorname{tg}85^0\ 29'\ 29{,}4''$$

erhält man $\frac{\alpha-\beta}{2}$ wie folgt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{82{,}21}{127{,}31}\cdot\operatorname{tg}85^0\ 29'\ 29{,}4''$$

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \log 82{,}21 + \log\operatorname{tg}85^0\ 29'\ 29{,}4'' - \log 127{,}31$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 82{,}21 = & 1{,}9149246 \\
+\log\operatorname{tg}85^0\ 29'\ 29{,}4'' = & 1{,}1031929 \text{ s. Hülfsr. 2.} \\
\hline
 & 3{,}0181175 \\
-\log 127{,}31 = & -2{,}1048625 \\
\hline
\log\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = & 0{,}9132550 \\
 & 1248 \\
\hline
 & 1302 \\
 & 1225 \\
\hline
 & 77 \\
 & 70 \\
\hline
 & 7 \\
 & 7
\end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{rl}
\frac{\alpha-\beta}{2} = & 83^0\ 2'\ 10'' \\
 & +\ 7'' \\
 & +\ 0{,}4'' \\
 & +\ 0{,}04'' \\
\hline
\end{array}$$

oder

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = 83^0\ 2'\ 17{,}44''$$

Hülfsrechnung 2.

$\log \operatorname{tg} 85^0\, 29'\, 29{,}4'' = 1{,}1029404$
$+ 2525$ (s. nachstehende Gleichung a)
$1{,}1031929$

Die für 9,4″ zu addierenden Proportionalteile x findet man aus der Proportion:

$9{,}4'' : 10'' = x : 2686$

Man erhält hieraus:

$x = \frac{2686 \cdot 9{,}4}{10}$

$x = 268{,}6 \cdot 9{,}4$

$x = 2524{,}84$

oder abgerundet:

a) . . . $x = 2525$

Erkl. 188. Da die Summe der drei Winkel eines Dreiecks 180° beträgt, so besteht für die Richtigkeit der in nebenstehender Auflösung für α und β berechneten Werte die Kontrolle, dass $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ sein muss. In der That ist auch:

$168^0 31' 46{,}84'' + 2^0 27' 11{,}96'' + 9^0 1' 1{,}2'' = 180^0$

hält man ferner durch Subtraktion derselben:

$2\beta = 4^0\, 54'\, 23{,}92''$

oder

B) . . . $\beta = 2^0\, 27'\, 11{,}96''$

(s. Erkl. 188).

Zur Berechnung der gesuchten Seite c besteht nach dem in Antwort der Frage 21 vorgeführten und durch die Formeln 88 dargestellten Carnot schen Satz die Relation:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma$$

und hieraus erhält man:

Formel 132. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma}$ Längeneinheiten.

Substituiert man hierin die für a, b und γ gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$c = \sqrt{104{,}76^2 + 22{,}55^2 - 2 \cdot 104{,}76 \cdot 22{,}55 \cdot \cos 9^0\, 1'\, 1{,}2''} \text{ km}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 3, 4 und 5:

$c = \sqrt{10974{,}6476 + 508{,}5025 - 4666{,}287}$

$c = \sqrt{11483{,}1501 - 4666{,}287}$

$c = \sqrt{6816{,}8631}$

mithin nach der Hülfsrechnung 7:

C) . . . $c = 82{,}564$ km

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F hat man nach der in der Erkl. 34 aufgestellten planimetrischen Formel, wenn man, siehe Figur 54, die gegebene Seite a als Grundlinie des Dreiecks annimmt und die zugehörige Höhe mit h bezeichnet:

f) . . . $F = \frac{a \cdot h}{2}$

Da nun die Höhe h nicht gegeben ist, so muss man dieselbe in die gegebenen Bestimmungsstücke ausdrücken; dies geschieht wie folgt:

Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADC ergibt sich nach Antwort der Frage 6 die Relation:

$$\sin \gamma = \frac{h}{b}$$

und hieraus erhält man:

g) . . . $h = b \cdot \sin \gamma$ (s. auch die Erkl. 50).

Setzt man diesen Wert für h in die Gleichung f), so erhält man:

Hülfsrechnung 3.

$104{,}76^2 = 104{,}76 \cdot 104{,}76$

62756
73332
41904
104760

$104{,}76^2 = 10974{,}6476$

Hülfsrechnung 4.

$22{,}55^2 = 22{,}55 \cdot 22{,}55$

11275
11275
4510
4510

508,5025

Hülfsrechnung 5.

$\log 2 \cdot 104{,}76 \cdot 22{,}55 \cdot \cos 9^0\, 1'\, 1{,}2'' = \log 2 + \log 104{,}76 + \log 22{,}55 + \log \cos 9^0\, 1'\, 1{,}2''$

Nun ist:

$\log 2 = 0{,}3010300$
$+ \log 104{,}76 = + 2{,}0201955$
$+ \log 22{,}55 = + 1{,}3531465$
$+ \log \cos 9^0 1' 1{,}2'' = + 9{,}9945995 - 10$ (s. Hülfsr. 6)

$13{,}6689715 - 10$

oder $= 3{,}6689715$

9633
82
75,2
6,8
6,6

mithin:

$2 \cdot 104{,}76 \cdot 22{,}55 \cdot \cos 9^0\, 1'\, 1{,}2'' = 4666{,}287$

Hülfsrechnung 6.

$$\log\cos 9^0\,1'\,1{,}2'' = 9{,}9945999 - 10$$
$$-\,4 \text{ (s. nachstehende Gleichung a)}$$
$$9{,}9945995 - 10$$

Die für 1,2″ zu subtrahierenden Proportionalteile x findet man aus der Proportion:

$$1{,}2'' : 10'' = x : 33$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{33\cdot 1{,}2}{10}$$
$$x = 3{,}3\cdot 1{,}2$$
$$x = 3{,}96$$

oder abgerundet:

$$\text{a)} \ldots x = 4$$

Hülfsrechnung 7.

Aus $c = \sqrt{6816{,}8631}$

erhält man c wie folgt:

$$\log c = \frac{1}{2}\cdot\log 6816{,}8631$$

Nun ist:

$$\log 6816{,}8631 = 3{,}8335806$$
$$+\,37{,}8$$
$$+\,1{,}89$$
$$+\,0{,}06$$
$$3{,}8335846$$
$$\cdot\frac{1}{2}$$
$$\log c = 1{,}9167923$$
$$7907$$
$$16$$
$$15{,}9$$

mithin:

$$c = 82{,}5643$$

Hülfsrechnung 8.

Aus
$$F = \frac{104{,}76\cdot 22{,}55}{2}\cdot\sin 9^0\,1'\,1{,}2''$$

erhält man F wie folgt:

$$\log F = \log 104{,}76 + \log 22{,}55 + \log\sin 9^0\,1'\,1{,}2'' - \log 2$$

Nun ist:

$$\log 104{,}76 = 2{,}0201955$$
$$+\log 22{,}55 = +\,1{,}3531465$$
$$+\log\sin 9^0\,1'\,1{,}2'' = +\,9{,}1951452 - 10^*$$
$$12{,}5684872 - 10$$
$$-\log 2 = -\,0{,}3010300$$
$$\log F = 12{,}2674572 - 10$$
$$\text{oder } \log F = 2{,}2674572$$
$$4533$$
$$39$$
$$47$$

* siehe Hülfsrechnung 9.

mithin:

$$F = 185{,}122$$

Hülfsrechnung 9.

$$\log\sin 9^0\,1'\,1{,}2'' = 9{,}1951293 - 10$$
$$+\,159 \text{ (s. nachstehende Gleichung a)}$$
$$9{,}1951452 - 10$$

Die für 1,2″ zu addierenden Proportionalteile x findet man mittels der Proportion:

$$1{,}2'' : 10'' = x : 1327$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{1327\cdot 1{,}2}{10}$$
$$x = 132{,}7\cdot 1{,}2$$
$$x = 159{,}24$$

oder abgerundet:

$$\text{a)} \ldots x = 159$$

$$F = \frac{a\cdot b\cdot\sin\gamma}{2}$$

oder

Formel 133. $F = \dfrac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$ Flächeneinheiten.

(s. die Erkl. 151 bis 154).

In Rücksicht der für a, b und γ gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$F = \frac{104{,}76\cdot 22{,}55}{2}\cdot\sin 9^0\,1'\,1{,}2'' \text{ qkm}$$

oder nach der Hülfsrechnung 8:

$$F = 185{,}122 \text{ qkm}$$

(s. die Erkl. 148 bis 150).

Auflösung 2. Wie aus der Auflösung 1 ersichtlich, ist die Berechnung der Seite c mittels der Formel 132:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma}$$

ziemlich umständlich, da der Ausdruck rechts logarithmisch-unbequem ist. Man kann deshalb zur Berechnung von c eine der in der Erkl. 101 aufgestellten Formeln 88^p bis 88^u anwenden, siehe Erkl. 139, bei deren Anwendung je nur zwei Summanden für sich berechnet werden müssen; oder man gibt der Formel 132 eine zur logarithmischen Berechnung bequemere Form. Letzteres kann man auf folgende Arten bewerkstelligen:

1) Setzt man nach der in der Erkl. 102 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

so geht die Formel 132 über in:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\left(1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}\right)}$$

und hieraus erhält man durch entsprechende Umformung:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$c = \sqrt{(a^2 - 2ab + b^2) + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 103)}$$

Erkl. 139. Bringt man zur Berechnung der in der Aufgabe 118 gesuchten Seite c die Formel 88s:

$$c^2 = (a+b)^2 - \left(2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

in Anwendung, so erhält man:

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - \left(2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2}$$

berechnet man nun den Wert für:

$$2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

und setzt diesen Wert $= m$ so erhält man die Formel:

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - m^2}$$

oder nach der Erkl. 37:

Formel 134. $c = \sqrt{(a+b+m)(a+b-m)}$

in welcher Formel für m

Formel 134 a. $m = 2\sqrt{ab}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$

gesetzt werden muss.

Erkl. 140. In Kleyers Lehrbuch der Goniometrie wurde in Antwort der Frage 19 festgestellt, dass die Werte der Funktionen **Tangens** und **Kotangens** aller nur möglichen Winkel zwischen den Grenzwerten $+\infty$ und $-\infty$ liegen. Dementsprechend kann umgekehrt jede zwischen $+\infty$ und $-\infty$ liegende Zahl, also jede noch **so grosse oder noch so kleine positive oder negative Zahl** als die **Tangens** oder **Kotangens** (auch als eine Potenz der Tangens oder der Kotangens) **eines bestimmten Winkels betrachtet werden, welchen Winkel man mittels einer trigonometrischen oder logarithmisch-trigonometrischen Tafel bestimmen kann.**

Erkl. 141. Setzt man in dem Ausdruck:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$$

nach der Erkl. 120:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

so erhält man:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{1+\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} + \sqrt{\frac{\cos^2\varphi+\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi}}$$

oder, da nach der Erkl. 142:

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$$

ist:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\varphi}}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{\cos\varphi}$$

Erkl. 142. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 13).

$$c = \sqrt{(a-b)^2 + \frac{(a-b)^2\cdot 4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}}$$

$$c = \sqrt{(a-b)^2\left(1+\frac{4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}\right)}$$

oder

$$c = (a-b)\sqrt{1+\frac{4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2}}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 140:

$$\text{a)} \ldots \frac{4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}}{(a-b)^2} = \operatorname{tg}^2\varphi$$

so erhält man:

$$c = (a-b)\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$$

oder nach der Erkl. 141:

$$c = (a-b)\cdot\frac{1}{\cos\varphi}$$

oder

Formel 135. $c = \dfrac{a-b}{\cos\varphi}$

wenn nach Gleichung a) φ ein Winkel ist, welcher der Gleichung:

Formel 135 a. $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{a-b}\sqrt{ab}$

genügt.

2) Setzt man in der vorstehend erwähnten Formel:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma}$$

nach der in der Erkl. 104 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1$$

so geht jene Formel über in:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-2ab\cdot\left(2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1\right)}$$

und hieraus erhält man durch entsprechende Umformung:

$$c = \sqrt{a^2+b^2-4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}+2ab}$$

$$c = \sqrt{(a^2+2ab+b^2)-4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2-4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}} \quad \text{(siehe Erkl. 105)}$$

Erkl. 143. Jede gerade Wurzel aus einer negativen Zahl wie:

$$\sqrt[2n]{-a}$$

ist unmöglich; man nennt deshalb solche Zahlen, deren Werte gleich solchen Wurzeln sein müssten, imaginäre (eingebildete) Zahlen, im Gegensatz hierzu nennt man alle übrigen Zahlen reelle Zahlen. Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.

Ist hiernach in einem Wurzelausdruck von der Form:

$$\sqrt{1-a}$$

a grösser als 1, so stellt der Radikand dieser Wurzel eine negative Zahl dar und dieser Wurzelausdruck repräsentiert eine imaginäre Zahl; ist dagegen a kleiner als 1, also ein echter Bruch, so stellt der Radikand jener Wurzel eine positive Zahl dar und jener Wurzelausdruck repräsentiert eine reelle Zahl.

Erkl. 144. In Kleyers Lehrbuch der Goniometrie wurde in Antwort der Frage 19 festgestellt, dass die Werte der Funktionen Sinus und Kosinus aller nur möglichen Winkel zwischen den Grenzwerten $+1$ und -1 liegen. Dementsprechend kann umgekehrt jeder zwischen $+1$ und -1 liegende Wert, also jeder positive oder negative echte Bruch, als der Sinus oder der Kosinus (auch als eine Potenz des Sinus oder des Kosinus) eines bestimmten Winkels betrachtet werden, welchen Winkel man mittels einer trigonometrischen oder logarithmisch-trigonometrischen Tafel bestimmen kann.

Erkl. 145. Aus der in der Erkl. 142 erwähnten goniometrischen Formel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

erhält man:

$$\text{a)} \ldots \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

oder

$$\text{b)} \ldots \sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

und

$$\text{c)} \ldots \cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$$

oder

$$\text{d)} \ldots \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Hülfsrechnung 9.

Aus

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot\cos\frac{9^0\,1'\,1{,}2''}{2}}{104{,}76+22{,}55}\sqrt{104{,}76\cdot 22{,}55}$$

erhält man φ wie folgt:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot\cos 4^0\,30'\,30{,}6''}{127{,}31}\sqrt{104{,}76\cdot 22{,}55}$$

$$\log\sin\varphi = \log 2 + \log\cos 4^0\,30'\,30{,}6'' + \frac{1}{2}\cdot(\log 104{,}76 + \log 22{,}55) - \log 127{,}31$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2 - (a+b)^2\cdot\frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}}$$

$$c = \sqrt{(a+b)^2\cdot\left(1-\frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}\right)}$$

oder

$$c = (a+b)\cdot\sqrt{1-\frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass der Quotient $\frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}$ kleiner als 1 sein muss, wenn der sich aus dieser Gleichung für c ergebende Wert reell sein soll, siehe Erkl. 143, so kann man nach der Erkl. 144:

$$\text{b)} \ldots \frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2} = \sin^2\varphi$$

setzen, und man erhält:

$$c = (a+b)\cdot\sqrt{1-\sin^2\varphi}$$

oder nach der Gleichung c) in der Erkl. 145:

$$c = (a+b)\cdot\sqrt{\cos^2\varphi}$$

oder

Formel 136. $c = (a+b)\cdot\cos\varphi$

wenn nach Gleichung b) φ ein Winkel ist, welcher der Gleichung:

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{(a+b)^2}}$$

Formel 136 a. $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}\cdot\sqrt{ab}$

genügt.

Mittels Benutzung der vorstehend aufgestellten Formel 136:

$$c = (a+b)\cdot\cos\varphi$$

in welcher φ einen Winkel bedeutet, welcher der Formel 136ᵃ:

$$\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}\sqrt{ab}$$

genügen muss, erhält man in Rücksicht der in der Aufgabe für a, b und γ gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Seite c wie folgt:

Zunächst berechne man den Winkel φ aus der Gleichung:

$$\sin\varphi = \frac{2\cdot\cos\frac{9^0\,1'\,1{,}2''}{2}}{104{,}76+22{,}55}\sqrt{104{,}76\cdot 22{,}55}$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ +\log\cos 4^0\,30'\,30{,}6'' &= +9{,}9986541-10\,{}^* \\ +\tfrac{1}{2}(\log 104{,}76+\log 22{,}55) &= +1{,}6866710\,{}^{**} \\ \hline &\; 11{,}9863551-10 \\ -\log 127{,}31 &= -2{,}1048625 \\ \hline \log\sin\varphi &= 9{,}8814926-10 \\ &\qquad\quad 4766 \\ \hline &\qquad\quad\; 160 \\ &\qquad\quad\; 143{,}2 \\ \hline &\qquad\quad\;\; 16{,}8 \\ &\qquad\quad\;\; 16{,}1 \end{aligned}$$

* s. Hülfsr. 10. ** s. Hülfsr. 11.

mithin:

$$\begin{aligned} \varphi &= 49^0\,34'\,0'' \\ &\qquad\;\; +8'' \\ &\qquad\;\; +0{,}9'' \\ \hline \text{oder}\quad \varphi &= 49^0\,34'\,8{,}9'' \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 10.

$$\begin{aligned} \log\cos 4^0\,30'\,30{,}6'' &= 9{,}9986542-10 \\ &\qquad\quad\;\, -1 \quad \text{(s. nachsteh. Gleichung a))} \\ \hline &\; 9{,}9986541-10 \end{aligned}$$

Die für 0,6″ zu subtrahierenden Proportionalteile x findet man mittels der Proportion:

$$0{,}6'' : 10'' = x : 17$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{17\,.\,0{,}6}{10}$$

$$x = 1{,}7\,.\,0{,}6$$

$$x = 1{,}02$$

oder, abgerundet:

a) . . . $x = 1$

Hülfsrechnung 11.

$$\begin{aligned} \log 104{,}76 &= 2{,}0201955 \\ +\log 22{,}55 &= 1{,}3581465 \\ \hline &\; 3{,}3783420 \\ &\qquad\quad\;\; \cdot\tfrac{1}{2} \\ \hline \tfrac{1}{2}(\log 104{,}76+\log 22{,}55) &= 1{,}6866710 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 12.

Aus

$$c = (104{,}76+22{,}58)\cdot\cos 49^0\,34'\,8{,}9''$$

erhält man c wie folgt:

$$c = 127{,}31\cdot\cos 49^0\,34'\,8{,}9''$$

$$\log c = \log 127{,}31+\log\cos 49^0\,34'\,8{,}9''$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 127{,}31 &= 2{,}1048625 \\ +\log\cos 49^0\,34'\,8{,}9'' &= +9{,}8119300-10\,{}^* \\ \hline \log c &= 11{,}9167925-10 \\ \text{oder}\ \log c &= 1{,}9167925 \\ &\qquad\quad\; 7907 \\ \hline &\qquad\quad\;\;\; 18 \\ &\qquad\quad\;\;\; 15{,}9 \end{aligned}$$

* s. Hülfsrechnung 13.

mithin: $c = 82{,}5643$

Hülfsrechnung 13.

$$\begin{aligned} \log\cos 49^0\,34'\,8{,}9'' &= 9{,}8119521-10 \\ &\;\left.\begin{matrix}-198{,}4\\-\;\;22{,}3\end{matrix}\right\} = -221 \\ \hline &\; 9{,}8119300-10 \end{aligned}$$

Nach Hülfsrechnung 9 erhält man:

a) . . . $\varphi = 49^0\,34'\,8{,}9''$

Nunmehr substituiere man diesen Wert und die für a und b gegebenen Werte in die Formel 136, man erhält alsdann zur Berechnung von c die Gleichung:

$$c = (104{,}76+22{,}55)\cdot\cos 49^0\,34'\,8{,}9''$$

und hieraus ergibt sich nach der Hülfsrechnung 12 für c:

$$c = 82{,}5643 \text{ km}$$

Man vergleiche hiermit die Gleichung C) in Auflösung 1.

Auflösung 3. Will man nicht, wie in den Auflösungen 1 und 2 die gesuchten Winkel α und β zusammen mittels Anwendung des Tangentensatzes bestimmen, sondern jeden dieser Winkel einzeln bestimmen, so kann man dies wie folgt:

Zur Berechnung des gesuchten Winkels α beachte man, dass nach der Sinusregel die Relation besteht:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

aus welcher man:

a) . . . $c\cdot\sin\alpha = a\cdot\sin\gamma$

erhält, und dass ferner nach der Kosinusregel die Relation besteht:

$b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$ (siehe Formel 87a)

aus welcher man:

b) . . . $c\cdot\cos\alpha = b - a\cdot\cos\gamma$

erhält, und dass sich schliesslich durch Division der Gleichung b) in Gleichung a) die Relation:

$$\frac{c\cdot\sin\alpha}{c\cdot\cos\alpha} = \frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}$$

oder, wenn man reduziert und nach der Erkl. 120:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$$

setzt, die Formel:

Formel 137. $$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sin\gamma}{b-a\cos\gamma}$$

ergibt, nach welcher Formel man den Winkel α berechnen kann (siehe Erklärung 146).

Will man diese Formel zur logarithmischen Berechnung bequem machen, so forme man dieselbe wie folgt um:

Erkl. 146. Die nebenstehenden Formeln 137 und 139 kann man auch aus einer Figur ableiten. Aus der Figur 54 erhält man z. B.:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{AD}{BD}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass:

$$BD = BC - DC \text{ ist:}$$

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{AD}{BC - DC}$$

Da nun:

$$\sin\gamma = \frac{AD}{AC}$$

ist und hiernach:

$$AD = AC \cdot \sin\gamma$$

oder

$$\text{b)} \ldots AD = b \cdot \sin\gamma$$

gesetzt werden kann; da ferner:

$$\text{c)} \ldots BC = a$$

ist und

$$\cos\gamma = \frac{DC}{AC}$$

mithin

$$DC = AC \cdot \cos\gamma$$

oder

$$\text{d)} \ldots DC = b \cdot \cos\gamma$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus den Gleichungen a) bis d) die Formel:

Formel 139. $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{b \cdot \sin\gamma}{a - b \cdot \cos\gamma}$

Vergleiche hiermit die nebenstehende Formel 139.

In ganz derselben Weise kann man die Formel 137 herleiten.

Erkl. 147. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin\alpha \sin\beta}$$

(siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 154).

Nach dieser Formel ist:

$$\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\gamma = \frac{\sin(\gamma - \varphi)}{\sin\varphi \sin\gamma}$$

oder, beide Seiten dieser Gleichung umgekehrt:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\gamma} = \frac{\sin\varphi \sin\gamma}{\sin(\gamma - \varphi)}$$

Erkl. 148. Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben, so kann man auch so verfahren, dass man, wie in den nebenstehenden Auflösungen 1 und 3 gezeigt ist, erst die Winkel α und β berechnet und dann, nachdem man sich Kontrolle für die Richtigkeit dieser berechneten Werte verschafft hat, zur Berechnung der Seite c die Sinusregel oder eine der Mollweideschen Sätze in Anwendung bringt.

Man dividiere Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch den Zähler $a\sin\gamma$; man erhält hiernach:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\dfrac{b}{a\sin\gamma} - \dfrac{a\cos\gamma}{a\sin\gamma}}$$

oder, wenn man reduziert und nach der Erkl. 121:

$$\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\gamma$$

setzt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\dfrac{b}{a\sin\gamma} - \operatorname{ctg}\gamma}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 140:

$$\frac{b}{a\sin\gamma} = \operatorname{ctg}\varphi$$

so erhält man:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{ctg}\gamma}$$

oder nach der Erkl. 147:

Formel 138. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\gamma \cdot \sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}$

in welcher Formel der Winkel φ einen solchen Winkel vorstellt, welcher der Gleichung:

Formel 138a. $\operatorname{ctg}\varphi = \dfrac{b}{a\sin\gamma}$

genügen muss.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels β beachte man, dass nach der Sinusregel die Relation besteht:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

aus welcher man:

$$\text{c)} \ldots c \cdot \sin\beta = b \cdot \sin\gamma$$

erhält, und dass ferner nach der Kosinusregel die Relation besteht:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta \quad \text{(s. Formel 87)}$$

aus welcher man:

$$\text{d)} \ldots c\cos\beta = a - b\cos\gamma$$

erhält, und dass sich schliesslich durch Division der Gleichung d) in Gleichung c) die Relation:

$$\frac{c\sin\beta}{c\cos\beta} = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$$

oder, wenn man reduziert und nach der Erkl. 120:

Nach der Sinusregel erhält man für die Seite c:

Formel 141. $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

oder

Formel 142. $c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

Nach der Mollweide schen Formel 89 erhält man für die Seite c:

Formel 143. $c = \frac{(a+b)\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

und nach der Mollweide schen Formel 90:

Formel 144. $c = \frac{(a-b)\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Erkl. 149. Ist der in der Aufgabe 118 gegebene Winkel γ ein stumpfer Winkel, so muss man nach der Erkl. 94 bei einer numerischen Berechnung der gesuchten Seite c mittels der Formel 132 für den Kosinus jenes stumpfen Winkels den negativen Kosinus von dessen Supplementwinkel setzen; dessgleichen muss man bei der Berechnung des Inhalts F nach der Formel 133 für den Sinus jenes stumpfen Winkels den Sinus von dessen Supplementwinkel setzen.

Erkl. 150. Sind von einem Dreieck zwei Seiten und der von ihnen eingeschlossene Winkel gegeben und ist dieser Winkel sehr klein, ein sehr nahe bei 0° liegender Winkel, oder ein sehr grosser, ein sehr nahe bei 180° liegender Winkel, so beachte man einstweilen das was in der Erkl. 36 gesagt ist.

Praktische Aufgaben, welche sich auf solche Fälle beziehen, sind in späteren Abschnitten enthalten.

Erkl. 151. Die in der Auflösung der Aufgabe 118 aufgestellte Inhaltsformel 133

$$F = \frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$$

ist die wichtigste von allen trigonometrischen Inhaltsformeln, welche auf das Dreieck Bezug haben, und findet die grösste praktische Anwendung; dieselbe lautet in Worten:

„Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt zweier aneinanderstossender Seiten multipliziert mit dem Sinus des von beiden eingeschlossenen Winkels."

(S. die Erkl. 152 bis 154).

Erkl. 152. Den in voriger Erklärung aufgestellten Satz kann man auch zum Beweis der Sinusregel benutzen. Nach diesem Satz hat man für ein und dasselbe Dreieck:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \operatorname{tg}\beta$$

setzt, die Formel:

Formel 139. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\gamma}{a - b\cos\gamma}$

(s. Erkl. 146)

ergibt, nach welcher Formel man den Winkel β berechnen kann.

Will man diese Formel zur logarithmischen Berechnung bequem machen, so forme man dieselbe in analoger Weise als es vorstehend mit der Formel 137 geschehen um; man erhält schliesslich, wie für Formel 137 die der Formel 138 analoge Formel:

Formel 140. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\gamma\cdot\sin\varphi}{\sin(\gamma-\varphi)}$

in welcher der Winkel φ einen solchen Winkel vorstellt, welcher der Gleichung:

Formel 140a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b\sin\gamma}$

genügen muss.

(siehe die Erkl. 148 bis 157).

1) . . . $F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$ (s. Formel 133)

2) . . . $F = \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta$ („ „ 147)

und

3) . . . $F = \frac{bc}{2} \cdot \sin\alpha$ („ „ 161)

Dividiert man nun z. B. die Gleichung 2) in Gleichung 1), so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$1 = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c \cdot \sin\beta}$$

oder

$$b \cdot \sin\gamma = c \cdot \sin\beta$$

mithin

a) . . . $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

in analoger Weise erhält man durch entsprechende Division je zweier jener Gleichungen:

b) . . . $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

und

c) . . . $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

Und aus diesen drei Gleichungen ergibt sich die Formel:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder die Formel:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

Erkl. 153. Da ein Winkel eines Dreiecks nur einen zwischen 0° und 180° liegenden Wert haben kann und da von allen Winkeln, welche zwischen 0° und 180° liegen, der Winkel von 90° den grössten Sinus ($= +1$, s. Erkl. 99 und 144) hat, so ergibt sich aus der in der Auflösung der Aufgabe 118 aufgestellten Inhaltsformel 133

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$$

dass von allen Dreiecken, welche zwei gleiche Seiten a und b haben, dasjenige den grössten Inhalt hat, bei welchem jene Seiten unter einem rechten Winkel aneinanderstossen.

Erkl. 154. Hat ein Dreieck die Seiten a und b und ist der von denselben eingeschlossene Winkel $= \gamma$ und hat ferner ein anderes Dreieck die Seiten a_1 und b_1 und ist der von denselben eingeschlossene Winkel ebenfalls $= \gamma$, und bezeichnet man den Inhalt dieser Dreiecke bezw. mit F und F_1, so hat man nach der Formel 133 für diese Inhalte:

a) . . . $F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$

und

b) . . . $F_1 = \frac{a_1 b_1}{2} \cdot \sin\gamma$

Dividiert man diese Gleichungen ineinander und reduziert, so erhält man die Proportion:

$$F : F_1 = ab : a_1 b_1$$

bezw. den planimetrischen Satz:

„Sind in zwei Dreiecken zwei Winkel gleich, so verhalten sich deren Inhalte wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.“

(Siehe die Erkl. 124 und Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 155. Sind, siehe Figur 55, von einem Dreieck die Seiten a und c und der von beiden eingeschlossene Winkel β gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts des Dreiecks folgende Formeln (siehe Erkl. 157):

Formel 145. $\alpha + \gamma = 2R - \beta$

" 145a. $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + \gamma}{2}$

" 146. $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$

" 147. $F = \frac{ac}{2}\sin\beta$

Statt der Formel 146 kann man auch eine der folgenden Formeln anwenden.

Formel 148. $b = \sqrt{(a + c + m)(a + c - m)}$
in welcher Formel für m:

" 148a. $m = 2\sqrt{ac} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$ zu setzen ist

" 149. $b = \frac{a - c}{\cos\varphi}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 149a. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}}{a - c}\sqrt{ac}$ genügen muss.

" 150. $b = (a - c) \cdot \cos\varphi$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 150a. $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}}{a + c}\sqrt{ac}$ genügen muss.

Statt der Formeln 145 und 145a kann man auch folgende Formeln anwenden.

Formel 151. $\operatorname{tg}\beta = \frac{a\sin\beta}{c - a\cos\beta}$
oder

" 152. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\beta \cdot \sin\varphi}{\sin(\beta - \varphi)}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 152a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{c}{a\sin\beta}$ genügen muss,
und

" 153. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{a - c\cos\beta}$
oder

" 154. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\beta\sin\varphi}{\sin(\beta - \varphi)}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

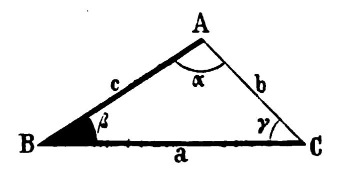
" 154a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{c\sin\beta}$ genügen muss.

Die Seite b kann man auch **indirekt** mittels einer der Formeln berechnen:

Formel 155. $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

" 156. $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

Figur 55.

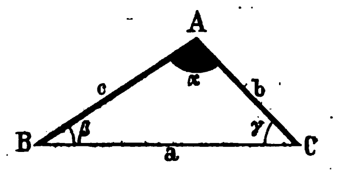


Formel 157. $b = \frac{(a+c)\cdot\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$

" 158. $b = \frac{(a-c)\cdot\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}$

Erkl. 156. Sind, siehe Figur 56, von einem Dreieck die Seiten b und c und der von beiden eingeschlossene Winkel α gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts des Dreiecks folgende Formeln (siehe Erkl. 157):

Figur 56.



Formel 159. $\beta+\gamma = 2R-\alpha$

" 159a. $\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{b-c}{b+c}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}$

" 160. $a = \sqrt{b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha}$

" 161. $F = \frac{bc}{2}\cdot\sin\alpha$

Statt der Formel 160 kann man auch eine der folgenden Formeln anwenden:

Formel 162. $a = \sqrt{(b+c+m)\,(b+c-m)}$
in welcher Formel für m:

" 162a. $m = 2\sqrt{bc}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$ zu setzen ist

" 163. $a = \frac{b-c}{\cos\varphi}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 163a. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{b-c}\sqrt{bc}$ genügen muss.

" 164. $a = (b-c)\cdot\cos\varphi$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 164a. $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{b+c}\sqrt{bc}$ genügen muss.

Statt der Formeln 159 und 159a kann man auch folgende Formeln anwenden:

Formel 165. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c-b\cos\alpha}$
oder

" 166. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 166a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{c}{b\,\operatorname{cin}\alpha}$ genügen muss,
und

" 167. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{b-c\cos\alpha}$
oder

" 168. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\varphi}{\sin(\alpha-\varphi)}$
in welcher Formel φ der Gleichung:

" 168a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{c\sin\alpha}$ genügen muss.

Die Seite a kann man auch **indirekt** mittels einer der Formeln berechnen:

Formel 169. $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$

„ **170.** $a = \frac{c \sin\alpha}{\sin\gamma}$

„ **171.** $a = \frac{(b+c)\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$

„ **172.** $a = \frac{(b-c)\cdot\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$

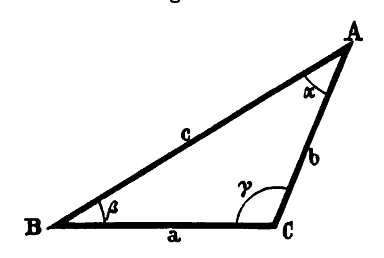
Erkl. 157. Die in den Erkl. 155 und 156 aufgestellten Formeln kann man in ganz analoger Weise wie die in nebenstehenden Auflösungen und in den Erkl. 139 und 148 aufgestellten Formeln 131 bis 140a herleiten.

Aufgabe 119. Die drei Seiten eines Dreiecks sind gegeben und zwar sei

$a = 54{,}4$ km
$b = 81{,}6$ km
$c = 122{,}4$ km

Man soll die drei Winkel und den Inhalt dieses Dreiecks berechnen.

Figur 57.



Erkl. 158. Bevor man zur Berechnung eines Dreiecks aus seinen drei Seiten übergeht, verschaffe man sich Gewissheit, ob durch die gegebenen Zahlenwerte die Bedingungen für ein Dreieck erfüllt sind. Diese Bedingung beruht nach dem planimetrischen Satz:

„In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser als die dritte“

darin, dass die Summe zweier Seiten stets grösser als die dritte Seite sein muss.

Gegeben: $\begin{cases} a = 54{,}4 \text{ km} \\ b = 81{,}6 \text{ km} \\ c = 122{,}4 \text{ km} \end{cases}$

Gesucht: α, β, γ und F (der Flächeninhalt).

Auflösung. Zur Berechnung der gesuchten Winkel α, β und γ, s. Figur 57 und die Erkl. 158, kann man die in Antwort der Frage 21 aufgestellten Quadratenformeln 88 bis 88[b]:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

benutzen; aus denselben erhält man der Reihe nach:

Formel 173. $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

„ **174.** $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

und

„ **175.** $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

(siehe die Erkl. 159)

Ferner kann man aber auch die in der Erkl. 160 aufgestellten logarithmisch-bequemen Formeln:

Formel 176. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

„ **177.** $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

„ **178.** $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

in welchen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 160)

Erkl. 159. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellten Formeln 173 bis 175 werden von manchen Mathematikern auch statt der in Antwort der Frage 18 aufgestellten Formeln 87 bis 87b mit dem Namen „Kosinusformeln" bezeichnet und das durch sie ausgedrückte Gesetz von denselben wird dementsprechend „Kosinusregel" genannt.

In Worten lautet das durch die Formeln 173 bis 175 ausgedrückte Gesetz:

„Der Kosinus eines Winkels in einem Dreieck ist gleich dem Quotienten, welchen man erhält, wenn man die Summe der Quadrate der beiden ihm anliegenden Seiten, um das Quadrat der ihm gegenüberliegenden Seite vermindert und die erhaltene Differenz durch das doppelte Produkt jener beiden anliegenden Seiten dividiert."

oder die in der Erkl. 161 aufgestellten Formeln:

Formel 179. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

„ **180.** $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

„ **181.** $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ac}}$

in welchen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 161)

oder die in der Erkl. 162 aufgestellten Formeln:

Formel 182. $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

„ **183.** $\sin\beta = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

„ **184.** $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

in welchen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 162)

oder die in der Erkl. 164 aufgestellten Formeln:

Formel 185. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

„ **186.** $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

„ **187.** $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

in welchen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 164)

oder die in der Erkl. 165 aufgestellten Formeln:

Formel 188. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

„ **189.** $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

„ **190.** $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

in welchen $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 165)

bezw. die Formeln:

Formel 191. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$

„ **192.** $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$

„ **193.** $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$

in welchen $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ und $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist (s. Erkl. 166)

benutzen.

Erkl. 160. Zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und je einem der Winkel α, β und γ desselben bestehen, wenn man mit s die halbe Summe $\frac{a+b+c}{2}$ jener drei Seiten bezeichnet, die Relationen:

Formel 176. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

" 177. $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

" 178. $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln kann man wie folgt nachweisen:

Beweis I.

Nach der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Quadratenformel 88 ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 102 für:

$$\cos\alpha = 1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\left(1 - 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

Löst man nunmehr diese Gleichung in bezug auf $\sin\frac{\alpha}{2}$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 = b^2 - 2bc + c^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(s. Erkl. 103)}$$

$$4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} = a^2 - (b-c)^2$$

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{[a+(b-c)]\,[a-(b-c)]}{4bc}} \quad \text{(s. Erkl. 37)}$$

oder

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}}$$

Setzt man nunmehr:

$$a+b+c = 2s$$

also:

$$a+b-c = 2s-2c \text{ oder } = 2(s-c)$$

und

$$a-b+c = 2s-2b \text{ oder } = 2(s-b)$$

so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4bc}}$$

[Was nun die Benutzung der einen oder der andern dieser Formeln zu numerischen Berechnungen anbetrifft, so beachte man die Erkl. 168.]

Benutzt man zur Berechnung des gesuchten Winkels α, siehe die Erkl. 169. z. B. die vorstehende Formel 182, so erhält man in Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass hiernach in jener Formel für:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{54{,}4+81{,}6+122{,}4}{2}$$

$$s = \frac{258{,}4}{2} \text{ oder } = 129{,}2$$

gesetzt werden muss:

$$\sin\alpha = \frac{2}{81{,}6\cdot 122{,}4}\cdot\sqrt{129{,}2\cdot 74{,}8\cdot 47{,}6\cdot 6}$$

und hieraus erhält man nach Hülfsrechnung 1:

A) . . . $\alpha = 20^0\, 44'\, 30{,}9''$

Benutzt man ferner zur Berechnung des gesuchten Winkels β z. B. die Formel 177 (s. Erkl. 169), so erhält man in Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass hiernach in jener Formel wiederum für:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{54{,}4+81{,}6+122{,}4}{2}$$

$$s = \frac{258{,}4}{2} \text{ oder } = 129{,}2$$

gesetzt werden muss:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(129{,}2-54{,}4)(129{,}2-122{,}4)}{54{,}4\cdot 122{,}4}}$$

oder

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{74{,}8\cdot 6{,}8}{54{,}4\cdot 122{,}4}}$$

und hieraus erhält man nach Hülfsrechnung 3:

$$\frac{\beta}{2} = 16^0\, 2'\, 40{,}54''$$

also für:

$$\beta = 32^0\, 5'\, 21{,}08''$$

oder abgerundet:

B) . . . $\beta = 32^0\, 5'\, 21{,}1''$

Benutzt man schliesslich zur Berechnung des gesuchten Winkels γ z. B. die Formel 175, so erhält man in Rücksicht

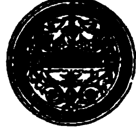
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

260. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 259. — Seite 97—112.
Mit 3 Figuren.







Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Straßen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 259. — Seite 97—112. Mit 3 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

oder

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{b\,c}}$$

nämlich **vorstehende Formel 176.** In derselben Weise kann man, wenn man von den Quadratenformeln 88a und 88b ausgeht, die Richtigkeit vorstehender Formeln 177 und 178 darthun.

Beweis II.

Aus der in der Erkl. 102 angeführten goniometrischen Formel:

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Setzt man in derselben nach der Formel 178 für:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}$$

oder

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{[a+(b-c)]\,[a-(b-c)]}{4bc}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{4bc}}$$

Setzt man nunmehr:

$a+b+c=2s$

also für:

$a+b-c=2s-2c=2(s-c)$

und für:

$a-b+c=2s-2b=2(s-b)$

so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4bc}}$$

oder:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(c-c)}{bc}}$$

nämlich vorstehende Formel 176. In derselben Weise kann man die Formeln 177 und 178 mit Hülfe obiger Gleichung a) und der Formeln 174 und 175 herleiten.

Erkl. 181. Zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und je einem der Winkel α, β und γ desselben bestehen, wenn man mit

der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte:

$$\cos\gamma=\frac{54{,}4^2+81{,}6^2-122{,}4^2}{2\cdot 54{,}4\cdot 81{,}6}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 5), 6) und 7):

$$\cos\gamma=\frac{2959{,}36+6658{,}56-14981{,}76}{2\cdot 54{,}4\cdot 81{,}6}$$

oder

$$\cos\gamma=\frac{9617{,}92-14981{,}76}{108{,}8\cdot 81{,}6}$$

$$\cos\gamma=\frac{-5363{,}84}{108{,}8\cdot 81{,}6}$$

$$\cos\gamma=-\frac{5363{,}84}{108{,}8\cdot 81{,}6}$$

und hieraus erhält man nach der Hülfsrechnung 8:

$$\text{C)} \ldots \gamma=127^0\,10'\,8''$$

Für die Richtigkeit der für α, β und γ gefundenen Werte besteht nach der Erkl. 68 die Kontrolle, dass deren Summe $=180^0$ betragen muss; in der That ist auch:

$$\alpha+\beta+\gamma=20^0\,44'\,30{,}9''+32^0\,5'\,21{,}1''+127^0\,10'\,8'' \text{ oder } =180^0$$

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F hat man nach der Erkl. 170 die

Formel 194. $F=\sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ Flächeneinheiten,

in welcher Formel:

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

nämlich die halbe Summe der drei Dreieckseiten bedeutet.

In Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass für diesen Fall:

$$s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{54{,}4+81{,}6+122{,}4}{2}$$

$$s=\frac{258{,}4}{2} \text{ oder } =129{,}2$$

ist, erhält man hiernach:

$$F=\sqrt{129{,}2\,(129{,}2-54{,}4)\,(129{,}2-81{,}6)\,(129{,}2-122{,}4)}$$

oder

$$F=\sqrt{129{,}2\cdot 74{,}8\cdot 47{,}6\cdot 6{,}8}$$

und nach Hülfsrechnung 10 und in Rücksicht, dass sich die für a, b und c ge-

s die halbe Summe $\frac{a+b+c}{2}$ jener drei Seiten bezeichnet, die Relationen:

Formel 179. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

„ 180. $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}}$

„ 181. $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln kann man wie folgt darthun:

Nach der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Quadratenformel 88 ist:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 104 für:

$$\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$$

so erhält man:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1\right)$$

Löst man nunmehr diese Gleichung in bezug auf $\cos\frac{\alpha}{2}$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} + 2bc$$

$$a^2 = b^2 + 2bc + c^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} \quad \text{(s. Erkl. 105)}$$

$$4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2} = (b+c)^2 - a^2$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{[(b+c)+a]\,[(b+c)-a]}{4bc}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)}{4bc}}$$

Setzt man nunmehr:

$$a + b + c = 2s$$

also $b + c - a = 2s - 2a$ oder $= 2(s-a)$

so erhält man hiernach:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2s\cdot 2(s-a)}{4bc}}$$

oder

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

nämlich vorstehende Formel 179. In ganz derselben Weise kann man, wenn man von den Quadratenformeln 88a und 88b ausgeht, die Richtigkeit vorstehender Formeln 180 und 181 darthun.

gebenen Masszahlen auf „Kilometer" beziehen:

D) . . . $F = 1768{,}64$ qkm

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\sin\alpha = \frac{2}{81{,}6\cdot 122{,}4}\cdot\sqrt{129{,}2\cdot 74{,}8\cdot 47{,}6\cdot 6{,}8}$$

erhält man α, wie folgt:

$$\log\sin\alpha = \log 2 + \frac{1}{2}\cdot(\log 129{,}2 + \log 74{,}8 + \log 47{,}6 + \log 6{,}8) - (\log 81{,}6 + \log 122{,}4)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 129{,}2 = & 2{,}1112625 \\ + \log 74{,}8 = & + 1{,}8739016 \\ + \log 47{,}6 = & + 1{,}6776070 \\ + \log 6{,}8 = & + 0{,}8325089 \\ \hline & 6{,}4952800 \\ & \cdot\frac{1}{2} \\ \hline & 3{,}2476400 \\ + \log 2 = & + 0{,}3010300 \\ \hline & (+10)\ 3{,}5486700\ (-10) \\ -(\log 81{,}6 + \log 122{,}4) = & - 3{,}9994716\,^* \\ \hline \log\sin\alpha = & 9{,}5491984 - 10 \\ & \frac{1934}{50} \end{array}$$

* siehe Hülfsrechnung 2.

mithin:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 20^0\,44'\,30'' \\ & + 0'' \\ & + 0{,}9'' \\ \hline \alpha = & 20^0\,44'\,30{,}9'' \end{array}$$

Hülfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rl} \log 81{,}6 = & 1{,}9116902 \\ + \log 122{,}4 = & + 2{,}0877814 \\ \hline \log 81{,}6 + \log 122{,}4 = & 3{,}9994716 \end{array}$$

Erkl. 162. Zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und je einem der Winkel α, β und γ desselben bestehen, wenn man mit s die halbe Summe $\frac{a+b+c}{2}$ jener drei Seiten bezeichnet, die Relationen:

Formel 182. $\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

" 183. $\sin\beta = \frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

" 184. $\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Die Richtigkeit dieser Formeln kann man wie folgt nachweisen:

Beweis I.

Nach der in der Erkl. 52 erwähnten goniometrischen Formel ist:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

oder, wenn man $2\alpha = \alpha$

und $\alpha = \frac{\alpha}{2}$

setzt:

$$a) \ldots \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man nunmehr in diese Relation nach der Formel 176 für:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$$

und nach der Formel 179 für:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

so geht dieselbe über in:

$$\sin\alpha = 2\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

Reduziert man diese Gleichung, so erhält man:

$$\sin\alpha = 2\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$\sin\alpha = 2\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{(bc)^2}}$$

oder

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

nämlich vorstehende Formel 182. In derselben Weise kann man die Richtigkeit der Formeln 183 und 184 darthun, wenn man in obiger Gleichung a) $\alpha = \beta$ setzt und für $\sin\frac{\beta}{2}$ und $\cos\frac{\beta}{2}$ bezw. die Werte aus den Formeln 177 und 180, bezw. aus den Formeln 178 und 181 substituiert (s. Erkl. 163).

Beweis II.

Nach der Erkl. 145 ist:

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

Zerlegt man $1-\cos^2\alpha$ oder $1^2-\cos^2\alpha$ nach der algebraischen Formel:

Hülfsrechnung 3.

Aus

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{74,8\cdot 6,8}{54,4\cdot 122,4}}$$

erhält man $\frac{\beta}{2}$ wie folgt:

$$\log\sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\cdot[\log 74,8 + \log 6,8 - (\log 54,4 + \log 122,4)]$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 74,8 &= 1,8739016 \\ +\log 6,8 &= 0,8325089 \\ &(+2)\ 2,7064105\ (-2) \\ -(\log 54,4 + \log 122,4) &= -3,8233808\,* \\ &\ 0,8830302 - 2 \\ &\ \cdot\tfrac{1}{2} \\ \log\sin\frac{\beta}{2} &= 0,4415151 - 1 \\ \text{oder } \log\sin\frac{\beta}{2} &= 9,4415151 - 10 \\ &\ 5112 \\ &\ 39 \end{aligned}$$

* siehe Hülfsrechnung 4.

mithin ist:

$$\begin{aligned} \frac{\beta}{2} &= 16^0\,2'\,40'' \\ &\ +0,54'' \text{ [s. nachsteh. Gleich. a)]} \\ \frac{\beta}{2} &= 16^0\,2'\,40,54'' \end{aligned}$$

Die für 39 noch zu addierenden Proportionalteile x'' findet man aus der Proportion:

$$39 : 732 = x'' : 10''$$

Man erhält hieraus:

$$x = \frac{39\,.\,10}{732};\quad x = \frac{390}{732};\quad x = 0,536$$

oder, abgerundet:

$$a) \ldots x = 0,54''$$

Hülfsrechnung 4.

$$\begin{aligned} \log 54,4 &= 1,7355989 \\ +\log 122,4 &= +2,0877814 \\ &\ 3,8233803 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 5.

$$\begin{aligned} 54,4^2 = 54,4\cdot 54,4 \\ 2176 \\ 2176 \\ 2720 \\ 2959,36 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 6.

$$\begin{aligned} 81,6^2 = 81,6\cdot 81,6 \\ 4896 \\ 816 \\ 6528 \\ 6658,56 \end{aligned}$$

$$a^2 - b^2 = (a+b)(a+b)$$

so erhält man:

a) . . . $\sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)\cdot(1-\cos\alpha)}$

Setzt man in dieser Gleichung nach Formel 173 für:

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

so erhält man:

$$\sin\alpha = \sqrt{\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)\left(1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)}$$

oder

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2bc+(b^2+c^2-a^2)}{2bc}\cdot\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{2bc}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}\cdot\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{[(b+c)+a][(b+c)-a]}{2bc}\cdot\frac{[a+(b-c)][a-(b-c)]}{2bc}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c)}{(2bc)^2}}$$

oder, wenn man:

$$a+b+c = 2s$$

also

$$b+c-a = 2s-2a \text{ oder } = 2(s-a)$$
$$a-b+c = 2s-2b \quad \text{„} \quad = 2(s-b)$$
$$a+b-c = 2s-2c \quad \text{„} \quad = 2(s-c)$$

setzt:

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{2s\cdot 2(s-a)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-c)}{(2bc)^2}}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{16}{(2bc)^2}\cdot s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

oder

$$\sin\alpha = \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

nämlich vorstehende Formel 182. In derselben Weise kann man mit Hülfe obiger Gleichung a) und der Formeln 174 und 175 die Formeln 183 und 184 herleiten.

Erkl. 163. Setzt man nach der in der Erkl. 171 entwickelten Formel 194:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

in den Formeln 182 bis 184 für:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = F$$

so nehmen jene Formeln die Formen an:

1) . . . $\sin\alpha = \frac{2F}{bc}$

2) . . . $\sin\beta = \frac{2F}{ac}$

3) . . . $\sin\gamma = \frac{2F}{ab}$

Erkl. 164. Zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und je einem der Winkel α, β und γ desselben bestehen, wenn man mit

Hülfsrechnung 7.

$$122{,}4^2 = 122{,}4\cdot 122{,}4$$

4896
2448
2448
1224
14981,76

Hülfsrechnung 8.

Aus

$$\cos\gamma = -\frac{5363{,}84}{108{,}8\cdot 81{,}6}$$

erhält man γ wie folgt:

$$\log\cos\gamma = \log 5363{,}84 - (\log 108{,}8 + \log 81{,}6)\,(n)$$

Das in Klammer stehende (n) deutet nichts anderes an, als dass der gegebene Kosinus n e g a t i v ist (siehe Kleyers Lehrbücher der Goniometrie und Logarithmen).

Nun ist:

$$\log 5363{,}84 = 3{,}7294726$$
$$+32$$
$$(+10)\quad 3{,}7294758 \quad (-10)$$
$$-(\log 108{,}8 + \log 81{,}6) = -3{,}9483191^{*}$$
$$\log\cos\gamma = 9{,}7811567 - 10\,(n)$$

* s. Hülfsrechnung 9.

1544
223
222,4

mithin:

$$\gamma = 52^0\,50'\,00''$$
$$-8''$$

oder $\gamma = 52^0\,49'\,52''$ (n)

Berücksichtigt man nunmehr, dass das in der Klammer stehende n andeutet, dass der gegebene Kosinus **negativ** war, und dass nach der Formel:

$$\cos(2R-\alpha) = -\cos\alpha$$

nicht jener berechnete **spitze** Winkel, sondern der **stumpfe** Winkel:

$$(2R - 52^0\,49'\,52'')$$

der gesuchte ist, so erhält man hiernach:

$$\gamma = 180^0 - 52^0\,49'\,52''$$

oder

$$\gamma = 127^0\,10'\,8''$$

s die halbe Summe $\frac{a+b+c}{2}$ jener drei Seiten bezeichnet, die Relationen:

Formel 185. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$

" 186. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

" 187. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

Die Richtigkeit dieser Formeln kann man wie folgt nachweisen:

Nach der Formel 176 ist:

a) . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}$

und nach der Formel 179 ist:

b) . . . $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$

Dividiert man Gleichung b) in Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 120:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

setzt und die rechte Seite jener Gleichung reduziert:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}\cdot\frac{bc}{s(s-a)}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

nämlich vorstehende Formel 185. In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Formeln 186 und 187 darthun, wenn man die Formeln 177 und 180, bezw. die Formeln 178 und 181 ineinander dividiert.

Erkl. 165. Zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und je einem der Winkel α, β und γ desselben bestehen, wenn man mit s die halbe Summe $\frac{a+b+c}{2}$ jener drei Seiten bezeichnet, die Relationen:

Formel 188. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

" 189. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

" 190. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Hülfsrechnung 9.

$$\begin{aligned} \log 108{,}8 &= 2{,}0366289 \\ +\log 81{,}6 &= +1{,}9116902 \\ \hline &3{,}9483191 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 10.

Aus

$$F = \sqrt{129{,}2\cdot 74{,}8\cdot 47{,}6\cdot 6{,}8}$$

erhält man F wie folgt:

$$\log F = \frac{1}{2}(\log 129{,}2 + \log 74{,}8 + \log 47{,}6 + \log 6{,}8)$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 129{,}2 &= 2{,}1112625 \\ \log 74{,}8 &= 1{,}8739016 \\ +\log 47{,}6 &= 1{,}6776070 \\ +\log 6{,}8 &= 0{,}8325089 \\ \hline &6{,}4952800 \\ &\cdot\tfrac{1}{2} \\ \hline \log F &= 3{,}2476400 \\ &\phantom{= 3{,}247}6296 \\ \hline &\phantom{= 3{,}2476}104 \\ &\phantom{= 3{,}2476}98{,}4 \end{aligned}$$

mithin:

$$F = 1768{,}64$$

Die Richtigkeit dieser **Formeln kann man** wie folgt nachweisen:

Nach der Formel 185 ist:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

Multipliziert man Zähler und Nenner des Radikanden mit dem in dem Nenner desselben enthaltenen Faktor $(s-a)$, so erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s\cdot(s-a)^2}}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1}{(s-a)^2}\cdot\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{s-a}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

und dies ist vorstehende Formel 188. **In ganz derselben Weise kann man aus den Formeln 186** und 187 die vorstehenden **Formeln 189 und 190** herleiten (siehe die Erkl. 166).

Erkl. 166. Berücksichtigt **man, dass in jeder** der Formeln 180 bis 190 **derselbe Faktor:**

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

vorkommt und dass dieser **Faktor, wie in einer** späteren Aufgabe gezeigt **wird (siehe auch die** Erkl. 167) gleich dem **Radius des dem betreffen**den Dreieck umbeschriebenen **Kreises ist,** so ergeben sich in Rücksicht **dessen aus den** Formeln 188—190 die **dem Gedächtnis** leicht einzuprägenden **Formeln:**

Formel 191. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$

„ **192.** $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$

„ **193.** $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$

in welchen:

a) . . . $r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

nämlich gleich dem **Radius des dem Dreieck** umbeschriebenen **Kreises ist und**

b) . . . $s = \frac{a+b+c}{2}$

nämlich gleich der halben **Summe der drei** Dreieckseiten ist.

Erkl. 167. Bezeichnet **man die drei Seiten** eines Dreiecks mit a, b und c, **die halbe Summe:** $\frac{a+b+c}{2}$ derselben mit s **und den Radius des** diesem Dreieck umbeschrieb**enen Kreises mit** r, so besteht die Relation:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

(Siehe Kleyers Lehrbücher **der Planimetrie** und die betreffenden späteren **Aufgaben in** diesem Buch.)

Erkl. 168. Was den Gebrauch der in Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formeln 173 bis 193 anbetrifft, so sei hier folgendes bemerkt:

1. Die Formeln 173 bis 175 sind logarithmisch unbequem, man wird deshalb dieselben nur dann anwenden, wenn für a, b und c solche Zahlenwerte gegeben sind. deren Quadrate sich ohne grösseren Zeitverlust bestimmen lassen.
2. Die Formeln 176 bis 181 sind logarithmisch bequem, denselben sind jedoch die Formeln 185—187, bezw. wenn sämtliche Winkel berechnet werden sollen, die Formeln 188—190 vorzuziehen (siehe unter 4).
3. Die Formeln 182—184 sind ebenfalls logarithmisch bequem, da aber das durch sie enthaltene Resultat in den Fällen, in welchen das Dreieck stumpfwinklig ist (in welchen also einer der Winkel α, β und γ ein stumpfer sein muss) ein unbestimmtes ist, indem nach der Erkl. 66 der Sinus eines spitzen Winkels und der Sinus von dessen Supplementwinkel (welcher ein stumpfer Winkel sein muss) ihrem absoluten Wert und ihren Vorzeichen nach gleich sind, so sind in solchen Fällen diesen Formeln alle diejenigen vorzuziehen, mittels deren man die halben Dreieckswinkel berechnen kann, da die halben Dreieckswinkel in allen Fällen spitze Winkel sind.
4. Die Formeln 185—187 sind ebenfalls logarithmisch bequem wie die unter 2. erwähnten Formeln und haben wie jene Formeln die Eigenschaft, dass in bezug auf die gefundenen Werte keine Unbestimmtheit, wie bei den unter 3. erwähnten Formeln stattfinden kann, da man stets die halben Winkel erhält; durch diese Formeln erhält man in manchen Fällen für die gesuchten Winkel genauere Werte als mittels Benutzung jener unter 2. erwähnten Formeln.
5. Die Formeln 188—190 sind ebenfalls logarithmisch bequem, es sind dieselben Formeln als die Formeln 185—187, nur in anderer Form. Da bei denselben jedesmal der gleiche Faktor $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ vorkommt, so wird man diese Formeln besonders dann anwenden, wenn sämtliche Winkel eines Dreiecks unabhängig von einander berechnet werden sollen, indem bei diesbezüglicher Anwendung derselben jener Faktor nur einmal berechnet zu werden braucht.
6. Die Formeln 191—193 schliesslich sind dieselben Formeln als die Formeln 188—190, dieselben lassen sich gut im Gedächtnis behalten.

Hieraus ergibt sich, dass wenn man nur einen oder den andern Winkel eines Dreiecks berechnen will und dabei auf eine Kontrolle verzichtet, man am besten die entsprechende

der Formeln 185—187 in Anwendung bringt, dass man aber in dem Fall, in welchem man sämtliche Winkel des Dreiecks berechnen und Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung haben will (s. Erkl. 66), am besten die Formeln 188 bis 190, bezw. die Formeln 191 bis 193 zur Anwendung bringt (s. auch die Erkl. 169).

Erkl. 169. In der Auflösung der Aufgabe 119 sind die Winkel α, β und γ auf verschiedene Weisen berechnet; dies hat nur den Zweck, um zu zeigen, wie man bei Anwendung der einen oder der andern der Formeln 173—193 zum Zweck numerischer Berechnungen zu verfahren hat.

Erkl. 170. Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks der Reihe nach mit a, b und c und den Inhalt dieses Dreiecks mit F, so besteht, wenn man die halbe Summe jener drei Seiten, nämlich:

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

setzt, zur Berechnung des Inhalts F die Formel:

Formel 194. $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie und die Erkl. 171 und 172).

Erkl. 171. Die in voriger Erkl. 170 erwähnte Formel 194:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

mittels welcher man den Inhalt F eines Dreiecks aus dessen drei Seiten a, b, c und der halben Summe s dieser drei Seiten berechnen kann, kann man auf folgende Arten herleiten:

Beweis I

(planimetrischer Beweis, siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach der in der Erkl. 34 aufgestellten planimetrischen Formel hat man, wenn man z. B. die Seite a eines ganz beliebigen Dreiecks, dessen drei Seiten durch a, b und c bezeichnet seien, als Grundlinie annimmt und, siehe die Figuren 58 und 59, die dazu gehörige Höhe mit h bezeichnet, für den Inhalt F dieses Dreiecks zunächst die Relation:

a) . . . $F = \frac{a \cdot h}{2}$

Aus dieser Gleichung muss die Höhe h, da obiger Formel gemäss der Inhalt F nur in die drei Seiten des Dreiecks ausgedrückt werden soll, noch eliminiert werden. Dies kann man wie folgt:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC, siehe die Figuren 58 und 59, erhält man:

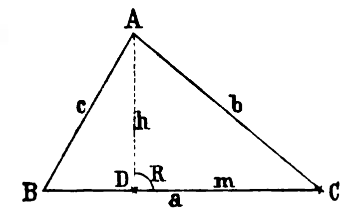
b) . . . $h^2 = b^2 - m^2$

Berücksichtigt man ferner, dass nach dem in der Erkl. 112 erwähnten erweiterten pythagoreischen Lehrsatz in bezug auf die Seite c des durch die Figur 58 dargestellten Dreiecks ABC, welche einem spitzen Winkel gegenüberliegt, die Relation besteht:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2am$$

und dass ferner in bezug auf die Seite c des durch die Figur 59 dargestellten Dreiecks ABC,

Figur 58.



welche einem **stumpfen** Winkel gegenüberliegt, die Relation besteht:

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2am$$

dass also ganz allgemein:

c) . . . $c^2 = a^2 + b^2 \mp 2am$

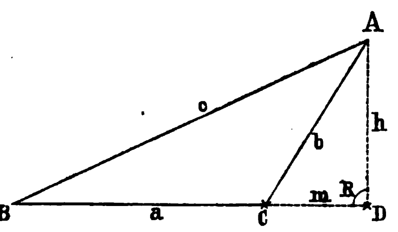
ist, so erhält man, wenn man aus dieser Gleichung die Projektion m bestimmt und diesen für m gefundenen Wert:

d) . . . $m = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{\mp 2a}$

in Gleichung b) substituiert:

e) . . . $h^2 = b^2 - \left(\frac{c^2 - a^2 - b^2}{\mp 2a}\right)^2$


Figur 59.



Aus dieser Gleichung erhält man h wie folgt:

$$h^2 = b^2 - \frac{(c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{4a^2b^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(2ab)^2 - (c^2 - a^2 - b^2)^2}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{[2ab + (c^2 - a^2 - b^2)] \cdot [2ab - (c^2 - a^2 - b^2)]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(2ab + c^2 - a^2 - b^2)(2ab - c^2 + a^2 + b^2)}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{[c^2 - (a^2 - 2ab + b^2)][(a^2 + 2ab + b^2) - c^2]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{[c^2 - (a - b)^2][(a + b)^2 - c^2]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{[c + (a - b)] \cdot [c - (a - b)] \cdot [(a + b) + c] \cdot [(a + b) - c]}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a - b + c)(-a + b + c)(a + b + c)(a + b - c)}{4a^2}$$

oder

f) . . . $h = \sqrt{\frac{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}{4a^2}}$

Setzt man nunmehr:

$a + b + c = 2s$

also $a + b - c = 2s - 2c$ oder $= 2(s - c)$

und $a - b + c = 2s - 2b$ „ $= 2(s - b)$

und $-a + b + c = 2s - 2a$ „ $= 2(s - a)$

so geht Gleichung f) über in:

$$h = \sqrt{\frac{2s \cdot 2(s - c) \cdot 2(s - b) \cdot 2(s - a)}{4a^2}}$$

und hieraus erhält man:

$$h = \sqrt{\frac{4}{a^2} \cdot s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

oder

g) . . . $h = \frac{2}{a} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$

Substituiert man schliesslich diesen Wert für h in umstehende Gleichung a) so erhält man:

$$F = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{a} \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

oder

$$F = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

nämlich jene herzuleitende Formel 194.

Es gibt noch andere Arten geometrischer Beweise (siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Beweis II
(arithmetischer Beweis).

Nach der in Auflösung 1 der Aufgabe 118 aufgestellten Formel 133 ist:

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass man nach der in Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 184

$$\sin \gamma = \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

setzen kann, so erhält man:

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \frac{2}{ab} \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

oder

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

nämlich ebenfalls vorstehende Formel 194. In gleicher Weise kann man mittels der Formeln 147 und 183, bezw. mittels der Formeln 161 und 182 jene Formel 194 herleiten.

Erkl. 172. Die durch die Formel 194:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

ausgedrückte Rechnungsregel führt auch den Namen „Satz der drei Brüder", da sie bei drei berühmten arabischen Mathematikern vorkam. Diese Formel soll schon 2 Jahrhunderte v. Chr. von dem älteren Hero von Alexandrien erfunden worden sein.

Erkl. 173. In rationalen Dreiecken (siehe die Erkl. 174 und 175) sind auch die Verhältnisse der goniometrischen Funktionen der Winkel rational.

Erkl. 174. Man nennt ein rechtwinkliges Dreieck ein rationales Dreieck, wenn die Masszahlen der drei Seiten desselben rationale Zahlen vorstellen, wenn also z. B.:

	die Länge der Hypotenuse durch die Masszahl:	die Länge einer Kathete durch die Masszahl:	die Länge der andern Kathete durch die Masszahl:	
	a) 5	3	4	oder durch beliebige aber stets ein und dieselben Vielfachen (oder Bruchteile) dieser zusammengehörigen Zahlen.
oder	b) 17	8	15	
„	c) 29	20	21	
„	d) 13	5	12	
„	e) 25	7	24	
„	f) 37	12	35	
	u. s. f.			

ausgedrückt sind. Da diese Masszahlen nach dem pythagoreischen Lehrsatz der Bedingung entsprechen müssen, dass das Quadrat der Masszahl der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der Masszahlen der beiden Katheten sein muss, so nennt man auch solche zusammengehörige Zahlen, wie die vorstehenden unter a) oder b) bis f) pythagoreische Zahlen und

solche rechtwinklige Dreiecke, deren Seitenlängen jenen Masszahlen entsprechen „pythagoreische Dreiecke“ oft auch ägyptische Dreiecke (siehe Erkl. 175 und Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Erkl. 175. Man nennt ein schiefwinkliges Dreieck ein rationales Dreieck, wenn sowohl die Masszahlen der drei Seiten als auch die Masszahlen der drei Höhen dieses Dreiecks rationale Zahlen sind, oder auch kürzer ausgedrückt, wenn die Masszahl des Inhalts eine rationale Zahl ist.

Die einfachsten rationalen schiefwinkligen Dreiecke sind die sogenannten mittelseitigen Dreiecke (s. Erkl. 176); das ältest-bekannteste dieser Dreiecke ist das bereits von den Hindus und den Arabern angewandte Dreieck, in welchem die drei Seiten in dem Verhältnis

13 : 15 : 14

stehen.

Rationale schiefwinklige Dreiecke kann man durch entsprechende Zusammensetzung zweier rationaler rechtwinkliger Dreiecke (zweier sogenannter pythagoreischer Dreiecke) bilden (s. Erkl. 177).

Erkl. 176. Ein sogenanntes mittelseitiges Dreieck ist ein solches, in welchem jede Seite das arithmetische Mittel der beiden andern ist.

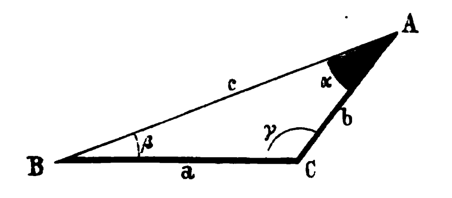
Erkl. 177. Eine sehr grosse Sammlung von Beispielen rationaler Dreiecke enthält die von Grebe im Jahr 1864 herausgegebene Schrift: „Zusammenstellung von Stücken rationaler ebener Dreiecke“ (siehe auch die am Schlusse dieses Abschnitts beigefügten Tabellen).

Aufgabe 120. In einem Dreieck sei die Seite $a = 223{,}54$ m und die Seite $b = 105{,}26$ m ferner sei der der grösseren dieser Seiten, nämlich der der Seite a gegenüberliegende Winkel:

$$\alpha = 54^0\,21'\,30''$$

Wie gross sind die übrigen Stücke und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

Figur 60.



Gegeben: $\begin{cases} a = 223{,}54 \text{ m} \\ b = 105{,}26 \text{ m} \\ \alpha = 54^0\,21'\,30'' \end{cases}$

Gesucht: β, γ, c und F (der Flächeninhalt).

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Winkels β, siehe Figur 60, hat man nach der in Antwort der Frage 18 vorgeführten Sinusregel, die Relation:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{b}{a}$$

und hieraus erhält man:

Formel 195. $\sin\beta = \dfrac{b \cdot \sin\alpha}{a}$

In Rücksicht der für a, b und α gegebenen Zahlenwerte ist also hiernach:

$$1) \ldots \sin\beta = \frac{105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30''}{223{,}54}$$

und hieraus ergibt sich nach Hülfsrechnung 1:

$$A) \ldots \beta = 22^0\,29'\,57.4''$$

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\sin\beta = \frac{105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30''}{223{,}54}$$

erhält man β, wie folgt:

$$\log\sin\beta = \log 105{,}26 + \log\sin 54^0\,21'\,30'' - \log 223{,}54$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 105{,}26 = & 2{,}0222634 \\ +\log\sin 54^0\,21'\,30'' = & 9{,}9099181 - 10 \\ \hline & 11{,}9821815 - 10 \\ -\log 223{,}54 = & -\,2{,}3493552 \\ \hline \log\sin\beta = & 9{,}5828263 - 10 \\ & 7888 \\ \hline & 375 \\ & 356{,}3 \\ \hline & 18{,}7 \\ & 20{,}4 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{rl} \beta = & 22^0\,29'\,50'' \\ & +7'' \\ & +0{,}4'' \\ \hline \end{array}$$

oder $\beta = 22^0\,29'\,57{,}4''$.

Erkl. 178. Sind von einem Dreieck zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben, wie in den Aufgaben 120 und 121, so sind die Formeln, welche man zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts jenes Dreiecks aufstellen kann und nach welchen man diese Stücke unabhängig von einander berechnen kann, zur numerischen Berechnung jener Stücke höchst unbequem, siehe die in nebenstehender Auflösung aufgestellten Formeln 196 bis 198 und die Erkl. 179.

In der Praxis verfährt man deshalb besser, wie in der folgenden Aufgabe 121 gezeigt wird, indem man nämlich zuerst den nicht gegebenen und einer der gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel nach der Sinusregel berechnet, analog wie der Winkel β in nebenstehender Auflösung berechnet ist, dann den dritten Winkel (welchen die gegebenen Seiten miteinander einschliessen) durch Abzug jener Winkel von 180^0 bestimmt, hierauf mit Hülfe dieses so bestimmten Winkels nach der Sinusregel die dritte Seite berechnet, und schliesslich den Inhalt nach dem in der Erkl. 151 aufgestellten Satz bestimmt (s. die Auflösung der folgenden Aufgabe 121).

Erkl. 179. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellten Formeln 195 bis 198 gelten nicht allein für den Fall, in welchem von einem Dreieck zwei Seiten und der der grösseren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind, sondern auch für den Fall, in welchem von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben sind, siehe die Aufgabe 121 und die Erklärung 188, also ganz allgemein für alle Fälle, in welchen von einem Dreieck zwei Seiten und ein gegenüberliegender Winkel gegeben sind.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels γ aus den gegebenen Stücken verfahre man wie folgt (s. Erkl. 178):

Nach der Sinusregel besteht die Relation:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{c}{a}$$

oder die Relation:

a) . . . $\sin\gamma = \dfrac{c\cdot\sin\alpha}{a}$

aus welcher die unbekannte Grösse c noch eliminiert werden muss. Diese unbekannte Grösse c, d. i. die nicht gegebene dritte Seite c, kann man nun wie folgt in die in der Aufgabe gegebenen Stücke ausdrücken. Nach der in Antwort der Frage 18 aufgestellten Kosinusregel bezw. nach der Formel 87[b] ist:

b) . . . $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$

Um aus dieser Gleichung den nicht gegebenen Winkel β zu eliminieren, beachte man nunmehr, dass nach der vorstehenden Formel 195:

c) . . . $\sin\beta = \dfrac{b\cdot\sin\alpha}{a}$

ist, und dass man nach der Erkl. 145:

$$\cos\beta = \sqrt{1-\sin^2\beta}$$

also in Rücksicht der Gleichung c):

$$\cos\beta = \sqrt{1-\left(\frac{b\sin\alpha}{a}\right)^2}$$

oder

$$\cos\beta = \sqrt{1-\frac{(b\sin\alpha)^2}{a^2}}$$

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{a^2-(b\sin\alpha)^2}{a^2}}$$

mithin:

d) . . . $\cos\beta = \dfrac{1}{a}\sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2}$

setzen kann. Aus der Gleichung b) erhält man also in Rücksicht der Gleichung d):

$$c = a\cdot\frac{1}{a}\sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2} + b\cos\alpha$$

oder

e) . . . $c = \sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2} + b\cos\alpha$

Hülfsrechnung 2.

$\log 105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'' = \log 105{,}26 + \log \sin 54^0\,21'\,30''$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 105{,}26 &= 2{,}0222634 \\ + \log \sin 54^0\,21'\,30'' &= 9{,}9099181 - 10 \\ &\quad 11{,}9321815 - 10 \\ \text{oder} &= 1{,}9321815 \\ &\quad 1794 \\ &\quad 21 \\ &\quad 20{,}4 \end{aligned}$$

mithin ist:

$105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'' = 85{,}5424$

In Rücksicht dieser Gleichung e) erhält man nunmehr aus Gleichung a):

$$\sin\gamma = \left(\sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + b\cos\alpha\right)\frac{\sin\alpha}{a}$$

oder

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + \frac{b\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{a}$$

und wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

setzt:

Formel 196. $$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + \frac{b\cdot\sin 2\alpha}{2a}$$

oder auch in Rücksicht der Erkl. 37:

Formel 196 a. $$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{(a + b\sin\alpha)(a - b\sin\alpha)} + \frac{b\sin 2\alpha}{2a}$$

(siehe auch die Erkl. 178 und die Auflösung der folgenden Aufgabe 121).

Setzt man in letzterer Formel die für a, b und α gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$\sin\gamma = \frac{\sin 54^0\,21'\,30''}{228{,}54}\sqrt{(228{,}54 + 105{,}26\cdot\sin 54^0\,21'\,30'')(228{,}54 - 105{,}26\cdot\sin 54^0\,21'\,30'')} + \frac{105{,}26\cdot\sin 2\cdot(54^0\,21'\,30'')}{2\cdot 228{,}54}$$

oder nach der Hülfsrechnung 2 und nach weiterer Reduktion:

$$\sin\gamma = \frac{\sin 54^0\,21'\,30''}{228{,}54}\sqrt{(228{,}54 + 85{,}5424)(228{,}54 - 85{,}5424)} + \frac{52{,}63\cdot\sin 108^0\,43'}{228{,}54}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 65 und der Erkl. 66, nach welcher:

$$\begin{aligned} \sin 108^0\,43' &= \sin(180^0 - 108^0\,43') \\ \text{oder } &= \sin 71^0\,17' \end{aligned}$$

ist, und nach weiterer Reduktion:

$$\sin\gamma = \frac{\sin 54^0\,21'\,30''}{228{,}54}\sqrt{309{,}0824\cdot 137{,}9976} + \frac{52{,}63\cdot\sin 71^0\,17'}{228{,}54}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 3 und 4:

$$\sin\gamma = 0{,}75082 + 0{,}222988$$

mithin:

$$2) \;\ldots\; \sin\gamma = 0{,}973808$$

Da nun:

$$\begin{aligned} \log\sin\gamma &= \log 0{,}973808 \\ \text{oder}\quad \log\sin\gamma &= 0{,}9884698 - 1 \\ &\quad + 35 \\ &\quad 0{,}9884733 - 1 \\ \text{oder}\quad \log\sin\gamma &= 9{,}9884733 - 10 \\ &\quad 4697 \\ &\quad 36 \\ &\quad 34{,}3 \\ &\quad 1{,}7 \\ &\quad 1{,}9 \end{aligned}$$

ist, so erhält man hieraus:

$$\begin{aligned} \gamma &= 76^0\,51'\,20'' \\ &\quad + 7'' \\ &\quad + 0{,}4'' \\ \gamma &= 76^0\,51'\,27{,}4'' \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 3.

Setzt man der Abkürzung halber:

$$\frac{\sin 54^0\,21'\,30''}{223{,}54}\sqrt{309{,}0824\cdot 137{,}9976}=x$$

und logarithmiert, so erhält man:

$$\log x=\log\sin 54^0\,21'\,30''+\frac{1}{2}(\log 309{,}0824+\log 137{,}9976)-\log 223{,}54$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\log 309{,}0824 &= 2{,}4900709\\ &\ +28{,}2\\ &\ +5{,}6\\ +\log 137{,}9976 &= 2{,}1398476\\ &\ +220{,}5\\ &\ +18{,}9\\ &\ \overline{4{,}6299458}\\ &\ \cdot\tfrac{1}{2}\\ &\ \overline{2{,}3149729}\\ +\log\sin 54^0\,21'\,30'' &= +\ 9{,}9099181-10\\ &\ \overline{12{,}2248910-10}\\ -\log 223{,}54 &= -\ 2{,}3493552\\ \log x &= 9{,}8755358-10\\ \text{oder}\ \log x &= 0{,}8755358-1\\ &\ 5358\end{aligned}$$

mithin ist:

$$x=0{,}75082$$

Hülfsrechnung 4.

$$\log\frac{52{,}63\cdot\sin 71^0\,17'}{223{,}54}=\log 52{,}63+\log\sin 71^0\,17'-\log 223{,}54$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\log 52{,}63 &= 1{,}7212334\\ +\log\sin 71^0\,17' &= 9{,}9764036-10\\ &\ \overline{11{,}6976370-10}\\ -\log 223{,}54 &= -\ 2{,}3493552\\ &\ \overline{9{,}3482818-10}\\ \text{oder} &= 0{,}3482818\\ &\ 2659\\ &\ \overline{159}\\ &\ 156\\ &\ \overline{3}\end{aligned}$$

mithin ist:

$$\frac{52{,}63\cdot\sin 71^0\,17'}{223{,}54}=0{,}222988$$

Hülfsrechnung 5.

$$\log 105{,}26\cdot\cos 54^0\,21'\,30''=\log 105{,}26+\log\cos 54^0\,21'\,30''$$

Nun ist:

$$\begin{aligned}\log 105{,}26 &= 2{,}0222634\\ +\log\cos 54^0\,21'\,30'' &= 9{,}7654555-10\\ &\ \overline{11{,}7877189-10}\\ \text{oder} &= 1{,}7877189\\ &\ 7155\\ &\ \overline{34}\\ &\ 35\end{aligned}$$

mithin ist:

$$105{,}26\cdot\cos 54^0\,21'\,30''=61{,}3365$$

Für den gesuchten Winkel γ erhält man also:

B) . . . $\gamma=76^0\,51'\,27{,}4''$

Würde man nun die Kontrolle für die Richtigkeit der für β und γ gefundenen Werte machen, so müsste nach der Erkl. 68:

$$\alpha+\beta+\gamma=2R$$

sein, es müsste also:

$$54^0\,21'\,30''+22^0\,29'\,57{,}4''+76^0\,51'\,27{,}2''=180^0$$

sein, dies ist aber nicht der Fall. Berücksichtigt man bei der Untersuchung worin wohl der Fehler liegen mag, zunächst, dass nach der Erkl. 180 jedem gegebenen Wert der trig. Funktion „Sinus“ zwei Winkel, nämlich der direkt aus der Tafel sich ergebende spitze Winkel x und auch der stumpfe Winkel: $2R-x$ entsprechen, so würde sich hiernach und nach der Gleichung A) für β ausserdem noch der Wert:

$$\beta=180^0-22^0\,29'\,57{,}4''$$

oder

A$_1$) . . . $\beta=157^0\,30'\,2{,}6''$

und ferner würde sich hiernach und nach der Gleichung B) für γ ausserdem noch der Wert:

$$\gamma=180^0-76^0\,51'\,27{,}4''$$

oder

B$_1$) . . . $\gamma=103^0\,8'\,32{,}6''$

ergeben. Da aber der Voraussetzung gemäss die Seite a grösser als b ist, und deshalb nach der Erkl. 181 auch der Winkel α grösser als der Winkel β sein muss, so kann jener stumpfe Winkel $157^0\,30'\,2{,}6''$ für β der Aufgabe nicht genügen, während der stumpfe Winkel γ in Gleichung B$_1$) der Aufgabe wohl genügen könnte. Macht man zur Untersuchung der Richtigkeit dessen, die Probe, so muss:

$$\alpha+\beta+\gamma=2R$$

bezw.

$$54^0\,21'\,30''+22^0\,29'\,57{,}4''+103^0\,8'\,32{,}6''=180^0$$

sein und dies ist in der That der Fall.

Zur Berechnung der gesuchten Seite c aus den gegebenen Stücken (s. Erkl. 178) hat man nach der vorstehenden Gleichung e) die Formel:

Formel 197. $c=\sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2}+b\cdot\cos\alpha$

oder in Rücksicht der Erkl. 37 die:

Formel 197a. $c=\sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)}+b\cos\alpha$

Setzt man hierin die für a, b und α gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$c = \sqrt{(223{,}54 + 105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'')\,(223{,}54 - 105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'')} + 105{,}26 \cdot \cos 54^0\,21'\,30''$$

oder nach der Hülfsrechnung 2 und der Hülfsrechnung 5:

$$c = \sqrt{223{,}54 + 85{,}5424)\,(223{,}54 - 85{,}5424)} + 61{,}3365$$

$$c = \sqrt{309{,}0824 \cdot 137{,}9976} + 61{,}3365$$

oder nach der Hülfsrechnung 6:

$$c = 206{,}5251 + 61{,}3365$$

mithin:

C) . . . $c = 267{,}8616$ m

Hülfsrechnung 6.

$\log \sqrt{309{,}0824 \cdot 137{,}9976} = \frac{1}{2}(\log 309{,}0824 + \log 137{,}9976)$

Nun ist:

$\log 309{,}0824 = 2{,}4900709$
$+28{,}2$
$+5{,}6$
$+\log 137{,}9976 = 2{,}1398476$
$+220{,}5$
$+18{,}9$

$4{,}6299458$
$\cdot \frac{1}{2}$

$2{,}3149729$
9621

108
105

3
$2{,}1$

mithin:

$\sqrt{309{,}0824 \cdot 137{,}9976} = 206{,}5251$

Zur Berechnung des gesuchten Flächeninhalts F aus den gegebenen Stücken (s. Erkl. 178) hat man zunächst nach der Formel 133 die Relation:

$$F = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma$$

oder in Rücksicht der vorstehenden Formel 196:

$$F = \frac{ab}{2}\left[\frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + \frac{b\sin 2\alpha}{2a}\right]$$

oder

Formel 198. $$F = \frac{b\sin\alpha}{2}\sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + \frac{b^2 \sin 2\alpha}{4}$$

oder auch in Rücksicht der Erkl. 37:

Formel 198a. $$F = \frac{b\sin\alpha}{2}\sqrt{(a + b\sin\alpha)(a - b\sin\alpha)} + \frac{b^2\sin 2\alpha}{4} \text{ Flächeneinheiten.}$$

Setzt man hierin die für a, b und α gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$F = \frac{105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30''}{2}\sqrt{223{,}54 + 105{,}26 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'')\,(223{,}54 - 105{,}26 \sin 54^0\,21'\,30'')} + \frac{105{,}26^2 \cdot \sin(2 \cdot 54^0\,21'\,30'')}{4}$$

oder nach entsprechender Reduktion und nach der Hülfsrechnung 2:

$$F = 52{,}63 \cdot \sin 54^0\,21'\,30''\sqrt{(223{,}54 + 85{,}5424)\,(223{,}54 - 85{,}5424)} + \frac{105{,}26^2 \cdot \sin 108^0\,43'}{4}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 65 und der Erkl. 66 nach welcher:

$$\sin 108^0\,43' = \sin(180^0 - 108^0\,43') \text{ oder } = \sin 71^0\,17'$$

ist, und nach weiterer Reduktion:

$$F = 52{,}63 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'' \cdot \sqrt{309{,}0824 \cdot 137{,}9976} + \frac{105{,}26^2 \cdot \sin 71^0\,17'}{4}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 7 und 8:

$$F = 8833{,}329 + 2623{,}436$$

mithin:

D) . . . $F = 11456{,}765$ qm

(siehe die Erkl. 182 bis 188).

Erkl. 180. Wie in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt 10, gezeigt ist, sind die sämtlichen goniometrischen oder trigonometrischen Funktionen mehrdeutig, d. h. jedem Wert einer trigonometrischen Funktion entsprechen mehrere Winkel, so ist z. B.:

a) . . . $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$

(s. Erkl. 66 oder Formel 17 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie) und aus dieser Formel ergibt sich, dass wenn ein Wert der Funktion „Sinus" eines noch zu bestimmenden Winkels x gegeben ist, dies der sich direkt aus der Tafel ergebende spitze Winkel x aber auch der stumpfe (im 2. Quadranten liegende) Winkel: $2R - x$ sein kann.

Ferner ist z. B.:

b) . . . $\sin(4R + \alpha) = \sin\alpha$

(s. Formel 99a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie) und aus dieser Formel ergibt sich weiter, dass wenn ein Wert der Funktion „Sinus" eines noch zu bestimmenden Winkels x gegeben ist, dies nicht allein der sich direkt aus der Tafel ergebende spitze Winkel x, und auch nach vorstehendem nicht allein der stumpfe Winkel: $2R - x$, sondern auch der Winkel: $4R + x$ sein kann.

Aus diesen zwei Beispielen ist ersichtlich, dass die trigonometrische Funktion „Sinus" im allgemeinen (ebenso die sämtlichen andern trigonometrischen Funktionen) mehrdeutig sind. Da bei den Dreiecksberechnungen nur spitze und stumpfe (zwischen 0° und 180° liegende) Winkel vorkommen, so kann man in diesem Sinn und in Rücksicht der vorstehenden Gleichung a) auch sagen: die trigonometrische Funktion „Sinus" ist zweideutig.

Bei den Aufgaben, in welchen die Zweideutigkeit anderer trigonometrischer Funktionen als des Sinus in Betracht gezogen werden muss, ist in den denselben beigefügten Erklärungen das Nähere angegeben.

Erkl. 181. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Dreieck liegt der grösseren Seite auch der grössere Winkel gegenüber und umgekehrt."

(S. Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Hülfsrechnung 7.

Setzt man der Abkürzung halber:

$$52{,}63 \cdot \sin 54^0\,21'\,30'' \sqrt{309{,}0824 \cdot 137{,}9976} = x$$

und logarithmiert, so erhält man:

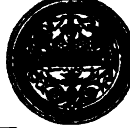
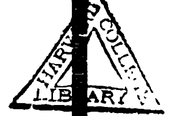
$$\log x = \log 52{,}63 + \log\sin 54^0\,21'\,30'' + \frac{1}{2}(\log 309{,}0824 + \log 137{,}9976)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rr} \log 309{,}0824 = & 2{,}4900709 \\ & +\,28{,}2 \\ & +\;\;5{,}6 \\ \hline +\log 309{,}0824 = & 2{,}4900743 \end{array}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

261. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 260. — Seite 113—128. Mit 6 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Ingenieur und Lehrer, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 260. — Seite 113—128. Mit 6 Figuren.

Inhalt:

Ueber die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks, Fortsetzung. — Ungelöste Aufgaben. — Tabellen rationeller rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

☞ Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

$$\begin{array}{rl}
\log 309{,}0824 = & 2{,}4900743 \\
+\log 187{,}9976 = & 2{,}1398476 \\
& +220{,}5 \\
& +\ 18{,}9 \\
\hline
& 4{,}6299458 \\
& \cdot \frac{1}{2} \\
\hline
& 2{,}3149729 \\
+\log 52{,}63 = & +\ 1{,}7212324 \\
+\log \sin 54^0\, 21'\, 30'' = & +\ 9{,}9099181 - 10 \\
\hline
\log x = & 13{,}9461244 - 10 \\
\text{oder}\ \log x = & 3{,}9461244 \\
& 1230 \\
\hline
& 14 \\
& 9{,}8 \\
\hline
& 4{,}2 \\
& 4{,}4
\end{array}$$

mithin:

$$x = 8833{,}329$$

Hülfsrechnung 8.

$$\log \frac{105{,}26^2 \cdot \sin 71^0\, 17'}{4} = 2 \cdot \log 105{,}26 + \log \sin 71^0\, 17' - \log 4$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 105{,}26 = & 2{,}0222634 \\
& \cdot 2 \\
\hline
& 4{,}0445268 \\
+\log \sin 71^0\, 17' = & +\ 9{,}9764036 - 10 \\
\hline
& 14{,}0209304 - 10 \\
-\log 4 = & -\ 0{,}6020600 \\
\hline
& 13{,}4188704 - 10 \\
\text{oder} = & 3{,}4188704 \\
& 8645 \\
\hline
& 59 \\
& 49{,}8 \\
\hline
& 9{,}2 \\
& 9{,}9
\end{array}$$

mithin ist:

$$\frac{105{,}26^2 \cdot \sin 71^0\, 17'}{4} = 2623{,}436$$

Erkl. 182. Sind, siehe Figur 61, von einem Dreieck die zwei Seiten a und b und der Winkel β gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts F dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 199. $$\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\beta}{b}$$

" 200. $$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b} \sqrt{b^2 - (a\sin\beta)^2} + \frac{a\sin 2\beta}{2b}$$

oder

Formel 200 a. $$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b} \sqrt{(b + a\sin\beta)\,(b - a\sin\beta)} + \frac{a\sin 2\beta}{2b}$$

" 201. $$c = \sqrt{b^2 - (a\sin\beta)^2} + a \cdot \cos\beta$$

" 201 a. $$c = \sqrt{(b + a\sin\beta)\,(b - a\sin\beta)} + a \cdot \cos\beta$$

" 202. $$F = \frac{a\sin\beta}{2} \sqrt{b^2 - (a\sin\beta)^2} + \frac{a^2 \sin 2\beta}{4}$$

oder

Formel 202 a. $$F = \frac{a\sin\beta}{2} \sqrt{(b + a\sin\beta)\,(b - a\sin\beta)} + \frac{a^2 \sin 2\beta}{2a}$$

(siehe die Erkl. 187 und auch die Auflösung der Aufgabe 121).

Figur 61.

Erkl. 183. Sind, siehe Figur 62, von einem Dreieck die zwei Seiten a und c und der Winkel α gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts F dieses Dreiecks die Formeln:

Formel 203. $$\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\alpha}{a}$$

" 204. $$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \sqrt{a^2 - (c\sin\alpha)^2} + \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2a}$$

oder

Formel 204 a. $$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a} \sqrt{(a + c\sin\alpha)\,(a - c\sin\alpha)} + \frac{c\sin 2\alpha}{2a}$$

" 205. $$b = \sqrt{a^2 - (c\sin\alpha)^2} + c \cdot \cos\alpha$$

oder

Formel 205 a. $$b = \sqrt{(a + c\sin\alpha)\,(a - c\sin\alpha)} + c \cdot \cos\alpha$$

" 206. $$F = \frac{c\sin\alpha}{2} \sqrt{a^2 - (c\sin\alpha)^2} + \frac{c^2 \sin 2\alpha}{4}$$

Figur 62.

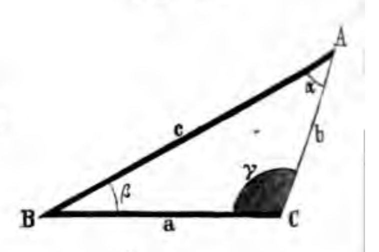
oder

Formel 206 a. $F = \frac{c\sin\alpha}{2}\sqrt{(a+c\sin\alpha)(a-c\sin\alpha)} + \frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$

(siehe die Erkl. 187).

Erkl. 184. Sind, siehe Figur 63, von einem Dreieck die zwei Seiten a und c und der Winkel γ gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts F dieses Dreiecks die Formeln:

Figur 63.



Formel 207. $\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\gamma}{c}$

" **208.** $\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{c^2-(a\sin\gamma)^2} + \frac{a\sin 2\gamma}{2c}$

oder

Formel 208 a. $\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{(c+a\sin\gamma)(c-a\sin\gamma)} + \frac{a\sin 2\gamma}{2c}$

" **209.** $b = \sqrt{c^2-(a\sin\gamma)^2} + a\cdot\cos\gamma$

oder

Formel 209 a. $b = \sqrt{(c+a\sin\gamma)(c-a\sin\gamma)} + a\cos\gamma$

" **210.** $F = \frac{a\sin\gamma}{2}\sqrt{(c^2-a\sin\gamma)^2} + \frac{a^2\sin 2\gamma}{4}$

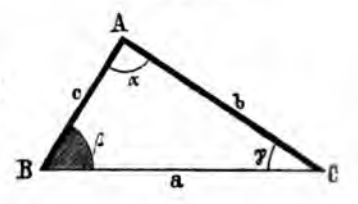
oder

Formel 210 a. $F = \frac{a\sin\gamma}{2}\sqrt{(c+a\sin\gamma)(c-a\sin\gamma)} + \frac{a^2\sin 2\gamma}{4}$

(siehe die Erkl. 187).

Erkl. 185. Sind, siehe Figur 64, von einem Dreieck die zwei Seiten b und c und der Winkel β gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts F dieses Dreiecks die Formeln:

Figur 64.



Formel 211. $\sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\beta}{b}$

" **212.** $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{b^2-(c\sin\beta)^2} + \frac{c\cdot\sin 2\beta}{2b}$

oder

Formel 212 a. $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{(b+c\sin\beta)(b-c\sin\beta)} + \frac{c\sin 2\beta}{2b}$

" **213.** $a = \sqrt{b^2-(c\sin\beta)^2} + c\cdot\cos\beta$

oder

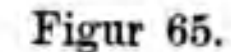
Formel 213 a. $a = \sqrt{(b+c\sin\beta)(b-c\sin\beta)} + c\cdot\cos\beta$

" **214.** $F = \frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{b^2-(c\sin\beta)^2} + \frac{c^2\sin 2\beta}{4}$

oder

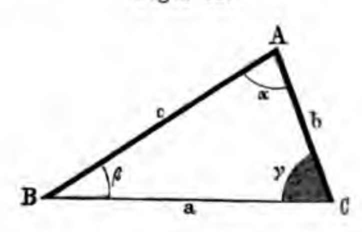
Formel 214 a. $F = \frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{b+c\sin\beta)(b-c\sin\beta)} + \frac{c^2\sin 2\beta}{4}$

(siehe Erkl. 187).



Figur 65.

Erkl. 186. Sind, siehe Figur 65, von einem Dreieck die zwei Seiten b und c und der Winkel γ gegeben, so bestehen zur Berechnung der übrigen Stücke und des Inhalts F dieses Dreiecks die Formeln:



Formel 215. $\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\gamma}{c}$

" **216.** $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{c^2-(b\sin\gamma)^2} + \frac{b\cdot\sin 2\gamma}{2c}$

oder

Formel 216a. $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{(c+b\sin\gamma)(c-b\sin\gamma)} + \frac{b\sin 2\gamma}{2c}$

" 217. $a = \sqrt{c^2-(b\sin\gamma)^2} + b\cdot\cos\gamma$

oder

Formel 217a. $a = \sqrt{(c+b\sin\gamma)(c-b\sin\gamma)} + b\cos\gamma$

" 218. $F = \frac{b\sin\gamma}{2}\sqrt{c^2-(b\sin\gamma)^2} + \frac{b^2\sin 2\gamma}{4}$

oder

Formel 218a. $F = \frac{b\sin\gamma}{2}\sqrt{(c+b\sin\gamma)(c-b\sin\gamma)} + \frac{b^2\sin 2\gamma}{4}$

(siehe die Erkl. 187).

Erkl. 187. Die in den Erkl. 182 bis 186 aufgestellten Formeln kann man in ganz analoger Weise wie die Formeln 195 bis 198 in der Auflösung der Aufgabe 120 herleiten.

Erkl. 188. Bei dem Gebrauch der Formeln 195 bis 218 hat man zu berücksichtigen, ob der gegebene Winkel der grösseren oder der kleineren der gegebenen Seiten gegenüberliegt. Ist letzteres der Fall, so hat man, wie in der folgenden Aufgabe 121 gezeigt wird, zu beachten, dass sich in Rücksicht der Erkl. 180, für jeden der beiden gesuchten Winkel zwei Werte, dass sich desgleichen für die dritte Seite und ebenso für den Flächeninhalt zwei Werte ergeben müssen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen (siehe die Erkl. 189).

Aufgabe 121. In einem Dreieck sei die Seite

$$a = 223{,}54 \text{ m}$$

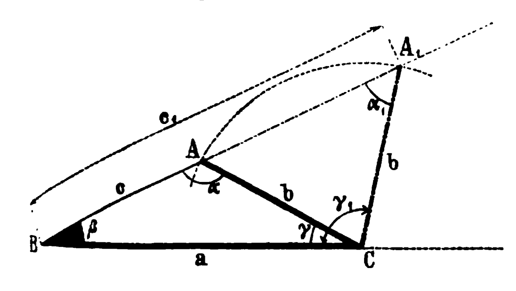
und die Seite $b = 105{,}26$ m

ferner sei der der kleineren dieser Seiten, nämlich der der Seite b gegenüberliegende Winkel

$$\beta = 22^0\,29'\,57{,}4''$$

Wie gross sind die übrigen Stücke und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

Figur 66.



Gegeben: $\begin{cases} a = 223{,}54 \text{ m} \\ b = 105{,}26 \text{ m} \\ \beta = 22^0\,29'\,57{,}4'' \end{cases}$

Gesucht: α, γ, c und F (der Flächeninhalt).

Auflösung. Zur Berechnung des gesuchten Winkels α, siehe Figur 66, hat man nach der in der Erkl. 182 aufgestellten Formel 199 und in Rücksicht der Erkl. 179, die Relation:

$$1) \ldots \sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b}$$

Setzt man in derselben die für a, b und β gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{223{,}54\cdot\sin 22^0\,29'\,57{,}4''}{105{,}26}$$

oder nach der Hülfsrechnung 1:

$$A) \ldots \alpha = 54^0\,21'\,30''$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 189 dem Winkel α noch ein zweiter

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\sin\alpha = \frac{223{,}54 \cdot \sin 22^0\,29'\,57{,}4}{105{,}26}$$

erhält man α wie folgt:

$$\log\sin\alpha = \log 223{,}54 + \log\sin 22^0\,29'\,57{,}4'' - \log 105{,}26$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log\sin 22^0\,29'\,57{,}4'' &= 9{,}5827888 - 10 \\ &\quad + 356{,}3 \\ &\quad + 20{,}4 \\ &\quad 9{,}5828265 - 10 \\ + \log 223{,}54 &= + 2{,}3493552 \\ &\quad 11{,}9321817 - 10 \\ - \log 105{,}26 &= - 2{,}0222634 \\ \log\sin\alpha &= 9{,}9099183 - 10 \\ &\quad 9181 \\ &\quad 2 \end{aligned}$$

mithin:

$$\alpha = 54^0\,21'\,30''$$

Erkl. 189. Nach dem in der Erkl. 79 angeführten 4. Kongruenzsatz aus der Planimetrie ist ein Dreieck vollkommen bestimmt, wenn von demselben zwei Seiten und der der grösseren von beiden gegenüberliegende Winkel gegeben sind (siehe die vorige Aufgabe 120). Sind hingegen von einem Dreieck zwei Seiten und der der kleineren von beiden Seiten gegenüberliegende Winkel gegeben (siehe die Aufgabe 121) so gibt es zwei Dreiecke, welche diese Stücke enthalten; denn konstruiert man sich z. B. ein Dreieck, von welchem, wie in der Aufgabe 121, die beiden Seiten a und b, $b < a$, und der kleineren von beiden Seiten, also der der Seite b gegenüberliegende Winkel β gegeben sind, auf planimetrische Weise, indem man, siehe Figur 66, den gegebenen Winkel β, welcher nach der Erkl. 190 ein spitzer Winkel sein muss, aufträgt, dann vom Scheitel B aus auf dem einen Schenkel dieses Winkels die gegebene grössere Seite a nach BC abträgt und schliesslich von C aus die gegebene kleinere Seite b nach dem andern Schenkel des Winkels β abschneidet, so erhält man auf diesem Winkelschenkel die zwei Schnittpunkte A und A_1; verbindet man nunmehr A mit C und A_1 mit C, so ergeben sich, siehe Figur 66, die zwei Dreiecke ABC und A_1BC, welche beide den gegebenen Bedingungen entsprechen (siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

In derselben Weise wie sich nun aus dieser planimetrischen Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel zwei Dreiecke ergeben, welche den gegebenen Bedingungen entsprechen, müssen sich auch bei der trigonometrischen Berechnung eines Dreiecks aus zwei Seiten und dem der kleineren von beiden gegenüberliegenden Winkel, für die zu berechnende Stücke je zwei Werte ergeben, und in der That erhält man, wie in nebenstehender Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt ist, für die gesuchten Stücke je zwei Werte, wenn man

Wert entsprechen muss und dass nach der Erkl. 180:

$$\sin\alpha = \sin(2R - \alpha)$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass jenem gesuchten Winkel auch noch der Wert:

$$\alpha_1 = 180^0 - 54^0\,21'\,30''$$

nämlich der Wert:

$$A_1) \;\ldots\; \alpha_1 = 125^0\,38'\,30''$$

entspricht.

Bei der Berechnung des gesuchten Winkels γ, könnte man analog wie es in der vorigen Aufgabe 120 geschehen ist verfahren und mittels der in der Erkl. 182 aufgestellten Formel 200:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{b^2 - (a\sin\beta)^2} + \frac{a\sin 2\beta}{2b}$$

den Winkel γ berechnen, wobei man in Rücksicht der Erkl. 189 und 180 für γ zwei entsprechende Werte erhalten würde. Bequemer, allerdings ohne nachher für die Richtigkeit der Rechnung Kontrolle zu haben, gelangt man zu den dem Winkel γ entsprechenden Werten, wenn man berücksichtigt, dass:

$$2) \;\ldots\; \gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist; man erhält hiernach und in Rücksicht der Gleichungen A) und A_1):

$$\gamma = 180^0 - (54^0\,21'\,30'' + 22^0\,29'\,57{,}4'')$$

$$\gamma = 180^0 - 76^0\,51'\,27{,}4''$$

oder

$$B) \;\ldots\; \gamma = 103^0\,8'\,32{,}6''$$

und

$$\gamma_1 = 180^0 - (125^0\,38'\,30'' + 22^0\,29'\,57{,}4'')$$

$$\gamma_1 = 180^0 - 148^0\,8'\,27{,}4''$$

oder

$$B_1) \;\ldots\; \gamma_1 = 31^0\,51'\,32{,}6''$$

Zur Berechnung der gesuchten Seite c könnte man analog wie es in der vorigen Aufgabe 120 geschehen ist, verfahren, und mittels der in der Erkl. 182 aufgestellten Formel 201:

$$c = \sqrt{b^2 - (a\sin\beta)^2} + a\cos\beta$$

die Seite c berechnen, wobei man ebenfalls zwei Werte für c erhalten würde, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 194 jeder Quadratwurzel zwei Vorzeichen zukommen. Bequemer ge-

…rücksichtigt, dass die trigonometrischen Funk…en mehrdeutig sind, bezw. dass, wie in Erkl. 180 angegeben ist, z. B. einem gege…n Wert der Funktion „Sinus“ stets zwei …kel entsprechen, welche in einem Dreieck vor…men können, nämlich ein spitzer Winkel α … dessen Supplementwinkel:

$$(2R - \alpha).$$

(Siehe auch die Erkl. 192 und 193.)

Erkl. 190. Sind von einem Dreieck zwei …ten und der der kleineren von beiden gegen…berliegende Winkel gegeben, so kann dieser Win…kel nur ein spitzer sein; denn angenommen es wäre ein stumpfer Winkel, so müsste der der grösseren jener Seite gegenüberliegende Win…kel ebenfalls ein stumpfer und zwar nach der Erkl. 181 noch ein grösserer stumpfer Winkel als jener sein; da aber nach der Erkl. 191 ein Dreieck nur einen stumpfen Winkel haben kann, so ist jene Annahme nicht statthaft.

Erkl. 191. Ein Dreieck kann nur einen stumpfen Winkel haben, da nach dem in der Erkl. 68 ausgesprochenen planimetrischen Satz die Summe aller drei Winkel $= 2R$ sein muss und diesen Wert nicht überschreiten kann.

Erkl. 192. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung:

$$1) \ldots \sin\alpha = \frac{a \sin\beta}{b}$$

kann man folgender Determination unterziehen:

a) Ist $a \sin\beta > b$, so lässt diese Gleichung keinen Sinn zu, da die Sinus aller Winkel zwischen den Grenzen $+1$ und -1 liegen und infolgedessen echte Brüche sein müssen (siehe Erkl. 144). Es kann also kein Dreieck existieren, welches diese Bedingung erfüllt.

b) Ist $a \sin\beta < b$, so ergeben sich für α zwei Werte, welche den Bedingungen der Aufgabe genügen, wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt ist.

c) Ist $a \sin\beta = b$, so ist: $\sin\alpha = 1$, also nach der Erkl. 99 $\alpha = 90^0$. Es existiert also nur ein Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht und dieses Dreieck ist ein rechtwinkliges Dreieck.

Erkl. 193. Da der Fall, in welchem ein Dreieck aus zwei Seiten und dem der kleineren von beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel berechnet werden soll, zwei Lösungen ergibt, oder biform ist, so wird derselbe auch „casus ambiguus“ d. h. der zweideutige Fall, genannt.

langt man zu den der Seite c entsprechenden Werten, wenn man die bereits für den Winkel γ berechneten Werte benutzt und die Sinusregel in Anwendung bringt. Man erhält:

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

oder

$$3) \ldots c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$$

Substituiert man hierin die für b und β gegebenen und aus den Gleichungen B und B_1 die für γ bereits berechneten Werte, so erhält man einmal:

$$c = \frac{105{,}26 \cdot \sin 103^0\, 8'\, 32{,}6''}{\sin 22^0\, 29'\, 57{,}4''}$$

oder, wenn man in Rücksicht der Erkl. 65 und 66:

$$\sin 103^0\, 8'\, 32{,}6'' = \sin(180^0 - 103^0\, 8'\, 32{,}6'') = \sin 76^0\, 51'\, 27{,}4''$$

setzt:

$$c = \frac{105{,}26 \cdot \sin 76^0\, 51'\, 27{,}4''}{\sin 22^0\, 29'\, 57{,}4''}$$

oder nach der Hülfsrechnung 2:

$$C) \ldots c = 267{,}861 \text{ m}$$

und ein andermal:

$$c = \frac{105{,}26 \cdot \sin 31^0\, 51'\, 32{,}6''}{\sin 22^0\, 29'\, 57{,}4''}$$

oder nach der Hülfsrechnung 5:

$$C_1) \ldots c_1 = 145{,}1885 \text{ m}$$

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F könnte man, analog wie es in der vorigen Aufgabe 120 geschehen ist, verfahren und mittels der in der Erkl. 182 aufgestellten Formel 202:

$$F = \frac{a \sin\beta}{2} \sqrt{b^2 - (a \sin\beta)^2} + \frac{a^2 \sin 2\beta}{4}$$

den Inhalt F berechnen, wobei man ebenfalls zwei Werte für F erhalten würde, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 194 jede Quadratwurzel zwei Vorzeichen hat. Bequemer gelangt man zu den dem Inhalt F entsprechenden Werten, wenn man die bereits für den Winkel γ berechneten Werte benutzt und dann die in der Erkl. 151 in Worten ausgedrückte In-

Erkl. 194. Jeder Quadratwurzel entsprechen zwei, ihren absoluten Werten nach gleiche, ihren Vorzeichen nach aber entgegengesetzte Werte, denn: hat man z. B. $\sqrt{16}$ so heisst dies nach der Definition der hierdurch angedeuteten Radizierung nichts anderes als, man soll eine Zahl suchen, die in die Potenz des Wurzelexponenten, hier 2, erhoben, den Radikanden 16 gibt, da nun sowohl $(+4)^2$, als auch $(-4)^2$ jenen Radikanden $+16$ ergibt, so folgt hieraus: $\sqrt{16} = \pm 4$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln und Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt 29.

Hülfsrechnung 2.

Aus

$$c = \frac{105{,}26 \cdot \sin 76^0\ 51'\ 27{,}4''}{\sin 22^0\ 29'\ 57{,}4''}$$

erhält man c, wie folgt:

$$\log c = \log 105{,}26 + \log \sin 76^0\ 51'\ 27{,}4'' - \log \sin 22^0\ 29'\ 57{,}4''$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 105{,}26 = & 2{,}0222634 \\ + \log \sin 76^0\ 51'\ 27{,}4'' = + & 9{,}9884733 - 10^{*} \\ \hline & 12{,}0107367 - 10 \\ - \log \sin 22^0\ 29'\ 57{,}4'' = \pm & 9{,}5828265 \mp 10^{**} \\ \hline \log c = & 2{,}4279102 \\ & 9079 \\ \hline & 23 \\ & 16{,}2 \\ \hline & 6{,}8 \\ & 6{,}5 \end{array}$$

* s. Hülfsr. 3. ** s. Hülfsr. 4.

mithin:

$$c = 267{,}8614$$

Hülfsrechnung 3.

$$\begin{array}{rl} \log \sin 76^0\ 51'\ 27{,}4'' = & 9{,}9884697 - 10 \\ & +34{,}3 \\ & +1{,}96 \\ \hline & 9{,}9884733 - 10 \end{array}$$

Hülfsrechnung 4.

$$\begin{array}{rl} \log \sin 22^0\ 29'\ 57{,}4'' = & 9{,}5827888 - 10 \\ & +356{,}3 \\ & +20{,}4 \\ \hline & 9{,}5828265 - 10 \end{array}$$

Hülfsrechnung 5.

Aus

$$c_1 = \frac{105{,}26 \cdot \sin 31^0\ 51'\ 32{,}6''}{\sin 22^0\ 29'\ 57{,}4''}$$

erhält man c_1 wie folgt:

$$\log c = \log 105{,}26 + \log \sin 31^0\ 51'\ 32{,}6'' - \log \sin 22^0\ 29'\ 57{,}4''$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 105{,}26 = & 2{,}0222634 \\ + \log \sin 31^0\ 51'\ 32{,}6'' = + & 9{,}7224953 - 10^{*} \\ \hline & 11{,}7447587 - 10 \\ - \log \sin 22^0\ 29'\ 57{,}4'' = \pm & 9{,}5828265 \mp 10^{**} \\ \hline \log c_1 = & 2{,}1619322 \\ & 9068 \\ \hline & 254 \\ & 239{,}2 \\ \hline & 14{,}8 \\ & 14{,}9 \end{array}$$

* s. Hülfsr. 6. ** s. Hülfsr. 4.

mithin:

$$c_1 = 145{,}1885$$

haltsformel in Anwendung bringt. Man erhält nach derselben:

$$4) \ldots F = \frac{ab}{2} \cdot \sin \gamma$$

(s. auch Formel 133).

Setzt man hierin die für a und b gegebenen und aus den Gleichungen B) und B_1) die für γ bereits berechneten Werte, so erhält man einmal:

$$F = \frac{223{,}54 \cdot 105{,}26}{2} \cdot \sin 103^0\ 8'\ 32{,}6''$$

oder, wenn man in Rücksicht der Erkl. 65 und 66:

$$\sin 103^0 8' 32{,}6'' = \sin(180^0 - 103^0 8' 32{,}6'') = 76^0\ 51'\ 27{,}4''$$

setzt:

$$F = \frac{223{,}54 \cdot 105{,}26}{2} \cdot \sin 76^0\ 51'\ 27{,}4''$$

oder nach der Hülfsrechnung 7:

$$\text{D)} \ldots F = 11456{,}763 \text{ qm}$$

und ein andermal:

$$F_1 = \frac{223{,}54 \cdot 105{,}26}{2} \cdot \sin 31^0\ 51'\ 32{,}6''$$

oder nach der Hülfsrechnung 8:

$$\text{D}_1) \ldots F_1 = 6209{,}89 \text{ qm}$$

(s. die Erkl. 178 und 195).

Hülfsrechnung 6.

$$\log \sin 31^0\,51'\,32{,}6'' = 9{,}7224865 - 10$$
$$+67{,}8$$
$$+20{,}3$$
$$9{,}7224953 - 10$$

Hülfsrechnung 7.

Aus

$$F = \frac{223{,}54 \cdot 105{,}26}{2} \cdot \sin 76^0\,51'\,27{,}4''$$

erhält man F, wie folgt:

$$\log F = 223{,}54 + \log 105{,}26 + \log \sin 76^0\,51'\,27{,}4'' - \log 2$$

Nun ist:

$$\log 223{,}54 = 2{,}3493552$$
$$+\log 105{,}26 = +\ 2{,}0222634$$
$$+\log \sin 76^0\,51'\,27{,}4'' = +\ 9{,}9884733 - 10$$
$$14{,}3600919 - 10$$
$$-\log 2 = 0{,}3010300$$
$$\log F = 14{,}0590619 - 10$$
$$\text{oder } \log F = 4{,}0590619$$

0330
289
265,3
23,7
22,7
1,0
1,1

mithin:

$$F = 11456{,}768$$

Hülfsrechnung 8.

Aus

$$F_1 = \frac{223{,}54 \cdot 105{,}26}{2} \cdot \sin 31^0\,51'\,32{,}6''$$

erhält man F_1, wie folgt:

$$\log F_1 = \log 223{,}54 + \log 105{,}26 + \log \sin 31^0\,51'\,32{,}6'' - \log 2$$

Nun ist:

$$\log 223{,}54 = 2{,}3493552$$
$$+\log 105{,}26 = +\ 2{,}0222634$$
$$+\log 31^0\,51'\,32{,}6'' = +\ 9{,}7224953 - 10^*$$
$$14{,}0941139 - 10$$
$$-\log 2 = -\ 0{,}3010300$$
$$\log F_1 = 13{,}7930839 - 10$$
$$\text{oder } \log F_1 = 3{,}7930839$$

0776
63
63

* s. Hülfsrechnung 6.

mithin:

$$F_1 = 6209{,}89$$

Erkl. 195. Da die in der Aufgabe 121 gegebenen Zahlenwerte solche Werte sind, die dem in der Aufgabe 120 berechneten Dreieck entnommen sind, so müssen die in Aufgabe 121 berechneten Werte mit denjenigen in der Aufgabe 120 übereinstimmen; bei einer Vergleichung der betreffenden Zahlenwerte in beiden Aufgaben, wird man diese Uebereinstimmung, abgesehen von der in der Aufgabe 121 enthaltenen Zweideutigkeit auch erkennen.

Anmerkung 10. Weitere gelöste praktische Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck findet man in späteren Abschnitten.

---

b). Ungelöste Aufgaben.

Aufgabe 122. Von einem schiefwinkligen Dreieck sei die Seite:

$$a = 250 \text{ m}$$

und die beiden Winkel $\alpha = 36^0 42'$

und $\beta = 61^0 50' 10''$

Man soll die übrigen Bestimmungsstücke des Dreiecks und dessen Inhalt berechnen.

Andeutung. Die Aufgaben 122 bis 125 sind analog der gelösten Aufgabe 117 zu lösen.

Aufgabe 123. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 1250$ km
$\alpha = 32^0 12' 10''$
und $\beta = 18^0 15' 17''$

Aufgabe 124. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 6{,}748$ dm
$\alpha = 92^0 30' 10''$
und $\beta = 17^0 2' 3{,}5''$

Aufgabe 125. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 0{,}64875$ geogr. Meilen
$\alpha = 22^0 0' 18''$
und $\beta = 110^0 2' 16{,}4''$

Aufgabe 126. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 38{,}45$ m
$\alpha = 42^0 10' 30''$
und $\gamma = 75^0 0' 14''$

Andeutung. Die Aufgaben 126 bis 129 sind analog der gelösten Aufgabe 117 und mittels Benutzung der in der Erkl. 129 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 127. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 3{,}487$ km
$\alpha = 12^0 13' 8''$
und $\gamma = 40^0 56' 9{,}7''$

Aufgabe 128. Desgl,, wenn gegeben sind:

$a = 784{,}693$ dm
$\alpha = 99^0 5' 1{,}9''$
und $\gamma = 40^0 22' 0{,}7''$

Aufgabe 129. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 6874{,}048$ cm
$\alpha = 59^0 52' 0{,}7''$
und $\gamma = 105^0 10' 0{,}9''$

Aufgabe 130. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 24{,}008$ m
$b = 33^0 0' 10''$
und $\gamma = 71^0 3' 17''$

Andeutung. Die Aufgaben 130 bis 133 sind analog der gelösten Aufgabe 117 und mittels Benutzung der in der Erkl. 130 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 131. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 0{,}0989$ geogr. Meilen
$\gamma = 10^0 30' 41{,}5''$
und $\gamma = 42^0 1' 0{,}8''$

Aufgabe 132. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 4784{,}6$ km
$\beta = 98^0 10' 13''$
und $\gamma = 30^0 11' 7{,}9''$

Aufgabe 133. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 6{,}473$ dm
$\beta = 12^0\, 6'\, 31{,}5''$
und $\gamma = 112^0\, 3'\, 2{,}7''$

Aufgabe 134. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 478{,}21$ m
$\alpha = 44^0\, 0'\, 18{,}4''$
und $\beta = 63^0\, 1'\, 6''$

Andeutung. Die Aufgaben 134 bis 136 sind analog der gelösten Aufgabe 117 und mittels Benutzung der in der Erkl. 131 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 135. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 2740{,}32$ km
$\alpha = 22^0\, 3'\, 18{,}7''$
und $\beta = 40^0\, 0'\, 0{,}9''$

Aufgabe 136. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 2{,}987$ geogr. Meilen
$\alpha = 114^0\, 12'\, 19{,}3''$
und $\beta = 9^0\, 18'\, 16{,}4''$

Aufgabe 137. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 643{,}78$ dm
$\alpha = 64^0\, 33'\, 9''$
und $\gamma = 58^0\, 0'\, 6{,}9''$

Andeutung. Die Aufgaben 137 bis 140 sind analog der gelösten Aufgabe 117 und mittels Benutzung der in den Erkl. 132 und 133 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 138. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 0{,}438$ km
$\alpha = 96^0\, 50'\, 30{,}2''$
und $\gamma = 31^0\, 10'\, 15''$

Aufgabe 139. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 62{,}85$ dm
$\beta = 50^0\, 8'\, 6''$
und $\gamma = 48^0\, 17'\, 19{,}3''$

Aufgabe 140. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 4321{,}983$ m
$\beta = 19^0\, 12'\, 0{,}3''$
und $\gamma = 102^0\, 8'\, 14''$

Aufgabe 141. Desgl., wenn gegeben sind:
$c = 50{,}08$ km
$\alpha = 52^0\, 31'\, 14''$
und $\beta = 60^0\, 10'\, 3''$

Andeutung. Die Aufgaben 141 bis 143 sind analog der gelösten Aufgabe 117 und mittels Benutzung der in den Erkl. 134 bis 136 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 142. Desgl., wenn gegeben sind:
$c = 0{,}8493$ geogr. Meilen
$\alpha = 115^0\, 0'\, 0{,}4''$
und $\gamma = 4^0\, 26'\, 40{,}9''$

Aufgabe 143. Desgl., wenn gegeben sind:
$c = 3044{,}768$ dm
$\beta = 18^0\, 4'\, 9{,}27''$
und $\gamma = 98^0\, 40'\, 0{,}7''$

Aufgabe 144. In einem schiefwinkligen Dreieck sei die Seite:

$a = 320$ m

die Seite $b = 265{,}2$ m

und der von beiden eingeschlossene Winkel

$\gamma = 55^0\,30'\,10''$

Man soll aus diesen Angaben die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks bestimmen.

Andeutung. Die Aufgaben 144 bis 146 sind analog der gelösten Aufgabe 118 zu lösen.

Aufgabe 145. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 52{,}007$ km

$b = 70{,}34$ km

und $\gamma = 10^0\,12'\,22''$

Aufgabe 146. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 563{,}009$ m

$b = 670{,}447$ m

und $\gamma = 115^0\,13'\,17{,}5''$

Aufgabe 147. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 6850$ dm

$c = 5009{,}7$ dm

und $\beta = 77^0\,30'\,40''$

Andeutung. Die Aufgaben 147 bis 149 sind analog der gelösten Aufgabe 118 und mittelst Benutzung der in der Erkl. 155 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 148. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 0{,}2984$ geogr. Meilen

$c = 1{,}0037$ " "

und $\beta = 8^0\,10'\,50''$

Aufgabe 149. Desgl., wenn gegeben sind:

$a = 4780{,}32$ cm

$c = 4993{,}8$ cm

und $\beta = 115^0\,10'\,41{,}2''$

Aufgabe 150. Desgl., wenn gegeben sind:

$b = 2000$ m

$c = 2005$ m

und $\alpha = 85^0\,30'\,42''$

Andeutung. Die Aufgaben 150 bis 152 sind analog der gelösten Aufgabe 118 und mittelst Benutzung der in der Erkl. 156 aufgestellten Formeln zu lösen.

Aufgabe 151. Desgl., wenn gegeben sind:

$b = 634{,}708$ km

$c = 784{,}009$ km

und $\alpha = 11^0\,21'\,37''$

Aufgabe 152. Desgl., wenn gegeben sind:

$b = 627{,}0098$ geogr. Meil.

$c = 700{,}0075$ " "

und $\alpha = 100^0\,0'\,0{,}8''$

Aufgabe 153. Aus den drei gegebenen Seiten:

$a = 135$ m

$b = 178$ m

und $c = 225$ m

eines Dreiecks soll man die übrigen Stücke und den Inhalt des Dreiecks bestimmen.

Andeutung. Die Aufgaben 153 bis 157 sind analog der gelösten Aufgabe 119 zu lösen.

Aufgabe 154. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 1272{,}15$ m
$b = 485{,}2$ m
und $c = 839{,}8$ m

Aufgabe 155. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 992{,}31$ m
$b = 445{,}81$ m
und $c = 748{,}67$ m

Aufgabe 156. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 7694{,}7$ km
$b = 12584{,}09$ km
und $c = 5009{,}38$ km

Aufgabe 157. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 1533{,}08$ dm
$b = 16489{,}57$ dm
und $c = 7269{,}41$ dm

Aufgabe 158. Welches sind die übrigen Bestimmungsstücke eines Dreiecks und welches ist dessen Inhalt, wenn von demselben gegeben sind die Seite:
$a = 3487$ m
die Seite $b = 2756$ m
und der der grösseren dieser Seiten, also der Seite a gegenüberliegende Winkel
$\alpha = 35^0\,42'\,40''$

Andeutung. Die Aufgaben 158 bis 161 sind analog der gelösten Aufgabe 120 oder analog der gelösten Aufgabe 121 zu lösen. Bei der Auflösung der Aufgaben 159 und 161 nach der gelösten Aufgabe 120 sind die in der Erkl. 182 aufgestellten Formeln zu berücksichtigen. Im übrigen beachte man die Erkl. 178.

Aufgabe 159. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 57{,}48$ km
$b = 68{,}57$ km
und $\beta = 78^0\,44'\,42''$

Aufgabe 160. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 917{,}5$ m
$b = 312{,}93$ m
und $\alpha = 132^0\,11'\,17{,}8''$

Aufgabe 161. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 0{,}0875$ geogr. Meilen
$b = 0{,}139145$ „ „
und $\beta = 176^0\,3'\,6''$

Aufgabe 162. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 69{,}7247$ m
$c = 53{,}2028$ m
und $\alpha = 78^0\,20'\,18''$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 158. Bei den Auflösungen der Aufgaben 162 und 164 nach der gelösten Aufgabe 120 sind die in der Erkl. 183 aufgestellten Formeln, bei den Aufgaben 163 und 165 sind die in der Erkl. 184 aufgestellten Formeln zu berücksichtigen. Im übrigen beachte man die Erkl. 178.

Aufgabe 163. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 110876{,}09$ km
$c = 111879{,}6$ km
und $\gamma = 66^0\,11'\,52{,}8''$

Aufgabe 164. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 657{,}407$ geogr. Meilen
$c = 493{,}008$ „ „
und $\alpha = 109^0\,53'\,41{,}8''$

Aufgabe 165. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 2385{,}433$ m
$c = 4276{,}008$ m
und $\gamma = 135^0\,18'\,19{,}5''$

Aufgabe 166. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 15$ m
$c = 14$ m
und $\beta = 59^0\,29'\,23{,}2''$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 158. Bei den Auflösungen der Aufgaben 166 und 168 nach der gelösten Aufgabe 120 sind die in der Erkl. 185 aufgestellten Formeln, bei den Aufgaben 167 und 169 die in der Erkl. 186 aufgestellten Formeln zu berücksichtigen. Im übrigen beachte man die Erkl. 178.

Aufgabe 167. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 525{,}009$ km
$c = 763{,}764$ km
und $\gamma = 40^0\,0'\,0{,}4''$

Aufgabe 168. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 9{,}387$ geogr. Meilen
$c = 0{,}38704$ „ „
und $\beta = 120^0\,38'\,7''$

Aufgabe 169. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 554{,}058$ m
$c = 669{,}243$ m
und $\gamma = 138^0\,10'\,7{,}3''$

Aufgabe 170. Man soll die nicht bekannten Stücke und den Inhalt eines Dreiecks berechnen, wenn gegeben sind die Seite:
$a = 3487$ m
die Seite $b = 2756$ m
und der der kleineren dieser beiden Seiten, also der der Seite b gegenüberliegende Winkel
$\beta = 35^0\,42'\,40''$

Andeutung. Die Aufgaben 170 bis 175 sind analog der gelösten Aufgabe 120 oder besser analog der gelösten Aufgabe 121 zu lösen. Bei der Auflösung der Aufgabe 170 nach der gelösten Aufgabe 120 sind die in der Erkl. 182 aufgestellten Formeln, bei der Aufgabe 172 die in der Erkl. 184, bei der Aufgabe 173 die in der Erkl. 183, bei der Aufgabe 174 die in der Erkl. 186 und bei der Aufgabe 175 die in der Erkl. 185 aufgestellten Formeln anzuwenden. Im übrigen beachte man die Erkl. 178 und die Erkl. 189.

Aufgabe 171. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 57{,}43$ km
$b = 68{,}57$ km
und $\alpha = 78^0\,44'\,42''$

Aufgabe 172. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 69{,}7247$ m
$c = 53{,}3028$ m
und $\gamma = 78^0\,20'\,18''$

Aufgabe 173. Desgl., wenn gegeben sind:
$a = 110876{,}09$ km
$c = 111879{,}6$ km
und $\alpha = 66^0\,11'\,52{,}8''$

Aufgabe 174. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 15$ m
$c = 14$ m
und $\gamma = 59^0\,29'\,23{,}2''$

Aufgabe 175. Desgl., wenn gegeben sind:
$b = 525{,}009$ km
$c = 763{,}764$ km
$\beta = 40^0\,0'\,0.4''$

Anmerkung 11. In nachstehenden zwei Tabellen sind die Masszahlen der Bestimmungsstücke und der Inhalte einer Anzahl rechtwinkliger und schiefwinkliger Dreiecke enthalten. Diese Tabellen können zu mancherlei praktischen Zwecken benutzt werden, ausserdem können mittels derselben weitere Aufgaben gebildet werden, bei welchen gleichzeitig die Auflösungen gegeben sind. Die in diesen Tabellen enthaltenen Masszahlen sind dem Lehrbuch der ebenen Trigonometrie des Professor Dr. Feaux entnommen.

Tabelle I,

enthaltend die Masszahlen (nach Bretschneider) der Bestimmungsstücke und der Inhalte einer Anzahl rationaler rechtwinkliger (pythagoreischer) Dreiecke.

(Siehe Erkl. 174.)

Ordnungs-Nro.	Masszahlen der Seiten: a	b	c	Winkel α			Winkel β			Masszahlen der Inhalte
1	4	3	5	53°	7′	48,4″	36°	52′	11,6″	6
2	12	5	13	67	22	48,5	22	37	11,5	30
3	8	15	17	28	4	20,9	61	55	39,1	60
4	24	7	25	73	44	23,3	16	15	36,7	84
5	20	21	29	43	36	10,1	46	23	49,9	210
6	40	9	41	77	19	10,6	12	40	49,4	180
7	12	35	37	18	55	28,7	71	4	31,3	210
8	60	11	61	79	36	40,0	10	23	20,0	330
9	28	45	53	31	53	26,8	58	6	33,2	630
10	56	33	65	59	29	23,2	30	30	36,8	924
11	84	13	85	81	12	9,3	8	47	50,7	546
12	16	63	65	14	15	0,1	75	44	59,9	504
13	48	55	73	41	6	43,5	48	53	16,5	1320
14	80	39	89	64	0	38,8	25	59	21,2	1560
15	112	15	113	82	22	18,7	7	37	41,3	840
16	36	77	85	25	3	27,4	64	56	32,6	1386
17	72	65	97	47	55	29,9	42	4	30,1	2340
18	144	17	145	83	16	1,5	6	43	58,5	1224
19	20	99	101	11	25	16,3	78	34	43,7	990
20	60	91	109	33	23	54,6	56	36	5,4	2730
21	140	51	149	69	59	2,5	20	0	57,5	3570
22	180	19	181	83	58	27,9	6	1	32,1	1710
23	44	117	125	20	36	34,9	69	23	25,1	2574
24	88	105	137	39	57	58,4	50	2	1,6	4620
25	132	85	157	57	13	15,3	32	46	44,7	5610
26	176	57	185	72	3	17,1	17	56	42,9	5016
27	220	21	221	84	32	50,5	5	27	9,5	2310
28	24	143	145	9	31	38,2	80	28	21,8	1716
29	120	119	169	45	14	23,0	44	45	37,0	7140
30	168	95	193	60	30	46,4	29	29	13,6	7980

Ord-nungs-Nro.	Masszahlen der Seiten: a	b	c	Winkel α			Winkel β			Masszahlen der Inhalte
31	264	23	265	85°	1′	15,3″	4°	58′	44,7″	3036
32	52	165	173	17	29	32,4	72	30	27,6	4290
33	104	153	185	34	12	19,6	55	47	40,4	7956
34	156	133	205	49	33	1,0	40	26	59,0	10374
35	208	105	233	63	12	54,0	26	47	6,0	10920
36	260	69	269	75	8	13,8	14	51	46,2	8970
37	312	25	313	85	25	7,6	4	34	52,4	3900
38	28	195	197	8	10	16,4	81	49	43,6	2730
39	84	187	205	24	11	22,3	65	48	37,7	7854
40	140	171	221	39	18	27,5	50	41	32,5	11970
41	252	115	227	65	28	13,6	24	31	46,4	14490
42	308	75	317	76	18	52,0	13	41	8,0	11550
43	364	27	365	85	45	28,1	4	14	31,9	4914
44	60	221	229	15	11	21,4	74	48	38,6	6630
45	120	209	241	29	51	46,0	60	8	14,0	12540
46	240	161	289	56	8	41,9	33	51	18,1	19320
47	420	29	421	86	3	0,4	3	56	59,6	6090
48	32	255	257	7	9	9,6	82	50	50,4	4080
49	96	247	265	21	14	21,5	68	45	38,5	11856
50	160	231	281	34	42	29,0	55	17	31,0	18480
51	224	207	305	47	15	31,5	42	44	28,5	23184
52	288	175	337	58	42	55,8	31	17	4,2	25200
53	352	135	377	69	1	1,4	20	58	58,6	23760
54	416	87	425	78	11	15,8	11	48	44,2	18096
55	480	31	481	86	18	17,2	3	41	42,8	7440
56	68	285	293	13	25	10,8	76	34	49,2	9690
57	136	273	305	26	28	51,7	63	31	8,3	18564
58	204	253	325	38	52	48,3	51	7	11,7	25806
59	272	225	353	50	24	8,1	39	35	51,9	30600
60	340	189	389	60	55	51,9	29	4	8,1	32130
61	408	145	433	70	26	6,7	19	33	53,3	29580
62	476	93	485	78	56	41,7	11	3	18,3	22134
63	544	33	545	86	31	42,9	3	28	17,1	8976
64	36	323	325	6	21	34,8	83	38	25,2	5814
65	180	299	349	31	2	53,6	58	57	6,4	26910
66	252	275	373	42	30	3,6	47	29	56,4	34650
67	396	203	445	62	51	32,9	27	8	27,1	40194
68	468	155	493	71	40	31,1	18	19	28,9	36270
69	612	35	613	86	43	36,6	3	16	23,4	10710
70	76	357	365	12	1	4,9	77	58	55,1	13566
71	152	345	377	23	46	38,3	66	13	21,7	26220
72	228	325	397	35	3	4,1	54	56	55,9	37050
73	304	297	425	45	40	2,3	44	19	57,7	45144
74	380	261	461	55	31	1,5	34	28	58,5	49590
75	456	217	505	64	33	4,6	25	26	55,4	49476
76	532	165	557	72	46	7,3	17	13	52,7	43890
77	608	105	617	80	12	6,5	9	57	53,5	31920
78	684	37	685	86	54	13,3	3	5	46,7	12654
79	40	399	401	5	43	29,3	84	16	30,7	7980
80	120	391	409	17	3	41,5	72	56	18,5	23460
81	280	351	449	38	34	48,3	51	25	11,7	49140
82	360	319	481	48	27	19,7	41	32	40,3	57420

Ord-nungs-Nro.	Masszahlen der Seiten:			Winkel α			Winkel β			Masszahlen der Inhalte
	a	b	c							
83	440	279	521	57°	37′	17,7″	32°	22′	42,3″	61380
84	520	231	569	66	2	51,9	23	57	8,1	60060
85	680	111	689	80	43	44,6	9	16	15,4	37740
86	760	39	761	87	3	44,6	2	56	15,4	14820
87	84	437	445	10	52	50,4	79	7	9,6	18354
88	168	425	457	21	34	6,9	68	25	53,1	35700
89	336	377	505	41	42	32,1	48	17	27,9	63336
90	420	341	541	50	55	36,1	39	4	23,9	71610
91	672	185	697	74	36	28,4	15	23	31,6	62160
92	840	41	841	87	12	20,3	2	47	39,7	17220
93	44	483	485	5	12	18,4	84	47	41,6	10626
94	132	475	493	15	31	49,2	74	28	10,8	31350
95	220	459	509	25	36	30,7	64	23	29,3	50490
96	308	435	533	35	18	0,9	54	41	59,1	66990
97	396	403	565	44	29	53,0	45	30	7,0	79794
98	572	315	653	61	9	30,4	28	50	29,6	90090
99	660	259	709	68	34	25,5	21	25	34,5	85470
100	748	195	773	75	23	18,5	14	36	41,5	72930
101	836	123	845	81	37	48,6	8	22	11,4	51414
102	924	43	925	87	20	8,0	2	39	52,0	19866
103	92	525	533	9	56	22,1	80	3	37,9	24150
104	184	513	545	19	43	53,8	70	16	6,2	47196
105	276	493	565	29	14	30,3	60	45	29,7	68034
106	368	465	593	38	21	28,8	51	38	31,2	85560
107	460	429	629	46	59	49,7	43	0	10,3	98670
108	552	385	673	55	6	20,2	34	53	39,8	106260
109	644	333	725	62	39	26,6	27	20	33,4	107226
110	736	273	785	69	38	56,3	20	21	3,7	100464
111	828	205	853	76	5	38,7	13	54	21,3	84870
112	920	129	929	82	1	5,4	7	58	54,6	59340
113	1012	45	1013	87	27	14,2	2	32	45,8	22770
114	48	575	577	4	46	18,8	85	13	41,2	13800
115	240	551	601	23	32	11,7	66	27	48,3	66120
116	336	527	625	32	31	13,5	57	28	46,5	88536
117	528	455	697	49	14	49,7	40	45	10,3	120120
118	624	407	745	56	53	9,1	33	6	50,9	126984
119	816	287	865	70	37	20,8	19	22	39,2	117096
120	912	215	937	76	44	5,9	13	15	54,1	98040
121	1104	47	1105	87	33	44,1	2	26	15,9	25944
122	100	621	629	9	8	52,3	80	51	7,7	31050
123	200	609	641	18	10	50,0	71	49	10,0	60900
124	300	589	661	26	59	29,3	63	0	30,7	88350
125	400	561	689	35	29	21,6	54	30	38,4	112200
126	600	481	769	51	16	55,2	38	43	4,8	144300
127	700	429	821	58	29	51,5	31	30	8,5	150150
128	800	369	881	65	14	18,6	24	45	41,4	147600
129	900	301	949	71	30	28,0	18	29	32,0	135450
130	1100	141	1109	82	41	44,0	7	18	16,0	77550
131	1200	49	1201	87	39	42,2	2	20	17,8	29400

Tabelle II,

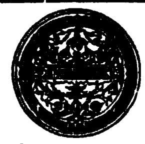
enthaltend die **Masszahlen** der Bestimmungsstücke und der Inhalte einer **Anzahl rational** schiefwinkliger Dreiecke (siehe Erkl. 175).

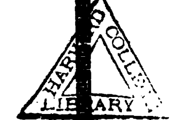
Ord-nungs-Nro.	Masszahlen der Seiten: *a*	*b*	*c*	Winkel α	Winkel β	Winkel γ	Masszahlen der zu den Seiten *a* gehörigen Höhen	Masszahlen der Inhalte
1	14	15	13	59° 29′ 23,1″	67° 22′ 48,5″	53° 7′ 48,4″	12	
2	150	25	145	96 43 58,5	9 31 38,2	73 44 23,3	24	1
3	120	29	101	124 58 33,6	11 25 16,3	43 36 10,1	20	1
4	408	41	401	96 57 20,1	5 43 29,3	77 19 10,6	40	8
5	40	13	37	93 41 42,8	18 55 28,7	67 22 48,5	12	
6	44	15	37	107 56 42,9	18 55 28,7	53 7 48,4	12	
7	102	61	109	66 59 25,4	33 23 54,6	79 36 40,0	60	3
8	232	61	229	85 11 58,6	15 11 21,4	79 36 40,0	60	6
9	312	109	229	131 24 44,0	15 11 21,4	33 23 54,6	60	9
10	240	53	197	139 56 16,8	8 10 16,4	31 53 26,8	28	3
11	200	85	205	74 36 28,4	24 11 22,3	81 12 9,3	84	8
12	450	85	445	87 55 0,3	10 52 50,4	81 12 9,3	84	18
13	624	205	445	144 55 47,3	10 52 50,4	24 11 22,3	84	26
14	222	149	221	70 42 30,0	39 18 27,5	69 59 2,5	140	15
15	400	85	325	148 34 57,8	6 21 34,8	25 3 27,4	36	7
16	318	181	349	64 58 38,5	31 2 53,6	83 58 27,9	180	28
17	630	73	577	134 6 57,7	4 46 18,8	41 6 43,5	48	15
18	600	125	485	154 11 6,7	5 12 18,4	20 36 34,9	44	13
19	328	169	241	104 53 51,0	29 51 46,0	45 14 23,0	120	19
20	510	169	409	117 41 55,5	17 3 41,5	45 14 23,0	120	30
21	600	241	409	133 4 32,5	17 3 41,5	29 51 46,0	120	36
22	520	193	457	97 55 6,7	21 34 6,9	60 30 46,4	168	43
23	560	157	493	107 14 55,5	15 31 49,2	57 13 15,3	132	36
24	390	373	277	72 1 42,8	65 28 13,6	42 30 3,6	252	49
25	480	509	221	69 50 38,8	84 32 50,5	25 36 30,7	220	52
26	712	601	289	100 19 6,4	56 8 41,9	23 32 11,7	240	85
27	510	533	317	68 23 7,1	76 18 52,0	35 18 0,9	308	78
28	606	565	445	72 38 34,1	62 51 32,9	44 29 53,0	396	119
29	904	625	505	105 46 14,4	41 42 32,1	32 31 13,5	336	151
30	370	541	421	43 1 23,5	86 3 0,4	50 55 36,1	420	77
31	120	17	113	110 26 39,6	7 37 41,3	61 55 39,1	15	[illegible]
32	240	221	29	128 9 0,6	46 23 49,9	5 27 9,5	21	2
33	840	761	89	151 4 23,4	25 59 21,2	2 56 15,4	39	16
34	1040	1013	53	119 20 41,0	58 6 33,2	2 32 45,8	45	23
35	296	233	137	103 10 52,4	50 2 1,6	26 47 6,0	105	15
36	816	233	617	143 25 0,5	9 57 53,5	26 47 6,0	105	42
37	696	137	617	120 10 4,9	9 57 53,5	50 2 1,6	105	36
38	584	557	173	90 15 39,7	72 30 27,6	17 13 52,7	165	48
39	776	773	197	83 33 34,9	81 49 43,6	14 36 41,5	195	75
40	680	569	281	100 45 20,9	55 17 31,0	23 57 8,1	231	78
41	872	785	305	96 7 48,0	63 31 8,3	20 21 3,7	273	119
42	1160	821	629	105 29 41,2	43 0 10,3	31 30 8,5	429	248
43	861	500	689	91 22 50,0	35 29 21,6	53 7 48,4	400	172
44	1869	1700	881	86 41 20,5	65 14 18,6	28 4 20,9	800	747
45	549	1300	1201	24 57 29,3	87 39 42,2	67 22 48,5	1200	329
46	3549	3700	1201	73 24 49,1	87 39 42,2	18 55 28,7	1200	2129
47	93	34	65	137 40 39,0	14 15 0,1	28 4 20,9	16	7
48	69	50	73	65 8 53,2	41 6 43,5	73 44 23,3	48	16

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

266. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 261. — Seite 129—144. Mit 5 Figuren.







Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 261. — Seite 129—144. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Ueber das Lösen trigonometrischer Aufgaben im allgemeinen. — Trigonometrische Uebungsaufgaben. — Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck im allgemeinen. — Aufgaben, in welchen das Verhältnis zweier Seiten gegeben ist; in welchen die zur Hypotenuse gehörige Höhe und die Segmente der Hypotenuse vorkommen.

Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie**, des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues**, des **konstruktiven** Zeichnens etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren**, Erklärungen nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann **verständlich** sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und **alsdann auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser**, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Ordnungs-Nro.	Masszahlen der Seiten: a	b	c	Winkel α	Winkel β	Winkel γ	Masszahlen der zu den Seiten a gehörigen Höhen	Masszahlen der Inhalte
49	51	58	41	59° 4′ 39,3″	77° 19′ 10,6″	43° 36′ 10,1″	40	1020
50	123	106	65	88 37 10,0	59 29 23,2	31 53 26,8	56	3444
51	52	15	41	130 26 59,0	12 40 49,4	36 52 11,6	9	234
52	44	39	17	95 27 9,4	61 55 39,1	22 37 11,5	15	330
53	92	75	29	117 20 33,4	46 23 49,9	16 15 36,7	21	966
54	236	183	65	139 6 3,2	30 30 36,8	10 23 20,0	33	3894
55	52	51	53	59 57 47,7	58 6 33,2	61 55 39,1	45	1170
56	332	255	89	145 12 48,1	25 59 21,2	8 47 50,7	39	6474
57	76	87	65	57 51 10,2	75 44 59,9	46 23 49,9	63	2394
58	188	195	101	70 54 39,5	78 34 43,7	30 30 36,8	99	9306
59	572	149	435	153 15 4,0	6 43 58,5	20 0 57,5	51	14586
60	284	125	267	84 37 13,7	25 59 21,2	69 23 25,1	117	16614
61	1924	137	1839	126 41 35,0	3 16 23,4	50 2 1,6	105	101010
62	716	185	543	156 1 45,0	6 1 32,1	17 56 42,9	57	20406
63	196	173	219	58 36 15,9	48 53 16,5	72 30 27,6	165	16170
64	244	233	111	82 8 22,7	71 4 31,3	26 47 6,0	105	12810
65	1052	269	795	160 9 29,1	4 58 44,7	14 51 46,2	69	36294
66	244	197	291	56 5 46,3	42 4 30,1	81 49 43,6	195	23790
67	668	221	555	111 21 44,6	17 56 42,9	50 41 32,5	171	57114
68	1244	317	939	161 43 59,6	4 34 52,4	13 41 8,0	75	46650
69	484	365	123	163 4 38,7	12 40 49,4	4 14 31,9	27	6534
70	428	257	471	64 22 24,9	32 46 44,7	82 50 50,4	255	54570
71	268	281	255	59 45 56,4	64 56 32,6	55 17 31,0	231	30954
72	1004	305	807	122 23 45,3	14 51 46,2	42 44 28,5	207	103914
73	436	377	159	100 54 38,2	58 6 33,2	20 58 58,6	135	29430
74	1676	425	1263	164 14 16,2	3 56 59,6	11 48 44,2	87	72906
75	572	293	579	73 55 57,2	29 29 13,6	76 34 49,2	285	81510
76	316	305	327	59 52 46,3	56 36 5,4	63 31 8,3	273	43134
77	1196	353	951	126 43 0,1	13 41 8,0	39 35 51,9	225	134550
78	388	389	195	75 10 52,0	75 44 59,9	29 4 8,1	189	36666
79	1916	485	1443	165 14 58,9	3 41 42,8	11 3 18,3	93	89094
80	436	365	507	57 15 27,9	44 45 37,0	77 58 55,1	357	77826
81	908	377	681	89 14 51,9	24 31 46,4	66 13 21,7	345	156630
82	364	425	303	57 5 18,6	78 34 43,7	44 19 57,7	297	54054
83	1628	461	1275	133 42 17,3	11 48 44,2	34 28 58,5	261	212454
84	676	557	219	113 52 50,8	48 53 16,5	17 13 52,7	165	55770
85	644	617	111	99 7 35,2	71 4 31,3	9 57 53,5	105	33810
86	508	401	615	55 16 30,3	40 26 59,0	84 16 30,7	399	101346
87	412	449	375	59 11 23,2	69 23 25,1	51 25 11,7	351	72306
88	1868	521	1455	136 33 59,4	11 3 18,3	32 22 42,3	279	260586
89	628	569	255	91 6 19,3	64 56 32,6	23 57 8,1	231	72534
90	2732	689	2055	167 37 57,9	3 5 46,7	9 16 15,4	111	151626
91	764	485	867	61 21 0,3	33 51 18,1	84 47 41,6	483	184506
92	532	509	555	59 48 50,3	55 47 40,4	64 23 29,3	459	122094
93	1532	533	1299	105 44 7,6	19 33 53,3	54 45 59,1	435	333210
94	964	773	291	123 18 48,4	42 4 30,1	14 36 41,5	195	93990
95	3356	845	2523	168 50 8,9	2 47 39,7	8 22 11,4	123	206394
96	956	533	1011	68 39 17,9	31 17 4,2	80 3 37,9	525	250950
97	604	545	663	59 2 21,3	50 41 32,5	70 16 6,2	513	154926
98	1772	593	1479	110 1 59,9	18 19 28,9	51 38 31,2	465	411990
99	532	629	435	56 31 27,9	80 28 21,8	43 0 10,3	429	114114
100	2684	725	2067	143 23 11,2	9 16 15,4	27 20 33,4	333	446886

Trigonometrische Aufgaben.

6). Ueber das Lösen trigonometrischer Aufgaben im allgemeinen.

Frage 26. Was versteht man unter einer trigonometrischen Aufgabe im allgemeinen und was im engeren Sinn?

Erkl. 196. Unter geometrischen Grössen versteht man im allgemeinen Strecken, Flächen, Körper, Winkel etc.

Erkl. 197. Ist von einem Dreieck eine Seite a und die zugehörige Höhe h gegeben und man soll dessen Inhalt J berechnen, so kann man dies nach der planimetrischen Formel:

$$J = \frac{a \cdot h}{2}$$

Sind ferner von einem rechtwinkligen Dreieck die beiden Katheten a und b gegeben und man soll die Hypotenuse c berechnen, so kann man dies nach der Formel:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

Aufgaben dieser Art, bei welchen also keine trig. Funktionen vorkommen und zu deren Lösung auch solche nicht erfordert werden, sind nach nebenstehender Antwort trigonometrische Aufgaben im allgemeinen Sinn. Fast sämtliche Rechenaufgaben aus der Planimetrie gehören somit zu den trigonometrischen Aufgaben.

Antwort. Im allgemeinen Sinn versteht man unter einer trigonometrischen Aufgabe eine jede solche Aufgabe, nach welcher geometrische Grössen (oder auch deren Verhältnisse) durch Rechnung bestimmt werden sollen, und welche sich auf ein Dreieck bezieht oder bei deren Auflösung das Dreieck oder Sätze über das Dreieck in Betracht gezogen werden müssen (siehe Erkl. 196 und 197).

Im engeren Sinn versteht man unter einer trigonometrischen Aufgabe eine jede solche Aufgabe, nach welcher geometrische Grössen (oder auch deren Verhältnisse) durch Rechnung bestimmt werden sollen, und in welcher trigonometrische Funktionen, Formeln und Sätze vorkommen oder zu deren Auflösung trig. Funktionen, Formeln und Sätze benutzt werden müssen oder sollen.

Frage 27. Was kann man im allgemeinen in bezug auf das Lösen trigonometrischer Aufgaben aussagen, und nach welchen zwei Methoden kann man die Auflösung trig. Aufgaben vornehmen.

Erkl. 198. Die Auflösung einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe (s. Erkl. 199 und 200) kann im allgemeinen auf zweierlei Art erfolgen, entweder:

rein geometrisch — synthetisch — indem man mit Hülfe bekannter planimetrischer Sätze den geometrischen Zusammenhang der zur Konstruktion erforderlichen Linien (Strecken) und Winkel sucht und hiernach die Konstruktion ausführt (s. die Erkl. 199 und 200 und Kleyers Lehrbuch: Planimetrische Konstruktionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis),

oder: algebraisch — analytisch — indem man die Konstruktion von der Bestimmung einer passend gewählten Strecke abhängig macht,

Antwort. Einer jeden trigonometrischen Aufgabe liegen Begriffe aus der ebenen Geometrie, der Planimetrie zu Grund, folglich muss sich auch die Auflösung einer jeden trig. Aufgabe ihrem Wesen nach auf planimetrische Sätze stützen.

In analoger Weise, wie man nun in der Planimetrie bei der Auflösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben im allgemeinen nach zwei Methoden verfahren kann, nämlich entweder nach der synthetischen oder nach der analytischen Methode (s. Erkl. 198), so kann man auch bei der Auflösung trigonometrischer Aufgaben im allgemeinen nach

mittels planimetrischer Sätze eine Gleichung (oder mehrere Gleichungen) zwischen derselben und den gegebenen Strecken aufstellt, dann diese Gleichung auf algebraische Weise in bezug auf jene Strecke auflöst, hierauf den für dieselbe gefundenen Ausdruck mit Hülfe planimetrischer Sätze konstruiert, und schliesslich mittels der hiernach konstruierten Strecke die geforderte Konstruktion selbst ausführt. (Siehe die Erkl. 199 und 200 und Kleyers Lehrbuch: Planimetrische Konstruktionsaufgaben gelöst durch algebraische Analysis.)

einer synthetischen oder nach einer analytischen Methode verfahren. (Siehe die Antworten der Fragen 28 und 29).

Frage 28. Worin besteht die synthetische Auflösung einer trigonometrischen Aufgabe?

Antwort. Die synthetische Auflösung einer trig. Aufgabe besteht im allgemeinen darin, dass man eine analoge andre Aufgabe bildet, in welcher nicht die Berechnung sondern die Konstruktion der fraglichen geometrischen Grössen verlangt wird, dann letztere Aufgabe mit Hülfe einer geometrischen Analysis (s. die Erkl. 199 und 200) löst und hierauf aus den durch die Konstruktion sich ergebenden Figuren, Nebenfiguren und sonstigen Beziehungen die gesuchten Stücke zu berechnen sucht.

Die synthetische Auflösung einer trigonometrischen Aufgabe besteht somit ihrem Wesen nach aus zwei Auflösungen, aus einer konstruktiven oder planimetrischen und aus einer rechnenden oder trigonometrischen Auflösung. Es ist jedoch nicht erforderlich, dass die der synthetischen Auflösung einer trig. Aufgabe vorauszugehende konstruktive Auflösung in ihrem ganzen Umfang ausgeführt wird, es genügt meistens, wenn man nur die der konstruktiven Auflösung zu Grund liegende geometrische Analysis (s. Erkl. 199 und 200) ausführt, indem sich daraus schon die zur Berechnung notwendigen Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Grössen ergeben.

Erkl. 199. Die Auflösung einer jeden planimetrischen Konstruktionsaufgabe besteht aus 4 Teilen, nämlich:

1) aus der Analysis (s. Erkl. 200),
2) aus der Konstruktion, welche sich aus der Analysis ergibt,
3) aus dem Beweis, womit die Richtigkeit der Konstruktion dargethan wird

und

4) aus der sog. Determination, welche den Zweck hat, zu untersuchen, in welchen Fällen die Auflösung der betreffenden Aufgabe unmöglich, bezw. unter welchen Bedingungen sie möglich ist, und ob die Aufgabe zwei- oder mehrdeutig ist, d. h. ob die Auflösung der Aufgabe mehrere Resultate ergibt, die der Aufgabe genügen.

Erkl. 200. Die der Konstruktion einer Konstruktionsaufgabe vorauszugehende Analysis (s. Erkl. 199) hat den Zweck, die in einer Konstruktionsaufgabe verlangte Konstruktion zu finden, dieselbe kann ihrem Wesen nach von zweierlei Art sein; sie kann nämlich eine geometrische oder eine algebraische Analysis sein.

Die geometrische Analysis dient zur synthetischen Auflösung einer Konstruktionsaufgabe, sie besteht darin, dass man sich die Aufgabe gelöst denkt und dann mittels etwa erforderlicher Hülfslinien, Hülfsfiguren und planimetrischer Sätze (besonders durch Anwendung der geometrischen Oerter, siehe Erkl. 201) den geometrischen Zusammenhang zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken sucht. (Siehe Kleyers Lehrbuch: Planimetrische Konstruktionsaufgaben gelöst durch geometrische Analysis.)

Die algebraische Analysis hingegen dient zur analytischen Auflösung einer Konstruktionsaufgabe, sie besteht ihrem Wesen nach darin, dass man die verlangte Konstruktion von dem Aufsuchen einer (oder mehrerer) passend gewählten Strecke abhängig macht, dann mittels planimetrischer Sätze Gleichungen zwischen dieser Strecke und den gegebenen

Strecken aufstellt, erstere in letztere auf algebraische Weise ausdrückt, und den somit gefundenen algebraischen Ausdruck, bezw. jene gewählte Strecke mit Hülfe planimetrischer Sätze konstruiert. (Siehe Kleyers Lehrbuch: Planimetrische Konstruktionsaufgaben, gelöst durch algebraische Analysis.)

Es gibt auch noch eine trigonometrische Analysis, die der vorher erwähnten algebraischen im allgemeinen analog ist, nur kommen hierbei trig. Funktionen und Sätze zur Anwendung. (Siehe den Abschnitt dieses Lehrbuchs, welcher über die Konstruktion trigonometrischer Ausdrücke handelt.)

Erkl. 201. Unter einem geometrischen Ort versteht man in der Planimetrie eine gerade Linie oder eine Kreislinie, welche die Eigenschaft hat, dass sämtlich in ihr liegende Punkte einer und derselben Bedingung entsprechen. So ist z. B. der über eine Strecke konstruierte Halbkreis der geometrische Ort für die Spitzen aller rechtwinkligen Dreiecke, deren Hypotenuse jene Strecke ist. (Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Frage 29. Worin besteht die analytische Auflösung einer trigonometrischen Aufgabe.

Antwort. Die analytische Auflösung einer trig. Aufgabe besteht im allgemeinen darin, dass man mittels bekannter Formeln und Sätze und der in der Aufgabe direkt enthaltenen Beziehungen, Gleichungen zwischen einer oder mehreren der gesuchten Grössen und der gegebenen Grössen aufstellt (wobei es bei schwierigeren Aufgaben oft von Vorteil ist eine neue vermittelnde Grösse einzuführen, durch welche die gegebenen und die gesuchten Grössen in Beziehung gebracht werden), und diese Gleichungen nach algebraischen Regeln in bezug auf jene Unbekannten auflöst, wobei man mittels Anwendung goniometrischer Formeln oft bedeutende Reduktionen vornehmen kann, und zu berücksichtigen hat, dass die Zahl der anzusetzenden Gleichungen mit der Zahl der in diesen Gleichungen vorkommenden Unbekannten übereinstimmen muss (s. Erkl. 201a).

Bei der analytischen Auflösung einer trig. Aufgabe ist es oft sehr vorteilhaft, nicht zuerst die etwa geforderten Strecken zu berechnen, denn hierbei gelangt man meistens zu komplizierten und logarithmisch-unbequemen Ausdrücken, sondern zuerst die ge-

Erkl. 201a. Lassen sich bei der analytischen Auflösung einer trig. Aufgabe nicht so viele Gleichungen aufstellen, als die Anzahl der vorkommenden Unbekannten ist, so ist die Auflösung nach den Regeln der unbestimmten Gleichungen vorzunehmen. Einige solcher Aufgaben sind in nachfolgenden Abschnitten enthalten.

forderten Winkel (oder auch in die Berechnung einzuführenden Hülfswinkel) zu berechnen, und dann diese Winkel zur Berechnung der gesuchten Strecken zu benutzen (s. Erkl. 201[b]).

Erkl. 201b. Bei einigen der in nachfolgenden Abschnitten gelösten Aufgaben sind die geforderten Winkel und die geforderten Strecken unabhängig von einander berechnet. Aus diesen Lösungen wird man bald erkennen, dass die Berechnung der geforderten Winkel im allgemeinen eine einfachere und sicherere ist, als die der Strecken und dass man im allgemeinen rascher zum Ziel kommt, wenn man die Strecken mittels der vorher berechneten Winkel berechnet.

Bei der analytischen Auflösung muss man die sich ergebenden Gleichungen öfters einer sogenannten Diskussion unterziehen. Diese Diskussion oder Erörterung einer Gleichung besteht darin, dass man an der Hand planimetrischer, trigonometrischer und goniometrischer Sätze untersucht, unter welchen Bedingungen die Aufgabe möglich oder unmöglich ist und ob die Aufgabe mehrdeutig ist. Die Diskussion einer trig. Gleichung ist im allgemeinen dasselbe wie die Determination bei der Konstruktion einer planimetrischen Konstruktionsaufgabe (s. Erkl. 199).

Frage 30. Wann soll man eine trigonometrische Aufgabe synthetisch, wann analytisch auflösen?

Antwort. Die Frage: „wann soll man eine trig. Aufgabe synthetisch, wann analytisch auflösen,“ kann im allgemeinen nicht beantwortet werden und zwar aus folgenden Gründen:

1) eine scharfe Trennung zwischen der synthetischen und der analytischen Auflösung einer trig. Aufgabe ist in vielen Fällen nicht durchführbar, da auch zur analytischen Auflösung oft rein planimetrische Betrachtungen angestellt werden müssen, wenn auch nicht in dem Umfang wie bei der synthetischen Auflösung.
2) Die Möglichkeit der synthetischen Auflösung einer trig. Aufgabe hängt von der betreffenden Aufgabe selbst ab, indem einesteils manche trigonom. Aufgabe als Konstruktionsaufgabe gedacht, wie es die synthetische Auflösung erfordert (siehe Antwort der Frage 28), nur sehr schwer oder überhaupt gar nicht zu lösen ist, und indem manche trig. Aufgabe als Konstruktionsaufgabe gedacht, mittels der sog. geometrischen Oerter (s. Erkl. 201) gelöst wird und in diesem Fall aus der erhaltenen Figur oft noch keine

Beziehungen zwischen den gesuchten und gegebenen Grössen entnommen werden können, die sich zur Berechnung eignen. Ferner hängt aber auch die Möglichkeit der synthetischen Auflösung von der speciellen Uebung ab, die der Einzelne in der Lösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben erlangt hat, denn eine absolute Vollkommenheit in der Auflösung planimetrischer Konstruktionsaufgaben kann nicht erreicht, also auch von dem Einzelnen nicht gefordert werden. (Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

3) Die Möglichkeit der analytischen Auflösung einer trig. Aufgabe hängt ebenfalls wieder von der betreffenden Aufgabe selbst ab, indem eine der Anzahl der Unbekannten entsprechende Anzahl von einander unabhängiger Bestimmungsgleichungen aufgestellt und so aufgelöst werden müssen, dass komplizierte, höhere und verwickelte goniometrische Gleichungen möglichst vermieden werden, und es auch hierbei besonders auf die speciellen algebraischen Fertigkeiten und oft auch auf die Kenntnis der so zahlreichen goniometrischen Formeln ankommt.

Eine Beantwortung obiger Frage wird hiernach im allgemeinen zu Gunsten der analytischen Auflösung ausfallen müssen, indem das Ansetzen und Auflösen von Gleichungen, die Anwendung goniometrischer Formeln zum Zweck etwaiger Reduktionen, das Auflösen sich ergebender goniometrischer Gleichungen etc. mehr mechanischer Natur sind, und die Auflösung im allgemeinen nach bestimmten Regeln erfolgen kann, mithin auch sicher zum Ziel führt, während die den synthetischen Auflösungen zu Grund liegenden, konstruktiven Auflösungen keinen besondern Regeln unterworfen werden können und oft ausserordentlich viel Scharfsinn und Gewandtheit erfordern (s. Erkl. 201[c]). Die synthetische Auflösung hingegen hat den Vorteil, dass man, bevor man zum 2..

Erkl. 201 c. Eine Vergleichung der in nachstehenden Abschnitten enthaltenen synthetischen und analytischen Auflösungen, welche einer und derselben Aufgabe zugehören, wird der Studierende von dem in nebenstehender Antwort gesagten genauere Kenntnis erhalten.

zum rechnenden Teil derselben übergeht, durch die vorausgegangene Konstruktion bereits Gewissheit erhalten hat, ob die Aufgabe überhaupt möglich ist und ob sie Zwei- und Mehrdeutigkeiten zulässt, während man dies bei der analytischen Auflösung durch die in voriger Antwort erwähnte Diskussion der sich ergebenden Gleichungen erst untersuchen kann.

In vielen Fällen ist es vorteilhaft, beide Methoden gleichzeitig anzuwenden. (Siehe die in nachfolgenden Abschnitten gelösten Aufgaben.)

Anmerkung 12. Von den unendlich vielen trig. Aufgaben sind in nachstehendem eine grosse Anzahl der wichtigsten dieser Aufgaben zusammengestellt, teilweise vollständig gelöst, teilweise mit Andeutungen versehen, welche zur Lösung führen. — Diese Aufgaben sind in Rücksicht der besonderen, durch sie zu erreichenden Zwecke in zwei Hauptgruppen, nämlich in trigonometrische Uebungsaufgaben und in praktische trigonometrische Aufgaben zusammengefasst.

Die in der ersten dieser Gruppe enthaltenen trig. Uebungsaufgaben gehören ausschliesslich in das Gebiet der reinen Mathematik und zwar speciell in das Gebiet der Planimetrie, dieselben dienen besonders zur Uebung in dem Lösen trig. Aufgaben beim Selbststudium und dem Schulunterricht, auch dienen sie teilweise zur Aufstellung von Berechnungsformeln, die in dem praktischen Berufsleben häufige Verwertung finden (siehe Anmerkung 13). Die Anordnung dieser Aufgaben ist im allgemeinen so erfolgt, dass hierdurch die bestmögliche Uebersicht erreicht wird, um das etwaige Aufsuchen irgend welcher Aufgabe zu erleichtern.

Die in der zweiten jener Gruppen enthaltenen praktischen trig. Aufgaben gehören in die verschiedensten Gebiete der Naturwissenschaften, technischen und Berufswissenschaften; dieselben dienen dazu, zu zeigen, in welcher Weise die trig. Funktionen, Formeln und Sätze praktische Verwendung finden.

Was die Art der Auflösung der nachstehenden gelösten Aufgaben anbetrifft, so ist je nach den besonderen Umständen bald die synthetische, bald die analytische Methode, bald sind auch beide Methoden zugleich angewandt; einzelne Aufgaben, bei welchen der Unterschied zwischen der synthetischen und der analytischen Auflösungsmethode gut gezeigt werden kann, sind sowohl nach der analytischen als auch nach der synthetischen Methode aufgelöst.

Anmerkung 13. Diejenigen der in nachstehenden Abschnitten entwickelten allgemeinen Lösungsresultate, welche für den späteren praktischen Gebrauch von besonderer Bedeutung sind, sind in dem diesem Lehrbuch beigefügten Formelnverzeichnis aufgenommen, um bei etwaiger Benutzung derselben auf deren Herleitung verweisen zu können.

Trigonometrische Uebungsaufgaben.

7). Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck im allgemeinen.

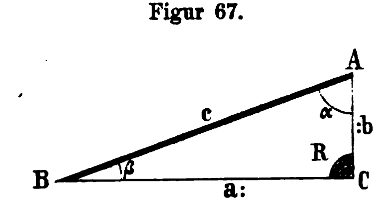
a) Aufgaben, in welchen das Verhältnis zweier Dreieckseiten gegeben ist.

Aufgabe 176. In einem rechtwinkligen Dreieck ist das Verhältnis der Kathete a zur Kathete $b = 3:1$, die Hypotenuse c desselben misst 100,5 m; wie gross sind die Winkel, die Seiten und der Inhalt dieses Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 3:1 \\ c = 100{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach der Definition der trig. Funktion „Tangens“ besteht in Rücksicht der

Figur 67.



Erkl. 202. Ist in einer Aufgabe das Verhältnis zweier Strecken, oder auch zweier Winkel gegeben, so ist dies in der auf jene Aufgabe Bezug habenden Figur dadurch angedeutet, dass dem Buchstaben, durch welchen die erste jener Strecken bezeichnet wird, ein Doppelpunkt nachgesetzt, hingegen dem Buchstaben, durch welchen die zweite jener Strecken bezeichnet wird, ein Doppelpunkt vorgesetzt ist.

In der Figur 67 z. B. deuten hiernach die Bezeichnungen a : und : b an, dass das Verhältnis $a : b$ der Strecken a und b gegeben ist.

in der Fig. 67 angedeuteten Bezeichnung der einzelnen Stücke eines rechtwinkligen Dreiecks (s. Erkl. 202) zur Berechnung des der Kathete a gegenüberliegenden gesuchten Winkels α die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

oder gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{1}$$

nach welcher man den Winkel α berechnen kann. In analoger Weise kann man den Winkel β unabhängig von dem Winkel α berechnen. Zur Kontrolle muss $\alpha + \beta = 90$ sein. Sind auf diese Weise die Winkel α und β berechnet, so kann man mit Hülfe derselben und mittels der gegebenen Hypotenuse c die Katheten a und b sowie den Inhalt F berechnen, wie in der gelösten Aufgabe 5 gezeigt wurde.

Aufgabe 177. Das Verhältnis der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks zu der Kathete a desselben sei $= 10 : 3$, die andre Kathete b messe 0,0934 km; wie gross sind die Winkel, die nicht gegebenen Seiten dieses Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} c : a = 10 : 3 \\ b = 0{,}0934 \text{ km} \end{cases}$

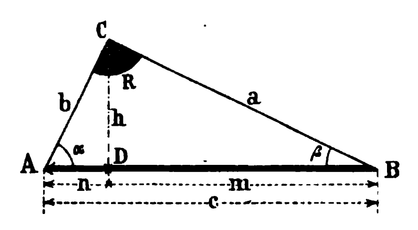
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 176.

---

b) Aufgaben, in welchen die zur Hypotenuse gehörige Höhe und die Segmente der Hypotenuse vorkommen.

Aufgabe 178. Die zwei Abschnitte, in welche die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks von der zugehörigen Höhe geteilt wird, seien $m = 12$ dm und $n = 3$ dm. Wie gross sind die Seiten, die Winkel und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

Figur 68.



Erkl. 203. Der Fusspunkt der zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörigen Höhe teilt die Hypotenuse in zwei Teile, welche man Abschnitte oder Segmente nennt. — Diese Abschnitte sind zugleich auch die Projektionen der beiden Katheten auf die Hypotenuse.

In nachfolgenden Aufgaben sind unter den Abschnitten oder den Segmenten stets jene

Gegeben: $\begin{cases} m = 12 \text{ dm} \\ n = 13 \text{ dm} \end{cases}$

Auflösung (analytisch). Ist, siehe Fig. 68, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, in welchem also die Höhe h die Hypotenuse c in die gegebenen Abschnitte m und n teilt (s. Erkl. 203), so ergibt sich aus dieser Figur zur Berechnung der gesuchten Hypotenuse c die Relation:

$$\text{A)} \ldots c = m + n$$

wonach man in Rücksicht der für m und n gegebenen Zahlenwerte für c:

$$c = 12 + 3$$

oder

$$1) \ldots c = 15 \text{ dm}$$

erhält.

Zur Berechnung der gesuchten Katheten b und a ergeben sich nach dem in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Satz die Relationen:

$$b^2 = (m + n) \cdot n$$

und

$$a^2 = (m + n) \cdot m$$

zwei Teile der Hypotenuse zu verstehen, sobald nichts anderes angegeben ist und zwar ist der der Kathete a anliegende Abschnitt, s. Figur 68, stets mit m, der der Kathete b anliegende Abschnitt stets mit n bezeichnet.

Erkl. 204. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über einer Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist gleich dem Rechteck gebildet aus der Hypotenuse und der Projektion jener Kathete auf die Hypotenuse.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Lehrsatz ergeben sich aus der Figur 68 die Relationen:

a) . . . $b^2 = c \cdot n$ oder $= (m + n) \cdot n$

und

b) . . . $a^2 = c \cdot m$ oder $= (m + n) \cdot m$

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$b = \sqrt{3\,(12 + 3)}$$

erhält man b wie folgt:

$$b = \sqrt{3 \cdot 15}$$

$$b = \sqrt{45}$$

$$\log b = \frac{1}{2} \cdot \log 45$$

Nun ist:

$$\log 45 = 1{,}6532125$$

$$\cdot \frac{1}{2}$$

$$\log b = 0{,}8266062$$

6060

mithin:

$$b = 6{,}7082$$

Hülfsrechnung 2.

Aus

$$a = \sqrt{12\,(12 + 3)}$$

erhält man a wie folgt:

$$a = \sqrt{12 \cdot 15}$$

$$\log a = \frac{1}{2}(\log 12 + \log 15)$$

Nun ist:

$$\log 12 = 1{,}0791812$$

$$+ \log 15 = + 1.1760913$$

$$2{,}2552725$$

$$\cdot \frac{1}{2}$$

$$\log a = 1{,}1276362$$

6230

132

129,6

mithin:

$$a = 13{,}4164$$

Aus diesen Relationen erhält man:

$$b = \pm \sqrt{n\,(m + n)}$$

und

$$a = \pm \sqrt{m\,(m + n)}$$

oder in anbetracht, dass negative Werte für die Katheten a und b keinen Sinn hier zulassen:

B) . . . $b = \sqrt{n\,(m + n)}$

und

C) . . . $a = \sqrt{m\,(m + n)}$

nach welchen allgemeinen Lösungen man in Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte:

$$b = \sqrt{3\,(12 + 3)}$$

und

$$a = \sqrt{12\,(12 + 3)}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 1 und 2:

2) . . . $b = 6{,}7082$ dm

und

3) . . . $a = 13{,}4164$ dm

erhält.

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der bis hierher ausgeführten Rechnung muss die Bedingung erfüllt sein, dass

$$c^2 = a^2 + b^2$$

ist.

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts und der gesuchten Winkel könnte man nunmehr in weiterem jene für a, b und c berechneten Werte benutzen; man kann aber auch wie folgt verfahren:

Nach der in der Erkl. 34 angeführten Formel hat man für den Inhalt F, wenn man eine der Katheten als Grundlinie annimmt, die Relation:

$$F = \frac{a \cdot b}{2}$$

setzt man hierin für a und b die nach vorstehenden Gleichungen B) und C) gefundenen allgemeinen Werte, so erhält man:

$$F = \frac{\sqrt{m\,(m + n)} \cdot \sqrt{n\,(m + n)}}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$F = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{m\,(m + n) \cdot n\,(m + n)}$$

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{(m + n)^2 \cdot mn}$$

oder

D) . . . . $F = \frac{m + n}{2} \sqrt{m \cdot n}$

In Rücksicht der für m und n gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$F = \frac{12 + 3}{2} \sqrt{12 \cdot 3}$$

Hülfsrechnung 3.

Aus
$$F = \frac{12+3}{2}\sqrt{12\cdot 3}$$
erhält man F wie folgt:
$$F = \frac{15}{2}\sqrt{36}$$
$$F = \frac{15}{2}\cdot 6$$
$$F = 15\cdot 3$$
oder
$$F = 45$$

Hülfsrechnung 4.

Aus
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3\,(12+3)}}$$
erhält man α wie folgt:
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3\cdot 15}}$$
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{45}}$$
$$\log\cos\alpha = \log 3 - \frac{1}{2}\cdot\log 45$$

Nun ist:
$$\begin{array}{rcl} & & (+10)\qquad(-10) \\ \log 3 &=& 0{,}4771213 \\ -\frac{1}{2}\cdot\log 45 &=& -\ 0{,}8266062 \text{ (s. Hülfsr. 1)} \\ \hline \log\cos\alpha &=& 9{,}6505151 - 10 \\ && 4974 \\ \hline && 177 \\ && 168{,}4 \\ \hline && 8{,}6 \\ && 8{,}4 \end{array}$$

mithin:
$$\alpha = 63^0\,26'\,10''$$
$$\left.\begin{array}{r} -4'' \\ -0{,}2'' \end{array}\right\} = -\ 4{,}2''$$
oder
$$\alpha = 63^0\,26'\,5{,}8''$$

Hülfsrechnung 5.

Aus
$$\cos\beta = \frac{12}{\sqrt{12\,(12+3)}}$$
erhält man β wie folgt:
$$\cos\beta = \frac{12}{\sqrt{12\cdot 15}}$$
$$\log\cos\beta = \log 12 - \frac{1}{2}\cdot(\log 12 + \log 15)$$

Nun ist:
$$\begin{array}{rcl} & & (+10)\qquad(-10) \\ \log 12 &=& 1{,}0791812 \\ -\frac{1}{2}(\log 12 + \log 15) &=& -\ 1{,}1276362\,* \\ \hline \log\cos\beta &=& 9{,}9515450 - 10 \\ && 5389 \\ \hline && 61 \\ && 52{,}5 \\ \hline && 8{,}5 \\ && 8{,}4 \\ \hline && 0{,}1 \end{array}$$

* s. Hülfsrechnung 2.

mithin:
$$\beta = 26^0\,34'\,0''$$
$$\left.\begin{array}{r} -5'' \\ -0{,}8'' \end{array}\right\} = -\ 5{,}8''$$
oder
$$\beta = 26^0\,33'\,54{,}2''$$

oder nach der Hülfsrechnung 3:
$$4)\ \ldots\ F = 45 \text{ qm}$$

Zur Berechnung des gesuchten Winkels α ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CDA die Relation:
$$\cos\alpha = \frac{n}{b}$$
oder in Rücksicht der Gleichung B):
$$\text{E)}\ \ldots\ \cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{n\,(m+n)}}$$
nach welcher Gleichung man in Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte:
$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3\,(12+3)}}$$
erhält, woraus sich nach der Hülfsrechnung 4:
$$5)\ \ldots\ \alpha = 63^0\,26'\,5{,}8''$$
ergibt.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels β ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CDB die Relation:
$$\cos\beta = \frac{m}{a}$$
oder in Rücksicht der Gleichung C):
$$\text{F)}\ \ldots\ \cos\beta = \frac{m}{\sqrt{m\,(m+n)}}$$
nach welcher Gleichung man in Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte:
$$\cos\beta = \frac{12}{\sqrt{12\,(12+3)}}$$
erhält, woraus sich nach Hülfsrechnung 5:
$$6)\ \ldots\ \beta = 26^0\,33'\,54{,}2''$$
ergibt.

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der berechneten Winkel α und β muss die Bedingung erfüllt sein, dass
$$\alpha + \beta = 90^0$$
ist.

Aufgabe 179. Man berechne die Seiten, die Winkel und den Flächeninhalt des rechtwinkligen Dreiecks, welches die Eigenschaft hat, dass die zur Hypotenuse gehörige Höhe die Hypotenuse in die Segmente $m = 3{,}874$ dm und $n = 9{,}008$ dm teilt.

Gegeben: $\begin{cases} m = 3{,}874 \text{ dm} \\ n = 9{,}008 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der gelösten Aufgabe 178.

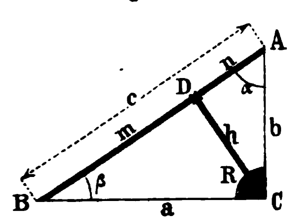
Aufgabe 180. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei $c = 8\frac{1}{4}$ dm, der eine der Abschnitte, in welche dieselbe durch die zugehörige Höhe geteilt wird, sei $m = 1\frac{7}{9}$ dm; wie gross sind die Katheten, die Winkel und der Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} c = 8\frac{1}{4} \text{ dm} \\ m = 1\frac{7}{9} \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist in Rücksicht, dass der nicht gegebene Abschnitt gleich der Hypotenuse vermindert um den gegebenen Abschnitt ist, analog der gelösten Aufgabe 178.

Aufgabe 181. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Hypotenuse c und die zugehörige Höhe h, erstere sei $= 0{,}8$ m, letztere $= 0{,}3$ m; wie gross sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt dieses Dreiecks?

Figur 69.



Erkl. 205. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat über der zur Hypotenuse gehörigen Höhe gleich dem Rechteck, gebildet aus den beiden Abschnitten, in welche die Hypotenuse durch die Höhe geteilt wird."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ergibt sich aus der Figur 69 die Relation:

$$1) \; . \; . \; . \; h^2 = m \cdot n$$

Gegeben: $\begin{cases} c = 0{,}8 \text{ m} \\ h = 0{,}3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Zunächst berechne man die Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch die Höhe geteilt wird; dies kann man wie folgt: Will man z. B. den Abschnitt m, siehe Fig. 69, berechnen, so beachte man, dass der andre Abschnitt $n = c - m$ ist, und dass man somit nach dem in der Erkl. 205 angeführten planimetrischen Satz die Relation hat:

$$h^2 = m \cdot (c - n)$$

aus welcher Gleichung m berechnet werden kann. Hat man auf diese Weise die Abschnitte m und n berechnet, so kann man mittels derselben und der gegebenen Höhe h die Winkel und die Katheten berechnen.

Aufgabe 182. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks sei $c = 110{,}05$ m, ferner sei ein spitzer Winkel $\alpha = 42^0\,5'\,0{,}8''$. Man soll aus diesen Angaben die zur Hypotenuse gehörige Höhe und die beiden Abschnitte berechnen, in welche diese Höhe die Hypotenuse zerlegt.

Gegeben: $\begin{cases} c = 110{,}05 \text{ m} \\ \alpha = 42^0\,5'\,0{,}8'' \end{cases}$

Andeutung. Zuerst drücke man in Rücksicht, dass das rechtwinklige Dreieck durch die zur Hypotenuse gehörige Höhe in zwei weitere rechtwinklige Dreiecke gelegt wird, die dem gegebenen Winkel anliegende Kathete in die gegebenen Stücke aus; dann bestimme man mittels des somit für jene Kathete gefundenen Wertes und dem gegebenen Winkel die gesuchte Höhe und den anliegenden Abschnitt der Hypotenuse, wobei man zur Reduktion die in der Erkl. 52 angeführte goniometrische Formel benutzen kann.

Aufgabe 183. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die zur Hypotenuse gehörige Höhe $h = 23\frac{8}{47}$ dm und einer der Abschnitte, in welche die Hypotenuse durch diese Höhe zerlegt wird $m = 43\frac{19}{58}$ dm. Wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} h = 23\frac{8}{47} \text{ dm} \\ m = 43\frac{19}{58} \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Aus dem einen der Dreiecke, in welche das Dreieck durch die zur Hypotenuse gehörige Höhe geteilt wird, kann man den einen der Winkel und die eine Kathete berechnen. Mittels des in der Erkl. 205 angeführten Satzes kann man ferner den andern Abschnitt der Hypotenuse berechnen u. s. w.

Aufgabe 184. Gegeben sei von einem rechtwinkligen Dreieck die zur Hypotenuse gehörige Höhe $h = 1000{,}08$ km und die Kathete $a = 1507{,}41$ km; man soll aus diesen Angaben die Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h = 1000{,}08 \text{ km} \\ a = 1507{,}41 \text{ km} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösungen der Aufgaben 184 bis 188 sind im allgemeinen analog den Auflösungen der Aufgaben 178 bis 181. Dieselben bestehen darin, dass man beachtet, dass die zur Hypotenuse gehörige Höhe das rechtwinklige Dreieck in zwei andre rechtwinklige Dreiecke zerlegt, und dass man in passender Weise Relationen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken aufstellt, wobei man die für das rechtwinklige Dreieck aufgestellten trig. Formeln und Sätze und die in der Erkl. 204 und 205 angeführten planimetrischen Sätze und den pythagoräischen Lehrsatz in Anwendung bringt.

Aufgabe 185. Man berechne die eine Kathete, die Hypotenuse, die Winkel und den Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem die Kathete $a = 12{,}48$ dm und der Abschnitt $m = 8{,}001$ dm gegeben ist, welcher durch die zur Hypotenuse gehörigen Höhe auf der Hypotenuse gebildet wird und jener Kathete anliegt.

Gegeben: $\begin{cases} a = 12{,}48 \text{ dm} \\ m = 8{,}001 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 184.

Aufgabe 186. Die zur Hypotenuse gehörige Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks sei $h = 0{,}08$ km und ein spitzer Winkel des Dreiecks sei $\alpha = 31^0\,10'\,8{,}4''$. Welches sind die übrigen Stücke des Dreiecks und wie gross ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} h = 0{,}08 \text{ km} \\ \alpha = 31^0\,10'\,8{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 184.

Aufgabe 187. Das eine der Segmente, in welche die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die zugehörige Höhe geteilt wird, sei $m = 8\frac{5}{7}$ dm und der ihr nicht anliegende spitze Winkel sei $\alpha = 18^0\,0'\,0{,}4''$; welches sind die Seiten und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} m = 8\frac{5}{7} \text{ dm} \\ \alpha = 18^0\,0'\,0{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 184 und berücksichtige, dass mit dem einen Winkel auch der andre gegeben ist.

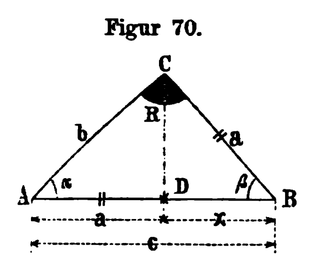
Aufgabe 188. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete $b = 1{,}874$ m und der ihr nicht anliegende Abschnitt m der Hypotenuse $= 0{,}974$ m. Wie gross sind die Seiten, die Winkel und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} b = 1{,}874 \text{ m} \\ m = 0{,}974 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 184.

Aufgabe 189. Wie gross ist der kleinere ...tze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks, welchem eine Kathete gleich ist dem nicht ...liegenden Segment der Hypotenuse?

Figur 70.



Erkl. 206. Ist in einer Aufgabe ausgedrückt, ... zwei Strecken einander gleich sein ...en, so ist dies in der auf jene Aufgabe ...g habenden Figur dadurch angedeutet, dass ... Strecken mit einer gleichen Anzahl kleiner ...erstriche versehen sind. In der Figur 70 ... B. deuten hiernach die Striche ||, welche ...ch die Strecken AD und BC gehen an, dass ...se Strecken einander gleich sein sollen.

Erkl. 207. Löst man die Gleichung:

$$a^2 = (a+x)\,x$$

... bezug auf x auf, so erhält man der Reihe ...ch:

$$a^2 = ax + x^2$$

$$x^2 + ax = a^2$$

$$x^2 + ax + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 = a^2 + \frac{a^2}{4}$$

$$x + \frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{4a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{5a^2}{4}}$$

$$x = -\frac{a}{2} \pm \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

...der, da das zweite Vorzeichen — der Wurzel ...r den gegebenen Fall keinen Sinn zulässt, ...dem keiner der Abschnitte, in welche die zur Hypotenuse gehörige Höhe die Hypotenuse zer...gt, negativ sein kann:

$$\text{a)} \ldots x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

...der auch:

$$\text{b)} \ldots x = \frac{a}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

Erkl. 208. Unter dem „Rationalmachen“ des ...enners eines Bruches versteht man die Entfernung der in demselben vorkommenden Wurzeln. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.)

Gegeben: $a = n$ (s. Erkl. 203).

Auflösung (analytisch). Stellt, siehe Figur 70 und die Erkl. 206, das Dreieck ABC das rechtwinklige Dreieck dar, in welchem gemäss der Aufgabe das eine Segment AD der Hypotenuse AB gleich der ihr nicht anliegenden Kathete CB, mithin $= a$ ist, und bezeichnet man die Stücke des Dreiecks, wie in der Figur 70 angedeutet ist, so hat man, da der kleinere der spitzen Winkel α und β jenes Dreiecks berechnet werden soll, zunächst zu untersuchen, welcher jener Winkel α und β der kleinere ist. Dies kann man wie folgt:

In dem rechtwinkligen Dreieck ADC ist die Hypotenuse b grösser als die Kathete a, da aber gemäss der Aufgabe $AD = BC = a$ ist, so ergibt sich hieraus, dass in dem rechtwinkligen Dreieck ACB die Kathete b grösser als die Kathete a ist und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 181, dass Winkel α kleiner als Winkel β ist, dass also α der gemäss der Aufgabe zu berechnende Winkel sein muss.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels α ergibt sich aus dem Dreieck ABC die Relation:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha = \frac{a}{c}$$

Um hieraus den Winkel α bestimmen zu können, muss die Hypotenuse c in die Kathete a ausgedrückt werden, dies kann man wie folgt:

Bezeichnet man den nicht gegebenen Abschnitt DB der Hypotenuse mit x, also die Hypotenuse AB mit $a + x$, so besteht zur Bestimmung dieses unbekannten Abschnitts x nach dem in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Satz die Relation:

$$a^2 = (a+x)\,x$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 207:

$$\text{b)} \ldots x = -\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

Für die Hypotenuse c des Dreiecks erhält man also hiernach:

$$c = a + \left(-\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}\right)$$

$$c = \frac{a}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

oder

$$\text{c)} \ldots c = \frac{a}{2}(1 + \sqrt{5})$$

Durch Substitution dieses für c gefundenen Wertes in Gleichung a) erhält man:

Hülfsrechnung 1.

Aus
$$\sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$
erhält man α wie folgt:
$$\sin\alpha = \frac{-1+2{,}236068}{2} \text{ (s. Hülfsr. 2)}$$
$$\sin\alpha = \frac{1{,}236068}{2}$$
$$\sin\alpha = 0{,}618034$$
$$\log\sin\alpha = \log 0{,}618034$$
Nun ist:
$$\log 0{,}618034 = 0{,}7910096 - 1$$
$$+28$$
$$\log\sin\alpha = 0{,}7910124 - 1$$
oder $\log\sin\alpha = 10 + (0{,}7910124 - 1) - 10$
$$\log\sin\alpha = 9{,}7910124 - 10$$

0077
47
26,8
20,2
21,4

mithin:
$$\alpha = 38^0\,10'\,20''$$
$$+1''$$
$$+0{,}8''$$
oder $\alpha = 38^0\,10'\,21{,}8''$

Hülfsrechnung 2.
$$\log\sqrt{5} = \frac{1}{2}\cdot\log 5$$
Nun ist:
$$\log 5 = 0{,}6989700$$
$$\cdot\frac{1}{2}$$
$$\log\sqrt{5} = 0{,}3494850$$

4718
132
116,4
15,6
15,5

mithin:
$$\sqrt{5} = 2{,}236068$$

$$\sin\alpha = \frac{a}{\frac{a}{2}(1+\sqrt{5})}$$
oder
$$\sin\alpha = \frac{2a}{a(1+\sqrt{5})}$$
oder
$$\sin\alpha = \frac{2}{1+\sqrt{5}}$$

Macht man noch den Nenner rational (s. Erkl. 208) indem man Zähler und Nenner des Bruches rechts mit $(1-\sqrt{5})$ multipliziert, so erhält man:
$$\sin\alpha = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})}$$
$$\sin\alpha = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1^2-(\sqrt{5})^2}$$
$$\sin\alpha = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5}$$
$$\sin\alpha = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4}$$
$$\sin\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{-2}$$
oder
$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

Aus dieser Gleichung erhält man für den gesuchten Winkel α nach der nebenstehenden Hülfsrechnung 1:

1) . . . $\alpha = 38^0\,10'\,21{,}8''$

Aufgabe 190. Das Verhältnis der beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sei $a:b = 30:21$; die zur Hypotenuse gehörige Höhe h messe 10,08 m; wie gross sind die Winkel und die Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 30:21 \\ h = 10{,}08\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus dem gegebenen Verhältnis der Katheten berechne man zuerst, wie in der Andeutung zur Aufgabe 176 angeführt wurde, die Winkel; mittels letzteren und der gegebenen Höhe kann man dann die Katheten und hierauf die Hypotenuse berechnen. Oder: man berechne die Seiten, indem man die gegebene Proportion als eine Bestimmungsgleichung mit den Unbekannten a und b betrachtet und eine zweite Bestimmungsgleichung mittels des in der Erkl. 205 angeführten Satzes ansetzt und dieselben nach a u. b auflöst.

Aufgabe 191. Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe sei $h = 0{,}684$ m; das Verhältnis der Hypotenuse zu einer der Katheten sei gegeben durch die Proportion $c:a = 10:3$. Man soll die Winkel und Seiten berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h = 0{,}684\text{ m} \\ c:a = 10:3 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 190.

Aufgabe 192. Das Verhältnis der Hypo-nuse c zur Kathete a eines rechtwinkligen eiecks sei $c:a = 11^1/_2:5$; das an a lie-nde Segment, welches die zur Hypotenuse hörige Höhe auf der Hypotenuse abschnei-t, sei $m = 9^2/_5$ dm. Man soll die Winkel d Seiten des Dreiecks berechnen.

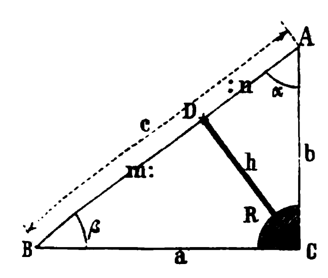
Gegeben: $\begin{cases} c:a = 11^1/_2:5 \\ m = 9^2/_5\,\text{m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 190.

Aufgabe 193. Die zur Hypotenuse eines chtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe h ist 38,4 m, das Verhältnis der zwei Ab-hnitte, in welche dieselbe die Hypotenuse it, ist 9:16; wie gross sind die Seiten d die Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h = 38{,}4\,\text{m} \\ m:n = 9:16 \end{cases}$

Figur 71.



Erkl. 209. Aus den Gleichungen:

a) . . . $m \cdot n = h^2$

und

b) . . . $m:n = 9:16$

erhält man m und n wie folgt:

Aus Gleichung b) ergibt sich:

$$m = \frac{9}{16}n$$

substituiert man diesen Wert für m in Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{9}{16}n \cdot n = h^2$$

oder

$$\frac{9 \cdot n^2}{16} = h^2$$

$$n^2 = \frac{16 \cdot h^2}{9}$$

$$\sqrt{n^2} = \sqrt{\frac{16h^2}{9}}$$

mithin:

A) . . . $n = \frac{4}{3}h$

Aus Gleichung b) ergibt sich ferner:

$$n = \frac{16}{9}m$$

substituiert man diesen Wert für n in Gleichung a), so erhält man:

Auflösung (analytisch). Stellt, siehe Fig. 71, ABC das rechtwinklige Dreieck dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, siehe Erkl. 202, und man will die Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen, so drücke man zunächst die unbekannten Abschnitte m und n, in welche die gegebene Höhe die Hypotenuse zerlegt und deren Verhältnis gegeben ist, in die Höhe h aus; dies kann man wie folgt:

Nach dem in der Erkl. 205 angeführten planimetrischen Satz besteht die Relation:

a) . . . $m \cdot n = h^2$

ferner hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

b) . . . $m:n = 9:16$

Aus diesen zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten m und n erhält man nach der Erkl. 209 für die unbekannten Abschnitte n und m:

c) . . . $n = \frac{4}{3}h$

und

d) . . . $m = \frac{3}{4}h$

Da die gesuchte Hypotenuse $= m + n$ ist, so erhält man hiernach für dieselbe

$$c = \frac{4}{3}h + \frac{3}{4}h$$

oder

$$c = \frac{16h + 9h}{12}$$

mithin:

A) . . . $c = \frac{25}{12}h$

In Rücksicht des für h gegebenen Zahlenwerts ist also:

$$c = \frac{25}{12} \cdot 38{,}4$$

oder $c = 25 \cdot 3{,}2$

mithin:

1) . . . $c = 80$ m

$$m \cdot \frac{16}{9} m = h^2$$

oder

$$\frac{16 \cdot m^2}{9} = h^2$$

$$m^2 = \frac{9 \cdot h^2}{16}$$

$$\sqrt{m^2} = \sqrt{\frac{9h^2}{16}}$$

mithin:

$$2) \ldots m = \frac{3}{4} h$$

Zur Berechnung der gesuchten Kathete a ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC die Relation:

$$a^2 = m^2 + h^2$$

setzt man hierin für m den nach Gleichung d) in h ausgedrückten Wert, so erhält man:

$$a^2 = \left(\frac{3}{4} h\right)^2 + h^2$$

oder

$$a^2 = \frac{9h^2}{16} + \frac{16h^2}{16}$$

$$a^2 = \frac{25}{16} h^2$$

$$\sqrt{a^2} = \sqrt{\frac{25}{16} h^2}$$

mithin:

$$B) \ldots a = \frac{5}{4} h$$

In Rücksicht des für h gegebenen Zahlenwerts ist also:

$$a = \frac{5}{4} \cdot 38,4$$

oder

$$a = 5 \cdot 9,6$$

mithin:

$$2) \ldots a = 48 \text{ m}$$

Zur Berechnung der gesuchten Kathete b ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC die Relation:

$$b^2 = n^2 + h^2$$

setzt man hierin für n den nach Gleichung c) in h ausgedrückten Wert, so erhält man:

$$b^2 = \left(\frac{4}{3} h\right)^2 + h^2$$

oder

$$b^2 = \frac{16h^2}{9} + \frac{9h^2}{9}$$

$$b^2 = \frac{25}{9} h^2$$

$$\sqrt{b^2} = \sqrt{\frac{25}{9} h^2}$$

mithin:

$$C) \ldots b = \frac{5}{3} h$$

In Rücksicht der für h gegebenen Zahlenwerte ist also:

$$b = \frac{5}{3} \cdot 38,4$$

$$b = 5 \cdot 12,8$$

mithin:

$$3) \ldots b = 64 \text{ m}$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der für c, a und b berechneten Werte muss die Bedingungsgleichung:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

erfüllt werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

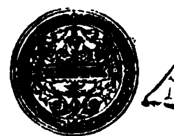
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

267. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 266. — Seite 145—160. Mit 15 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 266. — Seite 145—160. Mit 15 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck im allgemeinen; Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Transversalen vorkommen; in welchen die Differenz zweier Winkel, die Summe oder Differenz zweier Seiten gegeben ist.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
[Di]e einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wir[d].

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\sin\alpha = \frac{48}{80}$$

rhält man α, wie folgt:

$$\log\sin\alpha = \log 48 - \log 80$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rrl} & (+10) & (-10) \\ \log 48 = & 1{,}6812412 & \\ -\log 80 = & -1{,}9030900 & \\ \hline \log\sin\alpha = & 9{,}7781512 & -10 \\ & 1467 & \\ \hline & 45 & \\ & 28 & \\ \hline & 17 & \\ & 16{,}8 & \end{array}$$

ithin:

$$\begin{array}{rl} \alpha = & 36^0\,52'\,10'' \\ & +1'' \\ & +0{,}6'' \\ \hline \alpha = & 36^0\,52'\,11{,}6'' \end{array}$$

der

Hülfsrechnung 2.

Aus

$$\sin\beta = \frac{64}{80}$$

rhält man β, wie folgt:

$$\log\sin\beta = \log 64 - \log 80$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rrl} & (+10) & (-10) \\ \log 64 = & 1{,}8061800 & \\ -\log 80 = & -1{,}9030900 & \\ \hline \log\sin\beta = & 9{,}9030900 & -10 \\ & 0768 & \\ \hline & 132 & \\ & 126{,}4 & \\ \hline & 5{,}6 & \\ & 6{,}3 & \end{array}$$

ithin:

$$\begin{array}{rl} \beta = & 53^0\,7'\,40'' \\ & +8'' \\ & +0{,}4'' \\ \hline \beta = & 53^0\,7'\,48{,}4'' \end{array}$$

ler

Den gesuchten Winkel α kann man unter anderm mittels der Relation:

D) . . . $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

berechnen, wenn man in derselben die für a und c berechneten Werte substituiert, man erhält:

$$\sin\alpha = \frac{48}{80}$$

und hieraus ergibt sich nach Hülfsrechnung 1:

4) . . . $\alpha = 36^0\,52'\,11{,}6''$

Den gesuchten Winkel β kann man unter anderm mittels der Relation:

E) . . . $\sin\beta = \frac{b}{c}$

berechnen, wenn man in dieselbe die für b und c berechneten Werte substituiert; man erhält:

$$\sin\beta = \frac{64}{80}$$

und hieraus ergibt sich nach der Hülfsrechnung 2:

5) . . . $\beta = 53^0\,7'\,48{,}4''$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der für α und β berechneten Werte muss die Bedingungsgleichung:

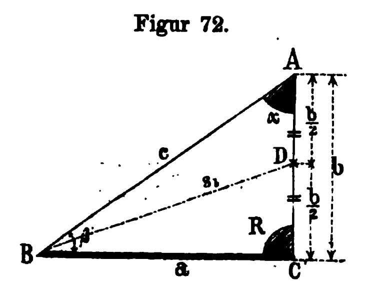
$$\alpha + \beta = 90^0$$

erfüllt werden.

) Aufgaben, in welchen Transversalen des rechtwinkligen Dreiecks vorkommen.

Aufgabe 194. Aus der Kathete $a =$ 58 dm und dem derselben gegenüberliegen-n spitzen Winkel $\alpha = 50^0\,10'\,40''$ eines chtwinkligen Dreiecks soll man die Länge r den Scheitel jenes Winkels mit dem ttelpunkt der andern Kathete verbindenden recke berechnen.

Figur 72.



Gegeben: $\begin{cases} a = 1{,}58\text{ m} \\ \alpha = 50^0\,10'\,40'' \end{cases}$

Auflösung. Ist, siehe Figur 72, ABC das rechtwinklige Dreieck, in welchem a die gegebene Kathete und α der gegebene Winkel ist, und man verbindet die Mitte D der Kathete b mit B, so repräsentiert BD die zu berechnende Verbindungslinie, Mittellinie oder auch „Schwerlinie" des Dreiecks genannt (s. Erkl. 210). Zur Berechnung der gesuchten Länge dieser Verbindungslinie verfahre man wie folgt:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD erhält man nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Relation:

$$\overline{BD}^2 = \overline{BC}^2 + \overline{CD}^2$$

Erkl. 210. Jede Transversale (s. Erkl. 211), welche durch die Mitte einer Seite eines Dreiecks und durch die dieser Seite gegenüberliegende Ecke geht, hat die Eigenschaft, dass sie

1) das Dreieck in zwei inhaltsgleiche Teile teilt,

und

2) dass sie den Schwerpunkt des Dreiecks enthält,

solche Transversalen heissen infolge dieser Eigenschaften Mittellinien oder auch Schwerlinien (siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\overline{BD} = \frac{1{,}58}{2} \cdot \sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40''}$$

erhält man $\overline{BD}$ wie folgt:

$$\overline{BD} = 0{,}79\sqrt{4 + 0{,}695266} \text{ (s. Hülfsr. 2)}$$

$$\overline{BD} = 0{,}79\sqrt{4{,}695266}$$

$$\log \overline{BD} = \log 0{,}79 + \frac{1}{2} \cdot \log 4{,}695266$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 4{,}695266 = & 0{,}6716541 \\ & \left.\begin{array}{r}+55{,}2 \\ +\ 5{,}5\end{array}\right\} = +61 \\ \hline & 0{,}6716602 \\ & \cdot\frac{1}{2} \\ \hline \frac{1}{2}\cdot\log 4{,}695266 = & 0{,}3358301 \\ +\log 0{,}79 = + & 0{,}8976271 - 1 \\ \hline \log \overline{BD} = & 1{,}2324572 - 1 \\ \text{oder} = & 0{,}2324572 \\ & 4370 \\ \hline & 202 \\ & 203 \end{array}$$

mithin:

$$\overline{BD} = 1{,}70788$$

Hülfsrechnung 2.

$$\log \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40'' = 2 \cdot \log \operatorname{ctg} 50^0\,10'\,40''$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{ctg} 50^0\,10'\,40'' = & 9{,}9210754 - 10 \\ & \cdot 2 \\ \hline \log \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40'' = & 19{,}8421508 - 20 \\ \text{oder} = & 0{,}8421508 - 1 \\ & 1472 \\ \hline & 36 \\ & 37{,}8 \end{array}$$

mithin:

$$\operatorname{numlog} \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40''$$
$$\text{oder } \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40'' = 0{,}695266$$

Erkl. 211. In der Geometrie versteht man unter einer Transversalen im allgemeinen jede gerade oder krumme Linie, welche ein System von andern Linien, oder eine Figur durchschneidet.

oder, wenn man $BC = a$ und gemäss der Aufgabe $\overline{CD} = \frac{CA}{2} = \frac{b}{2}$ setzt:

$$\overline{BD}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

oder

$$\text{a) } \ldots \overline{BD} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

Da b nicht gegeben, so muss zunächst b in die gegebenen Stücke ausgedrückt werden; dies kann mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB sich ergebenden Relation

$$\frac{b}{a} = \operatorname{ctg}\alpha$$

man erhält hieraus:

$$\text{b) } \ldots b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man nunmehr:

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{2}\right)^2}$$

oder

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + \frac{a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{4}}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{4a^2 + a^2 \cdot \operatorname{ctg}^2\alpha}{4}}$$

$$\overline{BD} = \sqrt{\frac{a^2}{4}(4 + \operatorname{ctg}^2\alpha)}$$

mithin:

$$\text{A) } \ldots \overline{BD} = \frac{a}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2\alpha}$$

als allgemeine Lösung der Aufgabe.

In Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach für die gesuchte Mittellinie:

$$\overline{BD} = \frac{1{,}58}{2}\sqrt{4 + \operatorname{ctg}^2 50^0\,10'\,40''}$$

oder nach Hülfsrechnung 1:

$$\text{1) } \ldots \overline{BD} = 1.70788 \text{ dm}$$

Aufgabe 195. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Hypotenuse $c = 182{,}07$ m und ein spitzer Winkel $\alpha = 12^0\,41'\,45''$. Man soll hieraus die beiden Mittellinien oder Schwerlinien berechnen, welche durch die Mitten der Katheten und die ihnen gegenüberliegenden Ecken gehen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 182{,}07 \text{ m} \\ \alpha = 12^0\,41'\,45'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 194.

Aufgabe 196. Man soll aus dem Winkel $= 15^0\,0'\,40''$ und der Kathete $a = 9,4$ dm es rechtwinkligen Dreiecks die Länge der en Winkel α halbierenden Transversale rechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 15^0\,0'\,40'' \\ a = 9,4 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Mittels des gegebenen Winkels und der gegebenen Kathete berechne man zuerst die andre Kathete; dann beachte man, dass man ein rechtwinkliges Dreieck hat, in welchem eine Kathete und ein Winkel (die Hälfte des gegebenen) bekannt ist, und dessen Hypotenuse berechnet werden soll.

Aufgabe 197. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= 100$ m und die einen der spitzen Winkel, z. B. den Winkel α halbierende Transversale w_α messe 80 m: wie gross sind die Kathete und ein Winkel des Dreiecks?

Erkl. 211 a. In diesem Buch sind die winkelhalbierenden Transversalen im allgemeinen durch den Buchstaben w bezeichnet. Je nachdem eine solche Transversale w den Winkel α, β oder γ **halbiert**, ist dieselbe bezw. durch w_α, w_β oder w_γ bezeichnet.

Gegeben: $\begin{cases} c = 100 \text{ m} \\ w_\alpha = 80 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 196.

Aufgabe 198. Wie gross ist die den Winkel $\beta = 5^0\,3'\,42''$ halbierende Transversale in einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Hypotenuse $c = 0,08$ m misst?

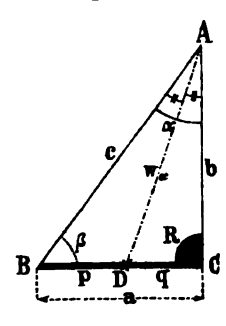
Gegeben: $\begin{cases} \beta = 5^0\,3'\,42'' \\ c = 0,08 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: $w_\beta = ?$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 196.

Aufgabe 199. Die eine Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks wird durch die den gegenüberliegenden Winkel α halbierende Transversale w_α in die Abschnitte $p = 0,8$ m und $q = 0,2$ m geteilt und zwar soll der Abschnitt q der andern Kathete b anliegen; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks bestimmen.

Figur 73.



Erkl. 212. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Halbierungslinie eines Winkels eines Dreiecks teilt die gegenüberliegende Seite

Gegeben: $\begin{cases} p = 0,8 \text{ m} \\ q = 0,2 \text{ m} \end{cases}$ Abschnitte, gebildet von w_α auf a.

Andeutung. Man berechne zunächst die Seiten und zwar mittels Benutzung des pythagoreischen Lehrsatzes und mittels Benutzung des in der Erkl. 212 angeführten planimetrischen Satzes. Ist, siehe Figur 73, ABC das gedachte Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so bestehen hiernach die Bestimmungsgleichungen:

a) . . . $c^2 = b^2 + (p+q)^2$

und

b) . $p : q = c : b$

woraus sich die Seiten c und b berechnen lassen. Mittels Benutzung dieser berechneten Werte kann man dann die Winkel bestimmen.

in zwei Abschnitte, die sich verhalten, wie die denselben anliegenden Dreiecksseiten.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

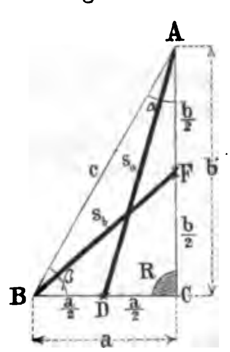
Nach diesem Lehrsatz ergibt sich aus der Figur 73, wenn AD den Winkel α halbiert, die Relation:

$$\text{a)} \ldots p : q = c : b$$

Aufgabe 200. Von einem Dreieck sind die beiden durch die spitzen Winkel α und β desselben gehenden Schwerlinien s_a und s_b (s. Erkl. 210 und 212 a) gegeben und zwar sei $s_a = 30$, $s_b = 40$ m; man soll hieraus die Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Erkl. 212 a. In diesem Buch sind die Schwerlinien (oder Mittellinien) eines Dreiecks im allgemeinen durch den Buchstaben s bezeichnet. Je nachdem eine solche Schwerlinie durch die Mitten der Seiten a, b oder c geht, ist dieselbe bezw. mit s_a, s_b oder s_c bezeichnet.

Figur 74.



Gegeben: $\begin{cases} s_a = 30 \text{ m} \\ s_b = 40 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus der Figur 74 ergeben sich zur Berechnung der Katheten a und b die Bestimmungsgleichungen:

$$\text{a)} \ldots s^2_a = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$$

und

$$\text{b)} \ldots s^2_b = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$$

Hat man aus denselben a und b berechnet, so kann man leicht die Hypotenuse c und die Winkel und den Inhalt des Dreiecks bestimmen.

Aufgabe 201. Die eine Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks sei gleich 100 dm, der ihr anliegende spitze Winkel β sei $= 62^0\ 10'\ 42''$; die andre Kathete b sei im Verhältnis von 2 : 3 geteilt und zwar so, dass der kleinere Abschnitt an der Kathete a liegt, und der Teilpunkt sei mit dem Scheitel des Winkels β verbunden. Wie lang ist diese Verbindungslinie und wie gross sind die Winkel, welche sie mit den anliegenden Seiten bildet.

Gegeben: $\begin{cases} a = 100 \\ \beta = 62^0\ 10'\ 42'' \\ b \text{ geteilt im Verhältnis } 2:3 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst die Kathete b, dann nach dem gegebenen Verhältnis die einzelnen Abschnitte derselben; hierauf kann man nach dem pythagoreischen Lehrsatz die gesuchte Länge der Verbindungslinie berechnen und mittels der trig. Funktionen die gesuchten Winkel auf einfache Weise bestimmen.

Aufgabe 202. Von einem rechtwinkligen Dreieck ist die Kathete $a = 52{,}8$ m und der ihr gegenüberliegende Winkel $\alpha = 6^0\ 40'\ 10''$ gegeben, ferner ist eine Transversale gezogen, welche den andern spitzen Winkel β im Verhältnis von $p : q = 1 : 2$ teilt und zwar so, dass der grössere Teil jenes Winkels an der Kathete a liegt. Man soll aus diesen

Gegeben: $\begin{cases} a = 52{,}8 \text{ m} \\ \alpha = 6^0\ 40'\ 10'' \\ \beta \text{ geteilt im Verhältnis } 1:2 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst den Winkel β durch Abzug des Winkels α von 90^0, dann berechne man die einzelnen Teile des Winkels β, in welche derselbe durch die

ngaben **berechnen**, in welchem **Verhältnis** urch **jene Transversale** die Kathete b geilt **wird**.

gedachte Transversale nach dem gegebenen Verhältnis geteilt werden soll; hierauf berechne man den an der Kathete a liegenden Abschnitt der Kathete b und, nachdem man mittels der Kathete a und des Winkels α die ganze Kathete b berechnet hat, auch den andern Abschnitt dieser Kathete. Das gesuchte Verhältnis der beiden Abschnitte wird alsdann durch die für dieselben gefundenen Masszahlen ausgedrückt.

d) Aufgaben, in welchen die Differenz zweier Winkel gegeben ist.

Aufgabe 203. Die Differenz der beiden spitzen **Winkel** α und β eines rechtwinkligen **Dreiecks sei** $= 51^0\,3'\,10''$, die Hypotenuse $c = 30{,}5$ **m; wie gross sind die Winkel, die Katheten und der Inhalt dieses Dreiecks?**

Gegeben: $\begin{cases} \alpha - \beta = 51^0\,3'\,10'' \\ c = 30{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus der gegebenen Differezn der beiden Winkel α und β und aus der bekannten Summe derselben (dieselbe ist $= 90^0$) berechne man zunächst die Winkel α und β; dann berechne man mittels dieser Winkel und der gegebenen Hypotenuse die Katheten und den Inhalt, wie in der gelösten Aufgabe 5 gezeigt wurde.

Aufgabe 204. Die zur Hypotenuse gehörige Höhe h eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= 13{,}064$ **m**, die Differenz der spitzen Winkel α **und** β des Dreiecks betrage $2^0\,4'\,6{,}8''$: wie **gross** sind die Winkel, Seiten und der **Inhalt des Dreiecks?**

Gegeben: $\begin{cases} h = 13{,}064 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 2^0\,4'\,6{,}8'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der vorigen Aufgabe 203 und der Aufgabe 186.

Aufgabe 205. Die beiden spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks differieren um 10^0; der an dem kleineren dieser Winkel liegende Abschnitt, welcher die Höhe auf der Hypotenuse abschneidet, sei $= 2{,}5$ dm; wie gross **sind die Seiten, Winkel** und der Inhalt des **Dreiecks?**

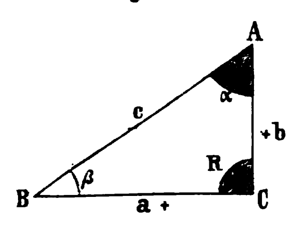
Gegeben: $\begin{cases} \alpha - \beta = 10^0 \\ m = 2{,}5 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgabe 203 und der Aufgabe 187.

e) Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten gegeben ist.

Aufgabe 206. Die Summe der beiden Katheten **eines rechtwinkligen** Dreiecks sei $s = 112$ **m**, ein Winkel desselben $\alpha = 38^0\,40'$. Wie **gross** sind die drei Seiten dieses Dreiecks?

Figur 75.



Gegeben: $\begin{cases} a + b = s = 112 \text{ m} \\ \alpha = 38^0\,40' \end{cases}$

Auflösung 1 (analytisch). Ist, s. Figur 75 und Erkl. 213, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so bestehen zur Berechnung der gesuchten Katheten a und b die Relationen:

a) . . . $a + b = s$

und

b) . . . $\frac{a}{b} = \operatorname{tg} \alpha$

Aus diesen Gleichungen findet man a und b wie folgt:

Erkl. 213. Ist in einer Aufgabe die Summe oder die Differenz zweier Strecken gegeben, so ist dies in der auf jene Aufgabe bezug habenden Figur dadurch angedeutet, dass dem Buchstaben, durch welchen die erste jener Strecken bezeichnet wird, ein Plus- bezw. ein Minuszeichen nachgesetzt, hingegen dem Buchstaben, durch welchen die zweite jener Strecken bezeichnet wird, ein Plus- bezw. ein Minuszeichen vorgesetzt ist.

In der Figur 75 z. B. deuten hiernach die Bezeichnungen $a+$ und $+b$ an, dass die Summe $a+b$ der Strecken a und b gegeben ist.

Erkl. 214. Eine goniometrische Formel heisst:

$$1+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha)}{\cos\alpha}$$

(Siehe Formel 123 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$a = 112\cdot\frac{\sin 38^0\,40'}{\sqrt{2}\cdot\sin 83^0\,40'}$$

erhält man a wie folgt:

$$\log a = \log 112 + \log\sin 38^0 40' - \left(\frac{1}{2}\cdot\log 2 + \log\sin 83^0\,40'\right)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 112 = & 2{,}0492180 \\ +\log\sin 38^0\,40' = + & 9{,}7957330 - 10 \\ \hline & 11{,}8449510 - 10 \\ -\left[\frac{1}{2}\log 2 + \log\sin 83^0 40'\right] = \pm & 10{,}1478564 \mp 10^* \\ \hline \log a = & 1{,}6970946 \\ & 0898 \\ \hline & 48 \\ & 43{,}5 \\ \hline & 2{,}5 \\ & 2{,}6 \end{array}$$

* s. Hülfsrechnung 2.

mithin:

$$a = 49{,}78458$$

Hülfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0{,}3010300 \\ & \cdot\frac{1}{2} \\ \hline & 0{,}1505150 \\ +\log\sin 83^0\,40' = + & 9{,}9973414 - 10 \\ \hline \frac{1}{2}\log 2 + \log 83^0\,40' = & 10{,}1478564 - 10 \end{array}$$

Aus Gleichung a) ergibt sich:

c) . . . $b = s - a$

setzt man diesen in s und a ausgedrückten Wert für b in Gleichung b) ein, so erhält man für a die Bestimmungsgleichung:

d) . . . $\dfrac{a}{s-a} = \operatorname{tg}\alpha$

Diese Gleichung nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$a = (s-a)\operatorname{tg}\alpha$$
$$a = s\cdot\operatorname{tg}\alpha - a\cdot\operatorname{tg}\alpha$$
$$a + a\cdot\operatorname{tg}\alpha = s\cdot\operatorname{tg}\alpha$$
$$a(1+\operatorname{tg}\alpha) = s\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

oder

A) . . . $a = s\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$

Um für a einen zur logarithmischen Berechnung bequemen Wert zu erhalten, beachte man, dass nach den in den Erkl. 120 und 214 angeführten goniometrischen Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

und

$$1+\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha)}{\cos\alpha}$$

gesetzt werden kann; man erhält hiernach:

$$a = s\cdot\frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha)}{\cos\alpha}}$$

oder

A_1) . . $a = s\cdot\dfrac{\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha)}$

In Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte ist also:

$$a = 112\cdot\frac{\sin 38^0\,40'}{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0+38^0\,40')}$$

oder:

$$a = 112\cdot\frac{\sin 38^0\,40'}{\sqrt{2}\cdot\sin 83^0\,40'}$$

und hieraus erhält man nach Hülfsrechnung 1 für die Kathete a:

1) . . . $a = 49{,}78458$ m

Die Kathete b könnte man nunmehr aus dem für s gegebenen und dem für a berechneten Werte vermittels der Gleichung c) bestimmen; man kann sie aber auch unabhängig von dem bereits für a gefundenen Wert in analoger Weise berechnen. Setzt man den aus Gleichung a) für a sich ergebenden Wert:

e) . . . $a = s - b$

in Gleichung b), so erhält man für b die Bestimmungsgleichung:

f) . . . $\dfrac{s-b}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

Hülfsrechnung 3.

Aus

$$b = 112 \cdot \frac{\cos 38^0 40'}{\sqrt{2} \cdot \sin 83^0 40'}$$

erhält man b wie folgt:

$$\log b = \log 112 + \log \cos 38^0 40' - \left(\frac{1}{2} \cdot \log 2 + \log \sin 83^0 40'\right)$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 112 = & 2,0492180 \\ + \log \cos 38^0 40' = + & 9,8925365 - 10 \\ \hline & 11,9417545 - 10 \\ \left[\frac{1}{2} \cdot \log 2 + \log \sin 83^0 40'\right] = \pm & 10,1478564 \mp 10^* \\ \hline \log b = & 1,7938981 \\ & 8951 \\ \hline & 30 \\ & 28 \\ \hline & 2 \\ & 2,1 \end{array}$$

* s. Hülfsrechnung 2.

mithin:

$$b = 62,21543$$

Hülfsrechnung 4.

$$\log 49,78453^2 = 2 \cdot \log 49,78453$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 49,78453 = & 1,6970946^{*)} \\ & \cdot 2 \\ \hline \log 49,78453^2 = & 3,3941892 \\ & 1889 \\ \hline & 3 \\ & 1,75 \\ \hline & 1,25 \\ & 1,23 \end{array}$$

mithin:

$$49,78453^2 = 2478,5017$$

*) Den Logarithmus von 49,78453 kann man der Hülfsrechnung 1 entnehmen.

Hülfsrechnung 5.

$$\log 62,21543^2 = 2 \cdot \log 62,21543$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 62,21543 = & 1,7938981 \\ & \cdot 2 \\ \hline \log 62,21543^2 = & 3,5877962 \\ & 7895 \\ \hline & 67 \\ & 56 \\ \hline & 11 \\ & 10,1 \\ \hline & 0,9 \\ & 0,9 \end{array}$$

mithin:

$$62,21543^2 = 3870,7598$$

Hülfsrechnung 6.

Aus

$$c = \sqrt{6349,2615}$$

erhält man c wie folgt:

$$\log c = \frac{1}{2} \cdot \log 6349,2615$$

Diese Gleichung nach b aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$s - b = b \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$s = b + b \operatorname{tg} \alpha$$

$$b(1 + \operatorname{tg} \alpha) = s$$

$$\text{B)} \;\ldots\; b = \frac{s}{1 + \operatorname{tg} \alpha}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 214 für:

$$1 + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + \alpha)}{\cos \alpha}$$

setzt und reduziert:

$$\text{B}_1\text{)} \;\ldots\; b = s \cdot \frac{\cos \alpha}{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + \alpha)}$$

In Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte erhält man hiernach:

$$b = 112 \cdot \frac{\cos 38^0 40'}{\sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + 38^0 40')}$$

oder

$$b = 112 \cdot \frac{\cos 38^0 40'}{\sqrt{2} \cdot \sin 83^0 40'}$$

und hieraus ergibt sich nach der Hülfsrechnung 3:

$$2) \;\ldots\; b = 62,21543 \text{ m}$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der für a und b berechneten Werte besteht die Relation $a + b = 112$, die Probe ergibt einen kleinen Fehler, was seinen Grund darin hat, dass sich bei der Rechnung mit Irrationalzahlen, durch welche die Logarithmen und die goniometrischen Funktionswerte dargestellt werden, eine absolute Genauigkeit nicht erreichen lässt.

Die gesuchte Hypotenuse c kann man nunmehr mittels des pythagoreischen Lehrsatzes aus den bereits berechneten Katheten a und b berechnen, man erhält nach demselben:

$$\text{C)} \;\ldots\; c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

und in Rücksicht der für a und b berechneten Zahlenwerte:

$$c = \sqrt{49,78453^2 + 62,21543^2}$$

oder nach den Hülfsrechnungen 4 und 5:

$$c = \sqrt{2478,5017 + 3870,7598}$$

$$c = \sqrt{6349,2615}$$

und schliesslich nach Hülfsrechnung 6:

$$3) \;\ldots\; c = 79,68225 \text{ m} \quad \text{(s. Erkl. 215).}$$

Auflösung 2 (synthetisch). Anschliessend an die planimetrische Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Summe der beiden Katheten und einem Winkel, kann man die geforderten Stücke auch wie folgt berechnen:

Nun ist:

$$\log 6349{,}2615 = 3{,}8027190$$
$$\left.\begin{array}{r}+40{,}8\\+0{,}88\\+0{,}34\end{array}\right\} = +42$$
$$3{,}8027232$$
$$\cdot\frac{1}{2}$$
$$\log c = 1{,}9013616$$
$$\begin{array}{r}3602\\\hline 14\\11\\\hline 3\end{array}$$

mithin:

$$c = 79{,}68225$$

Erkl. 215. Die in der Aufgabe 206 zu berechnende Hypotenuse c kann man auch mittels Anwendung der Mollweide'schen Formel 89:

$$(a+b):c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

berechnen, wenn man in derselben gemäss der Aufgabe:

$$a+b = s$$
$$\alpha+\beta = 90^0$$

also

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0$$

und

$$\alpha-\beta = 38^0\,40' - (90^0 - 38^0\,40')$$
$$= 38^0\,40' - 51^0\,20'$$
$$= -12^0\,40'$$

also

$$\frac{\alpha-\beta}{2} = -6^0\,20'$$

setzt und berücksichtigt, dass nach der Erkl. 126:

$$\cos(-6^0\,20') = \cos 6^0\,20'$$

ist; man erhält in Rücksicht dessen aus jener Formel 89:

$$\text{a)} \ldots c = s\cdot\frac{\cos 45^0}{\cos 6^0\,20'}$$

oder wenn man nach der Erkl. 216:

$$\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

setzt:

$$\text{b)} \ldots c = \frac{s}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\cos 6^0\,20'}$$

Erkl. 216. Ein goniometrischer Satz heisst:

„Der Sinus und der Kosinus des Winkels von 45^0 sind einander gleich und zwar je $= \frac{1}{2}\sqrt{2}$"

(Siehe die Auflösung der Aufgabe 9 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

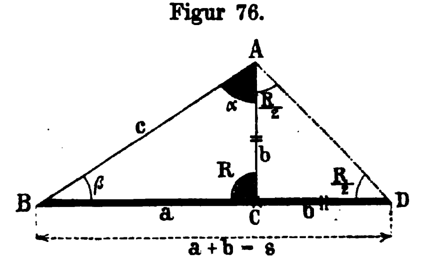
Erkl. 217. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem gleichschenkligen Dreieck ist der an dem Scheitel liegende Aussenwinkel doppelt so gross als einer der Basiswinkel."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie).

Geometrische Analysis (s. Erkl. 200). Ist, siehe Figur 76, ABC das rechtwink-

Figur 76.



lige Dreieck, von welchem der Winkel α und die Summe s der beiden Katheten a und b gegeben sind, und man denkt sich die Summe s der beiden Katheten a und b dadurch gebildet, dass man, wie die Figur 76 zeigt, b auf der Verlängerung von a nach CD abträgt und dann A mit D verbindet, so erhält man das schiefwinklige Dreieck ABD und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ACD. Von ersterem kennt man die Seite $BD = a+b = s$, den Winkel $ADB = \frac{R}{2}$ (s. Erkl. 217), und den Winkel $BAD = \alpha + \frac{R}{2}$

Nach dieser Betrachtung kann man, (siehe Erkl. 218) ganz analog wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten AB und AD berechnen.

Analog der Auflösung zur Aufgabe 117 erhält man aus dem Dreieck ABD mittels Anwendung der Sinusregel:

$$\frac{c}{s} = \frac{\sin\frac{R}{2}}{\sin\left(\alpha+\frac{R}{2}\right)}$$

oder

$$\text{A)} \ldots c = s\cdot\frac{\sin 45^0}{\sin(\alpha+45^0)}$$

wonach c, wenn für s und α die gegebenen Zahlenwerte substituiert werden, berechnet werden kann.

Ferner erhält man aus dem Dreieck ABD nach der Sinusregel:

$$\frac{\overline{AD}}{s} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\alpha+\frac{R}{2}\right)}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \overline{AD} = s\cdot\frac{\sin(90^0-\alpha)}{\sin(\alpha+45^0)}$$

wonach man $\overline{AD}$, wenn man für s und α die gegebenen Zahlenwerte substituiert, berechnen kann.

Ist $\overline{AD}$ hiernach berechnet, so kann man aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Drei-

Nach diesem Satz ist in der Figur 76: $\sphericalangle ACB = 2 \cdot \sphericalangle CAD$ oder $= 2 \cdot \sphericalangle ADC$, da nun $\sphericalangle ACB = R$ ist, so ergibt sich hieraus: $\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADC = \frac{R}{2}$.

Erkl. 218. Wie in Antwort der Frage 28 erwähnt, ist es bei der synthetischen Auflösung einer trig. Aufgabe meistens nicht erforderlich, dass man die planimetrische Konstruktion, welche der eigentlichen Berechnung vorauszugehen hat, in Wirklichkeit ausführt, indem in vielen Fällen die geometrische Analysis (s. Erkl. 200) genügt, um die zur Berechnung erforderlichen Beziehungen zu erhalten, ähnlich wie sich aus der Analysis die zur Konstruktion erforderlichen Beziehungen ergeben und wie in nebenstehender Auflösung 2 gezeigt ist.

Erkl. 219. Man kann die synthetische Auflösung der Aufgabe 206, siehe nebenstehende Auflösung 2 und Figur 76, auch dadurch ausführen, dass man, wie in der Figur 77 angedeutet ist, die Kathete a an die Kathete b nach CD anträgt (s. Erkl. 220) und B mit D verbindet. Man erhält alsdann, siehe Figur 77, das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck BCD und das schiefwinklige Dreieck ABD; in letzterem kennt man die Seite $AD = a + b = s$ und die Winkel $ADB = \frac{R}{2}$ (siehe Erkl. 217) $BAD = \alpha$ und $ABD = R - \alpha + \frac{R}{2}$ oder $= \frac{3R}{2} - \alpha$. Aus dem Dreieck ABD kann man somit mittels Anwendung der Sinusregel, analog wie in nebenstehender Auflösung 2 gezeigt wurde, die Hypotenuse c berechnen, u. s. f.

Erkl. 220. Sobald man zum Zweck der geometrischen Analysis einer Aufgabe die Summe oder die Differenz zweier aneinanderstossender Strecken in der zugehörigen Figur (siehe Erkl. 200) bilden will, so befolge man die praktische Regel, dass die Summen- oder Differenzenbildung solcher Strecken dadurch geschehen muss, dass man von dem Punkt aus, in welchem jene Strecken zusammenstossen, die eine Strecke an die andre, bezw. auf der andern abträgt. (Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

eck BCD nach der Aufgabe 112 die Kathete b berechnen. Ist b auf diese Weise berechnet, so findet man auf einfache Weise die Kathete a aus der gegebenen Beziehung:

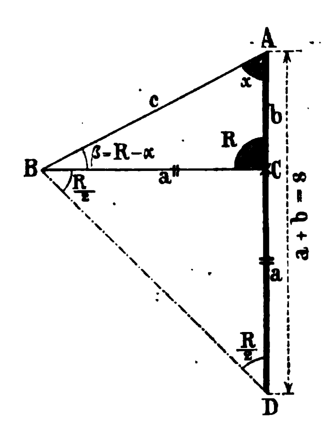
$$a + b = s$$

Man kann auch, wenn c berechnet ist, zur Berechnung der Katheten a und b die Bestimmungsgleichungen:

$$a + b = s$$
$$\text{und } a^2 + b^2 = c^2$$

benutzen.

Figur 77.



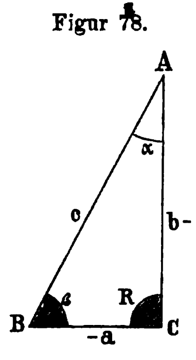
Aufgabe 207. Die Summe der zwei Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 40$ m und der der Kathete a gegenüberliegende spitze Winkel α ist $= 16^0\ 15'\ 36{,}7''$. Man berechne die Seiten und den Inhalt dieses Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} a + b = 40 \text{ m} \\ \alpha = 16^0\ 15'\ 36{,}7'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 206.

Aufgabe 208. Die Differenz der zwei Katheten b und a eines rechtwinkligen Dreiecks sei $d = 23$ dm, ein spitzer Winkel desselben sei $\beta = 71^0\, 4'\, 31{,}3''$; wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks?

Figur 78.



Erkl. 221. Eine goniometrische Formel heisst:

$$1 - \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0 - \alpha)}{\cos\alpha}$$

(Siehe Formel 124 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Hülfsrechnung 1.

Aus
$$a = \frac{23\cdot\cos 71^0\,4'\,31{,}3''}{\sqrt{2}\cdot\sin 26^0\,4'\,31{,}3''}$$
erhält man a wie folgt:

$$\log a = \log 23 + \log\cos 71^0\,4'\,31{,}3'' - \left[\frac{1}{2}\cdot\log 2 + \log\sin 26^0\,4'\,31{,}3''\right]$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 23 &= 1{,}3617278 \\ + \log\cos 71^0\,4'\,31{,}3'' &= +\,9{,}5109794 - 10^* \\ &\quad 10{,}8727072 - 10 \\ -\left[\frac{1}{2}\cdot\log 2 + \log\sin 26^0 4' 31{,}3''\right] &= \pm\, 9{,}7935262 \mp 10^\dagger \\ \log a &= 1{,}0791810 \\ &\quad\ 1812 \end{aligned}$$

* s. Hülfsr. 2. † s. Hülfsr. 3.

mithin:
$$a = 12{,}000$$

Hülfsrechnung 2.

$$\begin{aligned} \log\cos 71^0\,4'\,31{,}3'' &= 9{,}5109874 - 10 \\ \left.\begin{matrix}-61{,}4\\-18{,}4\end{matrix}\right\} &= -80 \\ &\quad 9{,}5109794 - 10 \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 3.

$$\begin{aligned} \log 2 &= 0{,}3010300 \\ &\quad\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\cdot\log 2 &= 0{,}1505150 \\ + \log\sin 26^0\,4'\,31{,}3'' &= +\,9{,}6430112 - 10^* \\ \frac{1}{2}\cdot\log 2 + \log\sin 26^0\,4'\,31{,}3'' &= 9{,}7935262 - 10 \end{aligned}$$

* s. Hülfsrechnung 4.

Gegeben: $\begin{cases} b - a = d = 23 \text{ dm} \\ \beta = 71^0\,4'\,31{,}3'' \end{cases}$

Auflösung 1 (analytisch). Ist, siehe Fig. 78 und Erkl. 213, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und berücksichtigt man, dass der Winkel α der Komplementwinkel des gegebenen Winkels β ist, und dass hiernach jener Winkel α gemäss des für β gegebenen Zahlenwerts kleiner als der gegebene Winkel β sein muss und dass infolgedessen und nach der Erkl. 181 die Kathete a kleiner als die Kathete b sein muss, so bestehen zur Berechnung der gesuchten Katheten a und b die Relationen:

$$\text{a)} \ldots b - a = d$$

und

$$\text{b)} \ldots \frac{b}{a} = \operatorname{tg}\beta$$

Aus diesen Gleichungen findet man a und b wie folgt:

Aus Gleichung a) ergibt sich:

$$\text{c)} \ldots b = a + d$$

setzt man diesen in a und d ausgedrückten Wert für b in Gleichung b) ein, so erhält man für a die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots \frac{a+d}{a} = \operatorname{tg}\beta$$

Diese Gleichung nach a aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\begin{aligned} a + d &= a\cdot\operatorname{tg}\beta \\ a - a\operatorname{tg}\beta &= -d \\ a(1 - \operatorname{tg}\beta) &= -d \end{aligned}$$

oder

$$\text{A)} \ldots a = \frac{-d}{1 - \operatorname{tg}\beta}$$

Um für a einen zur logarithmischen Berechnung bequemen Wert zu erhalten, beachte man, dass nach der in der Erkl. 221 angeführten goniometrischen Formel:

$$1 - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0 - \beta)}{\cos\beta}$$

gesetzt werden kann; in Rücksicht dessen erhält man:

$$a = \frac{-d}{\dfrac{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0 - \beta)}{\cos\beta}}$$

oder

$$\text{A}_1) \ldots a = -d\cdot\frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\cdot\sin(45^0 - \beta)}$$

In Rücksicht der für d und β gegebenen Zahlenwerte ist hiernach:

Hülfsrechnung 4.

$$\log \sin 26^0\,4'\,31{,}3'' = 9{,}6430056 - 10$$
$$+\;56 \text{ (s. nächst. Gleich. a)}$$
$$\overline{9{,}6430112 - 10}$$

Die für 1,3″ zu addierenden Proportionalteile x ergeben sich aus der Proportion:

$$x : 430 = 1{,}3'' : 10''$$

Man erhält:

$$x = \frac{430 \,.\, 1{,}3}{10}$$
$$x = 43 \,.\, 1{,}3$$
$$x = 55{,}9$$

oder abgerundet:

$$\text{a)} \ldots x = 56$$

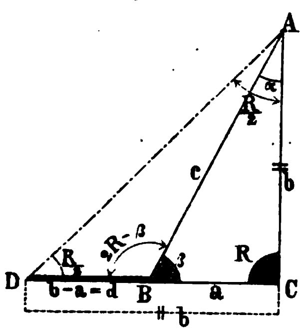
Hülfsrechnung 5.

$$35^2 = 35 \cdot 35$$
$$175$$
$$105$$
$$35^2 = 1225$$

Hülfsrechnung 6.

$$\sqrt{13|69} = 37$$
$$9$$
$$6|46$$
$$42$$
$$49$$
$$49$$
$$''$$

Figur 79.



Erkl. 222. Nach der Erkl. 72 ist jeder der Basiswinkel des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks ACD in Figur 79 $= \frac{R}{2}$; ferner ist der spitze Winkel α des rechtwinkligen Dreiecks $BAC = R - \beta$, da nun in dem Dreieck ABD:

$$\sphericalangle DAB = \sphericalangle DAC - \sphericalangle BAC$$

ist, so ist hiernach:

$$\sphericalangle DAB = \frac{R}{2} - \alpha$$
$$= \frac{R}{2} - (R - \beta)$$
$$= \frac{R}{2} - R + \beta$$

oder

$$\sphericalangle DAB = \beta - \frac{R}{2}$$

$$a = -23 \cdot \frac{\cos 71^0\,4'\,31{,}3''}{\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 - 71^0\,4'\,31{,}3'')}$$

oder

$$a = -23 \cdot \frac{\cos 71^0\,4'\,31{,}3'')}{\sqrt{2} \cdot \sin (-26^0\,4'\,31{,}3'')}$$

oder da nach der Erkl. 127:

$$\sin(-26^0\,4'\,31{,}3'') = -\sin 26^0\,4'\,31{,}3''$$

ist:

$$a = \frac{-23 \cdot \cos 71^0\,4'\,31{,}3''}{-\sqrt{2} \cdot \sin 26^0\,4'\,31{,}3''}$$

oder

$$a = \frac{23 \cdot \cos 71^0\,4'\,31{,}3''}{\sqrt{2} \cdot \sin 26^0\,4'\,31{,}3''}$$

und hieraus erhält man nach der Hülfsrechnung 1:

$$1) \ldots a = 12 \text{ dm}$$

Die Kathete b könnte man in ganz analoger Weise unabhängig von dem für a berechneten Wert berechnen, wie es mit der Berechnung der Kathete b in der Auflösung 1 der Aufgabe 206 geschah; man kann sie aber auch mittels der Gleichung a) bestimmen.

Aus derselben erhält man:

$$\text{B)} \ldots b = d + a$$

setzt man in derselben den für d gegebenen und den für a berechneten Wert, so erhält man für:

$$b = 23 + 12$$

oder

$$2) \ldots b = 35 \text{ dm}$$

Die gesuchte Hypotenuse berechnet man auf einfache Weise mittels der Relation:

$$\text{C)} \ldots c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

indem man in diese die für a und b berechneten Werte substituiert; man erhält:

$$c = \sqrt{12^2 + 35^2}$$
$$c = \sqrt{144 + 1225} \text{ (s. Hülfsr. 5)}$$
$$c = \sqrt{1369}$$

oder nach Hülfsrechnung 6):

$$3) \ldots c = 37 \text{ dm}$$

Auflösung 2 (synthetisch). Anschliessend an die geometrische Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks, aus der Differenz der beiden Katheten und einem Winkel, kann man die verlangten Stücke auch wie folgt berechnen:

Geometrische Analysis (s. Erkl. 200). Ist, siehe Figur 79, ABC das rechtwinklige Dreieck, von welchem der Winkel β und die Differenz d der beiden Katheten a und b gegeben sind, und man denkt sich die Differenz d der beiden Katheten dadurch gebildet, dass man z. B., wie die Figur 79 zeigt, die grössere Kathete b von C aus

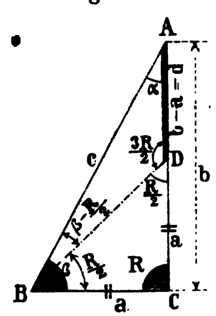
Erkl. 223. Man kann die synthetische Auflösung der Aufgabe 208, siehe nebenstehende Auflösung 2 und Figur 79, auch dadurch ausführen, dass man, wie in der Figur 80 angedeutet ist, die **kleinere** Kathete a auf die grössere Kathete b nach CD abträgt (siehe Erkl. 220) und D mit B verbindet. Man erhält alsdann, siehe Figur 80, das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck BCD und das schiefwinklige Dreieck ABD; in letzterm kennt man die Seite $AD = b - a = d$ und die Winkel

$ABD = \beta - \frac{R}{2}$; $BAD = \alpha$ oder $= R - \beta$,

$ADB = 2R - \frac{R}{2}$ oder $= \frac{3R}{2}$

Aus dem Dreieck ADB kann man somit mittels Anwendung der **Sinusregel** die Hypotenuse c berechnen, wie in nebenstehender Auflösung 2 gezeigt wurde.

Figur 80.



auf der kleinern Kathete a nach CD abträgt (s. Erkl. 220, 222 und 223), und dann A mit D verbindet, so erhält man das schiefwinklige Dreieck ABD und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ADC. Von ersterem kennt man die Seite $BD = b - a = d$, den Winkel $ADC = \frac{R}{2}$ (s. Erkl. 72), den Winkel $ABD = 2R - \beta$; und den Winkel $DAB = \beta - \frac{R}{2}$ (s. Erkl. 222).

Nach dieser Betrachtung kann man ganz analog, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten $AB = c$ und AD berechnen.

Man erhält nämlich mittels Anwendung der **Sinusregel**:

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin\frac{R}{2}}{\sin\left(\beta - \frac{R}{2}\right)}$$

oder

$$\text{A)} \ldots c = d \cdot \frac{\sin 45^0}{\sin(\beta - 45^0)}$$

wonach c, wenn für d und β die gegebenen Zahlenwerte substituiert werden, berechnet werden kann.

Ferner hat man nach der Sinusregel:

$$\frac{\overline{AD}}{d} = \frac{\sin(2R - \beta)}{\sin\left(\beta - \frac{R}{2}\right)}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \overline{AD} = d \cdot \frac{\sin(180^0 - \beta)}{\sin(\beta - 45^0)}$$

wonach $\overline{AD}$, wenn man für d und β die gegebenen Zahlenwerte substituiert, berechnet werden kann.

Ist $\overline{AD}$ berechnet, so kann man aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck ACD nach der Aufgabe 112 die Kathete b berechnen. Ist b auf diese Weise berechnet, so findet man auf einfache Weise die Kathete a aus der gegebenen Beziehung:

$$b - a = d$$

Aufgabe 209. Die zwei Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks differieren um 338 m, ein Winkel misst $63^0\,30'\,40''$; wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a - b = 338 \text{ m} \\ \alpha = 63^0\,30'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung der Aufgabe 209 ist analog der Auflösung der Aufgabe 208.

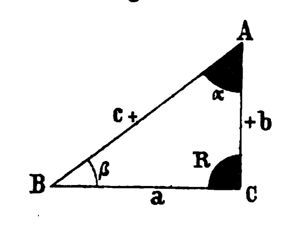
Aufgabe 210. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks übertrifft die andere um 0,84 m, der jener Kathete gegenüberliegende Winkel misst $48^0\,50'\,0{,}8''$; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b - a = 0{,}84 \text{ m} \\ \beta = 48^0\,50'\,0{,}8'' \end{cases}$

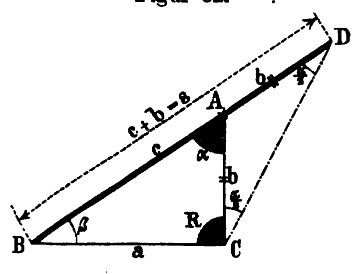
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 208.

Aufgabe 211. Die Summe der Hypotenuse c und einer Kathete b eines rechtwinkligen Dreiecks sei $s = 128$ m; der von beiden eingeschlossene Winkel sei $\alpha = 48^0\,53'\,16''$; wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks?

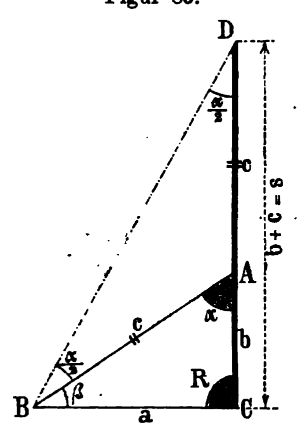
Figur 81.



Figur 82.



Figur 83.



Gegeben: $\begin{cases} c + b = s = 128 \text{ m} \\ \alpha = 48^0\,53'\,16'' \end{cases}$

Andeutungen: 1). (analytisch) Ist, siehe Fig. 81, gemäss der Aufgabe:

$$\text{a)} \ldots c + b = s \; (= 128)$$

so beachte man, dass sich aus der Figur die weitere Relation:

$$\text{b)} \ldots \cos\alpha = \frac{b}{c}$$

ergibt. Aus diesen beiden Gleichungen kann man durch Substitution die Kathete b und die Hypotenuse c berechnen, dann die dritte Seite auf mehrere Arten bestimmen;

2). (synthetisch) Denkt man sich, wie in der Figur 82 angedeutet, die gegebene Summe $b + c$ gebildet, indem man die Kathete b an die Hypotenuse c angetragen denkt, siehe Erkl. 220, so erhält man das schiefwinklige Dreieck BDC, in welchem man eine Seite ($BD = b + c = s$) und sämtliche Winkel kennt, da die Basiswinkel ADC und ACD des gleichschenkligen Dreiecks ACD je $= \frac{\alpha}{2}$ sind (siehe Erkl. 217). Aus dem Dreieck BCD kann man die Kathete a mittels der Sinusregel bestimmen; dann kann man aus a und α die Kathete b bestimmen u. s. f.;

3). (ebenfalls synthetisch) Denkt man sich, wie in der Fig. 83 angedeutet ist (s. Erkl. 220), die gegebene Summe $b + c$ gebildet, indem man die Hypotenuse c an die Kathete b angetragen denkt, so erhält man das rechtwinklige Dreieck DBC, von welchem man die Seite DC ($= b + c = s$) und den Winkel $BDC \left(= \frac{\alpha}{2}\right)$ kennt. Aus diesem Dreieck kann man die Kathete a mittels der Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{b + c}$$

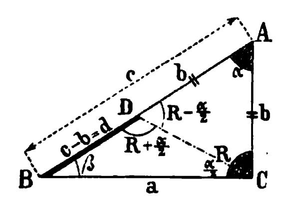
bestimmen u. s. f.

Aufgabe 212. Die Differenz zwischen der Hypotenuse und einer Kathete eines rechtwinkligen Dreieck sei $d = 72$ dm, ferner sei der dieser Kathete gegenüberliegende Winkel $\alpha = 8^0\,46'\,30{,}5''$; wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks?

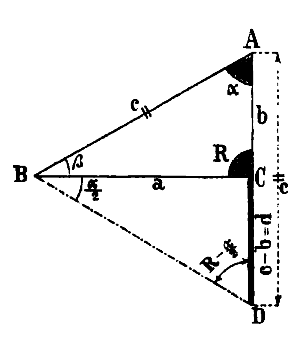
Gegeben: $\begin{cases} c - a = d = 72 \text{ dm} \\ \alpha = 8^0\,46'\,30{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe 212 kann in analoger Weise wie die Auflösung der Aufgabe 211 in verschiedener Weise erfolgen, nämlich einmal (analytisch), indem man, siehe Figur 84, die zwei Bestimmungsgleichungen:

Figur 84.



Figur 85.



a) . . . $c - a = d$ (= 72)

und

b) . . . $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

ansetzt und aus denselben zunächst a und c berechnet; oder (synthetisch) indem man, siehe Figur 84 und Erkl. 220, die Differenz $c - b$ dadurch bildet, dass man die Kathete b auf der Hypotenuse c abträgt und aus dem schiefwinkligen Dreieck BDC mittels der Sinusregel die Kathete a zunächst berechnet; oder auch (ebenfalls synthetisch) indem man, siehe Figur 85 und Erkl. 220, die Differenz dadurch bildet, dass man die Hypotenuse c auf der Kathete b abträgt und aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD zunächst die Kathete a berechnet, u. s. f.

Aufgabe 213. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Summe der Hypotenuse c und der Kathete a und zwar sei $c + a = 60$ m; ferner weiss man, dass der der Kathete a anliegende Abschnitt m, welchen die zur Hypotenuse gehörige Höhe auf der Hypotenuse abschneidet = 12,5 m ist. Wie gross sind die Seiten und die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c + a = 60 \text{ m} \\ m = 12{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Für die gesuchten Seiten c und a hat man gemäss der Aufgabe die Bestimmungsgleichung:

a) . . . $c + a = 60$

ferner ergibt sich durch Anwendung des in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Lehrsatzes die weitere Bestimmungsgleichung:

b) . . . $a^2 = c \cdot m$

Aus diesen Gleichungen berechne man a und c. Mittels dieser berechneten Werte kann man dann auf einfache Weise die Kathete b und die Winkel bestimmen.

Aufgabe 214. Dieselbe Aufgabe wie Aufgabe 213, nur soll der gegebene Abschnitt der Hypotenuse nicht der Kathete a, sondern der andern Kathete b anliegen.

Gegeben: $\begin{cases} c + a = 60 \text{ m} \\ n = 12{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 215. Die Differenz der Hypotenuse c und der Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks ist 35 m; der der Kathete a anliegende Abschnitt m der Hypotenuse, gebildet durch die zugehörige Höhe, ist = 3 m. Man berechne die Seiten und Winkel.

Gegeben: $\begin{cases} c - a = 35 \text{ m} \\ m = 3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 213.

Aufgabe 216. Dieselbe Aufgabe wie die vorige Aufgabe 215, nur soll der gegebene Abschnitt der Hypotenuse nicht der Kathete a, sondern der Kathete b anliegen.

Gegeben: $\begin{cases} c - a = 35 \text{ m} \\ n = 3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 213.

Aufgabe 217. Die Summe der zwei Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks ist 150 m; die Hypotenuse c verhält sich zur Kathete a wie 7 : 4; wie gross sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = 150 \text{ m} \\ c : a = 7 : 4 \end{cases}$

Andeutung. Mittels dem in der Aufgabe gegebenen Verhältnis zwischen der Hypotenuse und einer Kathete berechne man zunächst unter Berücksichtigung der Definition der trig. Funktionen die Winkel des Dreiecks. Dann verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 206 gezeigt wurde.

Aufgabe 218. Die Summe der zwei Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks ist 45 m, deren Verhältnis $a : b$ ist $= 4 : 5$. Wie gross sind dieselben und die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = 45 \text{ m} \\ a : b = 4 : 5 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 217.

Aufgabe 219. Die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks differieren um 10 m und die Kathete a steht zu der Hypotenuse c im Verhältnis von 3 : 7; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a - b = 10 \text{ m} \\ a : c = 3 : 7 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 217. Man berechne zuerst die Winkel und verfahre dann wie in der Auflösung zur Aufgabe 208 gezeigt wurde.

Aufgabe 220. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks misst zusammen mit dessen Kathete a gerade 75,3 m und die Kathete a verhält sich zur andern Kathete b wie 1 : 2; wie gross sind die Seiten und Winkel jenes Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c + a = 75{,}3 \text{ m} \\ a : b = 1 : 2 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne auch hier, wie in der Andeutung zur Aufgabe 217 gesagt ist, zuerst die Winkel mittels dem gegebenen Verhältnis und verfahre im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 211 gesagt ist.

Aufgabe 221. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks übertrifft dessen Kathete b um 6,45 dm und diese Kathete steht mit der andern Kathete a im Verhältnis von 3 : 2; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c - b = 6{,}45 \text{ dm} \\ b : a = 3 : 2 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 217.

Aufgabe 222. Die Summe der beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 102{,}089$ m, die Hypotenuse c misst 70,008 m; wie gross sind die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = 102{,}089 \text{ m} \\ c = 70{,}008 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst die Katheten a und b mittels der in der Aufgabe gegebenen Bestimmungsgleichung:

$$a + b = 102{,}089$$

und mittels der nach dem pythagoreischen Lehrsatz sich ergebenden weiteren Bestimmungsgleichung:

$$a^2 + b^2 = 70{,}008^2$$

und bestimme dann mittels der für a und b gefundenen Werte die Winkel α und β;

oder: Man bringe die Formel 89:

$$(a + b) : c = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} : \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

in Anwendung und berücksichtige, dass

$$\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{90^0}{2}=45^0 \text{ und dass also}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ (siehe Erkl. 216)}$$

ist, und dass ferner $\beta=90^0-\alpha$, mithin $\frac{\alpha-\beta}{2}=\frac{\alpha-(90^0-\alpha)}{2}$ oder $=\alpha-45^0$ ist, und dass also

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos(\alpha-45^0)$$

ist. Berechne aus der somit sich ergebenden Gleichung den Winkel $\alpha-45^0$ und bestimme hiernach α u. s. f.

Aufgabe 223. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Hypotenuse c und der Kathete $a = 20$ dm und die Kathete b misst 4 dm; wie gross sind die Winkel und die Kathete a?

Gegeben: $\begin{cases} c+a=20 \text{ dm} \\ b=4 \text{ dm}\end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 222.

Aufgabe 224. Man kennt von einem rechtwinkligen Dreieck die Differenz der Katheten a und b und zwar beträgt dieselbe 808,63 m; die Hypotenuse c desselben misst 1240 m; wie gross sind die Winkel:

Gegeben: $\begin{cases} a-b=808{,}63 \text{ m} \\ c=1240 \text{ m}\end{cases}$

Andeutung. Man verfahre im allgemeinen analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 222 gesagt ist. Bei der in jener Aufgabe angedeuteten zweiten Auflösungsmethode muss man jedoch bei nebenstehender Aufgabe die Formel 90 in Anwendung bringen.

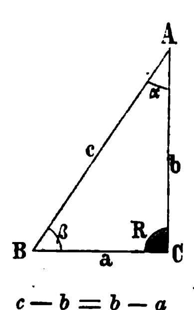
Aufgabe 225. Die Hypotenuse c und die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks differieren um 10 m; die andere Kathete misst ebenfalls 10 m; wie gross sind jene Stücke und die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c-a=10 \text{ m} \\ b=10 \text{ m}\end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 222.

Aufgabe 226. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Differenz zwischen der Hypotenuse und der grösseren Kathete gleich der Differenz zwischen den beiden Katheten; wie gross sind die Winkel?

Figur 86.



$c-b=b-a$

Gegeben: $c-b=b-a$

Auflösung (analytisch). Ist, siehe Fig. 86, ein solches Dreieck, welches den gegebenen Bedingungen entspricht, so besteht gemäss der Aufgabe die Relation:

a) . . . $c-b=b-a$

ferner besteht zwischen den drei Seiten nach dem pythagoreischen Lehrsatz die weitere Relation:

b) . . . $c^2=a^2+b^2$

Substituiert man nunmehr den aus Gleichung b) für c sich ergebenden Wert in Gleichung a), so erhält man:

$$\sqrt{a^2+b^2}-b=b-a$$

und aus dieser Gleichung erhält man der Reihe nach:

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

268. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 267. — Seite 161—176. Mit 9 Figuren.







Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 267. — Seite 161—176. Mit 9 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, in welchen Summen und Differenzen zwischen der zur Hypotenuse gehörigen Höhe, der Hypotenusensegmente und der Dreiecksseiten gegeben sind; in welchen die Summen oder Differenzen dreier Seiten gegeben sind.

Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren**, Erklärungen nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien**, Schullehrer-**Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn.** Vorbereitungsschulen aller **Arten**, gewerbliche **Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$\sqrt{a^2+b^2} = 2b - a$$
$$(\sqrt{a^2+b^2})^2 = (2b-a)^2$$
$$a^2+b^2 = 4b^2 - 4ab + a^2$$
$$4ab = 3b^2$$
$$4a = 3b$$

oder

1) . . . $a:b = 3:4$

Durch Diskussion dieser Gleichung ergibt sich zunächst, dass jedes rechtwinklige Dreieck, in welchem das Verhältnis der beiden Katheten $= 3:4$ ist, der Bedingung der Aufgabe entspricht.

Zur Berechnung des Winkels α besteht nach der Figur 86 die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

oder in Rücksicht, dass nach vorstehendem $a:b = 3:4$ sein muss:

2) . . . $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$

und hieraus erhält man α wie folgt:

$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log 3 - \log 4$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} & \quad\ (+10) \qquad (-10) \\ \log 3 &= \quad 0{,}4771213 \\ -\log 4 &= -\,0{,}6020600 \\ \log\operatorname{tg}\alpha &= \quad 9{,}8750613 - 10 \\ & \quad 0541 \\ & \quad\ \ 72 \\ & \quad\ \ 43{,}9 \\ & \quad\ \ 28{,}1 \\ & \quad\ \ 26{,}3 \end{aligned}$$

mithin:

$$\begin{aligned} \alpha &= 36^0\,52'\,10'' \\ & \quad +1'' \\ & \quad +0{,}6'' \\ \alpha &= 36^0\,52'\,11{,}6'' \end{aligned}$$

Der eine der gesuchten Winkel ist also:

A) . . . $\alpha = 36^0\,52'\,11{,}6'$,

Den andern Winkel β kann man durch Abzug des Winkels α von 90^0 oder unabhängig von dem Winkel α in gleicher Weise wie α berechnen.

Aufgabe 227. In einem rechtwinkligen Dreieck ist die Summe der Kathete a und der Hypotenuse $c = 20$ m und die Summe der Hypotenuse c und der andern Kathete $b = 15$ m: wie gross sind die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c + a = 20 \text{ m} \\ c + b = 15 \text{ m} \end{cases}$

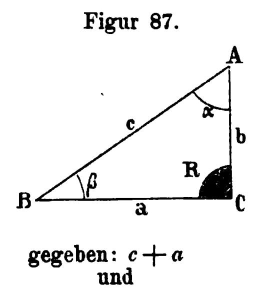
Andeutung. Man versuche zunächst einen der gesuchten Winkel zu bestimmen. Will man z. B., siehe Figur 87, den Winkel α berechnen, so verfahre man wie folgt:

Aus dem Dreieck ABC ergibt sich direkt die Relation:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

oder was dasselbe ist:

Figur 87.



gegeben: $c+a$
und
$c+b$

Erkl. 224. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe oder die Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein paar homologe Glieder."

Ist z. B. die Proportion:

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$

gegeben, so ist nach diesem Satz:

$$1) \ldots \frac{a\pm b}{c\pm d}=\frac{a}{c}\left(\text{oder}=\frac{b}{d}\right)$$

und, da in jeder Proportion die inneren Glieder unter sich, oder auch die äusseren Glieder unter sich vertauscht werden können, so ist hiernach auch:

$$2) \ldots \frac{a\pm b}{a}=\frac{c\pm d}{c}$$

(Siehe das Heft 7 der Kleyerschen Encyklopädie.)

$$\frac{b}{c}=\frac{\cos\alpha}{1}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{b+c}{c}=\frac{\cos\alpha+1}{1}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 104:

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

setzt:

$$a) \ldots \frac{b+c}{c}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck ABC die Relation:

$$\sin\alpha=\frac{a}{c}$$

oder, was dasselbe ist:

$$\frac{a}{c}=\frac{\sin\alpha}{1}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion wiederum den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a+c}{c}=\frac{\sin\alpha+1}{1}$$

Berücksichtigt man nun, dass α und β als spitze Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks Komplementwinkel sind, dass also $\sin\alpha=\cos(90^0-\alpha)$ und hiernach:

$$\frac{a+c}{c}=\frac{\cos(90^0-\alpha)+1}{1}$$

ist, und dass analog wie vorhin nach der Erkl. 104:

$$1+\cos(90^0-\alpha)=2\cos^2\left(\frac{90^0-\alpha}{2}\right)$$

gesetzt werden kann, so erhält man weiter:

$$\frac{a+c}{c}=2\cos^2\frac{90^0-\alpha}{2}$$

oder

$$b) \ldots \frac{a+c}{c}=2\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)$$

Dividiert man nunmehr die Gleichung b) durch Gleichung a), so erhält man nach entsprechender Reduktion:

$$\frac{a+c}{b+c}=\frac{\cos^2\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\frac{\cos\left(45^0-\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

Setzt man nunmehr nach der in der Erkl. 225 angeführten Formel:

Erkl. 225. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

(Siehe Formel 44 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in diese Formel für:

$$\alpha = 45^0$$

und für:

$$\beta = \frac{\alpha}{2}$$

so geht dieselbe über in:

$$\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos 45^0 \cos\frac{\alpha}{2} + \sin 45^0 \sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos 45^0 \cos\frac{\alpha}{2} + \sin 45^0 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{\cos 45^0 \cos\frac{\alpha}{2} + \sin 45^0 \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

oder

$$\cos 45^0 + \sin 45^0 \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

und wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 216:

$$\cos 45^0 = \sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist und dass

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}\left(1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{a+c}{b+c}}$$

$$1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{a+c}{b+c}} : \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2\cdot\frac{a+c}{b+c}}$$

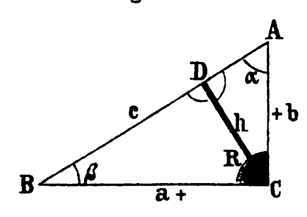
oder

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\sqrt{2\cdot\frac{a+c}{b+c}} - 1$$

nach welcher Gleichung α berechnet werden kann.

Aufgabe 228. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Summe s der beiden Katheten a und $b = 400,05$ m und die zur Hypotenuse gehörige Höhe $h = 160,22$ m; man soll die Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Figur 88.



Gegeben: $\begin{cases} a + b = s = 400,05 \text{ m} \\ h = 160,22 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 88, den Winkel α wie folgt:

Gemäss der Aufgabe ist:

$$\text{a)} \ldots a + b = s$$

Aus dem Dreieck ABC ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Schreibt man diese Relation in der Form:

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{1}$$

und bringt in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a+b}{b} = \frac{\operatorname{tg}\alpha + 1}{1}$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$\text{b) } \ldots \frac{s}{b} = 1 + \operatorname{tg} \alpha$$

Um nun die unbekannte Kathete b hieraus zu eliminieren, beachte man, dass sich aus dem Dreieck ADC die Relation:

$$\sin \alpha = \frac{h}{b}$$

ergibt und dass hiernach:

$$\text{c) } \ldots b = \frac{h}{\sin \alpha}$$

ist. Substituiert man diesen Wert für b in Gleichung b), so erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\text{d) } \ldots \frac{s \cdot \sin \alpha}{h} = 1 + \operatorname{tg} \alpha$$

in welcher nur noch der unbekannte Winkel α vorkommt.

Um die verschiedenen Funktionen des Winkels α auf eine einzige zurückzuführen (siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie und zwar den Abschnitt, welcher über die goniometrischen Bestimmungsgleichungen handelt) verfahre man weiter wie folgt:

Erkl. 226. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

(Siehe Formel 58 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 227. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

(Siehe Formel 57 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man nach der Erkl. 120:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

so erhält man:

$$\frac{s \cdot \sin \alpha}{h} = 1 + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

oder

$$\frac{s \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha}{h} = \cos \alpha + \sin \alpha$$

und wenn man nach den in den Erkl. 52, 226 und 227 angeführten goniometrischen Formeln für:

$$\sin \alpha \cdot \cos \alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

für:

$$\cos \alpha = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}$$

und für:

$$\sin \alpha = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

setzt:

$$\frac{s \cdot \sin 2\alpha}{2h} = \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}$$

Durch Quadratur dieser Gleichung erhält man ferner:

$$\left(\frac{s \cdot \sin 2\alpha}{2h}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} + \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}\right)^2$$

oder

$$\frac{s^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{4h^2} = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + 2 \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}} + \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$$

$$\frac{s^2 \cdot \sin^2 2\alpha}{2h^2} = 1 + \cos 2\alpha + 4 \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos 2\alpha)(1 - \cos 2\alpha)}{4}} + 1 - \cos 2\alpha$$

Erkl. 228. Aus der nebenstehenden Gleichung:

$$\frac{s^2\cdot\sin^2 2\alpha}{4h^2} = 1+\sin 2\alpha$$

löst man $\sin 2\alpha$ wie folgt:

$$\frac{s^2\sin^2 2\alpha}{4h^2} - \sin 2\alpha = 1$$

$$\sin^2 2\alpha - \frac{4h^2}{s^2}\cdot\sin 2\alpha = \frac{4h^2}{s^2}$$

$$\sin^2 2\alpha - \frac{4h^2}{s^2}\cdot\sin 2\alpha + \left(\frac{2h^2}{s^2}\right)^2 = \frac{4h^2}{s^2} + \left(\frac{2h^2}{s^2}\right)^2$$

$$\left(\sin 2\alpha + \frac{2h^2}{s^2}\right)^2 = \frac{4h^2}{s^2} + \frac{4h^4}{s^4}$$

$$\sin 2\alpha - \frac{2h^2}{s^2} = \pm\sqrt{\frac{4h^2}{s^2}\left(1+\frac{h^2}{s^2}\right)}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{2h^2}{s^2} \pm \frac{2h}{s}\sqrt{\frac{s^2+h^2}{s^2}}$$

$$\sin 2\alpha = -\frac{2h^2}{s^2} \pm \frac{2h}{s^2}\sqrt{s^2+h^2}$$

oder

$$\sin 2\alpha = \frac{2h}{s^2}\left(-h \pm \sqrt{s^2+h^2}\right)$$

Berücksichtigt man, dass das zweite, das negative Vorzeichen der Quadratwurzel, der Aufgabe nicht entsprechen kann, indem $\sin 2\alpha$ negativ würde und in diesem Fall der Winkel 2α ein Winkel sein müsste, der grösser als 180° ist (s. Erkl. 229), was aber hier nicht möglich sein kann, da der Winkel α als spitzer Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks k l e i n e r als 90°, folglich der doppelte Winkel 2α k l e i n e r als 180° sein muss, so erhält man:

$$\sin 2\alpha = \frac{2h}{s^2}\left(-h + \sqrt{s^2+h^2}\right)$$

Erkl. 229. Die Werte der Funktion „Sinus“ für alle zwischen 0° und 180° liegenden Winkel sind p o s i t i v, hingegen sind die Werte der Funktion „Sinus“ für alle zwischen 180° und 360° liegenden Winkel n e g a t i v. (Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt 10).

und wenn man reduziert und nach der in der Erkl. 37 angeführten algebraischen Formel für:

$$(1-\cos 2\alpha)(1+\cos 2\alpha) = 1^2 - \cos^2 2\alpha$$

setzt:

$$\frac{s^2\cdot\sin^2 2\alpha}{2h^2} = 2 + \frac{4}{2}\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$$

oder

$$\frac{s^2\cdot\sin^2 2\alpha}{2h^2} = 2 + 2\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 145:

$$1-\cos^2 2\alpha = \sin^2 2\alpha$$

und dividiert die ganze Gleichung mit 2, so geht vorstehende Gleichung über in:

$$\frac{s^2\cdot\sin^2 2\alpha}{4h^2} = 1 + \sqrt{\sin^2 2\alpha}$$

oder in:

$$\frac{s^2\cdot\sin^2 2\alpha}{4h^2} = 1 + \sin 2\alpha$$

und dies ist in bezug auf die Unbekannte $\sin 2\alpha$ eine u n r e i n q u a d r a t i s c h e Gleichung; löst man dieselbe in bezug auf $\sin 2\alpha$ auf, so erhält man nach der Erkl. 228:

$$\sin 2\alpha = \frac{2h}{s^2}\left(-h + \sqrt{s^2+h^2}\right)$$

Hat man mittels dieser Gleichung aus den für h und s gegebenen Zahlenwerten den Winkel 2α, bezw. den Winkel α berechnet, so kann man im weiteren nach der Aufgabe 206 verfahren oder man kann auch mittels der gegebenen Höhe h und jenem Winkel die Kathete b berechnen u. s. f.

Aufgabe 229. Die beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks differieren um 38,06 m, die zur Hypotenuse gehörige Höhe h misst 2,008 m; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:}\ \begin{cases} a - b = 38{,}06\ \text{m} \\ h = 20{,}008\ \text{m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 228.

Aufgabe 230. Die Summe der beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sei $s = 108{,}06$ dm, die nach der grösseren jener Katheten, nämlich nach b gezogene Schwer- oder Mittellinie s_b (s. Erkl. 210) sei $= 62{,}8$ dm. Man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:}\ \begin{cases} a + b = 108{,}06\ \text{dm} \\ s_b = 62{,}8\ \text{dm} \end{cases}$$

Andeutung. Zur Berechnung der gesuchten Kathete aus der gegebenen Mittellinie $s_b = 62{,}8$ dm und der Summe $a+b = 108{,}06$ dm bestehen die Bestimmungsgleichungen:

$$1)\ \ldots\ a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 62{,}8^2$$

und

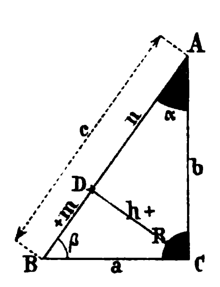
$$2) \ldots a + b = 108{,}06$$

Hat man hieraus a und b berechnet, so kann man leicht die Winkel und die Hypotenuse bezeichnen.

f) Aufgaben, in welchen Summen und Differenzen zwischen der zur Hypotenuse gehörigen Höhe, der Hypotenusensegmente und der Dreiecksseiten gegeben sind.

Aufgabe 231. Die Höhe h, welche zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehört und der eine Abschnitt m messen zusammen $s = 12$ m; der dem Abschnitt m nicht anliegende spitze Winkel α misst $28^0\,13'\,45''$; wie gross sind die Seiten und der Inhalt des Dreiecks?

Figur 89.



Gegeben: $\begin{cases} h + m = 12\text{ m} \\ \alpha = 28^0\,13'\,45'' \end{cases}$

Andeutung. Man beachte, siehe Figur 89, dass die zur Hypotenuse c gehörige Höhe h das rechtwinklige Dreieck in zwei andre rechtwinklige Dreiecke zerlegt, und dass man die Kathete a, in Rücksicht, dass mit dem Winkel α auch der Winkel β gegeben ist, aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC, wie in der Auflösung der Aufgabe 206 gezeigt wurde, berechnen kann. Ist die Kathete a berechnet, so kann man leicht mittels derselben die andre Kathete b und den Inhalt berechnen.

Aufgabe 232. In einem rechtwinkligen Dreieck sei die Summe der Kathete a und der zur Hypotenuse gehörigen Höhe $h = 0{,}684$ km, ferner sei der jener Kathete a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 4^0\,3'\,8{,}4''$. Man berechne die Seiten und den Inhalt.

Gegeben: $\begin{cases} a + h = 0{,}684\text{ km} \\ \alpha = 4^0\,3'\,8{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 231, und in Rücksicht, dass mit dem einen spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks auch der andere gegeben ist, im weiteren analog der Aufgabe 211.

Aufgabe 233. Welche Resultate ergibt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn nicht die Summe der Kathete a und der Höhe h, sondern deren Unterschied $= 0{,}684$ km beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} a - h = 0{,}684\text{ km} \\ \alpha = 4^0\,3'\,8{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 231 und 212.

Aufgabe 234. Die Summe der zur Hypotenuse gehörigen Höhe und des einen Segments, welches die Höhe von der Hypotenuse abschneidet, ist $= 40$ dm; die diesem Segment anliegende Kathete a ist $= 22{,}5$ dm; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und die Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h + m = 40\text{ dm} \\ a = 22{,}5\text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 231 und 222.

Aufgabe 235. Die Höhe h eines rechtwinkligen Dreiecks differiert mit dem einen Abschnitt, welchen sie von der Hypotenuse abschneidet, um 0,098 m und die diesem Ab-

Gegeben: $\begin{cases} h - m = 0{,}098\text{ m} \\ a = 2{,}608\text{ m} \end{cases}$

schnitt anliegende Kathete a misst 2,608 m; wie gross sind die beiden nicht gegebenen Seiten des Dreiecks, wie gross die Winkel und der Inhalt desselben?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 231 und 224.

Aufgabe 236. Die Summe der Kathete a und der Höhe h eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 0{,}89$ km; das Segment m, welches die Höhe h auf der Hypotenuse c abschneidet und der Kathete a anliegt, verhält sich zu dieser Kathete a wie $1:2$. Die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sind zu berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a + h = 0{,}89 \text{ km} \\ m : a = 1 : 2 \end{cases}$

Andeutung. Mittels des gegebenen Verhältnisses berechne man zunächst die Winkel des Dreiecks, dann verfahre man im weiteren analog wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 231 und 211 gesagt ist.

Aufgabe 237. Welche Resultate ergibt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn anstatt der Summe der Kathete a und der Höhe h, deren Differenz $= 0{,}89$ km beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} a - h = 0{,}89 \text{ km} \\ m : a = 1 : 2 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 212.

Aufgabe 238. Die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks misst zusammen mit dem Abschnitt m, welcher von der Hypotenuse durch die zugehörige Höhe h abgeschnitten wird und jener Kathete anliegt $= 4{,}683$ m, und das Verhältnis jenes Abschnitts m zur Höhe h ist $= 3:4$; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a + m = 4{,}683 \text{ m} \\ m : h = 3 : 4 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 211.

Aufgabe 239. Welche Resultate ergibt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn anstatt der Summe der Kathete a und des Abschnitts m deren Differenz $= 4{,}683$ m ist?

Gegeben: $\begin{cases} a - m = 4{,}683 \text{ m} \\ m : h = 3 : 4 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 212.

Aufgabe 240. Man kennt von einem rechtwinkligen Dreieck die Summe der zur Hypotenuse gehörigen Höhe h und einem der Abschnitte m und n, in welche diese Höhe die Hypotenuse zerlegt und zwar sei $h + m = 10{,}058$ dm; ferner ist bekannt, dass das Verhältnis zwischen dem Abschnitt m und der demselben anliegenden Kathete $a = 2{,}1 : 5{,}4$ ist. Man berechne die Seiten und Winkel des Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} h + m = 10{,}058 \text{ dm} \\ m : a = 2{,}1 : 5{,}4 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 206.

Aufgabe 241. Welche Resultate ergibt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn nicht die Summe $h + m$ bekannt ist, sondern wenn die Höhe h und der Abschnitt m um 2,009 dm differieren?

Gegeben: $\begin{cases} h - m = 2{,}009 \text{ dm} \\ m : a = 2{,}1 : 5{,}4 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 207.

Aufgabe 242. Die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks misst mit der zur Hypotenuse gehörigen Höhe h zusammen 8,234 dm und jene Kathete a verhält sich zur andern Kathete $b = 0{,}8 : 0{,}09$. Wie gross sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + h = 8{,}234 \text{ dm} \\ a : b = 0{,}8 : 0{,}09 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der Aufgaben 236 und 211.

Aufgabe 243. Welche Resultate ergibt die Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn nicht die Summe von a und h gegeben ist, sondern wenn der Unterschied zwischen der Kathete a und der Höhe $h = 0{,}68$ dm beträgt?

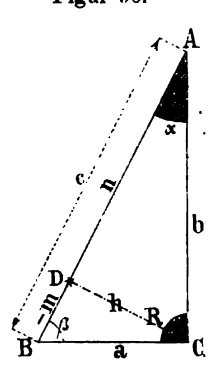
Gegeben: $\begin{cases} a - h = 0{,}68 \text{ dm} \\ a : b = 0{,}8 : 0{,}09 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgab… ist analog den Auflösungen der Aufgaben 23… und 212.

Aufgabe 244. Die Differenz der beiden Segmente m und n, in welche die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die zugehörige Höhe geteilt wird, betrage $d = 0{,}45$ m und der dem Segment n anliegende Winkel α sei $= 22^0\, 11'\, 12{,}4''$; wie gross sind die drei Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} m - n = d = 0{,}45 \text{ m} \\ \alpha = 22^0\, 11'\, 12{,}4'' \end{cases}$

Figur 90.



Andeutungen: 1). (analytisch) Stellt siehe Fig. 90, ABC das Dreieck dar, welche… den Bedingungen der Aufgabe entspricht, s… bestehen, in Rücksicht, dass β grösser als … ist und dass dem grösseren Winkel β d… kleinere Segment m der Hypotenuse anliege… muss, zur Berechnung der Segmente m und … die Relationen:

a) . . . $n - m = d$ ($= 0{,}45$ m)

b) . . . $\operatorname{tg} \alpha = \dfrac{h}{n}$

und

c) . . . $h^2 = m \cdot n$ (s. Erkl. 205)

Aus diesen drei Gleichungen kann ma… z. B. n wie folgt berechnen:

Aus Gleichung c) erhält man:

d) . . . $h = \sqrt{m \cdot n}$

diesen Wert für h in Gleichung b) substi… tuiert, gibt:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{m \cdot n}}{n}$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{m \cdot n}{n^2}}$$

oder

e) . . . $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\dfrac{m}{n}}$

Löst man diese Gleichung in bezug auf … auf, so erhält man:

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{m}{n}$$

oder

f) . . . $m = n \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$

Aus den Gleichungen a) und f) erhält ma… hiernach für n die Bestimmungsgleichung:

$$n - n \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha = d$$

und hieraus erhält man:

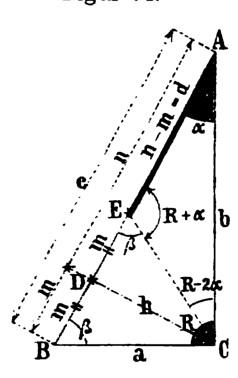
$$n\,(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) = d$$

oder

g) . . . $n = \dfrac{d}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$

mittels welcher Gleichung man das Segment … berechnen kann. In analoger Weise kann man m, und dann kann man mittels des für

Figur 91.



Erkl. 230. In Figur 91 ist:

b... $\sphericalangle BEC = \sphericalangle EBC = \beta$ oder $R - \alpha$

ferner ist:

b. $\sphericalangle AEC = 2R - \sphericalangle BEC = 2R - (R - \alpha)$
oder $= R + \alpha$

dann ist:

c) $\sphericalangle ECA = 2R - \sphericalangle AEC - \sphericalangle EAC$
$= 2R - (R + \alpha) - \alpha$
$= 2R - R - \alpha - \alpha$
oder
$= R - 2\alpha$

Erkl. 231. Eine goniometrische Formel heisst:
$$\sin(R + \alpha) = \cos\alpha$$
(Siehe Formel 35a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

die Hypotenuse $c = m + n$ sich ergebenden Werts die Katheten a und b berechnen.

2). (synthetisch) Man denke sich, siehe Figur 91, den kleinern Abschnitt m auf dem grössern Abschnitt n so abgetragen, wie die Figur 91 zeigt, und E mit C verbunden; man erhält alsdann das gleichschenklige Dreieck BCE und das schiefwinklige Dreieck AEC; in letzterem kennt man die Seite AE, dieselbe ist gleich der gegebenen Differenz $n - m = d$, und die sämtlichen Winkel; letztere haben die in der Figur 91 verzeichneten Werte (s. Erkl. 230); mittels der Sinusregel erhält man aus dem schiefwinkligen Dreieck AEC zur Berechnung der Kathete b die Relation:
$$\frac{b}{\sin(R + \alpha)} = \frac{d}{\sin(R - 2\alpha)}$$
oder, da nach der Erkl. 231:
$$\sin(R + \alpha) = \cos\alpha$$
und nach der Erkl. 19:
$$\sin(R - 2\alpha) = \cos 2\alpha$$
ist, die Relation:
$$\frac{b}{\cos\alpha} = \frac{d}{\cos 2\alpha}$$
woraus sich:
$$\text{A)} \;\ldots\; b = \frac{d \cdot \cos\alpha}{\cos 2\alpha}$$
ergibt.

Aufgabe 245. Die Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks misst 51,09 m, die ihr zugehörige Höhe teilt dieselbe in zwei Abschnitte m und n, deren Differenz = 30,8 m beträgt. Wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c = 51{,}09 \text{ m} \\ m - n = 30{,}8 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Aus der gegebenen Differenz der Abschnitte m und n und aus deren Summe, welche gleich der gegebenen Hypotenuse c ist, berechne man die Segmente m und n; dann bestimme man unter Anwendung des in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Satzes jede einzelne Kathete und hierauf mittels der berechneten Stücke die Winkel.

Aufgabe 246. Die Segmente m und n, in welche die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks durch die zugehörige Höhe zerlegt wird, differieren um $8^1/_6$ m und die an dem grösseren jener Segmente liegende Kathete a ist 15,9 m. Man berechne hieraus die Hypotenuse, die andere Kathete und die Winkel des Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} m - n = 8^1/_6 \text{ m} \\ a = 15{,}9 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Mittels der gegebenen Differenz der Hypotenusensegmente m und n, und mittels des in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Satzes bestimme man die Segmente m und n, indem man die sich hiernach ergebenden zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten m und n auflöst. Dann berücksichtige man, dass $m + n$ gleich der gesuchten Hypotenuse ist. Die andere

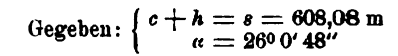
Kathete und die Winkel lassen sich alsdann mittels der berechneten und der gegebenen Stücke auf einfache Weise berechnen.

Aufgabe 247. Die zur Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks gehörige Höhe h misst 41,68 m und die Differenz der zwei Segmente, in welche diese Höhe die Hypotenuse teilt, ist $= 6{,}432$ m. Man berechne aus diesen Angaben die Seiten und Winkel des Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} h = 41{,}68 \text{ m} \\ m - n = 6{,}432 \text{ m} \end{cases}$

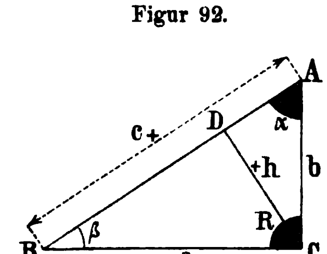
Andeutung. Durch die gegebene Differenz der Abschnitte m und n hat man eine Bestimmungsgleichung für m und n; eine zweite Bestimmungsgleichung erhält man, wenn man den in der Erkl. 205 angeführten planimetrischen Satz in Anwendung bringt. Aus diesen beiden Gleichungen bestimme man m und n. Dann berechne man aus m und h, bezw. aus n und h die Winkel und die Katheten des Dreiecks.

Aufgabe 248. Die Summe der Hypotenuse c eines rechtwinkligen Dreiecks und die zu ihr gehörige Höhe h beträgt $s = 608{,}08$ m; einer der spitzen Winkel sei $\alpha = 26^0\, 0'\, 48''$; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?



Gegeben: $\begin{cases} c + h = s = 608{,}08 \text{ m} \\ \alpha = 26^0\, 0'\, 48'' \end{cases}$

Figur 92.



Andeutung. Zunächst berechne man die Hypotenuse c wie folgt:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots c + h = s$$

Zur Elimination der Höhe h beachte man folgendes:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC, siehe Figur 92, erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{h}{b}$$

oder

$$\text{b)} \ldots h = b \cdot \sin\alpha$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

oder

$$\text{c)} \ldots b = c \cdot \cos\alpha$$

Substituiert man den durch Gleichung c) in c und α ausgedrückten Wert in Gleichung b), so erhält man für die Höhe h:

$$h = c \cdot \cos\alpha \cdot \sin\alpha$$

oder

$$h = \frac{c \cdot 2 \sin\alpha \cos\alpha}{2}$$

und in Rücksicht der in der Erkl. 52 angeführten Formel:

$$\text{d)} \ldots h = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2}$$

Setzt man diesen Wert für h in Gleichung a), so erhält man:

$$c + \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2} = s$$

oder

$$c\left(1+\frac{\sin 2\alpha}{2}\right)=s$$

$$c\cdot\frac{2+\sin 2\alpha}{2}=s$$

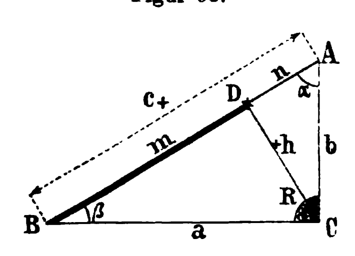
mithin:

$$\text{e)} \ldots c=\frac{2\cdot s}{2+\sin 2\alpha}$$

wonach man c berechnen kann; u. s. f.

Aufgabe 249. Die Hypotenuse c und die ihr zugehörige Höhe h messen zusammen $s = 640{,}887$ m, der eine Abschnitt m der Hypotenuse hat eine Länge von 489,004 m; wie gross sind die Seiten und die Winkel des Dreiecks?

Figur 93.



Gegeben: $\begin{cases} c+h=s=640{,}887\text{ m} \\ m=489{,}004\text{ m}\end{cases}$

Andeutung. Mittels der in der Aufgabe gegebenen Gleichung:

$$\text{a)} \ldots c+h=s$$

und der nach der Erkl. 205 sich ergebenden Gleichung:

$$\text{b)} \ldots h^2=m\cdot(c-m)$$

kann man zunächst die Höhe h berechnen; dann kann man aus m und h den Winkel α und die Kathete a berechnen u. s. f.

Man kann aber auch zunächst einen der Winkel, z. B. den Winkel β berechnen und zwar wie folgt:

Ist, siehe Figur 93, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man ausser der in der Aufgabe gegebenen Gleichung:

$\text{a}_1) \ldots c+h=s$

folgende weitere Gleichungen ansetzen:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{h}{m} \text{ (ergibt sich aus dem Dreieck } BCD\text{)}$$

oder

$\text{b}_1) \ldots h=m\cdot\operatorname{tg}\beta$

und

$$\cos\beta=\frac{a}{c} \text{ (ergibt sich aus dem Dreieck } ABC\text{)}$$

oder

$$\text{c)} \ldots c=\frac{a}{\cos\beta}$$

ferner:

$$\cos\beta=\frac{m}{a} \text{ (ergibt sich aus dem Dreieck } BCD\text{)}$$

oder

$$\text{d)} \ldots a=\frac{m}{\cos\beta}$$

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man zunächst:

$$\text{e)} \ldots c=\frac{m}{\cos^2\beta}$$

Substituiert man die Werte für c und h aus den Gleichungen e) und b_1) in Gleichung a_1), so erhält man:

$$\frac{m}{\cos^2\beta} + m \cdot \operatorname{tg}\beta = s$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher der gesuchte Winkel β vorkommt. Diese goniometrische Gleichung muss nun zur Bestimmung von β so umgeformt werden, dass nur eine goniometrische Funktion des unbekannten Winkels β vorkommt; dies kann man wie folgt:

$$m\left(\frac{1}{\cos^2\beta} + \operatorname{tg}\beta\right) = s$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta} + \operatorname{tg}\beta = \frac{s}{m}$$

$$\frac{1}{\cos^2\beta} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{s}{m}$$

$$\frac{1 + \sin\beta \cdot \cos\beta}{\cos^2\beta} = \frac{s}{m}$$

$$\frac{1 + \frac{\sin 2\beta}{2}}{\cos^2\beta} = \frac{s}{m} \quad \text{(s. Erkl. 52)}$$

$$\frac{2 + \sin 2\beta}{2\cos^2\beta} = \frac{s}{m}$$

$$\frac{2 + \sin 2\beta}{1 + \cos 2\beta} = \frac{s}{m} \quad \text{(s. Erkl. 226)}$$

$$2m + m\sin 2\beta = s + s \cdot \cos 2\beta$$

$$m \cdot \sin 2\beta - s \cdot \cos 2\beta = s - 2m$$

$$\sin 2\beta - \frac{s}{m} \cdot \cos 2\beta = \frac{s - 2m}{m}$$

Diese Gleichung kann man nunmehr, wie in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt L), gezeigt ist, durch Einführung des Hülfswinkels φ wie folgt weiter auflösen.

Man setze:

$$1) \ldots \frac{s}{m} = \operatorname{tg}\varphi \quad \text{(s. Erkl. 140)}$$

und berechne hieraus den Winkel φ: jene Gleichung geht in Rücksicht dessen über in:

$$\sin 2\beta - \operatorname{tg}\varphi \cdot \cos 2\beta = \frac{s - 2m}{m}$$

$$\sin 2\beta - \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \cdot \cos 2\beta = \frac{s - 2m}{m}$$

$$\sin 2\beta \cdot \cos\varphi - \cos 2\beta \cdot \sin\varphi = \frac{s - 2m}{m} \cdot \cos\varphi$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 232:

$$2) \ldots \sin(2\beta - \varphi) = \frac{s - 2m}{m} \cdot \cos\varphi$$

Hat man also nach Gleichung 1) den Hülfswinkel φ berechnet, so kann man aus Gleichung 2) den Winkel $(2\beta - \varphi)$ berechnen, wonach sich β leicht ergibt. Sind auf diese Weise die Winkel des Dreiecks berechnet, so kann man leicht die Seiten berechnen.

Erkl. 282. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha \cdot \sin\beta$$

(Siehe Formel 42 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

Setzt man diese Formel:

$$\alpha = 2\alpha$$
$$\beta = \varphi$$

so erhält man:

$$\sin(2\alpha - \varphi) = \sin 2\alpha \cdot \cos\varphi - \cos 2\alpha \sin\varphi$$

Aufgabe 250. Die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= 2{,}5$ m; die Summe der Hypotenuse c und des der Kathete a nicht anliegenden Segments n der Hypotenuse sei $s = 12{,}04$ m; man berechne die Seiten und Winkel dieses Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 2{,}5 \text{ m} \\ c + n = s = 12{,}04 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Zunächst berechne man die Hypotenuse c aus der durch die Aufgabe gegebenen Gleichung:

$$\text{a)} \ldots c + n = s$$

und aus der Gleichung, welche man erhält, wenn man den andern Abschnitt der Hypotenuse durch $c - n$ ausdrückt und den in der Erkl. 204 angeführten planimetrischen Satz in Anwendung bringt; diese hiernach erhaltene Gleichung heisst:

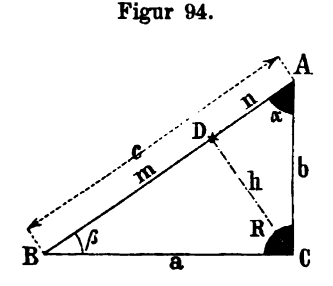
$$\text{b)} \ldots a^2 = c \cdot (c - n)$$

Hat man c berechnet, so kann man leicht die übrigen Stücke finden.

Oder man verfahre analog wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 248 und 249 angegeben ist.

Aufgabe 251. In einem rechtwinkligen Dreieck differieren die beiden Katheten a und b um $d = 39{,}08$ m und die beiden Abschnitte m und n der Hypotenuse differieren um $d_1 = 41{,}07$ m; wie gross sind die Seiten und die Winkel dieses Dreiecks, wenn der Abschnitt m der der Kathete a anliegende Abschnitt ist?

Figur 94.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 39{,}08 \text{ m} \\ m - n = d_1 = 41{,}07 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man bestimme zunächst die Winkel des Dreiecks wie folgt:

Gemäss der Aufgabe ist:

$$\text{a)} \ldots a - b = d$$

und

$$\text{b)} \ldots m - n = d_2$$

Ist nun, siehe Figur 94, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den Bedingungen entspricht, so erhält man ferner aus demselben:

$$\text{c)} \ldots a = c \cdot \sin\alpha \text{ (s. Erkl. 50)}$$

und

$$\text{d)} \ldots b = c \cdot \cos\alpha \text{ (s. Erkl. 51)}$$

Substituiert man die Werte für a und b aus den Gleichungen c) und d) in Gleichung a), so erhält man:

$$c \cdot \sin\alpha - c \cdot \cos\alpha = d$$

oder

$$1) \ldots \sin\alpha - \cos\alpha = \frac{d}{c}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD:

$$\cos\beta = \frac{m}{a}$$

oder

$$m = a \cdot \cos\beta$$

oder, wenn man für $\cos\beta = \sin\alpha$ und nach Gleichung c) für $a = c \cdot \sin\alpha$ setzt:

$$m = c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\alpha$$

oder

$$\text{e)} \ldots m = c \cdot \sin^2\alpha$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC ergibt sich weiter:

$$n = b \cdot \cos \alpha \text{ (s. Erkl. 51)}$$

oder, wenn man nach Gleichung d) für $b = c \cdot \cos \alpha$ setzt:

$$\text{f)} \ldots n = c \cdot \cos^2 \alpha$$

Substituiert man die Werte für m und n aus den Gleichungen e) und f) in Gleichung b), so erhält man:

$$c \cdot \sin^2 \alpha - c \cdot \cos^2 \alpha = d_1$$

oder

$$2) \ldots \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{d_1}{c}$$

Mit den Gleichungen 1) und 2) hat man somit zwei Gleichungen, in welchen die Unbekannten c und α vorkommen. Dividiert man zur Elimination von c die Gleichung 2) durch die Gleichung 1), so erhält man:

$$\frac{\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{d_1}{d}$$

und diese goniometrische Gleichung muss man in bezug auf eine trigonometrische Funktion des gesuchten Winkels α auflösen; dies kann man wie folgt:

Zerlegt man den Zähler links nach der Formel:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

so erhält man:

$$\frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)(\sin \alpha - \cos \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha} = \frac{d_1}{d}$$

oder

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \frac{d_1}{d}$$

Erkl. 233. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + \alpha)$$
$$\text{oder} = \sqrt{2} \cdot \cos (45^0 - \alpha)$$

(Siehe die Formeln 108 und 110 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man jetzt nach der Erkl. 233:

$$\sin \alpha + \cos \alpha = \sqrt{2}\,(\sin 45^0 + \alpha)$$

so erhält man:

$$\sqrt{2} \cdot \sin (45^0 + \alpha) = \frac{d_1}{d}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \sin (45^0 + \alpha) = \frac{d_1}{d \cdot \sqrt{2}}$$

mittels welcher Relation man den Winkel $(45^0 + \alpha)$ und somit auch α berechnen kann; u. s. f.

Aufgabe 252. Die Summe der Hypotenuse c und der Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks sei $s = 340$ dm, die Differenz der beiden Hypotenusensegmente m und n, von welchen m der Kathete a anliegt, sei $d = 245$ dm; wie gross sind die Winkel und Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c + a = s = 340 \text{ dm} \\ m - n = 245 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Man verfahre in analoger Weise, wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe gesagt wurde, und drücke sowohl die gegebene Summe s, als auch die gegebene Differenz d in die Hypotenuse c und in die spitzen Winkel α und β aus, eliminiere dann β und löse schliesslich die erhaltene goniometrische Gleichung auf.

Aufgabe 253. Die Summe der Hypotenuse c und der zugehörigen Höhe h sei $= 100$ m, die Differenz der beiden Hypotenusenabschnitte m und n sei $d = 75$ m; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c + h = s = 100\text{ m} \\ m - n = d = 75\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man verfahre in analoger Weise wie bei der Auflösung der Aufgabe 251 und berechne zuerst einen Winkel, indem man sowohl die gegebene Summe s als auch die gegebene Differenz d in einen jener spitzen Winkel des Dreiecks und in die Hypotenuse c ausdrückt und alsdann c eliminiert.

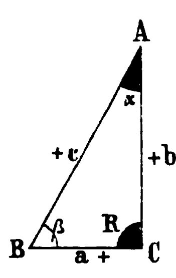
Man kann auch zuerst mittels den in der Aufgabe gegebenen Gleichungen und des in der Erkl. 205 angeführten planimetrischen Satzes die Hypotenuse c berechnen.

---

j) Aufgaben, in welchen die Summen oder Differenzen dreier Seiten gegeben sind.

Aufgabe 254. Der Umfang u eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 12 m und ein spitzer Winkel desselben misst $\alpha = 35^0$; wie gross sind die drei Seiten?

Figur 95.



Erkl. 234. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder laufenden Proportion (siehe Erkl. 88) verhält sich die Summe der ersten Glieder der Verhältnisse zur Summe der zweiten Glieder der Verhältnisse wie die Glieder irgend eines der Verhältnisse.“

Hat man z. B. die laufende Proportion:

$$\text{a)} \ldots \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{u}{d}$$

so ist nach jenem Satz:

$$\text{1)} \ldots \frac{x+y+z+u}{a+b+c+d} = \frac{x}{a} \text{ oder } = \frac{y}{b}$$

$$\text{oder } = \frac{z}{c} \text{ oder } = \frac{u}{d}$$

Hat man ferner z. B. die laufende Proportion:

$$\text{b)} \ldots \frac{x}{a} = \frac{-y}{-b} = \frac{-z}{-c}$$

so ist nach jenem Satz:

$$\text{2)} \ldots \frac{x-y-z}{a-b-c} = \frac{x}{a} \text{ oder } = \frac{-y}{-b}$$

$$\text{oder } = \frac{y}{b} \text{ oder } = \frac{-z}{-c} \text{ oder } = \frac{z}{c}$$

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = 22 = 12\text{ m} \\ \alpha = 35^0 \end{cases}$

Auflösung 1 (analytisch). Ist, s. Figur 95, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so besteht nach der Sinusregel die laufende Proportion:

$$\text{a)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin R}$$

und mittels dieser Relation kann man jede der drei Seiten a, b und c berechnen. Die Berechnung der Hypotenuse c z. B. gestaltet sich wie folgt:

Nach dem in der Erkl. 234 angeführten Summensatz ergibt sich aus der vorstehenden Proportion die Gleichung:

$$\frac{a+b+c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin R} = \frac{c}{\sin R}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass gemäss der Aufgabe:

$$a + b + c = u$$

und dass nach der Erkl. 99:

$$\sin R = 1$$

ist, und dass α und β Komplementwinkel sind, dass also nach Erkl. 19:

$$\sin\beta = \cos\alpha$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\frac{u}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{c}{1}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots c = \frac{u}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} \text{ (s. Erkl. 235)}$$

In Rücksicht der für u und α gegebenen Zahlenwerte ist hiernach:

$$c = \frac{12}{1 + \sin 35^0 + \cos 35^0}$$

oder, wenn man die Werte für $\sin 35^0$ und

Erkl. 235. In der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A):

$$\text{a)} \ldots c = \frac{u}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha}$$

kann man noch nach der in der Erkl. 233 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + \alpha)$$

setzen; man erhält hiernach:

$$\text{b)} \ldots c = \frac{u}{1 + \sqrt{2} \cdot \sin(45^0 + \alpha)}$$

oder man kann auch nach der in der Erkl. 233 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos(45^0 - \alpha)$$

setzen; man erhält alsdann:

$$\text{c)} \ldots c = \frac{u}{1 + \sqrt{2}\cos(45^0 - \alpha)}$$

Die Gleichungen b) und c) können bei den numerischen Ausrechnungen mit Vorteil dann angewandt werden, wenn α ein solcher Winkel, dessen Funktionswerte aus einer trigonometrischen Tafel direkt nicht entnommen werden können und deshalb mittels einer log. trig. Tafel berechnet werden müssen. Von diesen Gleichungen b) und c) wird man bei numerischen Berechnungen die Gleichung b) dann anwenden, wenn α kleiner als 45^0 ist; ist hingegen α grösser als 45^0, so wird man die Gleichung c) anwenden.

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$a = 5{,}01504 \cdot \sin 35^0$$

erhält man a, wie folgt:

$$\log a = \log 5{,}01504 + \log\sin 35^0$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 5{,}01504 &= 0{,}7002748 \\ +\log\sin 35^0 &= +9{,}7585913 - 10 \\ \hline \log a &= 10{,}4588661 - 10 \\ \text{oder } \log a &= 0{,}4588661 \\ & \phantom{= +0{,}45}8644 \\ & \phantom{= +0{,}4588}17 \\ & \phantom{= +0{,}4588}15 \end{aligned}$$

mithin:

$$a = 2{,}87651$$

Hülfsrechnung 2.

Aus

$$b = 5{,}01504 \cdot \cos 35^0$$

erhält man:

$$\log b = \log 5{,}01504 + \log\cos 35^0$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 5{,}01504 &= 0{,}7002748\,^{*)} \\ +\log\cos 35^0 &= +9{,}9133645 - 10 \\ \hline \log b &= 10{,}6136393 - 10 \\ \text{oder } \log b &= 0{,}6136393 \\ & \phantom{= +0{,}61}6304 \\ & \phantom{= +0{,}6136}89 \\ & \phantom{= +0{,}6136}84{,}8 \end{aligned}$$

mithin:

$$b = 4{,}10808$$

*) Den Logarithmus von c, bezw. von 5,01504 kann man aus der nebenstehenden logarithmischen Berechnung, nach welcher c berechnet wurde, entnehmen.

$\cos 35^0$ aus einer trigonometrischen Tafel entnimmt (siehe Erkl. 235):

$$c = \frac{12}{1 + 0{,}5736 + 0{,}8192}$$

$$c = \frac{12}{2{,}3928}$$

Hieraus kann man c weiter wie folgt berechnen:

$$\log c = \log 12 - \log 2{,}3928$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 12 &= 1{,}0791812 \\ -\log 2{,}3928 &= -0{,}3789064 \\ \hline \log c &= 0{,}7002748 \\ & \phantom{= -0{,}700}2709 \\ & \phantom{= -0{,}70027}39 \\ & \phantom{= -0{,}70027}34{,}8 \end{aligned}$$

mithin:

$$1) \ldots c = 5{,}01504 \text{ m}$$

Auf dieselbe Weise, wie mittels der Proportion a) c berechnet wurde, kann man auch die Katheten a und b berechnen; einfacher gestaltet sich diese Berechnung jedoch, wenn man den für die Hypotenuse c berechneten Wert benutzt und die Katheten a und b alsdann mittels der Relationen:

$$\text{B)} \ldots a = c \cdot \sin\alpha \quad \text{(s. Erkl. 50)}$$

und

$$\text{C)} \ldots b = c \cdot \cos\alpha \quad \text{(s. Erkl. 51)}$$

berechnet. Für die Kathete a erhält man hiernach:

$$a = 5{,}01504 \cdot \sin 35^0$$

oder nach der Hülfsrechnung 1:

$$2) \ldots a = 2{,}87651 \text{ m}$$

und

$$b = 5{,}01504 \cdot \cos 35^0$$

oder nach der Hülfsrechnung 2:

$$3) \ldots b = 4{,}10808 \text{ m}$$

Auflösung 2 (synthetisch). Anschliessend an die planimetrische Konstruktion eines rechtwinkligen Dreiecks aus der Summe der drei Seiten (dem Umfang) und einem spitzen Winkel desselben kann man die geforderten Stücke auch wie folgt berechnen.

Geometrische Analysis (s. Erkl. 200). Ist, siehe Figur 96, ABC das rechtwinklige Dreieck, von welchem der Winkel α und der Umfang u gegeben sind, und man denkt sich den Umfang u des Dreiecks dadurch gebildet, dass man, wie die Figur 96 zeigt (siehe Erkl. 220) auf der Verlängerung von a die Kathete b nach CD und die Hypotenuse c nach BF abträgt und dann A mit F und D verbindet, so erhält man das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck ACD und das schiefwinklige Dreieck ADF; von letzterem kennt man die Seite $FD = c + a + b = u$ und sämt-

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

269. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 268. — Seite 177—192. Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung v. Heft 268. — Seite 177—192. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, in welchen die Summen oder Differenzen irgend dreier Strecken gegeben sind; in welchen bezug auf den Flächeninhalt genommen ist (auch Teilungsaufgaben); ferner solche Aufgaben, welche sich auf eine Verbindung mehrerer rechtwinkliger Dreiecke beziehen.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

—— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. ——
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266 kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 236. In der Figur 96 ist:

1) . $\sphericalangle ADC = \sphericalangle CAD = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = \frac{R}{2}$

(s. Erkl. 217)

2) $\sphericalangle AFB = \sphericalangle BAF = \frac{1}{2} \sphericalangle ABC = \frac{\beta}{2} = \frac{R-\alpha}{2}$

(siehe Erkl. 217 und beachte, dass $\alpha + \beta = R$ ist)

und

3) $\sphericalangle FAD = \sphericalangle FAB + \sphericalangle BAC + \sphericalangle CAD$

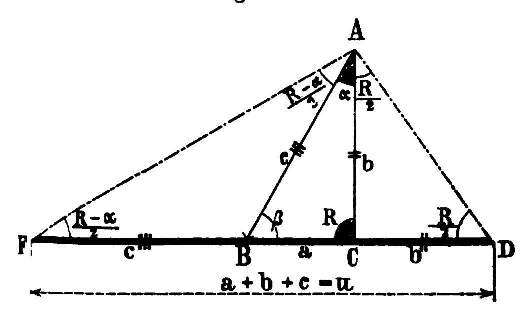
$$= \frac{R-\alpha}{2} + \alpha + \frac{R}{2}$$

$$= \frac{R - \alpha + 2\alpha + R}{2} = \frac{2R + \alpha}{2}$$

oder

$$= R + \frac{\alpha}{2}$$

Figur 96.



liche Winkel, welche nach der Erkl. 236 die in der Figur 96 verzeichneten Werte haben.

Nach der Sinusregel erhält man aus dem Dreieck ADF:

$$\frac{u}{\sin\left(R + \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\overline{AD}}{\sin\frac{R-\alpha}{2}}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 231:

$$\sin\left(R + \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$$

ist und wenn man jene Gleichnung nach AD auflöst:

$$\text{A)} \ldots \overline{AD} = u \cdot \frac{\sin\frac{R-\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Hat man hiernach die Strecke AD berechnet, so kann man aus dem rechtwinklig-gleichschenkligen Dreieck auf einfache Weise nach der Auflösung der Aufgabe 112 die Kathete b und mittels des für b gefundenen Wertes und des gegebenen Winkels die andern Seiten a und c berechnen.

Aufgabe 255. Der Umfang u eines rechtwinkligen Dreiecks misst 125,8 m, ein Winkel desselben = 18° 0′ 10″; wie gross sind die Seiten?

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 125{,}8 \text{ m} \\ \alpha = 18^0\, 0'\, 10'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 254.

Aufgabe 256. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines rechtwinkligen Dreiecks ist 120,8 m und es verhält sich die Kathete a zur Kathete b wie 4 : 5; wie gross sind die Seiten und Winkel?

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = 120{,}8 \text{ m} \\ a : b = 4 : 5 \end{cases}$

Andeutung. Man bestimme zuerst mittels des gegebenen Verhältnisses, mit welchem zugleich die Tangens, bezw. die Kotangens der spitzen Winkel des Dreiecks gegeben sind, diese Winkel, verfahre dann weiter, wie in Auflösung der Aufgabe 254 gezeigt wurde.

Aufgabe 257. Von einem rechtwinkligen Dreieck kennt man die Differenz zwischen der Summe der beiden Katheten a und b und der Hypotenuse c und zwar ist dieselbe $d = 14$ m; ferner kennt man einen der spitzen Winkel desselben, nämlich $\alpha = 68^0\, 9'\, 12''$. Man berechne hieraus die einzelnen Seiten jenes Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} a + b - c = d = 14 \text{ m} \\ \alpha = 68^0\, 9'\, 12'' \end{cases}$

Andeutung. Man verfahre im allgemeinen analog wie in der Auflösung der Aufgabe 254 gezeigt wurde, indem man aus der Proportion:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin R}$$

bezw. aus der Proportion:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{-c}{-\sin R}$$

nach der Erkl. 234 die Gleichung:

$$\frac{a+b-c}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin R}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\left[\text{oder} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ oder} = \frac{-c}{-\sin R}\right]$$

bildet und in derselben:

$$a+b-c=d$$
$$\sin\beta=\cos\alpha$$
$$\sin R=1$$

setzt, dann noch die Erkl. 235 berücksichtigt und aus der somit erhaltenen Gleichung die Kathete a bestimmt.

Aufgabe 258. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten mit a und b und dessen Hypotenuse mit c bezeichnet sind, ist $a+c-b=85{,}03$ m; ferner ist der jener Kathete a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 30^0\,41'\,32''$; wie gross sind die drei Seiten und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a+c-b=85{,}03\text{ m} \\ \alpha=30^0\,41'\,32'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 257.

Aufgabe 259. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten durch a und b und dessen Hypotenuse durch c bezeichnet sind, sei:

$$a+b-c=1000\text{ m}$$

ferner sei das Verhältnis:

$$c:a=10:1$$

man soll hieraus die Seiten und Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a+b-c=1000\text{ m} \\ c:a=10:1 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst mittels des gegebenen Verhältnisses die Winkel und verfahre dann, wie in der Andeutung zur Aufgabe 257 gesagt ist.

Aufgabe 260. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten mit a und b und dessen Hypotenuse mit c bezeichnet werden, ist:

$$a+b+c=40\text{ m}$$
$$\text{und } a+b-c=6\text{ m}$$

Wie gross sind die einzelnen Seiten und die Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c=40\text{ m} \\ a+b-c=6\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Durch Addition der beiden gegebenen Gleichungen erhält man $a+b$; setzt man diesen Wert in die erste der gegebenen Gleichungen, so erhält man c und man hat im weiteren die einfachere Aufgabe zu lösen: von einem Dreieck kennt man die Summe der beiden Katheten und die Hypotenuse; wie gross sind die Seiten und die Winkel dieses Dreiecks?

Aufgabe 261. In einem rechtwinkligen Dreieck, dessen Katheten mit a und b und dessen Hypotenuse mit c bezeichnet sind, sei:

$$a+b+c=140\text{ dm}$$
$$\text{und } a^2+b^2+c^2=7450\text{ dm}$$

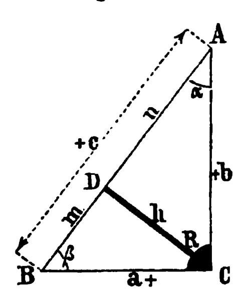
Man soll hieraus die Seiten und die Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c=140\text{ dm} \\ a^2+b^2+c^2=7450\text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Beachtet man, dass $a^2+b^2=c^2$ ist, so kann man in Rücksicht dessen aus der gegebenen zweiten Gleichung die Hypotenuse c berechnen. Setzt man diesen Wert für c in die gegebene erste Gleichung, so hat man im weiteren die einfachere Aufgabe zu lösen: von einem Dreieck kennt man die Summe der beiden Katheten a und b und die Hypotenuse c und soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Aufgabe 262. Der Umfang u eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 1004{,}5$ dm und die zur Hypotenuse gehörige Höhe h misst 105 dm; man berechne hieraus die Seiten und die Winkel des Dreiecks.

Figur 97.



Erkl. 287. Aus den rechtwinkligen Dreiecken ACD und ABC, siehe Figur 97, ergeben sich nach der Erkl. 50 die Relationen:

$$h = b \cdot \sin\alpha$$

und

$$b = c \cdot \sin\beta$$

und hieraus erhält man durch Substitution:

$$1) \ldots h = c \cdot \sin\beta \cdot \sin\alpha$$

woraus sich:

$$2) \ldots c = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

ergibt.

Erkl. 288. Bezeichnet man mit α, β und γ die drei Winkel eines beliebigen Dreiecks, so besteht die Relation:

$$1) \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 269 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Ist jenes Dreieck ein **rechtwinkliges** und sind α und β die **spitzen** Winkel dieses Dreiecks, so geht jene Formel für diesen Fall über in:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin R = 4 \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{R}{2}$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 99:

$$\sin R = 1$$

und dass nach der Erkl. 216

$$\cos\frac{R}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, so geht jene Gleichung über in:

$$\sin\alpha + \sin\beta + 1 = 4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

und hieraus erhält man:

$$2) \ldots \sin\alpha + \sin\beta + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$$

für den Fall, dass α und β die **spitzen Winkel eines rechtwinkligen Dreiecks** bedeuten.

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 1004{,}5 \text{ dm} \\ h = 105 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Man kann zwischen den Seiten, der Höhe h und den Abschnitten, in welche die Höhe h die Hypotenuse teilt, mit Hülfe planimetrischer Sätze eine entsprechende Anzahl von Gleichungen aufstellen, aus welchen sich die Seiten bestimmen lassen. Die Auflösung jener Gleichungen wird jedoch eine sehr mühsame sein; besser gelangt man bei diesen und ähnlichen Aufgaben zum Ziel, wenn man zuerst die Winkel zu bestimmen sucht, alsdann mittels derselben die Seiten berechnet.

Bei der Berechnung der Winkel α und β, siehe Figur 97, beachte man, dass man deren Summe kennt, indem:

$$1) \ldots \alpha + \beta = 90^0$$

ist, und dass man diese Winkel hiernach leicht bestimmen kann, wenn auch deren Differenz bekannt wäre. Diese Differenz kann man nun wie folgt bestimmen:

Nach der Sinusregel erhält man aus dem Dreieck ABC, siehe Figur 97, die Proportion:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin R}$$

und hieraus kann man nach der Erkl. 234 die Gleichung ableiten:

$$a) \ldots \frac{a + b + c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin R} = \frac{c}{\sin R}$$

Ferner besteht nach der Erkl. 237 zwischen der Höhe h, der Hypotenuse c und den Winkeln α und β die Relation:

$$b) \ldots c = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich, in Rücksicht, dass:

$$a + b + c = u$$

und dass nach der Erkl. 99 $\sin R = 1$ ist, die **goniometrische** Gleichung:

$$2) \ldots \frac{u}{\sin\alpha + \sin\beta + 1} = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

in welcher die unbekannten Winkel α und β vorkommen. Setzt man nunmehr nach der Erkl. 238 für:

$$\sin\alpha + \sin\beta + 1 = 2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{u}{2\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}} = \frac{h}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Formt man diese Gleichung wie folgt um:

$$u \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta = 2h\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}$$

und bringt in bezug auf $\sin\alpha$ und $\sin\beta$ die Formel:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \quad \text{(s. Erkl. 52)}$$

in Anwendung, so erhält man:

$$u\cdot 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} = 2h\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

oder

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{2h\sqrt{2}}{2\cdot u}$$

Setzt man nunmehr nach der in der Erkl. 239 angeführten goniometrischen Formel für:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

so erhält man:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{h\sqrt{2}}{u}$$

oder in Rücksicht, dass $\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0$ ist, dass also nach der Erkl. 216:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

gesetzt werden kann:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2} = \frac{h\sqrt{2}}{u}$$

und hieraus ergibt sich schliesslich:

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{h\sqrt{2}}{u} + \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2h\sqrt{2}+u\sqrt{2}}{2u}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sqrt{2}(2h+u)}{2u}$$

Setzt man in dieser Gleichung die für h und u gegebenen Zahlenwerte, so kann man hieraus $\frac{\alpha-\beta}{2}$, bezw. $\alpha-\beta$ berechnen. Hat man aus dem für $\alpha+\beta$ bekannten Wert ($=90^0$) und aus dem für $\alpha-\beta$ berechneten Wert die Winkel α und β bestimmt, so kann man mittels dieser für α und β gefundenen Werte und dem für h gegebenen Wert die Katheten a und b berechnen und dann die Hypotenuse c aus der Gleichung:

$$a+b+c=u$$

bestimmen.

Erkl. 239. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cdot\sin\beta$$

(Siehe Formel 194 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

) Aufgaben, in welchen die Summen oder Differenzen irgend dreier Strecken, als: Höhen, Hypotenusensegmente und Dreiecksseiten gegeben sind.

Aufgabe 263. In dem durch die Figur 98 dargestellten rechtwinkligen Dreieck ist:

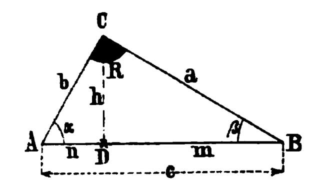
$$a + m + h = 12{,}456 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 66^0\,40'$$

Man soll die Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Figur 98.



Gegeben: $\begin{cases} a + m + h = 12{,}456 \text{ m} \\ \alpha = 66^0\,40' \end{cases}$

Andeutung. Man berücksichtige, dass mit dem Winkel α zugleich auch der Winkel β gegeben ist; berechne, siehe Figur 98, zuerst die Kathete a und zwar aus dem rechtwinkligen Dreieck CDB, ganz analog wie in der Aufgabe 254 gezeigt wurde; dann bestimme man mit Hülfe des für a gefundenen und mittels des für α gegebenen Wertes die übrigen Seiten.

Aufgabe 264. In dem durch die Figur 98 dargestellten rechtwinkligen Dreieck sei:

$$h + m - a = 50{,}08 \text{ dm}$$

und

$$\alpha = 8^0\,4'\,12''$$

Man soll die Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h + m - a = 50{,}08 \text{ dm} \\ \alpha = 8^0\,4'\,12'' \end{cases}$

Andeutung. Man verfahre analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 263 gesagt ist und berechne aus dem Dreieck CDB, wie in der Andeutung zur Aufgabe 257 gesagt ist, zuerst die Kathete a.

Aufgabe 265. In dem durch die Figur 98 dargestellten rechtwinkligen Dreieck sei:

$$h + m + a = 0{,}943 \text{ km}$$

und

$$c : b = 12 : 5$$

Man soll die Seiten und die Winkel des Dreiecks bestimmen.

Gegeben: $\begin{cases} h + m + a = 0{,}943 \text{ km} \\ c : b = 12 : 5 \end{cases}$

Andeutung. Man bestimme zuerst mittels des gegebenen Verhältnisses einen der Winkel und verfahre dann im weiteren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 263 gesagt ist.

---

i) Aufgaben, in welchen Bezug auf den Flächeninhalt genommen ist (auch Teilungsaufgaben).

Aufgabe 266. Der Flächeninhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks sei $= 28$ Ar; wie gross ist die Hypotenuse c dieses Dreiecks, wenn man weiss, dass der eine spitze Winkel α desselben $= 44^0\,38'\,20''$ ist?

Erkl. 240. Da dem Flächenmass „Ar" d. s. $= 100$ qm, kein Längenmass entspricht, so kann dies Flächenmass in keiner numerischen Berechnung mitgeführt werden, d. h. es dürfen bei einer numerischen Berechnung keine Masszahlen vorkommen, die sich auf „Ar" beziehen, wenn in dieser Rechnung auch Längenmasse vorkommen. Aus diesem Grund muss man in solchen Fällen die auf „Ar" sich beziehenden Masszahlen in solche Masszahlen umrechnen, welche sich auf ein Flächenmass beziehen, welchem ein Längenmass entspricht, wie z. B. das Quadratmeter, welchem das Längenmass „Meter" entspricht.

Gegeben: $\begin{cases} F = 28 \text{ Ar} \\ \alpha = 44^0\,38'\,20'' \end{cases}$

Auflösung. Nach der Formel 32 besteht zwischen dem gegebenen Flächeninhalt F des gedachten rechtwinkligen Dreiecks, der gesuchten Hypotenuse c und dem gegebenen spitzen Winkel α desselben die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{c^2}{4} \sin 2\alpha$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf die gesuchte Hypotenuse c auf, so erhält man der Reihe nach:

$$c^2 \cdot \sin 2\alpha = 4F$$

$$c^2 = \frac{4F}{\sin 2\alpha}$$

oder

$$\text{b)} \ldots c = \pm \sqrt{\frac{4F}{\sin 2\alpha}}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass ein **negativer** Wert für die gesuchte Hypotenuse keinen Sinn zulässt:

$$\text{A)} \ldots c = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2\alpha}}$$

Setzt man hierin die für F und α gegebenen Zahlenwerte, so erhält man in Rücksicht, dass 28 Ar = 2800 qm sind, siehe Erkl. 240:

$$c = \sqrt{\frac{4 \cdot 2800}{\sin (2 \cdot 44^0\, 38'\, 20'')}} \text{ Meter}$$

oder

$$c = \sqrt{\frac{11200}{\sin 89^0\, 16'\, 40''}}$$

und nach nebenstehender Hülfsrechnung:

$$1) \ldots c = 105{,}83 \text{ m}$$

Hülfsrechnung.

Aus

$$c = \sqrt{\frac{11200}{\sin 89^0\, 16'\, 40''}}$$

erhält man c, wie folgt:

$$\log c = \frac{1}{2} \cdot (\log 11200 - \log \sin 89^0\, 16'\, 40'')$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} & \qquad\quad (+10) \qquad\quad (-10) \\ \log 11200 &= \quad 4{,}0492180 \\ -\log \sin 89^0\, 16'\, 40'' &= \pm\, 9{,}9999655 \mp 10 \\ \hline & \quad\; 4{,}0492525 \\ & \qquad\qquad \cdot \frac{1}{2} \\ \hline \log c &= \quad 2{,}0246263 \\ & \qquad\quad 6088 \\ \hline & \qquad\qquad 175 \\ & \qquad\qquad 164 \\ \hline & \qquad\qquad\; 11 \\ & \qquad\qquad 12{,}3 \end{aligned}$$

mithin:

$$c = 105{,}8343$$

Aufgabe 267. Der Flächeninhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 250,04 qm, ein spitzer Winkel desselben ist $\alpha = 74^0\, 8'\, 14{,}5''$; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 250{,}04 \text{ qm} \\ \alpha = 74^0\, 8'\, 14{,}5'' \end{cases}$$

Andeutung. Zur Berechnung der Hypotenuse c benutze man die Flächeninhaltsformel 32 und löse dieselbe nach c auf. Zur Berechnung der Katheten a und b benutze man die Flächeninhaltsformeln 16 und 28 und löse dieselben bezw. nach a und b auf.

Aufgabe 268. Die eine Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks sei $a = 8{,}45$ cm; der Flächeninhalt desselben sei $F = 10{,}017$ qcm; wie gross sind die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 10{,}017 \text{ qcm} \\ a = 8{,}45 \text{ cm} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne nach der Formel 4 aus dem gegebenen Flächeninhalt und der gegebenen Kathete zunächst die andere Kathete; dann kann man aus den beiden Katheten die Hypotenuse und die Winkel berechnen; oder: man benutze zur Berechnung der Winkel und der Hypotenuse bezw. die Formeln 8, 16 und 28.

Aufgabe 269. Man kennt den Inhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks und die Hypotenuse c und soll hieraus die Katheten und Winkel des Dreiecks berechnen und zwar für den Fall, dass:

$$F = 100 \text{ qdm}$$
$$\text{und } c = 20{,}009 \text{ dm misst?}$$

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 100 \text{ qdm} \\ c = 20{,}009 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der vorigen Aufgabe 268.

Aufgabe 270. Die zur Hypotenuse gehörige Höhe eines rechtwinkligen Dreiecks ist $h = 10{,}1$ m, der Inhalt desselben 105,682 qm; welches sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 105{,}682 \text{ qm} \\ h = 10{,}1 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne aus dem gegebenen Flächeninhalt und der gegebenen Höhe zunächst die Hypotenuse c; dann kann man zur Berechnung eines der Winkel die Formel 32 benutzen; u. s. f.

Aufgabe 271. Das Verhältnis der beiden Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks sei $a:b = 6,453:3,012$; der Flächeninhalt F desselben sei $= 150$ qm. Wie gross sind die Seiten und die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} F = 150 \text{ qm} \\ a:b = 6,453:3,012 \end{cases}$

Andeutung. Mittels des gegebenen Verhältnisses berechne man zuerst die Winkel und benutze dann zur Berechnung der Seiten die betreffenden Inhaltsformeln 16, 28 und 32, welche für das rechtwinklige Dreieck aufgestellt wurden.

Aufgabe 272. Der Inhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 1200$ qm; die Summe der beiden Katheten a und b misst $s = 50$ m; wie gross sind die Seiten und die Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} F = 1200 \text{ qm} \\ a + b = s = 50 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man drücke den gegebenen Inhalt in die beiden gesuchten Katheten a und b aus, und berücksichtige, dass durch die Aufgabe in bezug auf a und b noch die weitere Bestimmungsgleichung $a + b = s$ gegeben ist. Hat man aus diesen Gleichungen a und b berechnet, so kann man auf einfache Weise die Hypotenuse c und die Winkel bestimmen.

Aufgabe 273. Die Differenz der Katheten a und b eines rechtwinkligen Dreiecks ist 20 m, der Inhalt F desselben ist 142 qm; wie gross sind jene Katheten, die Hypotenuse und die Winkel jenes Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} F = 142 \text{ qm} \\ a - b = 20 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 272.

Aufgabe 274. Die drei Seiten a, b und c eines rechtwinkligen Dreiecks messen zusammen $u = 100$ m, der Flächeninhalt F desselben ist $= 100$ qm; wie gross ist jede einzelne jener Seiten und wie gross sind die Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} F = 100 \text{ qm} \\ a + b + c = u = 100 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man bilde, wie in der Auflösung der Aufgabe 254 gezeigt wurde, die Gleichung:

$$\text{a)} \ldots \frac{u}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \frac{c}{1}$$

beachte ferner, dass nach der Formel 32:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha$$

ist. Substituiert man den sich aus Gleichung b) für c ergebenden Wert:

$$\text{c)} \ldots c = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2\alpha}}$$

in Gleichung a), so erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\frac{u}{\sin\alpha + \cos\alpha + 1} = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2\alpha}}$$

in welcher nur noch der unbekannte Winkel α vorkommt. Diese Gleichung muss zunächst nun so umgeformt werden, dass sie nur eine Funktion des unbekannten Winkels α enthält; diese Umformung kann man wie folgt vornehmen:

Berücksichtigt man, dass in dem gedachten Dreieck:

$$\cos\alpha = \sin\beta$$

Erkl. 241. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2\cos\alpha \cdot \cos\beta$$

(Siehe Formel 190 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

ist, und dass man hiernach und nach der Erkl. 238:

$$\sin\alpha + \cos\alpha + 1 = \sin\alpha + \sin\beta + 1 = \sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

setzen kann, so geht jene Gleichung in Rücksicht dessen über in:

$$\frac{u}{2\cdot\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \sqrt{\frac{4F}{\sin 2\alpha}}$$

bringt man in bezug auf $\sin 2\alpha$ die in der Erkl. 52 erwähnte Formel in Anwendung und quadriert die erhaltene Gleichung, so erhält man:

$$\frac{u^2}{4\cdot 2\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{4F}{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

oder, wenn man reduziert und

$$\cos\alpha = \sin\beta$$

setzt:

$$\frac{u^2}{4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{4F}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$$

setzt man ferner noch nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sin\frac{\beta}{2} = 2\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{u^2}{4\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}} = \frac{4F}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}$$

oder

$$\frac{u^2}{4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{F}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{u^2}{4F}$$

$$\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{u^2}{4F}$$

bringt man in bezug auf den Zähler links die in der Erkl. 239 angeführte Formel und in bezug auf den Nenner die in der Erkl. 241 angeführte Formel in Anwendung, indem man in jenen Formeln $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ und $\beta = \frac{\beta}{2}$ setzt so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{u^2}{4F}$$

berücksichtigt man jetzt, dass $\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^\circ$, dass also hiernach und nach der Erkl. 216:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{2} + \cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{u^2}{4F}$$

oder

$$4F\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \frac{4F}{2}\sqrt{2} = \frac{u^2}{2}\sqrt{2} + u^2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$4F\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - u^2\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{u^2}{2}\sqrt{2} + 2F\sqrt{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(4F-u^2) = \sqrt{2}\cdot\frac{u^2+4F}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sqrt{2}\cdot\frac{u^2+4F}{2(4F-u^2)}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{u^2+4F}{\sqrt{2}(4F-u^2)}$$

Mittels welcher Gleichung man $\frac{\alpha-\beta}{2}$, beziehungsweise $\alpha-\beta$ berechnen kann, da ferner $\alpha+\beta = 90^0$ ist, so kann man hiernach die Winkel α und β berechnen und dann nach der Aufgabe 254, oder mittels Benutzung der Flächeninhaltsformeln 16, 28 und 32 die drei Seiten a, b und c berechnen.

Aufgabe 275. Der Flächeninhalt F eines echtwinkligen Dreiecks sei $= 150$ qm, die ifferenz der Quadrate über den beiden Kaheten a und b betrage $d = 50$ qm; wie ross sind die Seiten und Winkel dieses reiecks?

Gegeben: $\begin{cases} F = 150 \text{ qm} \\ a^2 - b^2 = d = 50 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Zur Berechnung von a und b bestehen die Bestimmungsgleichungen:

$$\text{a)} \ldots a^2 - b^2 = d$$

und

$$\text{b)} \ldots \frac{ab}{2} = F$$

Aus denselben kann man die Katheten a und b, und mittels der für a und b gefundenen Werte kann man leicht die Hypotenuse c und die Winkel berechnen.

Aufgabe 276. Das Rechteck, welches an aus der Hypotenuse c und der einen athete a eines rechtwinkligen Dreiecks bilden nn, habe einen Inhalt f von 2050 qdm, der ner Kathete a anliegende Abschnitt m der ypotenuse messe 95 dm; wie gross sind die iten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c\cdot a = f = 2050 \text{ qdm} \\ m = 95 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Zur Berechnung von a und c bestehen die Bestimmungsgleichungen:

$$\text{a)} \ldots a\cdot c = f$$

und

$$\text{b)} \ldots a^2 = c\cdot m \quad \text{(s. Erkl. 204)}$$

Aus denselben kann man die Kathete a und die Hypotenuse c, und mittels der für a und c gefundenen Werte kann man leicht die andere Kathete und die Winkel berechnen.

Aufgabe 277. Der Inhalt F eines rechtwinkligen Dreiecks ist $= 154{,}4$ qm, die eine Kathete desselben ist gleich dem ihr nicht anliegenden Abschnitt der Hypotenuse. Man berechne die Seiten und die Winkel des Dreiecks.

Figur 99.

Gegeben: $\begin{cases} F = 154{,}4 \text{ qm} \\ b = m \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 99, ABC das rechtwinklige Dreieck, welches den gegebenen Inhalt F hat, und in welchem z. B. die Kathete b gleich dem ihr nicht anliegenden Segment m der Hypotenuse ist, so berechne man zunächst aus der letzten Angabe die Winkel des Dreiecks, wie folgt:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{a}$$

oder

$$\text{a)} \ldots b = a \cdot \operatorname{tg}\beta$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD die Relation:

$$\cos\beta = \frac{m}{a}$$

oder

$$\text{b)} \ldots m = a \cdot \cos\beta$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\text{c)} \ldots m = b$$

sein soll, so erhält man in Rücksicht dessen aus den Gleichungen a) und b):

$$a \cdot \operatorname{tg}\beta = a \cdot \cos\beta$$

oder

$$\text{d)} \;.\; \operatorname{tg}\beta = \cos\beta$$

und diese goniometrische Gleichung, in welcher zwei verschiedene Funktionen des unbekannten Winkels β vorkommen, kann man, damit nur eine Funktion des unbekannten Winkels vorkommt, wie folgt umformen:

$$\frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \cos\beta \text{ (s. Erkl. 120)}$$

$$\sin\beta = \cos^2\beta$$

$$\sin\beta = 1 - \sin^2\beta \text{ (s. Erkl. 145)}$$

$$\sin^2\beta + \sin\beta = 1$$

$$\sin^2\beta + \sin\beta + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\left(\sin\beta + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 + \frac{1}{4}$$

$$\sin\beta + \frac{1}{2} = \pm\sqrt{\frac{4+1}{4}}$$

$$\sin\beta = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$$

Reduziert man diese Gleichung und berücksichtigt man, dass der Winkel β ein spitzer Winkel sein muss, dass also nach der Erkl. 229 das zweite, das negative Vorzeichen der Wurzel keinen Sinn zulässt, so erhält man:

$$\sin\beta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$$

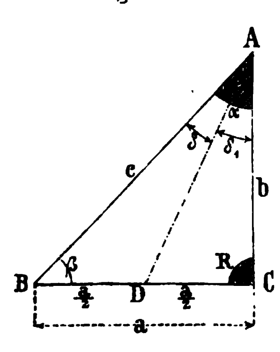
oder

$$A) \ldots \sin\beta = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5})$$

nach welcher Gleichung man den Winkel β berechnen kann. Ist β berechnet, so kann man mittels dieses Winkels β und der Formeln 20, 24 und 36 die Seiten a, b und c unabhängig von einander berechnen.

Aufgabe 278. In einem rechtwinkligen Dreieck ist ein Winkel $= 60^0$ und dieses Dreieck wird durch eine vom Scheitelpunkt jenes Winkels ausgehende Gerade halbiert. In welchem Verhältnis teilt diese Halbierungslinie jenen Winkel?

Figur 100.



Erkl. 242. Wenn gesagt ist, eine Linie halbiert oder teilt ein Dreieck (oder irgend eine andre Figur), so ist stets darunter zu verstehen, dass sich diese Teilung auf den Inhalt des Dreiecks (oder der Figur) bezieht.

Erkl. 243. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Dreiecke von gleichen Grundlinien und Höhen sind einander gleich."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 244. Soll eine durch eine Ecke eines Dreiecks gehende Gerade dieses Dreiecks halbieen, also nach der Erkl. 242 das Dreieck in zwei inhaltsgleiche Teile teilen, so muss nach dem in der Erkl. 243 angegebenen Satz diese Teillinie durch die Mitte der jener Ecke gegenüberliegenden Seite gehen. Ist z. B., in der Figur 100 AD die Halbierungslinie des Dreiecks ABC und nimmt man BD und DC als die Grundlinien, also AC als die gemeinschaftliche Höhe der hierdurch entstandenen Teildreiecke an, so müssen jene Grundlinien einander gleich sein.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 60^0 \\ \text{Das Dreieck wird von einer durch den Winkel } \alpha \text{ gehenden Transversale halbiert.} \end{cases}$

Auflösung. Um das Verhältnis der Winkel zu bestimmen, in welche der gegebene Winkel α durch die das Dreieck halbierende Gerade geteilt wird, kann man zunächst jene Winkel berechnen und zwar wie folgt:

Ist, siehe Figur 100, ABC ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem der Winkel $\alpha = 60^0$ ist, und ist AD die Gerade, welche das Dreieck halbiert, welche also nach den Erkl. 242 bis 244 die Seite BC halbiert, und bezeichnet man den Winkel DAC mit δ_1, so hat man zur Berechnung dieses Winkels δ_1 die Relationen:

$$a) \ldots \operatorname{tg}\delta_1 = \frac{a}{2 \cdot b}$$

und

$$b) \ldots \operatorname{tg}60^0 = \frac{a}{b}$$

Setzt man den aus Gleichung b) für a sich ergebenden Wert: $b \cdot \operatorname{tg}60^0$ in Gleichung a), so resultiert für δ_1 die Bestimmungsgleichung:

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{b \cdot \operatorname{tg}60^0}{2 \cdot b}$$

oder

$$c) \ldots \operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\operatorname{tg}60^0}{2}$$

und hieraus erhält man nach der Hülfsrechnung 1:

$$1) \ldots \delta_1 = 40^0\,53'\,36{,}2''$$

Da ferner:

$$\alpha = \delta_1 + \delta$$

ist, so erhält man für den andern Winkel δ:

$$\delta = \alpha - \delta_1$$
$$\delta = 60^0 - 40^0\,53'\,36{,}2''$$

oder

$$2) \ldots \delta = 19^0\,6'\,23{,}8''$$

Für das gesuchte Verhältnis hat man also:

$$\delta : \delta_1 = 19^0\,6'\,23{,}8'' : 40^0\,53'\,36{,}2''$$

oder nach den Hülfsrechnungen 2 und 3:

$$\delta : \delta_1 = 68783{,}8'' : 147216{,}2''$$

oder

$$A) \ldots \delta : \delta_1 = 687838 : 1472162$$

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\operatorname{tg}\delta_1 = \frac{\operatorname{tg}60^0}{2}$$

erhält man δ_1 wie folgt:

$$\log\operatorname{tg}\delta_1 = \log\operatorname{tg}60^0 - \log 2$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log\operatorname{tg}60^0 = & 10{,}2385606 - 10 \\ -\log 2 = & -\ 0{,}3010300 \\ \hline \log\operatorname{tg}\delta_1 = & 9{,}9375306 - 10 \\ & \quad 5042 \\ \hline & \quad 264 \\ & \quad 255 \\ \hline & \quad\ 9 \\ & \quad 8{,}5 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{rl} \delta_1 = & 40^0\,53'\,30'' \\ & +6'' \\ & +0{,}2'' \\ \hline \delta_1 = & 40^0\,53'\,36{,}2'' \end{array}$$

Hülfsrechnung 2.

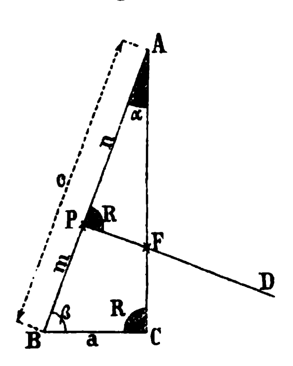
$$\begin{aligned} 40^0\,53'\,36{,}2'' &= 40\cdot 60\cdot 60'' + 53\cdot 60'' + 36{,}2'' \\ &= 144000 + 3180 + 36{,}2 \\ &= 147216{,}2'' \end{aligned}$$

Hülfsrechnung 3.

$$\begin{aligned} 19^0\,6'\,23{,}8'' &= 19\cdot 60\cdot 60'' + 6\cdot 60'' + 23{,}8'' \\ &= 68400'' + 360'' + 23{,}8'' \\ &= 68783{,}8'' \end{aligned}$$

Aufgabe 279. In welchem Verhältnis muss die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks geteilt werden, damit die in dem betreffenden Teilpunkt zur Hypotenuse errichtete Senkrechte das Dreieck halbiert?

Figur 101.



Gegeben: { Ein Dreieck wird durch eine zur Hypotenuse senkrechte Gerade halbiert.

Auflösung. Ist, siehe Figur 101, ABC ein rechtwinkliges Dreieck, und teilt der Punkt P die Hypotenuse c in zwei solche Abschnitte m und n, dass die in P auf c errichtete Senkrechte PD das Dreieck ABC halbiert, also in zwei inhaltsgleiche Teile teilt, so bestehen zur Berechnung des gesuchten Verhältnisses der Abschnitte m und n, wenn man den Inhalt des Dreiecks ABC mit F und den Inhalt des durch PD davon abgeschnittenen Dreiecks APF mit F_1 bezeichnet und diese Inhalte in die Abschnitte m und n und den Winkel α ausdrückt, die Relationen:

a) . . . $F = \frac{(m+n)^2}{4}\cdot\sin 2\alpha$ (vergleiche hiermit die Formel 32)

b) . . . $F_1 = \frac{n^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$ (vergl. hiermit die Formel 24 oder Formel 28)

und gemäss der Aufgabe:

c) . . . $F_1 = \frac{1}{2}F$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man die Relation:

1) . . . $\frac{n^2}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}\cdot\frac{(m+n)^2}{4}\cdot\sin 2\alpha$

und hieraus kann man das gesuchte Verhältnis $m:n$ wie folgt bestimmen:

Setzt man nach den in den Erkl. 120 und 52 vorgeführten goniometrischen Formeln:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

und

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

so geht die Gleichung 1) über in:

$$\frac{n^2}{2}\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(m+n)^2}{4}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Diese Gleichung reduziert, gibt:

$$\frac{n^2}{\cos\alpha} = \frac{(m+n)^2}{2}\cdot\cos\alpha$$

$$\frac{n^2}{(m+n)^2} = \frac{\cos^2\alpha}{2}$$

$$\sqrt{\frac{n^2}{(m+n)^2}} = \sqrt{\frac{\cos^2\alpha}{2}}$$

$$\frac{n}{m+n} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{m+n}{n} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\alpha}$$

Bringt man nunmehr den in der Erkl. 224 erwähnten Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{(m+n)-n}{n} = \frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

oder

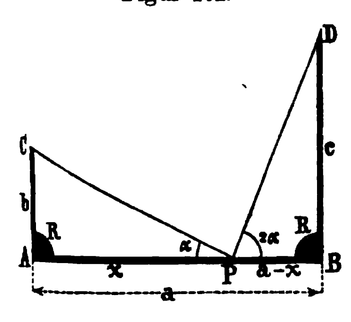
$$\text{A)} \ldots \frac{m}{n} = \frac{\sqrt{2}-\cos\alpha}{\cos\alpha}$$

---

k) Aufgaben, welche sich auf eine Verbindung mehrerer rechtwinkliger Dreiecke beziehen.

Aufgabe 280. In den Endpunkten A und B der 100 m messenden Strecke a, siehe Fig. 102, sind die Perpendikel $b = 20$ m und $c = 50$ m errichtet. Man soll auf der Strecke a den Punkt P so bestimmen, dass wenn man P mit C und D verbindet, der Winkel DPB doppelt so gross als der Winkel CPA ist; in welcher Entfernung von a muss dieser Punkt P liegen?

Figur 102.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 100\text{ m} \\ b = 20\text{ m} \\ c = 50\text{ m}\end{array}\right\}$ (s. Figur 102.)

Auflösung. Bezeichnet man, siehe Fig. 102, die gesuchte Entfernung des Punkts P von A mit x, also die Entfernung des Punkts P von B mit $a-x$, und den Winkel CPA mit α, also gemäss der Aufgabe den Winkel DPB mit 2α, so ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken CAP und DBP die Relationen:

$$\text{a)} \ldots . \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{x}$$

und

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}2\alpha = \frac{c}{a-x}$$

und man hat zwei Gleichungen mit den drei Unbekannten x, α und 2α. Aus diesen beiden Gleichungen kann man mit Hülfe der in der Erkl. 245 angeführten goniometrischen Formel, indem man nach derselben in Gleich. b) für:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

setzt, zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten herstellen; in Rücksicht dessen geht nämlich Gleichung b) über in:

$$\text{c)} \ldots \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{c}{a-x}$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung $\operatorname{tg}\alpha$, indem man dafür nach Gleichung a) für $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{x}$ setzt, so erhält man für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots \frac{2\cdot\frac{b}{x}}{1-\left(\frac{b}{x}\right)^2} = \frac{c}{a-x}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{2b}{x}(a-x) = c\cdot\left(1-\frac{b^2}{x^2}\right)$$

$$\frac{2ab}{x} - 2b = c - \frac{c\cdot b^2}{x^2}$$

$$2abx - 2bx^2 = cx^2 - c\cdot b^2$$

$$c\cdot b^2 = cx^2 + 2bx^2 - 2abx$$

$$x^2(c+2b) - 2abx = c\cdot b^2$$

$$x^2 - \frac{2ab}{c+2b}\cdot x = \frac{c\cdot b^2}{c+2b}$$

$$x^2 - \frac{2ab}{c+2b}\cdot x + \left(\frac{ab}{c+2b}\right)^2 = \frac{cb^2}{c+2b} + \left(\frac{ab}{c+2b}\right)^2$$

$$\left(x - \frac{ab}{c+2b}\right)^2 = \frac{cb^2}{c+2b} + \frac{(ab)^2}{(c+2b)^2}$$

$$x - \frac{ab}{c+2b} = \pm\sqrt{\frac{cb^2(c+2b)+a^2b^2}{(c+2b)^2}}$$

$$x = \frac{ab}{c+2b} \pm \frac{1}{c+2b}\sqrt{b^2(c^2+2bc+a^2)}$$

$$x = \frac{ab}{c+2b} \pm \frac{b}{c+2b}\sqrt{c^2+2bc+a^2}$$

oder

$$\text{A)} \ldots x = \frac{b}{c+2b}\left[a \pm \sqrt{c^2+2bc+a^2}\right]$$

In Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte ist also hiernach:

$$x = \frac{20}{50+2\cdot 20}\cdot\left[100 \pm \sqrt{50^2+2\cdot 20\cdot 50+100^2}\right]$$

oder

$$x = \frac{20}{90}\left[100 \pm \sqrt{2500+2000+10000}\right]$$

$$x = \frac{2}{9}\cdot\left[100 \pm \sqrt{14500}\right]$$

$$x = \frac{2}{9}\left[100 \pm 120{,}416\right]$$ (siehe nebenstehende Hülfsrechnung)

hieraus erhält man:

$$x_1 = \frac{2}{9}\cdot 220{,}416$$

$$x_1 = \frac{440{,}832}{9}$$

Erkl. 245. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie, Formel 53.)

Hülfsrechnung.

$$\log\sqrt{14500} = \frac{1}{2}\cdot\log 14500$$

Nun ist:

$$\log 14500 = 4{,}1613680 \quad \cdot\frac{1}{2}$$

$$\log\sqrt{14500} = 2{,}0806840$$

6626
214
216

mithin:

$$14500 = 120{,}416$$

oder

$$\text{A)} \ldots x_1 = 48{,}981 \text{ m}$$

und

$$x_2 = \frac{2}{9} \cdot -20{,}416$$

$$x_2 = -\frac{40{,}832}{9}$$

oder

$$\text{B)} \ldots x_2 = -4{,}537 \text{ m}$$

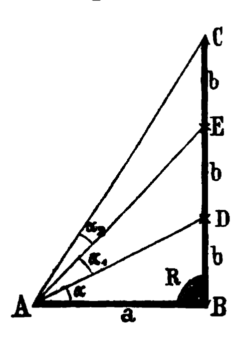
Der nach dieser Gleichung für x gefundene negative Wert lässt insofern eine Deutung zu, als es einen zweiten Punkt noch gibt, welcher nicht auf der Strecke AB selbst, sondern auf der über A verlängerten Strecke AB liegt.

Dieser zweite Punkt, welcher mit P_1 bezeichnet sei, erfüllt jedoch die Bedingungen der Aufgabe nicht ganz, indem bei Annahme desselben der Winkel $DP_1B = 2 \cdot \sphericalangle CP_1A$ wäre, was nicht gefordert ist.

Aufgabe 281. Errichtet man, s. Fig. 103, in dem Endpunkt B der Strecke $a = 2$ m die Senkrechte $BC = 3$ m und teilt dieselbe in drei gleiche Teile b und verbindet den Endpunkt C, sowie die Teilpunkte E und D mit dem andern Endpunkt A der Strecke a, so erhält man die Winkel α, α_1 und α_2. Man soll untersuchen, in welchem Verhältnis diese drei Winkel zu einander stehen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 2 \text{ m} \\ b = 1 \text{ m} \end{cases}$ (s. Figur 103).)

Figur 103.



Auflösung. Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABD, siehe Figur 103, ergibt sich zur Berechnung des Winkels α die Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe $a = 2$ m und $b = 1$ m misst:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

oder nach Hülfsrechnung 1:

$$\text{A)} \ldots \alpha = 26^0\, 33'\, 54{,}2''$$

Zur Berechnung des Winkels α_1 verfahre man wie folgt:

Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}(\alpha + \alpha_1) = \frac{2b}{a}$$

Setzt man nunmehr nach der in der Erkl. 246 angeführten goniometrischen Formel:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_1) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha_1}$$

so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{2b}{a}$$

und wenn man hierin nach Gleichung a) für

Hülfsrechnung 1.

Aus

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$$

erhält man α wie folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$$

$$\log \operatorname{tg}\alpha = \log 0{,}5$$

Nun ist:

$$\log 0{,}5 = 0{,}6989700 - 1$$
$$\text{oder } \log \operatorname{tg}\alpha = 9{,}6989700 - 10$$

```
  9480
   220
  210,4
    9,6
   10,5
```

mithin:

$$\alpha = 26^0\,33'\,50''$$
$$+4''$$
$$+0{,}2''$$
$$\text{oder } \alpha = 26^0\,33'\,54{,}2''$$

Erkl. 246. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

(Siehe Formel 45 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Hülfsrechnung 2.

Aus

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\cdot 1}{2^2 + 2\cdot 1^2}$$

erhält man α_1 wie folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2}{4+2}$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2}{6}$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha_1 = \log 2 - \log 6$$

Nun ist:

$$\log 2 = \overset{(+10)}{}\;0{,}3010300\;\overset{(-10)}{}$$
$$-\log 6 = -\,0{,}7781513$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha_1 = 9{,}5228787 - 10$$

```
  8379
   408
   351
    57
   56,2
```

mithin:

$$\alpha_1 = 18^0\,26'\,0''$$
$$+5''$$
$$+0{,}8''$$
$$\text{oder } \alpha_1 = 18^0\,26'\,5{,}8''$$

Hülfsrechnung 3.

Aus

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2\cdot 1}{2^2 + 6\cdot 1^2}$$

erhält man α_2 wie folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2}{4+6}$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2}{10}$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha_2 = \log 2 - \log 10$$

Nun ist:

$$\log 2 = \overset{(+10)}{}\;0{,}3010300\;\overset{(-10)}{}$$
$$-\log 10 = -\,1{,}0000000$$
$$\log \operatorname{tg}\alpha_2 = 9{,}3010300 - 10$$

mithin:

```
  09670
    630
```

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$ setzt, so erhält man für $\operatorname{tg}\alpha_1$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\frac{b}{a} + \operatorname{tg}\alpha_1}{1 - \frac{b}{a}\cdot \operatorname{tg}\alpha_1} = \frac{2b}{a}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\operatorname{tg}\alpha_1$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$\frac{b}{a}\cdot a + a\cdot \operatorname{tg}\alpha_1 = 2b - 2b\cdot\frac{b}{a}\cdot \operatorname{tg}\alpha_1$$
$$a \operatorname{tg}\alpha_1 + \frac{2b^2}{a}\operatorname{tg}\alpha_1 = 2b - b$$
$$a \operatorname{tg}\alpha_1 + \frac{2b^2}{a}\operatorname{tg}\alpha_1 = b$$
$$\left(a + \frac{2b^2}{a}\right)\cdot \operatorname{tg}\alpha_1 = b$$
$$\frac{a^2+2b^2}{a}\cdot \operatorname{tg}\alpha_1 = b$$

oder

$$\text{c)} \;\ldots\; \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{ab}{a^2+2b^2}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass $a = 2$ m und $b = 1$ m misst:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{2\cdot 1}{2^2 + 2\cdot 1^2}$$

oder nach der Hülfsrechnung 2:

$$\text{B)} \;\ldots\; \alpha_1 = 18^0\,26'\,5{,}8''$$

In analoger Weise wie α_1 berechne man jetzt α_2 wie folgt:

Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \alpha_1 + \alpha_2) = \frac{3b}{a}$$

Fasst man nunmehr die Summe $(\alpha + \alpha_1)$ als einen Winkel zusammen, so kann man nach der in der Erkl. 246 angeführten goniometrischen Formel für:

$$\operatorname{tg}[(\alpha+\alpha_1)+\alpha_2] = \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\alpha_1) + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\alpha_1)\cdot \operatorname{tg}\alpha_2}$$

setzen und man erhält:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\alpha_1) + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \operatorname{tg}(\alpha+\alpha_1)\cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3b}{a}$$

oder, wenn man nach vorstehender Gleichung b) für:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\alpha_1) = \frac{2b}{a}$$

setzt:

$$\frac{\frac{2b}{a} + \operatorname{tg}\alpha_2}{1 - \frac{2b}{a}\cdot \operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3b}{a}$$

Diese Gleichung in bezug auf $\operatorname{tg}\alpha$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

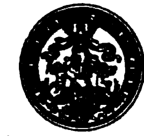
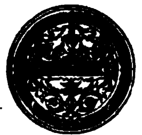
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

274. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 269. — Seite 193—208.
Mit 8 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 269. — Seite 193—208. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das rechtwinklige Dreieck, in welchen die Beweise trigonometr. Formeln und Sätze verlangt werden. — Aufgaben über das gleichschenklige Dreieck, in welchen das Verhältnis zweier Seiten; Beziehungen zwischen den Seiten und der Höhe; beide Höhen und Transversalen, sowie Summen und Differenzen von Dreiecksseiten und Höhen vorkommen.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

mithin:

$$\alpha_2 = 11^0\,18'\,30''$$
$$+5{,}8'' \text{ [s. nachst. Gleich. a)]}$$

oder $\alpha_2 = 11^0\,18'\,35{,}8''$

Die für 630 noch zu addierenden Sekunden x findet man aus der Proportion:

$$1094 : 630 = 10'' : x''$$

Man erhält:

$$x = \frac{630{,}10}{1094}$$
$$x = \frac{6300}{1094}$$
$$x = 5{,}758$$

oder abgerundet:

a) . . . $x = 5{,}8''$

Hülfsrechnung 4.

$$26^0\,33'\,54{,}2'' = 26\cdot 60\cdot 60'' + 33\cdot 60'' + 54{,}2'' = 93600 + 1980 + 54{,}2 = 95634{,}2''$$

Hülfsrechnung 5.

$$18^0\,26'\,5{,}8'' = 18\cdot 60\cdot 60'' + 26\cdot 60'' + 5{,}8'' = 64800'' + 1560'' + 5{,}8'' = 66365{,}8''$$

Hülfsrechnung 6.

$$11^0\,18'\,35{,}8'' = 11\cdot 60\cdot 60'' + 18\cdot 60'' + 35{,}8'' = 39600'' + 1080'' + 35{,}8'' = 40715{,}8$$

$$\frac{2b}{a}\cdot a + a\cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = 3b - 3b\cdot\frac{2b}{a}\operatorname{tg}\alpha_2$$
$$2b + a\operatorname{tg}\alpha_2 = 3b - \frac{6b^2}{a}\cdot\operatorname{tg}\alpha_2$$
$$2ab + a^2\operatorname{tg}\alpha_2 = 3ab - 6b^2\cdot\operatorname{tg}\alpha_2$$
$$a^2\operatorname{tg}\alpha_2 + 6b^2\operatorname{tg}\alpha_2 = 3ab - 2ab$$
$$(a^2 + 6b^2)\cdot\operatorname{tg}\alpha_2 = ab$$

oder

d) . . . $\operatorname{tg}\alpha_2 = \dfrac{ab}{a^2 + 6b^2}$

In Rücksicht, dass $a = 2$ m ist und $b = 1$ m ist, erhält man hiernach:

$$\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{2\cdot 1}{2^2 + 6\cdot 1^2}$$

oder nach Hülfsrechnung 3):

C) . . . $\operatorname{tg}\alpha_2 = 11^0\,18'\,35{,}8''$

Das gesuchte Verhältnis der drei Winkel α, α_1 und α_2 ist also:

$$\alpha : \alpha_1 : \alpha_2 = 26^0\,33'\,54{,}2'' : 18^0\,26'\,5{,}8'' : 11^0\,18'\,35{,}8''$$

oder nach den Hülfsrechnungen 4, 5 und 6:

D) . . $\alpha : \alpha_1 : \alpha_2 = 95634{,}2 : 66365{,}8 : 40715{,}8$

oder

$$\alpha : \alpha_1 : \alpha_2 = 956342 : 663658 : 407158$$

Das durch diese Proportion ausgedrückte Zahlenverhältnis für die drei Winkel kann man noch vereinfachen, wenn man den grössten gemeinschaftlichen Teiler dieser drei Zahlen sucht und diese Zahlen durch denselben dividiert. Dividiert man durch den gemeinschaftlichen Teiler 2, so erhält man für das gesuchte Verhältnis:

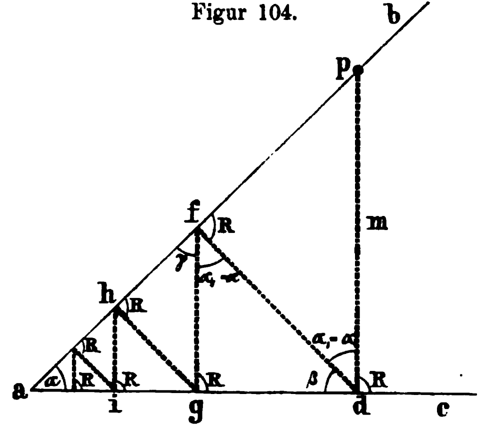
$$\alpha : \alpha_1 : \alpha_2 = 478171 : 331829 : 203579$$

Für dieses Verhältnis kann man noch Näherungswerte berechnen, siehe Kleyers Lehrbuch der Kettenbrüche und Teilbruchreihen.

Aufgabe 282. Von einem Punkt p, siehe Figur 104, der auf einem Schenkel des Winkels $\alpha = 60^0$ liegt, wird auf den andern Schenkel eine Senkrechte gefällt, und hierauf wird aus dem Fusspunkt dieser Senkrechten auf den ersten Schenkel wieder eine Senkrechte gefällt u. s. f. bis ins Unendliche. Wie gross ist die Summe dieser unendlich vielen Senkrechten, wenn die Länge der ersten Senkrechten $m = 20$ cm beträgt?

Andeutung. Diese trig. Aufgabe gehört ihrem Wesen nach in das Gebiet der geometrischen Progressionen, sie ist vollständig gelöst in Kleyers Lehrbuch der arithmetischen und geometrischen Progressionen, Seite 47.

Figur 104.



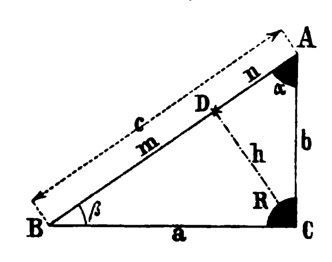
Aufgabe 283. Man soll die Summe der Projektionen berechnen, welche die in Aufgabe 282 erwähnten Perpendikel auf den Winkelschenkeln bilden, wenn, siehe Fig. 104, die Entfernung d des Punkts p vom Scheitel des Winkels $\alpha = 40$ cm misst.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung zur vorigen Aufgabe.

l) Aufgaben, in welchen die Beweise gewisser, auf das rechtwinklige Dreieck Bezug habender trigonometrischer Formeln und Sätze verlangt werden.

Anmerkung 14. In sämtlichen in diesem Abschnitt enthaltenen Aufgaben haben die Buchstaben a, b, c, α, β und h die aus nachstehender Figur 105 leicht erkennbaren Bedeutungen.

Figur 105.



Aufgabe 284. Man soll in Rücksicht der vorstehenden Anmerkung die Richtigkeit der Relation:

$$\operatorname{tg}(\alpha - 45^0) = \frac{a-b}{a+b}$$

nachweisen.

Erkl. 247. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot(\cos 45^0 - \alpha)$$

(Siehe Formel 110 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 248. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(\alpha - 45^0)$$

(Siehe Formel 111 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck, siehe Figur 105, ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

formt man diese Gleichung in Rücksicht der Erkl. 120 wie folgt um:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a}{b}$$

und bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha - \cos\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{a-b}{a+b}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der in der Erkl. 247 und 248 angeführten Formeln:

$$\frac{\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha - 45^0)}{\sqrt{2}\cdot\cos(45^0 - \alpha)} = \frac{a-b}{a+b}$$

oder, da nach der Erkl. 249 $\cos(45^0 - \alpha) = \cos(\alpha - 45^0)$ ist:

Erkl. 249. Nach der Erkl. 126 besteht die Relation:

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

hiernach ist auch:

$$\cos[-(45^0 - \alpha)] = \cos(45^0 - \alpha)$$

oder

$$\cos(-45^0 + \alpha) = \cos(45^0 - \alpha)$$

mithin:

$$\cos(\alpha - 45^0) = \cos(45^0 - \alpha)$$

$$\frac{\sin(\alpha - 45^0)}{\cos(\alpha - 45^0)} = \frac{a-b}{a+b}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 120:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}(\alpha - 45^0) = \frac{a-b}{a+b}$$

was zu beweisen war.

Aufgabe 285. Man soll in Rücksicht der vorstehenden Anmerkung 14 die Richtigkeit der Relation:

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

nachweisen.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck, siehe Figur 105, ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

formt man diese Gleichung wie folgt um:

$$\frac{c}{a} = \frac{1}{\sin\alpha}$$

und bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Differenzen- und Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{c-a}{c+a} = \frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}$$

Erkl. 250. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} = \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(Siehe Formel 131 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Bringt man nunmehr in bezug auf den rechten Quotienten die in der Erkl. 250 vorgeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{c-a}{c+a} = \operatorname{tg}^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

oder

$$\frac{c-a}{c+a} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

oder, da nach der Erkl. 15:

$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{\operatorname{ctg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

und da hierin nach der Erkl. 19:

$$\operatorname{ctg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)$$

gesetzt werden kann:

$$\text{A)} \ldots \frac{c-a}{c+a} = \frac{\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$$

nämlich die zu beweisende Relation.

Man kann dieselbe auch mittels des Tangentensatzes herleiten, wobei man berücksichtigen muss, dass $\beta = 90^0 - \alpha$ ist.

Aufgabe 286. Man soll in Rücksicht der vorstehenden Anmerkung 14 die Richtigkeit der Relation:

$$a = \frac{(a+b)\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha - 45^0)}$$

nachweisen.

Andeutung. Man benutze die aus dem Dreieck, siehe Figur 105, sich ergebende Relation:

$$\frac{a}{b} = \operatorname{tg}\alpha$$

forme dieselbe wie folgt um:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

bringe dann den in der Erkl. 251 angeführten Summensatz in Anwendung, wonach man:

$$\frac{a+b}{a} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

erhält; löse schliesslich diese Gleichung nach a auf und bringe in bezug auf $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ die in der Erkl. 233 erwähnte goniometrische Formel in Anwendung.

Erkl. 251. Ein Lehrsatz aus der Proportionslehre heisst:

„In jeder Proportion verhält sich die Summe oder Differenz der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe oder Differenz der Glieder des zweiten Verhältnisses wie ein paar homologe Glieder.“

Besteht die Proportion:

$$a : b = c : d$$

so ist nach diesem Satz:

$$1) \ldots \frac{a \pm b}{c \pm d} = \frac{a}{c} \left(\text{oder } = \frac{b}{d}\right)$$

oder, wenn man die **inneren** Glieder dieser Proportion vertauscht:

$$2) \ldots \frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

oder, wenn man beide Verhältnisse dieser Proportion umkehrt:

$$3) \ldots \frac{a}{a \pm b} = \frac{c}{c \pm d}$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Buchstabenrechnung.)

Aufgabe 287. Desgleichen:

$$b = \frac{(a+b)\cos\alpha}{\sqrt{2}\cos(\alpha - 45^0)}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 286.

Aufgabe 288. Desgleichen:

$$a = \frac{(a-b)\sin\alpha}{\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha - 45^0)}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 286.

Aufgabe 289. Desgleichen:

$$b = \frac{(a-b)\cos\alpha}{\sqrt{2}\cdot\sin(\alpha - 45^0)}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ebenfalls analog der Auflösung der Aufgabe 286.

Aufgabe 290. Desgleichen:

$$c = \frac{a+c}{2\cos^2\frac{\beta}{2}}$$

Andeutung. Man benutze die aus dem Dreieck ABC, siehe Figur 105, sich ergebende Relation:

$$\cos\beta = \frac{a}{c}$$

schreibe dieselbe als die Proportion:

$$\frac{a}{c} = \frac{\cos\beta}{1}$$

bringe dann den in der Erkl. 251 angeführten Summensatz in Anwendung und setze schliesslich nach der Erkl. 252:

$$1+\cos\beta = 2\cos^2\frac{\beta}{2}$$

Erkl. 252. Eine goniometrische Formel heisst:

$$1+\cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

(Siehe Formel 65ᵃ in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 291. Desgleichen:

$$c = \frac{c-a}{2\sin^2\frac{\beta}{2}}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 290.

Aufgabe 292. Desgleichen:

$$c = \frac{a+b}{\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45^0)}$$

Andeutung. Die in dieser Aufgabe gegebene Relation kann man herleiten, wie in der Auflösung der Andeutung zur Aufgabe 286 gesagt wurde.

Aufgabe 293. Desgleichen:

$$c = \frac{a-b}{\sqrt{2}\cdot\cos(\alpha-45^0)}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 292.

Aufgabe 294. Desgleichen:

$$a+h = c\left(\sin\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\right)$$

Andeutung. Man drücke mit Hülfe der Figur 105 zuerst a in α und c aus, desgl. drücke man h in a und α (bezw. in a und β) und mit Hülfe der zuerst erhaltenen Relation in c und α aus, addiere die somit erhaltenen Relationen und forme die hiernach erhaltene Gleichung entsprechend um.

Aufgabe 295. Desgleichen:

$$a+h = \frac{2b^2\sin\alpha\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}}{c\cdot\cos^2\alpha}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 296. Desgleichen:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC, siehe Figur 105, ergeben sich die Relationen:

$$\text{a)} \; \ldots\ldots \; \frac{b}{c} = \sin\beta$$

und

$$\text{b)} \; \ldots\ldots \; \frac{b}{c} = \cos\alpha$$

aus welchen sich durch Multiplikation die weitere Relation ergibt:

$$\frac{b^2}{c^2} = \sin\beta\cdot\cos\alpha$$

Multipliziert und dividiert man die rechte Seite dieser Gleichung mit $\sin\alpha$, so erhält man:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

und nach der Erkl. 19:

$$\sin\alpha = \cos\beta$$

so erhält man:

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{\sin\beta}{\cos\beta}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{2}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 120:

$$\text{A)} \ldots\ldots \frac{b^2}{c^2} = \frac{1}{2}\sin 2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

nämlich die herzuleitende Relation.

Aufgabe 297. Desgleichen:

$$\frac{2ab}{c^2} = \sin 2\alpha$$

Andeutung. Man beachte, siehe Figur 105, dass:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{a}{c} = \cos\alpha$$

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{b}{c} = \sin\alpha$$

ist. Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen und mittels Anwendung der in der Erkl. 52 angeführten goniometrischen Formel erhält man die zu beweisende Relation.

Aufgabe 298. Desgleichen:

$$\frac{a^2}{bc} = \sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 299. Sind α, β und γ die drei Winkel eines gedachten Dreiecks und es besteht zwischen denselben die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$$

so muss jenes Dreieck ein rechtwinkliges sein. Diese Aussage ist zu beweisen.

Auflösung. Setzt man nach der in der Erkl. 253 vorgeführten goniometrischen Formel in der durch die Aufgabe gegebenen Relation für:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

so geht dieselbe über in:

$$\sin\gamma = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass α, β und γ die Winkel eines Dreiecks sind, dass also γ und $\alpha+\beta$ Supplementwinkel sind, dass man also hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$$

setzen kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener Gleichung die Beziehung:

$$\sin(\alpha+\beta) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Erkl. 253. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(Siehe Formel 185 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 254. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

(Siehe die Erkl. 52 oder die Formel 49 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in dieser Formel für:

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

so geht dieselbe über in:

$$\sin 2\cdot\frac{\alpha+\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und hieraus erhält man:

2) . . . $\sin(\alpha+\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Setzt man ferner in dieser Gleichung nach der Erkl. 254 für:

$$\sin(\alpha+\beta) = 2\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

und berücksichtigt man die Erkl. 120, so erhält man:

$$2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Reduziert man diese Gleichung und löst dieselbe dann in bezug auf $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$2\cdot\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = 1$$

$$\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{2}{4}$$

oder

1) . . . $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

Da man nun weiss, dass nach der Erkl. 216:

2) . . . $\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$

ist, so folgt aus diesen beiden Gleichungen, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 45^0$$

oder, dass:

3) . . . $\alpha+\beta = 90^0$

sein muss; ist aber die Summe jener Winkel α und β des gedachten Dreiecks $= 90^0$, so muss der dritte Winkel γ ebenfalls $= 90^0$ sein, d. h. das gedachte Dreieck muss ein rechtwinkliges sein.

Aufgabe 300. Sind in einem rechtwinkligen Dreieck die Masszahlen der Seiten drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen, so besteht in bezug auf den einen spitzen Winkel α dieses Dreiecks die Relation:

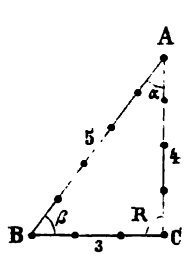
$$(1-\sin\alpha)\sin\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

Diese Aussage ist zu beweisen.

Auflösung. Ein rechtwinkliges Dreieck, bei welchem die Masszahlen der Seiten ganze Zahlen sind, ist ein rationales oder ein pythagoreisches Dreieck, siehe die Erkl. 174. Das einfachste pythagoreische Dreieck ist dasjenige, dessen Seiten die Masszahlen 3, 4 und 5 haben, welche Zahlen drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen sind, siehe Figur 106 und die Erkl. 255.

Die zu beweisende Relation kann man aus dem durch die Figur 106 dargestellten rationalen Dreieck hiernach wie folgt herleiten:

Figur 106.



Erkl. 255. Bezeichnet man die ganze Masszahl, welche der kleinsten der Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks entspricht, mit n, also die Masszahl, welche gemäss der Aufgabe 300 der andern Kathete entsprechen soll, mit $n+1$ und die Masszahl, welche der Aufgabe 300 gemäss der Hypotenuse entsprechen soll, mit $n+2$, so besteht, da das Dreieck rechtwinklig sein soll, zur Bestimmung jener ganzen Zahl n die Relation:

$$(n+2)^2 = n^2 + (n+1)^2$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf n auf, so erhält man für n den positiven Wert:

$$n = 3$$

Die Masszahlen, welche also den drei Seiten des der Aufgabe 300 entsprechenden, rechtwinkligen Dreiecks zukommen müssen, sind also:

für die eine Kathete: $n = 3$

für die andre „ $n+1 = 3+1$ oder $= 4$

und für die Hypotenuse: $n+2 = 3+2$ od. $= 5$

Aus der Figur 106 ergeben sich die Relationen:

a) . . . $\sin\alpha = \frac{3}{5}$

und

b) . . . $\cos\alpha = \frac{4}{5}$

Durch Addition derselben erhält man:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \frac{7}{5}$$

oder

c) . . . $\sin\alpha + \cos\alpha = 1 + \frac{2}{5}$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 142:

d) . . . für $1 = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

und dass nach der Figur 106

$$\text{für } \frac{4}{5} = \cos\alpha$$

dass also für: $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{2}\cos\alpha$

oder

e) . . . für $\frac{2}{5} = \frac{1}{2}\cos\alpha$

gesetzt werden kann, so geht in Rücksicht dessen die Gleichung c) über in:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha$$

und hieraus erhält man:

$$\sin\alpha - \sin^2\alpha + \cos\alpha - \cos^2\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$$

oder

A) $(1-\sin\alpha)\sin\alpha + (1-\cos\alpha)\cos\alpha = \frac{1}{2}\cos\alpha$

nämlich die herzuleitende Relation.

---

8). Aufgaben über das gleichschenklige und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck im allgemeinen.

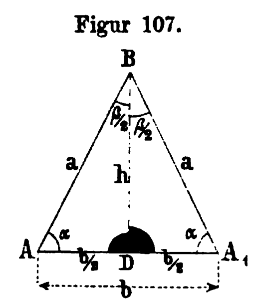
a) Aufgaben, in welchen das Verhältnis zweier Seiten vorkommt.

Aufgabe 301. Das Verhältnis des Schenkels a zur Basis b eines gleichschenkligen Dreiecks sei $= \sqrt{3} : \sqrt{5}$; wie gross muss der Scheitelwinkel eines solchen Dreiecks sein?

Gegeben: $a : b = \sqrt{3} : \sqrt{5}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 107, AA_1B ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem das Verhältnis eines der Schenkel a zur Basis $b = \sqrt{3} : \sqrt{5}$ ist, und man fällt die Höhe h, so teilt dieselbe das gleichschenk-

Figur 107.



lige Dreieck in die zwei rechtwinkligen Dreiecke. In dem Dreieck ADB ist nach vorstehendem das Verhältnis der Hypotenuse AB und der Kathete $AD = \sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{5}$, oder es ist hiernach das Verhältnis der Kathete AD zur Hypotenuse $AB = \frac{1}{2}\sqrt{5} : \sqrt{3}$ und dieses Verhältnis ist gleich dem Sinus des halben Scheitelwinkels β, man hat also zur Berechnung des gesuchten Scheitelwinkels β die Relation:

$$\text{A)} \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{5} : \sqrt{3}$$

wonach man $\frac{\beta}{2}$ berechnen und dann β bestimmen kann.

Aufgabe 302. In einem gleichschenkligen Dreieck sei der Scheitelwinkel $\beta = 10^0\,12'\,33{,}3''$; in welchem Verhältnis muss der Schenkel a zur Basis b eines solchen Dreiecks stehen?

Gegeben: $\beta = 10^0\,12'\,33{,}3''$

Andeutung. Ist, siehe Figur 107, AA_1B ein gleichschenkliges Dreieck in welchem der Scheitelwinkel β gleich dem gegebenen ist, und man fällt die Höhe h, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses die Relation:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2} : a$$

oder

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}$$

formt man diese Relationen wie folgt um:

$$\frac{b}{a} = 2\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}}{1}$$

oder

$$\text{A)} \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{1}{2\sin\frac{\beta}{2}}$$

so kann man hiernach das gesuchte Verhältnis $a : b$ berechnen.

---

b) Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen den Seiten und der Höhe gegeben sind.

Aufgabe 303. Wie gross ist der Scheitelwinkel eines gleichschenkligen Dreiecks und in welchem Verhältnis muss die Basis zum Schenkel stehen, wenn die Basis dieses Dreiecks gleich der Höhe desselben sein soll?

Gegeben: $b = h$

Andeutung. Ist, siehe Figur 107, AA_1B ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Höhe h gleich der Grundlinie b ist, so

ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB zur Berechnung des gesuchten Scheitelwinkels β die Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2} : h$$

oder, da gemäss der Aufgabe $h = b$ ist:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2} : b$$

oder

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}$$

mittels welcher Relation der Winkel β berechnet werden kann.

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses zwischen der Basis b und dem Schenkel a ergibt sich ferner aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD die Relation:

$$\text{c)} \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2} : a$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{b}{2a} = \sin\frac{\beta}{2}$$

$$\frac{b}{2a} = \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{1}$$

oder

$$\text{B)} \ldots b : a = 2 \cdot \sin\frac{\beta}{2} : 1$$

mittels welcher Relation man das gesuchte Verhältnis $b : a$ berechnen kann, wenn man in derselben den nach Gleichung A) berechneten Wert für $\frac{\beta}{2}$ substituiert.

Aufgabe 304. Die halbe Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks ist gleich dem kleineren Abschnitt des nach dem goldenen Schnitt geteilten Schenkels. Wie gross sind die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: { Eine geometrische Beziehung zwischen der Basis und dem Schenkel.

Andeutung. Bezeichnet man den Schenkel des gedachten gleichschenkligen Dreiecks mit a, den kleineren Abschnitt desselben, welchen man erhält, wenn man sich den Schenkel nach dem goldenen Schnitt geteilt denkt (s. Erkl. 256), mit m, also den andern, den grösseren Abschnitt desselben mit $(a - m)$, so besteht nach der Erkl. 256 die Relation:

$$\text{a)} \ldots a : (a - m) = (a - m) : m$$

Bezeichnet man ferner die Basis des Dreiecks mit b, also die halbe Basis mit $\frac{b}{2}$, so ist gemäss der Aufgabe und nach vorstehendem:

$$\text{b)} \ldots \frac{b}{2} = m$$

Diese beiden Gleichungen sind direkt durch die Aufgabe gegeben.

Will man nun einen der geforderten Winkel des Dreiecks berechnen, so muss man den Wert einer trig. Funktion desselben, bezw. nach der Definition der trig. Funktionen, das Verhältnis der **halben Grundlinie** b zu dem Schenkel a bestimmen, indem z. B., siehe Figur 107:

$$\text{c)} \ldots \cos\alpha = \frac{\frac{b}{2}}{a}$$

ist.

Dieses Verhältnis, $\frac{b}{2}:a$, bezw. den $\cos\alpha$ kann man aus den vorstehenden Gleichungen a) und b) wie folgt berechnen:

In Rücksicht der Gleichung b) geht Gleichung a) über in:

$$a:\left(a-\frac{b}{2}\right)=\left(a-\frac{b}{2}\right):\frac{b}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$a\cdot\frac{b}{2}=\left(a-\frac{b}{2}\right)^2$$

$$a\cdot\frac{b}{2}=a^2-2\cdot a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2$$

$$a^2-3\cdot a\cdot\frac{b}{2}+\left(\frac{b}{2}\right)^2=0$$

Dividiert man diese Gleichung zum Zweck der Bildung jenes Verhältnisses $\frac{b}{2}:a$ durch a^2, so erhält man:

$$1-3\cdot\frac{\frac{b}{2}}{a}+\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{a^2}=0 \text{ (s. Erkl. 257)}$$

oder

$$\text{d)} \ldots \left(\frac{\frac{b}{2}}{a}\right)^2-3\cdot\frac{\frac{b}{2}}{a}=-1$$

Setzt man hierin nach Gleichung c) für:

$$\frac{\frac{b}{2}}{a}=\cos\alpha$$

so hat man in bezug auf $\cos\alpha$ die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\text{e)} \ldots \cos^2\alpha-3\cdot\cos\alpha=-1$$

Dieselbe nach $\cos\alpha$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\cos^2\alpha-3\cdot\cos\alpha+\left(\frac{3}{2}\right)^2=-1+\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$\left(\cos\alpha-\frac{3}{2}\right)^2=-1+\frac{9}{4}$$

$$\cos\alpha-\frac{3}{2}=\pm\sqrt{\frac{-4+9}{4}}$$

$$\cos\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{5}$$

oder

$$\text{f)} \ldots \cos\alpha=\frac{1}{2}(3\pm\sqrt{5})$$

Erkl. 256. Unter dem „**goldenen Schnitt**“, (lat. Sectio aurea oder Sectio divina) versteht man die Teilung einer **gegebenen Strecke nach stetiger Proportion**, oder was dasselbe ist: die Teilung einer gegebenen Strecke in zwei Teile, welche die Bedingung erfüllen, dass der grössere Teil die mittlere geometrische Proportionale zwischen der gegebenen Strecke und dem andern, dem kleinern Teil derselben ist.

Ist die Strecke a gegeben und man teilt dieselbe nach dem **goldenen Schnitt**, bezeichnet den **kleinern Teil** mit m, also den **grössern** mit $(a-m)$, so muss hiernach die Proportion bestehen:

$$a:(a-m)=(a-m):m$$

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Planimetrie.)

Erkl. 257. Ein Satz aus der niederen allgemeinen Arithmetik heisst:

„Null durch jede Zahl dividiert, gibt Null“.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Arithmetik.)

Nach diesem Satz ist z. B. $\frac{0}{a}=0$ oder $\frac{0}{a^2}=0$. Die Richtigkeit dieses Satzes ergibt sich aus der Definition der Division.

Berücksichtigt man, dass $\sqrt{5} = 2{,}236$ ist, so ergibt sich aus dieser Gleichung, dass man bei der Benutzung des oberen Vorzeichens $+$ der Wurzel für $\cos\alpha$ einen Wert erhält, der grösser als 1 ist. Da aber die Kosinus sämtlicher Winkel kleiner als 1 sein müssen (s. Erkl. 144), so ist das Vorzeichen $+$ der $\sqrt{5}$ unzulässig und man hat zur Berechnung von α die bestimmtere Relation:

$$\text{A)} \ldots \cos\alpha = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

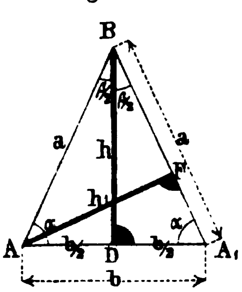
Hieraus kann man den Wert für $\cos\alpha$ berechnen und α selbst mittels einer trig. Tafel oder mittels einer log. trig. Tafel bestimmen.

---

c) Aufgaben, in welchen beide Höhen und Transversalen des gleichschenkligen Dreiecks vorkommen.

Aufgabe 305. Die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks misst 20,5 dm, die zu einem der Schenkel gehörige Höhe h_1 misst 10,5 dm; wie gross sind die Winkel dieses Dreiecks?


Figur 108.



Gegeben: $\begin{cases} h = 20{,}5 \text{ dm} \\ h_1 = 10{,}5 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 108, AA_1B das gleichschenklige Dreieck, in welchem die Höhen h und h_1 gleich den gegebenen sind, so kann man zur Berechnung des gesuchten Basiswinkels α folgende Relationen aufstellen: nämlich die aus dem rechtwinkligen Dreieck AFA_1 sich ergebende Relation:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha = \frac{h_1}{b}$$

und die aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1DB sich ergebende Relation:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{\frac{b}{2}} \text{ oder } = \frac{2h}{b}$$

Dividiert man die Gleichung a) durch die Gleichung b) und reduziert, so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{h_1}{b} : \frac{2h}{b}$$

$$\frac{\sin\alpha}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{h_1}{b} \cdot \frac{b}{2h}$$

$$\frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sin\alpha} = \frac{h_1}{2h}$$

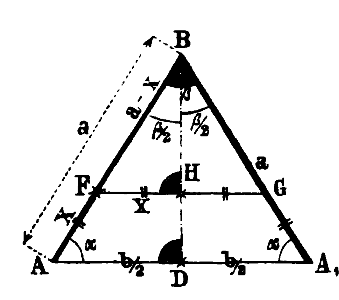
oder

$$\text{A)} \ldots \cos\alpha = \frac{h_1}{2h}$$

Setzt man in diese Gleichung die für h und h_1 gegebenen Zahlenwerte, so kann man hieraus den gesuchten Basiswinkel α berechnen.

Aufgabe 306. Zu der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks, dessen Schenkel $a = 40{,}281$ m und dessen Scheitelwinkel $\beta = 27^0\,20'$ ist, ist eine Parallele so gezogen, dass dieselbe gleich der Summe der von ihr gebildeten Schenkelabschnitte ist, welche an der Basis des Dreiecks liegen; wie gross ist jene Parallele?

Figur 109.



Erkl. 258. Eine goniometrische Formel heisst:

$$1 + \sin\alpha = 2\cdot\cos^2\left(45^0 - \frac{\alpha}{2}\right)$$

(Siehe Formel 125 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a = 40{,}281 \text{ m} \\ \beta = 27^0\,20' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 109, AA_1B das gleichschenklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und ist FG die zu AA_1 Parallele, welche die Eigenschaft hat, dass:

$$FG = AF + A_1G$$

ist, und man denkt sich die Höhe BD gezogen, so halbiert dieselbe nach der Erkl. 56 die Grundlinie AA_1 des gleichschenkligen Dreiecks AA_1B und auch die Grundlinie FG des Dreiecks FGB, welches Dreieck, da $FG \parallel AA_1$ ist, ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck sein muss.

Berücksichtigt man ferner, dass:

$$AF = AG$$

sein muss, indem:

$$BA = BA$$
$$\text{und } BF = BG$$
$$\text{also } BA - BF = BA - BG$$

ist, so muss in der Figur 109:

$$FH = FA = HG = GA$$

sein. Bezeichnet man nun, siehe Figur 109, die gesuchte Länge der Parallele FG mit $2x$, also jede der Strecken FH und AF mit x, dementsprechend BF mit $a - x$, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BHF zur Berechnung von x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{a) } \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \frac{x}{a - x}$$

Diese Gleichung in bezug auf x aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$(a - x)\cdot\sin\frac{\beta}{2} = x$$

$$a\cdot\sin\frac{\beta}{2} - x\cdot\sin\frac{\beta}{2} = x$$

$$x + x\cdot\sin\frac{\beta}{2} = a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$x\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right) = a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

$$x = \frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{1 + \sin\frac{\beta}{2}}$$

oder wenn man nach der Erkl. 258 für:

$$1 + \sin\frac{\beta}{2} = 2\cdot\cos^2\left(45^0 - \frac{\beta}{4}\right)$$

setzt:

$$x = \frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{2\cdot\cos^2\left(45^0 - \frac{\beta}{4}\right)}$$

Die gesuchte Länge $2x$ der Strecke FG kann man hiernach mittels der Gleichung:

$$\text{A)} \ldots 2x = \frac{a \cdot \sin\frac{\beta}{4}}{\cos^2\left(45^0 - \frac{\beta}{2}\right)}$$

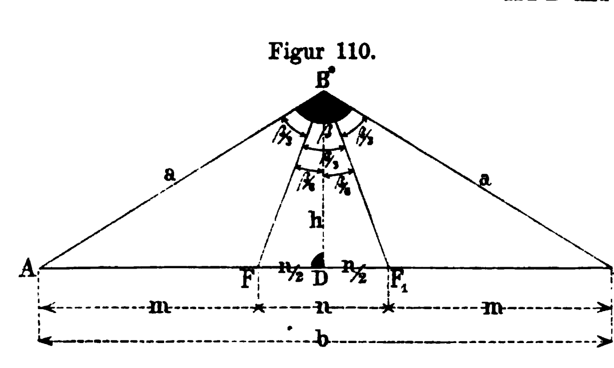
berechnen.

Aufgabe 307. Der Scheitelwinkel β eines gleichschenkligen Dreiecks ist $= 120^0$ und dieser Winkel ist durch zwei vom Scheitel ausgehende Geraden in drei gleiche Teile geteilt; man soll berechnen in welchem Verhältnis durch diese Teillinien die Basis geteilt wird.

Gegeben: $\begin{cases} \beta = 120^0 \\ \text{und zwei diesen Winkel teilende Transversalen.} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 110, AA_1B ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitelwinkel gleich dem gegebenen Winkel ist, und sind BF und BF_1 die beiden Linien, welche den Winkel β in drei gleiche Teile teilen, und man fällt die Höhe h, so entstehen die rechtwinkligen kongruenten Dreiecke ADB und A_1DB, die rechtwinkligen kongruenten Dreiecke FDB und F_1DB und die schiefwinkligen kongruenten Dreiecke AFB und A_1F_1B; aus der Kongruenz dieser Dreiecke ergibt sich, dass $AF = A_1F_1 = m$ und dass $FD = F_1D = \frac{n}{2}$ ist.

Figur 110.



Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses der drei Abschnitte hat man also hiernach zunächst nur das Verhältnis der Abschnitte m und n zu berechnen; dies kann man wie folgt: Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB ergibt sich in Rücksicht, dass $\sphericalangle ABD = \frac{\beta}{2}$ ist. und dass $AD = m + \frac{n}{2}$ ist, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{m + \frac{n}{2}}{h}$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck FDB in Rücksicht, dass $\sphericalangle FBD = \frac{\beta}{6}$ ist, die Relation:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{6} = \frac{\frac{n}{2}}{h}$$

Aus der Gleichung b) erhält man:

$$\text{c)} \ldots \frac{n}{2} = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{6}$$

und

$$\text{d)} \ldots n = 2h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{6}$$

Aus Gleichung a) erhält man ferner:

$$m + \frac{n}{2} = h \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung c):

$$m + h\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{6} = h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

oder

$$\text{e)} \ldots m = h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} - h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{6}$$

Dividiert man nunmehr zur Bildung des Verhältnisses $m:n$ die Gleichung e) durch Gleichung d), so erhält man:

$$\frac{m}{n} = \frac{h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} - h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}}{2h\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{6}}$$

Den Quotienten rechts kann man wie folgt reduzieren:

$$\frac{m}{n} = \frac{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} - \mathrm{tg}\frac{\beta}{6}}{2\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{6}}$$

Erkl. 259. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

(Siehe Formel 152 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Bringt man in bezug auf den Zähler rechts die in der Erkl. 259 aufgestellte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben:

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

$$\text{und } \beta = \frac{\beta}{6}$$

setzt, so erhält man:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\beta}{6}\right)}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{6}} : 2\,\frac{\sin\frac{\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{6}}$$

oder

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{3\beta-\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{6}}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{6}}{2\sin\frac{\beta}{6}}$$

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{\beta}{3}\cdot\cos\frac{\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot 2\sin\frac{\beta}{6}\cdot\cos\frac{\beta}{6}}$$

setzt man jetzt nach der Erkl. 52:

$$2\sin\frac{\beta}{6}\cdot\cos\frac{\beta}{6} = \sin\left(2\,\frac{\beta}{6}\right)$$

so erhält man weiter:

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{\beta}{3}\cdot\cos\frac{\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{2\beta}{6}}$$

oder

$$\frac{m}{n} = \frac{\sin\frac{\beta}{3}\cdot\cos\frac{\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{3}}$$

mithin:

$$\text{f)} \ldots \frac{m}{n} = \frac{\cos\frac{\beta}{6}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

für das gesuchte Verhältnis der drei Abschnitte erhält man also hiernach:

A) . . . $m : n : m = \cos\frac{\beta}{6} : \cos\frac{\beta}{2} : \cos\frac{\beta}{6}$

Setzt man für β den gegebenen Zahlenwert und berechnet $\cos\frac{\beta}{2}$ und $\cos\frac{\beta}{6}$, so kann man hiernach das gesuchte Verhältnis berechnen.

---

d) Aufgaben, in welchen die Summen oder Differenzen von Dreiecksseiten und Höhen vorkommen.

Aufgabe 308. Von einem gleichschenkligen Dreieck kennt man den Scheitelwinkel $\beta = 120^0$ und die Summe $s = 50$ m des Schenkels a und der Höhe h; wie gross sind die Seiten und der Inhalt des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} \beta = 120^0 \\ a + h = s = 50\,\text{m} \end{cases}$

Andeutung. In Rücksicht, dass die Höhe eines jeden gleichschenkligen Dreiecks dasselbe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren Hypotenusen gleich den Schenkeln a, deren gemeinschaftliche Kathete gleich der Höhe h und in welchen je ein spitzer Winkel gleich $\frac{\beta}{2}$ ist, kann man diese Aufgabe auf die Aufgabe 227 zurückführen.

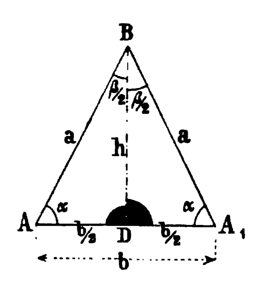
Aufgabe 309. Der Schenkel a und die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks differieren um 9 m; die Basis b misst 78 m; wie gross sind die Winkel, der Schenkel und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a - h = 9\,\text{m} \\ b = 78\,\text{m} \end{cases}$

Andeutung. In Rücksicht, dass die Höhe eines jeden gleichschenkligen Dreiecks dasselbe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren Hypothenusen gleich den Schenkeln a, deren gemeinschaftliche Kathete gleich der Höhe h und deren andere Katheten je gleich der halben Basis b sind, kann man diese Aufgabe auf die Aufg. 212 zurückführen.

Aufgabe 310. Die Summe der Basis b und eines Schenkels a eines gleichschenkligen Dreiecks ist $= 60$ m, ein Basiswinkel α misst $77^0\,18'\,10''$; wie gross sind die drei Seiten und der Inhalt des Dreiecks?

Figur 111.



Gegeben: $\begin{cases} b + a = s = 60\,\text{m} \\ \alpha = 77^0\,18'\,10'' \end{cases}$

Andeutungen: 1) Ist, siehe Figur 111, AA_1B das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

a) . . . $b + a = s$

Denkt man sich die Höhe h gefällt, so ergibt sich ferner aus dem rechtwinkligen Dreieck BDA_1 die Relation:

b) . . . $\cos\alpha = \frac{b}{2} : a$

Setzt man den aus Gleichung b) für b sich ergebenden Wert:

$$b = 2a \cdot \cos\alpha$$

in Gleichung a), so erhält man eine Bestimmungsgleichung für a, nämlich:

$$2a \cdot \cos\alpha + a = s$$

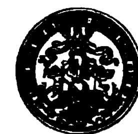
welche Gleichung man nach a auflösen kann, u. s. f.

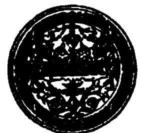
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

275. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie 18
Forts. v. Heft 274. — Seite 209—224.
Mit 4 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 274. — Seite 209—224. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

C Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

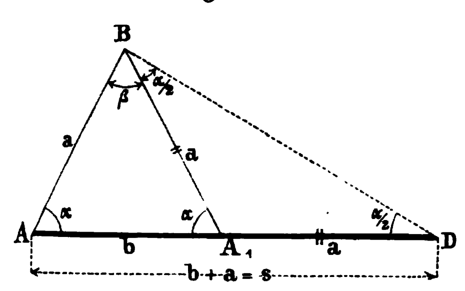
Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 112.



2) Ist, siehe Figur 112, AA_1B das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man bildet sich die Summe $b + a$, indem man a auf der Verlängerung von b nach A_1D abträgt und D mit B verbindet, so erhält man das gleichschenklige Dreieck BA_1D und das schiefwinklige BAD; in letzterem ist die Seite $AD = a + b = s$ und haben die Winkel desselben die in der Figur verzeichneten Werte, wobei zu berücksichtigen ist, dass $\sphericalangle ABA_1 = 2R - 2\alpha$, dass also $\sphericalangle ABD = 2R - 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$ oder $= 2R - \frac{3\alpha}{2}$ ist; bringt man zur Berechnung der Seite a dieses Dreiecks die Sinusregel in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a}{s} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(2R - \frac{3\alpha}{2}\right)}$$

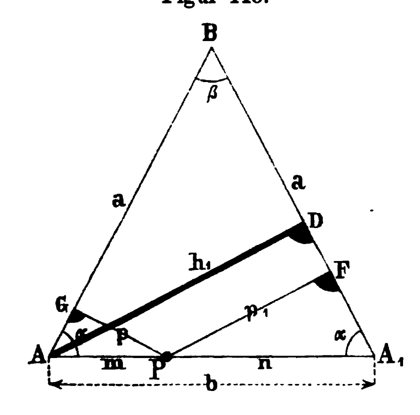
oder

$$\text{A)} \ldots a = s \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(2R - \frac{3\alpha}{2}\right)}$$

mittels welcher Gleichung man in Rücksicht der Erkl. 66 den Schenkel a berechnen kann, u. s. f.

Aufgabe 311. Die zu einem Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks gehörige Höhe h_1 sei $= 50$ m; wie gross ist die Summe der Perpendikel, welche man von einem beliebigen Punkt der Basis auf die beiden Schenkel jenes Dreiecks fällen kann.

Figur 113.



Gegeben: $h_1 = 50$ m
Gesucht: $p + p_1$, siehe Figur 113.

Auflösung. Ist, siehe Figur 113, AA_1B ein gleichschenkliges Dreieck, in welchem die Höhe h_1 gleich der gegebenen ist, und man nimmt auf der Basis b desselben den Punkt P beliebig an, fällt von demselben auf die Schenkel AB und A_1B die beiden Perpendikel p und p_1, so kann man, wenn man die Abschnitte AP und A_1P, in welche durch den beliebig angenommenen Punkt P die Basis b geteilt wird, mit m und n bezeichnet, zur Berechnung der Summe dieser Perpendikel p und p_1 folgende Relationen aufstellen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADA_1 ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha = \frac{h_1}{m+n}$$

aus dem rechtwinkligen Dreieck AGP ergibt sich die Relation:

$$\text{b)} \ldots \sin\alpha = \frac{p}{m}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1FP ergibt sich die weitere Relation:

$$\text{c)} \ldots \sin\alpha = \frac{p_1}{n}$$

Nach diesen drei Relationen besteht die laufende Proportion:

$$\frac{h_1}{m+n} = \frac{p}{m} = \frac{p_1}{n}$$

bringt man in bezug auf dieselbe den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{h_1+p+p_1}{m+n+m+n} = \frac{h_1}{m+n}$$

oder

$$\frac{h_1+(p+p_1)}{2(m+n)} = \frac{h_1}{m+n}$$

$$\frac{h_1+(p+p_1)}{2} = \frac{h_1}{1}$$

$$h_1+(p+p_1) = 2h_1$$

$$p+p_1 = 2h_1 - h_1$$

oder

$$\text{A)} \;\ldots\; p+p_1 = h_1$$

d. h. die gesuchte Summe jener zwei Perpendikel p und p_1 ist gleich der gegebenen Höhe h_1; in Rüchsicht des für h_1 gegebenen Zahlenwerts ist also:

$$1) \;\ldots\; p+p_1 = 50\text{ m}$$ (s. Erkl. 260).

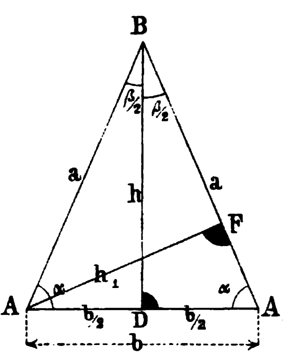
Erkl. 260. Die nebenstehende Auflösung ist ein trigonometrischer Beweis des planimetrischen Lehrsatzes:

„Die Summe der von einem beliebigen Punkt der Basis eines gleichschenkligen Dreiecks auf dessen Schenkel gefällten Perpendikel ist stets gleich der zu einem Schenkel gehörigen Höhe."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 312. Die Summe der Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks und der zu einem Schenkel gehörige Höhe h_1 desselben sei $s = 240$ dm, der Basiswinkel α messe $15^0\, 40'\, 30''$; wie gross sind die Seiten des Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

Figur 114.



Gegeben: $\begin{cases} h + h_1 = s = 240\text{ dm} \\ \alpha = 15^0\, 40'\, 30'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 114, AA_1B das gleichschenklige Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \;\ldots\; h+h_1 = s$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1DB die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = h : \frac{b}{2}$$

oder

$$\text{b)} \;\ldots\; h = \frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha$$

Weiter ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1FA die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{b}$$

oder

$$\text{c)} \;\ldots\; h_1 = b\cdot\sin\alpha$$

Substituiert man die Werte für h und h_1 aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a), so erhält man für die Basis b die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \;\ldots\; \frac{b}{2}\cdot\operatorname{tg}\alpha + b\cdot\sin\alpha = s$$

Diese Gleichung in bezug auf b aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$b\cdot\operatorname{tg}\alpha + 2b\sin\alpha = 2s$$

$$b(\operatorname{tg}\alpha + 2\sin\alpha) = 2s$$

$$\text{e)} \;\ldots\; b = \frac{2s}{\operatorname{tg}\alpha + 2\sin\alpha}$$

Den für b gefundenen allgemeinen Ausdruck kann man noch wie folgt weiter reduzieren:

$$b = \frac{2s}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + 2\sin\alpha} \quad \text{(s. Erkl. 120)}$$

$$b = \frac{2s\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Setzt man nach der Erkl. 52 für:

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

so erhält man weiter:

$$b = \frac{2s\cdot\cos\alpha}{\sin\alpha + \sin 2\alpha}$$

oder, wenn man in bezug auf den Nenner die in der Erkl. 118 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben:

$$\beta = 2\alpha$$

setzt:

$$b = \frac{2s\cdot\cos\alpha}{2\cdot\sin\frac{\alpha+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-2\alpha}{2}}$$

$$b = \frac{s\cdot\cos\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}\cdot\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right)}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 126:

$$\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2} \text{ ist.}$$

$$\text{A)} \ldots b = \frac{s\cdot\cos\alpha}{\sin\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

mittels welcher Gleichung die gesuchte Basis b berechnet werden kann.

Den gesuchten Schenkel a findet man mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1DB sich ergebenden Relation:

$$\cos\alpha = \frac{b}{2} : a$$

aus derselben erhält man:

$$a = \frac{b}{2\cdot\cos\alpha}$$

oder, wenn man für b den nach Gleichung A) gefundenen allgemeinen Wert substituiert:

$$a = \frac{s\cdot\cos\alpha}{\sin\frac{3}{2}\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot 2\cos\alpha}$$

oder

$$\text{B)} \ldots a = \frac{s}{2\sin\frac{3}{2}\alpha\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$

mittels welcher Gleichung der gesuchte Schenkel a berechnet werden kann.

Aufgabe 313. Die Höhe h eines gleichschenkligen Dreiecks und die zu einem Schenkel gehörige Höhe h_1 differieren um $d = 15$ dm; der Basiswinkel α messe $5^0\, 40'\, 36''$; wie gross sind die Seiten, wenn die Höhe h_1 grösser als die Höhe h ist?

Gegeben: $\begin{cases} h_1 - h = d = 15 \text{ dm} \\ \alpha = 5^0\, 40'\, 36'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 312.

e) Aufgaben, in welchen der Umfang des Dreiecks vorkommt.

Aufgabe 314. Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks misst 124 m, ein Basiswinkel $\alpha = 36^0\, 12'$; wie gross sind dessen Seiten und dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} b + 2a = u = 124 \text{ m} \\ \alpha = 36^0\, 12' \end{cases}$

Andeutung. In Rücksicht, dass, siehe Fig. 111, die Höhe h eines jeden gleichschenkligen Dreiecks dasselbe in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt, deren Hypotenusen a zusammen gleich der Summe der zwei Schenkel und deren Katheten, welche mit der Basis des gleichschenkligen Dreiecks zusammenfallen, zusammen gleich der Basis des gleichschenkligen Dreiecks sind, in Rücksicht also, dass die Summe der Hypotenuse und einer Kathete in jedem einzelnen jener rechtwinkligen Dreiecke gleich der Hälfte des gegebenen Umfangs u, also $= \frac{u}{2}$ ist, kann man diese Aufgabe auf die Aufgabe 211 zurückführen und nach derselben den gesuchten Schenkel (Hypotenuse), bezw. die gesuchte Grundlinie (doppelte Kathete) berechnen.

Aufgabe 315. Der Umfang u eines gleichschenkligen Dreiecks sei $= 500$ m, der Scheitelwinkel $\beta = 70^0\, 10'\, 45''$; wie gross sind die Seiten und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} 2a + b = u = 500 \text{ m} \\ \beta = 70^0\, 10'\, 45'' \end{cases}$

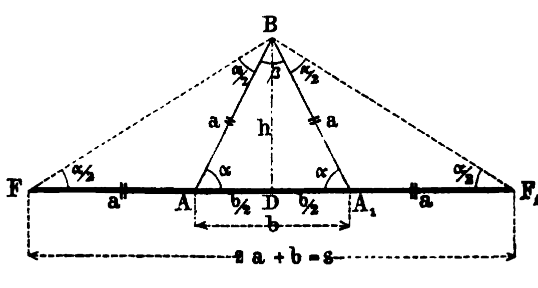
Andeutung. In Rücksicht, dass mit dem Scheitelwinkel β eines gleichschenkligen Dreiecks auch dessen Basiswinkel α gegeben ist, indem:

$$2\alpha + \beta = 180^0$$

ist, ist die Auflösung dieser Aufgabe ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 314.

Aufgabe 316. Die Summe der drei Seiten eines gleichschenkligen Dreiecks ist $s = 1000$ m, die Höhe h ist $= 15$ m; wie gross sind die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks?

Figur 115.



$a + b + c = s$

Gegeben: $\begin{cases} 2a + b = s = 1000 \text{ m} \\ h = 15 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe kann in analoger Weise wie die der Aufgaben 314 und 315 auf die Auflösung der Aufgabe 211 zurückgeführt werden; oder sie kann wie folgt geführt werden:

Ist, siehe Figur 115, AA_1B das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt und denkt man sich die Summe der drei Seiten gebildet, indem man den Schenkel a auf den Verlängerungen der Grundlinie b nach beiden Seiten hin, nach AF und A_1F_1 abträgt, und B mit F und F_1 verbindet, so erhält man

das gleichschenklige Dreieck BFF_1; fällt man nun die Höhe AD, so erhält man das rechtwinklige Dreieck BDF, in welchem die Kathete $BD = h$, die Kathete $DF = \frac{s}{2}$ ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = h : \frac{s}{2}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2h}{s}$$

mittels welcher Gleichung man $\frac{\alpha}{2}$, bezw. α berechnen kann, u. s. f.

Aufgabe 317. Die Grundlinie $b = 15{,}368$ m eines gleichschenkligen Dreiecks mit dem Basiswinkel $\alpha = 11^0\,25'\,36''$ ist nach beiden Seiten je um den Schenkel des Dreiecks verlängert und die Endpunkte sind dann mit der Spitze des Dreiecks verbunden; wie gross sind die Seiten des neu entstandenen Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b = 15{,}368 \text{ m} \\ \alpha = 11^0\,25'\,36'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 115, zunächst den Schenkel a mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck BDA sich ergebenden Relation:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha = \frac{b}{2} : a$$

in welcher b und α gegebene Werte repräsentieren. Ist hiernach a berechnet, so beachte man, dass in dem Dreieck BFF_1 die Seite FF_1 und die drei Winkel bekannt sind, jene Seite ist nämlich $= 2a + b$ und zwei der Winkel sind je $= \frac{\alpha}{2}$, während der dritte Winkel: $= 2R - 2 \cdot \frac{\alpha}{2}$

oder $= 2R - \alpha$

ist; mittels der Sinusregel kann man hiermit aus diesem Dreieck die noch geforderten Stücke berechnen.

---

f) Aufgaben, in welchen Bezug auf den Flächeninhalt genommen ist.

Aufgabe 318. Der Schenkel a eines gleichschenkligen Dreiecks misst 304 m, der Inhalt $F = 79459$ qm. Wie gross ist der Scheitelwinkel β?

Gegeben: $\begin{cases} a = 304 \text{ m} \\ F = 79459 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Man benutze die in Auflösung der Aufgabe 64 aufgestellte Formel 60, löse dieselbe in bezug auf $\sin\beta$ auf, substituire die für a und F gegebenen Zahlenwerte und berechne hieraus $\frac{\beta}{2}$, bezw. β.

Aufgabe 319. Die Basis b eines gleichschenkligen Dreiecks verhält sich zu dem Schenkel a desselben wie $5:8$, der Inhalt F des Dreiecks beträgt 84,8 qm; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b : a = 5 : 8 \\ F = 84{,}8 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Man beachte, dass die Höhe eines jeden gleichschenkligen Dreiecks dasselbe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt, und

dass hiernach und gemäss der Aufgabe in jedem dieser rechtwinkligen Dreiecke das Verhältnis der einen Kathete zur Hypotenuse $\frac{5}{2} : 8$ oder $= 5 : 16$ ist. Mittels dieses Verhältnisses kann man den einen spitzen Winkel eines jeden dieser rechtwinkligen Dreiecke, bezw. den Basiswinkel α des gedachten gleichschenkligen Dreiecks berechnen; ist hiernach α berechnet, so benutze man zur Berechnung der gesuchten Basis b die in der Erkl. 64 aufgestellte Formel 56:

$$F = \frac{b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

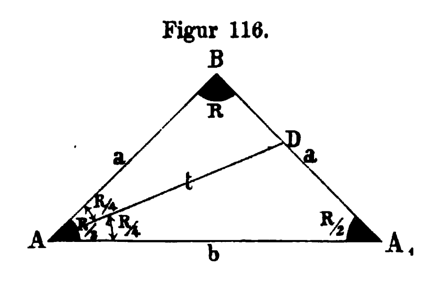
löse dieselbe in bezug auf b auf und substituiere für F seinen gegebenen und für α seinen berechneten Wert. Zur Berechnung des gesuchten Schenkels a kann man die in der Erkl. 67 aufgestellte Formel 64:

$$F = \frac{a^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

benutzen, dieselbe nach a auflösen und wie vorhin für F und α jene Werte substituieren.

Aufgabe 320. In welchem Verhältnis wird die Fläche eines rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks durch die Halbierungslinie eines der spitzen Winkel geteilt?

Figur 116.



Auflösung. Ist, siehe Figur 116, AD die den spitzen Winkel BAA_1 des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks BAA_1 halbierende Transversale, und bezeichnet man den Inhalt des Dreiecks AA_1D mit f, den Inhalt des Dreiecks ADB mit f_1, so hat man mittels Benutzung der in der Erkl. 151 erwähnten Flächeninhaltsformel und unter Berücksichtigung, dass nach der Erkl. 72:

$$\sphericalangle BAA_1 = \frac{R}{2} = 45^0$$

ist, dass also hiernach und gemäss der Aufgabe:

$$\sphericalangle BAD = \sphericalangle DAA_1 = \frac{R}{4} = \frac{45^0}{2}$$

ist:

$$\text{a)} \ldots f = \frac{b \cdot t}{2} \cdot \sin \frac{45^0}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots f_1 = \frac{a \cdot t}{2} \cdot \sin \frac{45^0}{2}$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man für das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte f und f_1:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{\frac{b \cdot t}{2} \cdot \sin \frac{45^0}{2}}{\frac{a \cdot t}{2} \cdot \sin \frac{45^0}{2}}$$

oder

$$\frac{f}{f_1} = \frac{b}{a}$$

Berücksichtigt man noch, dass nach der Formel 76 (s. Aufgabe 112):

$$b = a\sqrt{2}$$

ist, so erhält man hiernach:

$$\frac{f}{f_1} = \frac{a\sqrt{2}}{a}$$

oder für das gesuchte Verhältnis:

A) . . . $f : f_1 = \sqrt{2} : 1$

---

g) Aufgaben, in welchen die Beweise gewisser auf das gleichschenklige und das rechtwinklig-gleichschenklige Dreieck Bezug habender trigon. Formeln und Sätze verlangt werden.

Aufgabe 321. Man soll nachweisen, dass, wenn in einem gedachten Dreieck zwischen zwei Winkeln α und β desselben die Relation besteht:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$$

dasselbe ein rechtwinkliges oder ein gleichschenkliges Dreieck sein muss.

Auflösung. Aus der gegebenen Relation:

$$\sin\alpha : \sin\beta = \cos\beta : \cos\alpha$$

erhält man:

$$\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \sin\beta\cdot\cos\beta$$

$$2\cdot\sin\alpha\cos\alpha = 2\cdot\sin\beta\cos\beta$$

oder mittels Anwendung der in der Erkl. 52 angeführten goniometrischen Formel:

a) . . . $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$

Dieser Gleichung wird nur dann Genüge geleistet, wenn entweder:

1) . . . 2α und 2β

Supplementwinkel sind, da nach der Erkl. 66 die Sinus vom Supplementwinkel einander gleich sind, wenn also:

$$2\alpha + 2\beta = 180^0$$

oder

A) . . . $\alpha + \beta = 90^0$

ist, oder wenn:

2) . . . $2\alpha = 2\beta$

oder

B) . . . . . $\alpha = \beta$

ist.

Da nun α und β die zwei Winkel eines Dreiecks sind, so ergibt sich aus Gleichung A), dass der dritte Winkel des gedachten Dreiecks ebenfalls $= 90^0$ sein muss, dass also unter Annahme der Gleichung A), das gedachte Dreieck ein rechtwinkliges sein muss; ferner ergibt sich aber auch aus der Gleichung B), dass nach der Erkl. 261 das gedachte Dreieck ein gleichschenkliges sein kann.

Erkl. 261. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Dreieck zwei Winkel gleich, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten gleich, d. h. das Dreieck ist ein gleichschenkliges.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 322. Bestehen zwischen der Seite c, den derselben anliegenden zwei Winkeln α und β und dem Inhalt F eines gedachten Dreiecks die Relationen:

a) . . . $1+\text{ctg}(45^0-\beta)=2:(1-\text{ctg}\,\alpha)$
und
b) . . . $4F=c^2$
so muss jenes Dreieck ein rechtwinklig-gleichschenkliges sein. Warum?

Erkl. 262. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\text{ctg}(45^0-\alpha)=\frac{1+\text{tg}\,\alpha}{1-\text{tg}\,\alpha}$$

(Siehe Formel 122 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Auflösung. Setzt man in die erste der gegebenen Relationen, nämlich in:

a) . . . $1+\text{ctg}(45^0-\beta)=2:(1-\text{ctg}\,\alpha)$

nach der Erkl. 262 für:

$$\text{ctg}(45^0-\beta)=\frac{1+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\beta}$$

und setzt man nach der Erkl. 15 für:

$$\text{ctg}\,\alpha=\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}$$

so geht jene Relation über in:

$$1+\frac{1+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\beta}=\frac{2}{1-\frac{1}{\text{tg}\,\alpha}}$$

Durch weitere Reduktion erhält man:

$$\frac{1-\text{tg}\,\beta+1+\text{tg}\,\beta}{1-\text{tg}\,\beta}=\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha-1}$$

$$\frac{2}{1-\text{tg}\,\beta}=\frac{2\,\text{tg}\,\alpha}{\text{tg}\,\alpha-1}$$

$$2\,\text{tg}\,\alpha-2=2\,\text{tg}\,\alpha-2\,\text{tg}\,\alpha\cdot\text{tg}\,\beta$$

$$-2=-2\,\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta$$

$$\text{tg}\,\alpha\,\text{tg}\,\beta=1$$

oder

1) . . . $\text{tg}\,\alpha=\frac{1}{\text{tg}\,\beta}$

Da nun nach den Erkl. 15 und 19:

2) . . . $\text{tg}\,\alpha=\text{ctg}(90^0-\alpha)=\frac{1}{\text{tg}(90^0-\alpha)}$

ist, so kann in Rücksicht dessen die Gleichung 1) nur bestehen, wenn:

$$\beta=90^0-\alpha$$

oder wenn:

A) . . . . . $\alpha+\beta=90^0$

ist.

Sind aber in jenem Dreieck die beiden Winkel α und β zusammen $=90^0$, so muss dasselbe ein rechtwinkliges Dreieck, und zwar ein solches Dreieck sein, dessen Hypotenuse gleich der Seite c ist. Setzt man nunmehr in Rücksicht dessen in der zweiten der gegebenen Relationen, nämlich in:

b) . . . $4F=c^2$

nach der Formel 32 (s. Aufgabe 5) für:

$$F=\frac{c^2}{4}\cdot\sin 2\alpha$$

so geht diese Relation über in:

$$4\cdot\frac{c^2}{4}\sin 2\alpha=c^2$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

c) . . . $\sin 2\alpha=1$

Erkl. 268. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin 90^0 = 1$$

(Siehe Abschnitt 10 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Da man nun weiss, dass nach der Erkl. 263:

d) . . . $\sin 90^0 = 1$

ist, so ergibt sich aus den Gleichungen c) und d), dass:

$$2\alpha = 90^0$$

bezw. dass:

B) . . . . $\alpha = 45^0$

sein muss.

Nach den Gleichungen A) und B) ist also in dem gedachten Dreieck:

C) . . . . $\alpha = \beta = 45^0$

woraus sich ergibt, dass dieses Dreieck ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck sein muss.

8). Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck im allgemeinen.

a) Aufgaben, in welchen ausser Seiten, Beziehungen zwischen den Winkeln des Dreiecks gegeben sind.

Aufgabe 323. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 541$ m, die Differenz der Winkel α und β, welche $= 43^0\,1'\,36''$ ist, und den Winkel $\gamma = 50^0\,55'\,36{,}1''$; man soll die nicht bekannten Seiten und Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 541 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 43^0\,1'\,36'' \\ \gamma = 50^0\,55'\,36{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Zunächst berechne man aus der Relation:

a) . . . $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$

die Summe $(\alpha + \beta)$, dann bestimme man aus der hiernach berechneten Summe $\alpha + \beta$ und aus der gegebenen Differenz $\alpha - \beta$ die Winkel α und β. Hierauf bringe man zur Berechnung der Seiten die Sinusregel (s. Erkl. 80) in Anwendung.

Aufgabe 324. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks sind bezw. $= 39{,}564$ m und $= 65{,}259$ m, der Gegenwinkel α der Seite a ist doppelt so gross als der Gegenwinkel β der Seite b. Man soll die Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 39{,}564 \text{ m} \\ b = 65{,}259 \text{ m} \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht zwischen den Seiten a und b eines Dreiecks und den denselben gegenüberliegenden Winkeln, die Relation:

a) . . . . $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

Da nun gemäss der Aufgabe:

b) . . . . $\alpha = 2\beta$

sein soll, so hat man hiernach:

$$\frac{\sin 2\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 52:

$$\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta$$

so erhält man:

$$\frac{2\sin\beta\cos\beta}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

$$2\cos\beta = \frac{a}{b}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \cos\beta = \frac{a}{2b}$$

wonach man, in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte den Winkel β berechnen kann. Im weiteren benutze man die Sinusregel.

Aufgabe 325. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen bezw. 17,004 m und 15,141 m, die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β beträgt $16^0\ 20'\ 40''$; wie gross ist die dritte Seite und welches sind die Winkel und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a = 17{,}004 \text{ m} \\ b = 15{,}141 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 16^0\ 20'\ 40'' \end{cases}$

Andeutung. Zunächst berechne man mittels Anwendung des Tangentensatzes (siehe Antw. der Frage 21) bezw. mittels der sich hiernach ergebenden Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = (a+b):(a-b)$$

(siehe Formel 91)

die halbe Summe bezw. die Summe $(\alpha+\beta)$ der Winkel α und β; dann bestimme man aus der hiernach berechneten Summe $(\alpha+\beta)$ und aus der gegebenen Differenz $(\alpha-\beta)$ die Winkel α und β. Den dritten Winkel γ findet man aus der Relation:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha+\beta)$$

Hierauf berechne man mittels Anwendung der Sinusregel (s. Erkl. 80) die Seite c und berechne schliesslich den gesuchten Inhalt F nach dem in der Erkl. 151 angeführten Satz (s. die Erkl. 264).

Erkl. 264. Die der Aufgabe 325 im allgemeinen analoge Aufgabe:

> „Von einem Dreieck kennt man die Seiten a und c, sowie die Differenz der der letztern Seite c anliegenden Winkel α und β; man soll hieraus die dritte Seite und die Winkel berechnen.“

kann nicht gelöst werden wie jene Aufgabe. Man wird bei der Auflösung derselben auf eine höhere Gleichung kommen, welche nur bei gegebenen Zahlenwerten lösbar ist. (Siehe Kleyers Lehrbücher, welche über die Auflösung höherer Gleichungen handeln.

Aufgabe 326. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks sind bezw. = 25 m und = 22 m. Der von beiden eingeschlossene Winkel γ soll halb so gross sein als der der Seite a gegenüberliegende Winkel α. Wie gross ist der Winkel γ?

Gegeben: $\begin{cases} a = 25 \text{ m} \\ b = 22 \text{ m} \\ \gamma = \frac{1}{2}\alpha \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht zwischen den Seiten a und b und den denselben gegenüberliegenden Winkeln α und β die Relation:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\text{b)} \ldots\ldots \alpha = 2\cdot\gamma$$

und da ferner in dem gedachten Dreieck:

$$\beta = 2R - (\alpha+\gamma)$$

also

$$\beta = 2R - (2\gamma+\gamma)$$

oder

$$\text{c)} \ldots\ldots \beta = 2R - 3\gamma$$

ist, so geht in Rücksicht dessen die Gleichung a) über in:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin(2R-3\gamma)}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 265:

$$\sin(2R-3\gamma) = \sin 3\gamma$$

Erkl. 265. Die in der Erkl. 66 erwähnte goniometrische Formel:

$$\sin(2R-\alpha) = \sin\alpha$$

hat Gültigkeit für jeden beliebigen Wert für α.

(Siehe Abschnitt 13 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 266. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

(Siehe Formel 97 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 267. Nebenstehende Gleichung d):

$$\frac{a}{b} = \frac{2\cos\gamma}{3 - 4(1 - \cos^2\gamma)}$$

in bezug auf $\cos\gamma$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\cos\gamma}{3 - 4 + 4\cos^2\gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2\cos\gamma}{-1 + 4\cos^2\gamma}$$

$$-a + 4a\cos^2\gamma = 2b\cos\gamma$$

$$4a\cos^2\gamma - 2b\cos\gamma = a$$

$$\cos^2\gamma - \frac{2b}{4a}\cos\gamma = \frac{a}{4a}$$

$$\cos^2\gamma - \frac{2b}{4a}\cos\gamma + \left(\frac{b}{4a}\right)^2 = \frac{a}{4a} + \left(\frac{b}{4a}\right)^2$$

$$\left(\cos\gamma - \frac{b}{4a}\right)^2 = \frac{4a^2 + b^2}{(4a)^2}$$

$$\cos\gamma - \frac{b}{4a} = \pm\sqrt{\frac{4a^2 + b^2}{(4a)^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{b}{4a} \pm \frac{1}{4a}\sqrt{4a^2 + b^2}$$

$$\cos\gamma = \frac{b \pm \sqrt{4a^2 + b^2}}{4a}$$

Diese Gleichung kann man nunmehr folgender Diskussion unterziehen:

Da $\sqrt{4a^2 + b^2} > b$

ist, so kann das negative Vorzeichen der Wurzel keine Gültigkeit haben, indem sonst $\cos\gamma$ negativ würde, woraus nach der Erkl. 94 zu schliessen wäre, dass γ ein stumpfer Winkel sein müsste, dies ist aber nicht möglich, da der Winkel γ kleiner als der Winkel α $(= 2\gamma)$ des gedachten Dreiecks ist, in einem Dreieck aber keine zwei stumpfen Winkel vorkommen können. In Rücksicht dessen ist:

$$\cos\gamma = \frac{b + \sqrt{4a^2 + b^2}}{4a}$$

so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 3\gamma}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$$

und nach der Erkl. 266:

$$\sin 3\gamma = 3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma$$

setzt:

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sin\gamma\cos\gamma}{3\sin\gamma - 4\sin^3\gamma}$$

oder

$$\frac{a}{b} = \frac{2\cos\gamma}{3 - 4\sin^2\gamma}$$

Setzt man noch nach der Erkl. 145;

$$\sin^2\gamma = 1 - \cos^2\gamma$$

so erhält man schliesslich für $\cos\gamma$ die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots \frac{a}{b} = \frac{2\cos\gamma}{3 - 4(1 - \cos^2\gamma)}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\cos\gamma$ auf, so erhält man nach der Erkl. 267:

$$\text{A)} \ldots \cos\gamma = \frac{b + \sqrt{4a^2 + b^2}}{4a}$$

Wonach man in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte den Winkel γ berechnen kann.

Aufgabe 327. Die Winkel α, β und γ eines Dreiecks stehen in dem Verhältnis 5:7:11. Wie gross sind die Seiten, wenn die dem Winkel α gegenüberliegende Seite $a = 50$ m misst?

Gegeben: $\begin{cases} \alpha : \beta : \gamma = 5 : 7 : 11 \\ a = 50\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Zunächst berechne man die drei Winkel α, β und γ aus den Relationen:

$$\text{a)} \ldots \alpha : \beta : \gamma = 5 : 7 : 11$$

und

$$\text{b)} \ldots \alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

Dies kann man wie folgt:

Nach der Erkl. 234 ergibt sich aus Gleichung a):

$$\frac{\alpha + \beta + \gamma}{5 + 7 + 11} = \frac{\alpha}{5} \text{ oder } = \frac{\beta}{7} \text{ oder } = \frac{\gamma}{11}.$$

Setzt man nunmehr nach Gleichung b) für:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$

so erhält man zur Berechnung des Winkels α die Relation:

$$\text{A)} \ldots\ldots \frac{\alpha}{5}=\frac{180^0}{5+7+11}$$

zur Berechnung des Winkels β die Relation:

$$\text{B)} \ldots\ldots \frac{\beta}{7}=\frac{180^0}{5+7+11}$$

und zur Berechnung des Winkels γ die Relation:

$$\text{C)} \ldots\ldots \frac{\gamma}{11}=\frac{180^0}{5+7+11}$$

Zur Kontrolle für die Richtigkeit der Rechnung muss:

$$\alpha+\beta+\gamma=180^0$$

sein.

Mittels der berechneten Winkel und der gegebenen Seite a kann man durch Anwendung der Sinusregel die Seiten b und c berechnen.

Aufgabe 328. Die Seite c eines Dreiecks ist $=6{,}928205$ m, ferner sind zwischen den dieser Seite anliegenden Winkeln α und β die Beziehungen:

$$\operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta=p:q=2:1$$

und

$$\cos\alpha:\cos\beta=r:s=5:6$$

gegeben; man soll die Winkel und die beiden andern Seiten dieses Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} c=6{,}928205\text{ m}\\ \operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta=p:q=2:1\\ \cos\alpha:\cos\beta=r:s=5:6\end{array}\right.$$

Andeutung. Aus den in der Aufgabe gegebenen Relationen:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\alpha:\operatorname{tg}\beta=p:q$$

und

$$\text{b)} \ldots \cos\alpha:\cos\beta=r:s$$

berechne man zunächst die Winkel α und β. Dies kann man wie folgt:

In Rücksicht der Erkl. 120 geht die Gleichung a) über in:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}=\frac{p}{q}$$

multipliziert man diese Gleichung mit der Gleichung b), so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\beta}{\sin\beta}\cdot\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{pr}{qs}$$

oder:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{pr}{qs}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf letztere Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man weiter:

$$\frac{\sin\alpha-\sin\beta}{\sin\alpha+\sin\beta}=\frac{pr-qs}{pr+qs}$$

oder nach der Erkl. 268:

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}=\frac{pr-qs}{pr+qs}$$

Bringt man ferner in bezug auf die Proportion b ebenfalls jenen Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man weiter:

Erkl. 268. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

(Siehe Formel 188 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{r - s}{r + s}$$

oder nach der Erkl. 269:

$$-\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{r-s}{r+s}$$

oder, beide Seiten dieser Gleichung mit -1 multipliziert:

$$\text{d)} \ldots \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{s-r}{s+r}$$

Dividiert man nunmehr die Gleichung c) durch Gleichung d), so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{pr-qs}{pr+qs} \cdot \frac{s+r}{s-r}$$

oder in Rücksicht, dass nach der Erkl. 15:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$$

ist:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{pr-qs}{pr+qs} \cdot \frac{s+r}{s-r}$$

Berücksichtigt man noch, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, indem die Winkel α, β und γ einem Dreieck angehören, so kann man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

setzen und man erhält:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}^2\gamma} = \frac{pr-qs}{pr+qs} \cdot \frac{s+r}{s-r}$$

oder, da nach der Erkl. 15:

$$\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden kann:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = \frac{pr-qs}{pr+qs} \cdot \frac{s+r}{s-r}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots \quad \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{pr-qs}{pr+qs} \cdot \frac{s+r}{s-r}}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann. Hat man γ berechnet, so kann man nach der aus der Gleichung d) sich ergebenden Gleichung:

$$\text{B)} \ldots \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{s-r}{s+r} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

die Differenz der Winkel α und β berechnen; da ferner deren Summe $= 180^0 - \gamma$ ist, so findet man hiernach leicht die Winkel α und β. Aus der gegebenen Seite c und den hiernach berechneten Winkeln kann man schliesslich mittels Anwendung der **Sinusregel** die gesuchten Seiten des Dreiecks berechnen.

Erkl. 269. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

(Siehe Formel 189*) in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

*) Die in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie enthaltene Formel 189 soll nicht heissen:

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

sondern:

$$\frac{\cos\alpha - \cos\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = -\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

b) Aufgaben, in welchen das Verhältnis von Seiten (oder keine Seiten) und Winkel oder Beziehungen zwischen den Winkeln gegeben sind.

Aufgabe 329. In einem Dreieck sind die Winkel α und β bezw. $= 20^0\,30'$ und $50^0\,40'$; in welchem Verhältnis stehen die diesem Winkel gegenüberliegenden Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 20^0\,30' \\ \beta = 50^0\,40' \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel hat man zur Berechnung des gesuchten Verhältnisses der den Winkel α und β gegenüberliegenden Seiten die Relation:

$$\text{A)} \; \ldots \; \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Setzt man hierin für α und β die gegebenen Zahlenwerte und bestimmt mittels einer trig. oder einer log. trig. Tafel die Sinus dieser Winkel, so erhält man das gesuchte Verhältnis $a:b$.

Aufgabe 330. Das Verhältnis zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 3{,}56^{-8}$: $58{,}6349^{-3}$ und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $25^0\,9'\,37''$; man soll hieraus die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 3{,}56^{-8} : 58{,}6349^{-3} \\ \alpha = 25^0\,9'\,37'' \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht zwischen dem Winkel α und β und den denselben gegenüberliegenden Seiten a und b die Relation:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

Da nun gemäss der Aufgabe α und das Verhältnis $a:b$, bezw. der Quotient $\frac{a}{b}$ gegeben ist, so erhält man in Rücksicht dieser gegebenen Werte zur Bestimmung des Winkels β die goniometrische Gleichung:

$$\frac{\sin 25^0\,9'\,37''}{\sin\beta} = \frac{3{,}56^{-8}}{58{,}6349^{-3}}$$

oder

$$\sin\beta = \frac{58{,}6349^{-3}}{3{,}56^{-8}} \cdot \sin 25^0\,9'\,37''$$

und wenn man die Erkl. 270 berücksichtigt:

$$\text{A)} \; \ldots \; \sin\beta = \frac{3{,}56^8}{58{,}6349^3} \cdot \sin 25^0\,9'\,37''$$

wonach man β berechnen kann.

Diskussion. Zur Untersuchung, ob nach der Erkl. 271 dem Winkel β zwei Werte zukommen können, beachte man, dass der Winkel β ein spitzer Winkel sein muss, weil die demselben gegenüberliegende Seite b kleiner ist als die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a (was man leicht aus dem gegebenen Verhältnis $a:b$ ersehen kann) und weil der Winkel α gemäss der Aufgabe ein spitzer Winkel ist, siehe die Erkl. 271, 190 und 191.

Den Winkel γ findet man aus der Relation:

$$\text{B)} \; \ldots \; \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

Erkl. 270. Ein Satz aus der Lehre der Potenzen heisst:

„Eine jede Potenz mit negativem Exponenten ist gleich dem reciproken Wert derselben Potenz mit positivem Exponenten.“

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln.)

Nach diesem Satz ist z. B.:

$$\text{a)} \; \ldots \; a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

$$\text{b)} \; \ldots \; \frac{1}{a^{-n}} = a^n$$

$$\text{c)} \; \ldots \; \frac{a^{-n}}{b^{-m}} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^m}{1} = \frac{b^m}{a^n}$$

Erkl. 271. Bei allen Berechnungen, welche darin bestehen, dass aus dem bekannten (gegebenen) Sinus eines Winkels dieser Winkel berechnet werden soll, hat man zu beachten, dass, wie in der Erkl. 189 bereits angeführt ist, nach der in der Erkl. 66 angeführten Formel: $\sin(2R - \alpha) = \sin\alpha$, in welcher α einen spitzen Winkel bedeutet, jenem Winkel zwei Werte entsprechen können, nämlich der direkt zu berechnende entsprechende spitze Winkel und dessen Supplementwinkel, dass also das schiefwinklige Dreieck, welchem jener Winkel α angehört, ein spitzwinkliges oder auch ein stumpfwinkliges sein kann. Mittels der in den betreffenden Aufgaben enthaltenen weiteren Bedingungen

und Beziehungen hat man zu entscheiden, ob der eine oder der andere jener Winkel oder beide zugleich der Aufgabe genügen. Dies gilt nur für die goniometrische Funktion „Sinus“.

Aufgabe 331. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks stehen in dem Verhältnis $= 8:13$, das Verhältnis der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel ist $= 1:2$; wie gross sind die Winkel und in welchem Verhältnis stehen die drei Seiten a, b und c des Dreiecks?

Erkl. 272. Ein Satz aus der Proportionslehre heisst:

„Eine laufende Proportion bleibt ihrem Wert nach unverändert, wenn man die ersten Glieder aller Verhältnisse oder auch die zweiten Glieder aller Verhältnisse, aus welchen sie besteht, mit einer und derselben Zahl multipliziert oder dividiert.“

(Siehe Kleyers Lehrbuch der Buchstabenrechnung.)

Hat man z. B. die laufende Proportion:

a) .... $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$.

welche man nach der Erkl. 88 auch in der Form schreiben kann:

b) .... $x:y:z = a:b:c$

so ist nach jenem Satz:

1) .... $\frac{nx}{a} = \frac{ny}{b} = \frac{nz}{c}$

oder

1a) ... $nx:ny:nz = a:b:c$

und

2) .... $\frac{x}{n \cdot a} = \frac{y}{n \cdot b} = \frac{z}{n \cdot c}$

oder

2a) ... $x:y:z = na:nb:nc$

und

3) .... $\frac{x:n}{a} = \frac{y:n}{b} = \frac{z:n}{c}$

oder

3a) ... $\frac{x}{n}:\frac{y}{n}:\frac{z}{n} = a:b:c$

und

4) .... $\frac{x}{a:n} = \frac{y}{b:n} = \frac{z}{c:n}$

oder

4a) ... $x:y:z = \frac{a}{n}:\frac{b}{n}:\frac{c}{n}$

und dies kann man benutzen zur Vereinfachung (zur Reduktion) von Verhältnissen, welche durch eine laufende Proportion ausgedrückt werden.

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 8:13 \\ \alpha:\beta = 1:2 \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht zwischen den Winkeln α und β und den denselben gegenüberliegenden Seiten a und b die Relation:

a) .... $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\alpha:\beta = 1:2$$

also

b) ...... $\beta = 2\alpha$

und da das Verhältnis $a:b$, bezw. der Quotient:

c) .... $\frac{a}{b} = \frac{8}{13}$

ist, so ergibt sich aus Gleichung a) in Rücksicht dessen zur Bestimmung des Winkels α die goniometrische Gleichung:

d) .... $\frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{8}{13}$

Um hieraus den Winkel α berechnen zu können, darf nur eine Funktion des gesuchten Winkels α vorkommen; dies erreicht man, indem man nach der Erkl. 52 für:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$

setzt, man erhält alsdann:

$$\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{1}{2\cos\alpha} = \frac{8}{13}$$

$$\frac{1}{\cos\alpha} = \frac{16}{13}$$

oder

A) .... $\cos\alpha = \frac{13}{16}$.

wonach man den Winkel α berechnen kann. Ist α berechnet, so kennt man auch nach Gleichung b) den Winkel β, und kann γ mittels der Relation:

B) ... $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

bestimmen. Das gesuchte Verhältnis der drei Seiten a, b und c wird dann mittels der Sinusregel durch die Relation:

C) ... $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

ausgedrückt, nach welcher dasselbe leicht bestimmt werden kann, sobald man die Sinus jener berechneten Winkel α, β und γ hierin substituiert und die erhaltene Proportion nach der Erkl. 272 reduziert.

Aufgabe 332. Die drei Winkel α, β und γ eines Dreiecks verhalten sich:

a) . . . wie $1:2:3$

oder

b) . . . wie $2:3:4$

oder

c) . . . wie $4:5:6$

in welchem Verhältnis stehen in jedem einzelnen dieser Fälle die drei Seiten a, b und c dieses Dreiecks?

Gegeben: $\alpha:\beta:\gamma = 1:2:3$

Andeutung. Man berechne zunächst aus dem gegebenen Verhältnis der drei Winkel die einzelnen Winkel α, β und γ wie in der Andeutung zur Aufgabe 327 gesagt wurde.

Zur Bestimmung des gesuchten Verhältnisses der drei Seiten besteht alsdann nach der Sinusregel die Relation:

A) . . . $a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$

woraus man das gesuchte Verhältnis der drei Seiten berechnen kann, wenn man in diese Proportion die zu berechnenden Werte der Sinus jener bereits bestimmten Winkel α, β und γ substituiert und das sich hiernach ergebende Verhältnis der drei Seiten reduziert (siehe Erkl. 272).

Aufgabe 333. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks verhalten sich zu einander wie $4:6:9$; wie gross sind die drei Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $a:b:c = 4:6:9$

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 273 angeführten dritten Aehnlichkeitssatz aus der Planimetrie, sind alle Dreiecke, in welchen das Verhältnis der drei Seiten dasselbe ist, einander ähnlich, und da nach der Erkl. 7 in ähnlichen Dreiecken die homologen Winkel einander gleich sind, so kann man die in nebenstehender Aufgabe gesuchten Winkel berechnen, indem man sich ein Dreieck denkt, dessen Seite $a = 4$ irgend welchen Längeneinheiten, dessen Seite $b = 6$ derselben Längeneinheiten und dessen Seite $c = 9$ derselben Längeneinheiten ist, und dann die Winkel α, β und γ desselben, welche bezw. den Seiten a, b und c gegenüberliegen, wie in der Auflösung der gelösten Aufgabe 119 gezeigt wurde, berechnet.

Nach den Formeln 173 bis 175, welche in jener Aufgabe aufgestellt wurden, wird man erhalten:

A) . . . $\cos\alpha = \dfrac{6^2 + 9^2 - 4^2}{2\cdot 9\cdot 6}$

B) . . . $\cos\beta = \dfrac{4^2 + 9^2 - 6^2}{2\cdot 4\cdot 9}$

und

C) . . . $\cos\gamma = \dfrac{4^2 + 6^2 - 9^2}{2\cdot 4\cdot 6}$

woraus man die gesuchten Winkel α, β und γ unabhängig von einander berechnen kann. Zur Kontrolle muss:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^0$$

sein.

Erkl. 273. Die vier Aehnlichkeitssätze über das Dreieck heissen:

1) „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei (bezw. drei) Winkel in dem einen Dreieck gleich sind zwei (bezw. den drei) Winkeln im andern Dreieck“;

2) „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks in demselben Verhältnis stehen als zwei Seiten in dem andern Dreieck, und wenn die von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind“

3) „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn die drei Seiten des einen Dreiecks in demselben Verhältnis stehen, als die drei Seiten des andern Dreiecks“;

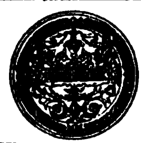
und

4) „Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Seiten des einen Dreiecks in demselben Verhältnis stehen als zwei Seiten in dem andern Dreieck, und wenn der der grösseren von jenen beiden Seiten gegenüberliegende Winkel im ersten Dreieck gleich dem der grösseren von jenen beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel im zweiten Dreieck ist“.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

276. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 275. — Seite 225—240. Mit 7 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 275. — Seite 225—240. Mit 7 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 334. Die Tangens der drei Winkel α, β und γ eines spitzwinkligen Dreiecks sind drei aufeinanderfolgende ganze Zahlen; in welchem Verhältnis stehen die drei Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: { Eine Beziehung zwischen den Tangens der drei Winkel.

Andeutung. Nimmt man an die Grösse der drei Winkel α, β und γ sei im allgemeinen durch die Beziehung:

$$\alpha < \beta < \gamma$$

ausgedrückt, und bezeichnet man allgemein die ganze Zahl, welche der Tangens β entspricht, mit n, so hat man hiernach und nach der Erkl. 274:

$$a) \ldots \operatorname{tg}\beta = n$$

$$b) \ldots \operatorname{tg}\alpha = n - 1$$

und

$$c) \ldots \operatorname{tg}\gamma = n + 1$$

Zur Berechnung der Winkel α, β und γ, welche diesen Beziehungen entsprechen können, verfahre man wie folgt:

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$d) \ldots \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta - 1$$

und aus den Gleichungen a) und c) folgt:

$$e) \ldots \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\beta + 1$$

Durch Addition der Gleichungen d) und e) erhält man:

$$f) \ldots \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma = 2 \cdot \operatorname{tg}\beta$$

und durch Multiplikation dieser Gleichungen erhält man:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = (\operatorname{tg}\beta - 1) \cdot (\operatorname{tg}\beta + 1)$$

oder nach der Erkl. 37:

$$g) \ldots \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}^2\beta - 1$$

Da nun:

$$\alpha + \gamma = 180^0 - \beta$$

also:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = \operatorname{tg}(180^0 - \beta)$$

oder nach der Erkl. 275:

$$h) \ldots \operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = -\operatorname{tg}\beta$$

und da ferner nach der Erkl. 246:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \gamma) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma}$$

folglich nach der Gleichung h):

$$i) \ldots -\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma}$$

ist, so erhält man, wenn man in diese Gleichung aus den Gleichungen f) und g) die Werte für $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\gamma$, bezw. für $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\gamma$ substituiert, für β die Bestimmungsgleichung:

$$k) \ldots -\operatorname{tg}\beta = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - (\operatorname{tg}^2\beta - 1)}$$

Diese Gleichung reduziert und nach $\operatorname{tg}\beta$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$-1 = \frac{2}{1 - \operatorname{tg}^2\beta + 1}$$

$$-1 = \frac{2}{2 - \operatorname{tg}^2\beta}$$

Erkl. 274. Ein goniometrischer Satz heisst:

„Die Tangens eines spitzen (eines zwischen 0^0 und 90^0 liegenden) Winkels nimmt mit Zunahme jenes Winkels zu, mit Abnahme jenes Winkels ab.“

(Siehe Abschnitt 10 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Hieraus ergibt sich, dass von zwei spitzen Winkeln dem grösseren derselben auch eine grössere Tangens zugehört.

Erkl. 275. Bezeichnet man mit α einen spitzen Winkel, also mit $2R - \alpha$ einen stumpfen Winkel, so besteht die goniometrische Relation:

$$\operatorname{tg}(2R - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

oder

$$\operatorname{tg}(180^0 - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

(Siehe Formel 36 c in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$-2+\mathrm{tg}^2\beta = 2$$
$$\mathrm{tg}^2\beta = 4$$
$$\mathrm{tg}\beta = \sqrt{4}$$

oder

A) . . . $\mathrm{tg}\beta = 2$

Nach Gleichung d) erhält man also hiernach:

B) . . . $\mathrm{tg}\alpha = 1$

und nach Gleichung e) erhält man hiernach:

C) . . . $\mathrm{tg}\gamma = 3$

Aus den Gleichungen A), B) und C) kann man die Winkel α, β und γ berechnen und dann in weiterem, wie in der Andeutung zur Aufgabe 332 gesagt, das gesuchte Verhältnis der drei Seiten a, b und c bestimmen.

Aufgabe 335. In einem spitzwinkligen Dreieck ist von den drei Winkeln α, β und γ der Winkel α durch 6, der Winkel β durch 7 und der Winkel γ durch 8 teilbar. Welche Winkel können diesem Dreieck genügen?

Gegeben: { Jeder der drei Winkel eines Dreiecks ist durch je eine bestimmte ganze Zahl teilbar.

Andeutung. Soll der Winkel α durch die Zahl 6 teilbar sein, so heisst dies nichts anderes, als dass die Division des Winkelwertes α durch 6 zum Quotienten eine ganze Zahl ergeben soll; bezeichnet man diese unbekannte ganze Zahl mit x, so besteht hiernach die Relation:

$$\frac{\alpha}{6} = x$$

oder

a) . . . $\alpha = 6 \cdot x$

In analoger Weise ist:

b) . . . $\beta = 7 \cdot y$

und

c) . . . $\gamma = 8 \cdot z$

Um aus diesen drei Gleichungen die den Winkeln α, β und γ zukommenden Zahlenwerte berechnen zu können, muss man zunächst die unbekannten ganzen Zahlen x, y und z berechnen. Da die Summe der drei Winkel eines Dreiecks $= 180^0$ betragen muss, so besteht zur Berechnung dieser ganzen Zahlen x, y und z die Beziehung:

d) . . . $6x + 7y + 8z = 180$

Da eine weitere Beziehung zwischen den Zahlen x, y und z nicht aufgestellt werden kann, so hat man eine Gleichung mit drei Unbekannten, also eine unbestimmte oder diophantische Gleichung (s. Erkl. 276).

Erkl. 276. Ausführliches über das Auflösen unbestimmter Gleichungen findet man in Kleyers Lehrbuch der unbestimmten Gleichungen.

---

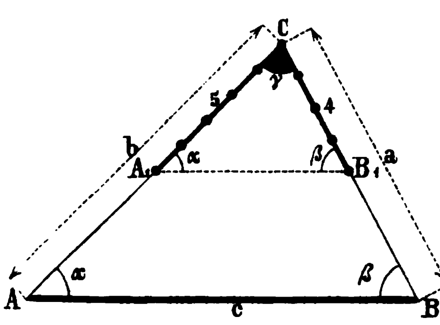
c) Aufgaben, in welchen Seiten, Verhältnisse von Seiten und Winkeln oder Beziehungen zwischen letzteren gegeben sind.

Aufgabe 336. Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 200$ m, den dieser Seite gegenüberliegenden Winkel $\gamma = 76^0\,10'\,8{,}7''$

Gegeben: { $c = 200$ m; $\gamma = 76^0\,10'\,8{,}7''$; $a : b = 4 : 5$

und das Verhältnis 4 : 5 der beiden andern Seiten a und b; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 117.



Andeutung. Ist, siehe Figur 117, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man denkt sich vom Scheitel C des gegebenen Winkels γ auf der Seite a vier irgend welche Längeneinheiten und auf der Seite b fünf derselben Längeneinheiten abgetragen und A_1 mit B_1 verbunden, so muss das erhaltene Dreieck CA_1B_1 nach dem in der Erkl. 273 angeführten zweiten Aehnlichkeitssatz dem zu berechnenden Dreieck ABC ähnlich sein, und es müssen nach der Erkl. 7 in beiden Dreiecken bezw. gleiche Winkel enthalten sein, wie in der Figur angedeutet.

Nach dem Tangentensatz (siehe Antw. der Frage 21) erhält man in Rücksicht, dass, dem gegebenen Verhältnis der Seiten entsprechend, nach der Erkl. 181 der Winkel β grösser als α ist, die Relation:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}} = \frac{5-4}{5+4}$$

oder, wenn man diese Proportion reduziert, und in Rücksicht, dass $\frac{\beta+\alpha}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind nach der Erkl. 19 für:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2} = \operatorname{ctg}\gamma$$

setzt, und diese Gleichung in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}$ auflöst:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{9}\cdot\operatorname{ctg}\gamma$$

Hat man nach dieser Gleichung $\beta - \alpha$ berechnet, so kann man, da $\beta + \alpha = 180^0 - \gamma$ ist, leicht die Winkel α und β bestimmen; dann mittels der Sinusregel aus der gegebenen Seite c und den hiernach berechneten Winkeln die geforderten Seiten berechnen.

Aufgabe 337. Das Verhältnis der zwei Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 8 : 7$, die dritte Seite c misst 8,045 km und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α ist $= 44^0\,30'\,56''$. Man soll das Dreieck trigonometrisch berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a : b = 8 : 7 \\ c = 8{,}045 \text{ km} \\ \alpha = 44^0\,30'\,56'' \end{cases}$

Andeutung. Man verfahre analog wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 336 gesagt wurde, indem man sich ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck denkt, dessen Seiten a und b bezw. $= 8$ und $= 7$ irgend welchen Längeneinheiten sind und in welchem der der grösseren dieser Seiten, nämlich der Seite a gegenüberliegende Winkel gleich jenem gegebenen Winkel α ist, siehe den vierten Aehnlichkeitssatz in der Erkl. 273 und die Erkl. 7. Dann berechne man aus diesem gedachten

Dreieck, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Winkel β und γ; den Winkel γ kann man auch aus der Relation:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

berechnen. Hat man diese Winkel β und γ berechnet, so kann man mittels derselben und der gegebenen Seite c des zu berechnenden Dreiecks nach der Sinusregel die Seiten a und b bestimmen.

Aufgabe 338. Die Seite a eines Dreiecks ist $= 87{,}0014$ km, das Verhältnis der beiden anderen Seiten b und c ist $9:8$ und die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel β und γ beträgt $= 42^0\,28'$; man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} a = 87{,}0014 \text{ km} \\ b:c = 9:8 \\ \beta - \gamma = 42^0\,28' \end{array} \right.$$

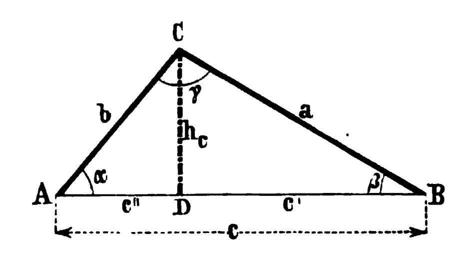
Andeutung. Man denke sich ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck, in welchem die Seiten b und c bezw. 9 und 8 irgend welchen Längeneinheiten sind und in welchem die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel β und $\gamma = 42^0\,28'$ beträgt. Berechne aus diesem Dreieck, wie in der Andeutung zur Aufgabe 325 gesagt ist, mittels des Tangentensatzes die Summe $(\beta + \gamma)$. Aus dem für $\beta - \gamma$ gegebenen und dem für $\beta + \gamma$ gefundenen Wert kann man dann leicht die Winkel β und γ berechnen. Da man alsdann in dem zu berechnenden Dreieck die Seite a und zwei Winkel β und γ kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

---

d) Aufgaben, in welchen eine Höhe gegeben ist.

Aufgabe 339. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen bezw. 35,98 m und 22,004 m und die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c misst 16,823 m; man soll die Seite c und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 118.



$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} a = 35{,}98 \text{ m} \\ b = 22{,}004 \text{ m} \\ h_c = 16{,}823 \text{ m} \end{array} \right\} \text{(s. Erkl. 277.)}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 118, ABC das Dreieck, welches die gegebenen Seiten a und b und die gegebene Höhe h_c enthält, so kann man mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck ACD sich ergebenden Relation:

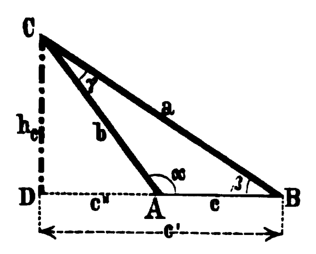
$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

wenn man in dieselbe die für b und h_c gegebenen Zahlenwerte substituiert, den Winkel α berechnen. Desgl. erhält man den Winkel β aus der Relation:

$$\text{B)} \ldots \sin\beta = \frac{h_c}{a}$$

Da man nach der Erkl. 271 aus jeder dieser Relationen A) und B) für α und β zwei Werte erhält, so hat man zunächst zu untersuchen, welche dieser Werte der Aufgabe entsprechen. Gemäss der Aufgabe ist die Seite a grösser als die Seite b, folglich muss auch α grösser als β sein.


Figur 119.



Erkl. 277. In diesem Buch sind die **Höhen** eines Dreiecks im allgemeinen mit dem Buchstaben h bezeichnet. Je nachdem eine Höhe zur Seite a, oder zur Seite b oder zur Seite c eines Dreiecks gehört, ist dieselbe bezw. durch h_a, h_b oder h_c bezeichnet.

Erkl. 278. Bei allen Berechnungen, in welchen eine Höhe des Dreiecks in Betracht kommt, ist folgendes zu beachten: Hat man, siehe die Figuren 118 und 119, ein schiefwinkliges Dreieck ABC und man nimmt eine Seite des Dreiecks als **Grundlinie** an und fällt die zu dieser Seite gehörige **Höhe**, z. B. die zur Seite c gehörige Höhe h_c, so fällt der Fusspunkt D dieser Höhe in die Seite c selbst, wenn die der (als Grundlinie angenommenen) Seite c anliegenden Winkel α und β beide **spitze** Winkel sind, siehe Figur 118; der Fusspunkt D fällt hingegen auf die Verlängerung von c, wenn einer der der Seite c anliegenden Winkel α und β ein **stumpfer** Winkel ist, siehe die Figuren 119 und 120.

Erkl. 279. Unter den **Abschnitten** oder den **Segmenten**, welche durch den Fusspunkt einer Höhe eines Dreiecks auf der zugehörigen Seite (Grundlinie) gebildet werden, und welche zugleich die **rechtwinkligen Projektionen** der beiden andern Seiten des Dreiecks auf jene dritte Seite sind, versteht man die Entfernungen des Fusspunkts jener Höhe von den Endpunkten der zugehörigen Seite (Grundlinie).

Sind die der als Grundlinie angenommenen Seite anliegenden Winkel des Dreiecks **spitze** Winkel, so ist diese Seite (Grundlinie) **gleich der Summe** jener Abschnitte, so ist z. B. in Figur 118 $c = c' + c''$; ist hingegen einer der jener Seite anliegenden Winkel ein **stumpfer** Winkel, so ist diese Seite gleich der **Differenz** jener Abschnitte, so ist z. B. in Figur 119 $c = c' - c''$ und in Figur 120 ist $c = c'' - c'$ (siehe die Erkl. 280).

Erkl. 280. Liegt ein Punkt auf einer Strecke, wie z. B. der Fusspunkt D der Höhe h_c in der Figur 118, so teilt dieser Punkt die Strecke in zwei Abschnitte (AD und BD) oder **Segmente**, welche man **innere Abschnitte** oder **innere Segmente** nennt; liegt hingegen ein

Dem Winkel α kann also sowohl ein **spitzer** als auch ein **stumpfer Winkel**, siehe die Figuren 118 u. 119, entsprechen, dem Winkel β jedoch nur **ein spitzer**, denn ein Dreieck mit **zwei** stumpfen Winkeln ist nicht möglich.

Den dritten Winkel γ findet man aus der Relation:

C) . . . $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

Die Seite c kann man nunmehr mittels der **Sinusregel** leicht berechnen oder man kann sie auch **unabhängig** von den bereits berechneten Stücken wie folgt berechnen:

Aus der Figur 118 ergibt sich, dass:

a) . . . $c = c' + c''$

ist, da sich nun aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC nach dem pythagoreischen Lehrsatz für:

b) . . . $c' = \pm \sqrt{a^2 - h_c{}^2}$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC für:

c) . . . $c'' = \pm \sqrt{b^2 - h_c{}^2}$

ergiebt, so erhält man hiernach:

d) . . $c = \pm \sqrt{a^2 - h_c{}^2} \pm \sqrt{b^2 - h_c{}^2}$

Diese Gleichung kann man, wie folgt **diskutieren**:

Für die gesuchte Dreiecksseite muss sich ein **positiver Wert** ergeben, da nun gemäss der Aufgabe $a > b$ ist und demnach:

$$\sqrt{a^2 - h_c{}^2} > \sqrt{b^2 - h_c{}^2}$$

ist, so kann das **negative Vorzeichen** der ersten Wurzel keine Gültigkeit haben, während beide Vorzeichen der zweiten Wurzel Gültigkeit haben können; man erhält also zur Berechnung der Seite c die Relationen:

D) . . . $c = \sqrt{a^2 - h_c{}^2} + \sqrt{b^2 - h_c{}^2}$

und

D_1) . . $c = \sqrt{a^2 - h_c{}^2} - \sqrt{b^2 - h_c{}^2}$

Mittels der Gleichung D) erhält man die Seite c des durch die Figur 118 dargestellten Dreiecks, mittels der Gleichung D_1) erhält man die Seite c des durch die Figur 119 dargestellten Dreiecks.

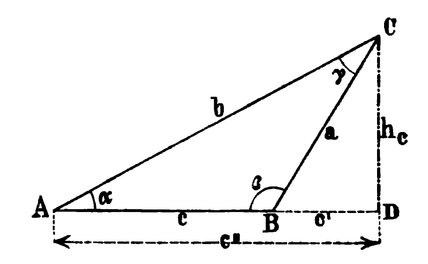
Dieselben Gleichungen hätte man erhalten, wenn man von der Figur 119 ausgeht, nach welcher:

$$c = c' - c''$$

ist (siehe die Erkl. 277 bis 281).

Punkt in der geradlinigen Verlängerung einer Strecke, wie z. B. der Fusspunkt D der Höhe h_c in der Figur 119 oder in der Figur 120, so teilt er diese Strecke ebenfalls in zwei Abschnitte (AD und BD), welche man äussere Abschnitte oder äussere Segmente nennt.

Figur 120.



Erkl. 281. In diesem Buch sind die Abschnitte oder Segmente, in welche eine Seite durch den Fusspunkt der ihr zugehörigen Höhe geteilt wird (s. Erkl. 280), im allgemeinen durch den jene Seite bezeichnenden Buchstaben bezeichnet, nur ist nach diesem Buchstaben der Index ' oder der Index '' rechts oben klein beigefügt und zwar ist der Abschnitt, welcher der Dreiecksseite anliegt, die durch einen früheren Buchstaben des Alphabets bezeichnet ist, durch den Index ', der andre Abschnitt durch den Index '' gekennzeichnet. Dementsprechend ist z. B. in der Figur 118 der Abschnitt BD der Seite c mit c', der andre Abschnitt AD dieser Seite c mit c'' bezeichnet, desgleichen in den Figuren 119 und 120.

Aufgabe 340. Von einem Dreieck kennt man die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 12$ m, die Seite $b = 15$ m und den der Seite b gegenüberliegenden Winkel $\beta = 67^0\, 22'\, 48{,}5''$; man soll hieraus die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 12 \text{ m} \\ b = 15 \text{ m} \\ \beta = 67^0\, 22'\, 48{,}5 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 339.

Aufgabe 341. In einem Dreieck ist die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 31{,}07$ dm, die Seite $a = 52{,}98$ dm und der dieser Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 78^0\, 0'\, 50''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten, Winkel und den Inhalt berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 31{,}07 \text{ dm} \\ a = 52{,}98 \text{ dm} \\ \alpha = 78^0\, 0'\, 50'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 339.

Aufgabe 342. Die zur Seite c gehörige Höhe h_c eines Dreiecks misst 3,92 km, der dieser Seite c gegenüberliegende Winkel γ ist $= 68^0\, 35'\, 41''$ und die Seite a misst 5,84 km; wie gross sind die nicht gegebenen Stücke dieses Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 3{,}92 \text{ km} \\ \gamma = 68^0\, 35'\, 41'' \\ a = 5{,}84 \text{ km} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 339.

Aufgabe 343. Von einem Dreieck kennt man die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 0{,}305$ m und die beiden jener Seite anliegenden Winkel $\alpha = 64^0\, 22'\, 0{,}8''$ und $\beta = 56^0\, 0'\, 6''$; man soll hieraus die Seiten und den Inhalt berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 0{,}305 \text{ m} \\ \alpha = 64^0\, 22'\, 0{,}8'' \\ \beta = 56^0\, 0'\, 6'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 339.

Für die Seite b erhält man:

$$\text{A)} \ldots b = \frac{h_c}{\sin\alpha}$$

für die Seite a:

$$\text{B)} \ldots a = \frac{h_c}{\sin\beta}$$

und für die Seite c nach der Sinusregel:

$$\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

oder, wenn man in Rücksicht, dass $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist:

$$\sin\gamma = \sin[180^0 - (\alpha + \beta)] = \sin(\alpha + \beta)$$

setzt und dann Gleichung B) berücksichtigt:

$$\text{C)} \ldots c = \frac{h_c \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta \cdot \sin\alpha}$$

Für den Inhalt F erhält man nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\gamma$$

oder in Rücksicht der Gleichungen A) und B) und wenn wie vorhin für:

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

gesetzt wird:

$$\text{D)} \ldots F = \frac{h^2_c \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

Aufgabe 344. Von einem Dreieck kennt man die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 20$ m, den Winkel $\gamma = 124^0\,58'\,33{,}6''$ durch welchen diese Höhe geht und den Winkel $\alpha = 43^0\,36'\,10{,}1''$; man soll die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 20 \text{ m} \\ \gamma = 124^0\,58'\,33{,}6'' \\ \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Da mit den zwei Winkeln α und γ eines Dreiecks auch der dritte Winkel β gegeben ist, so ist die Auflösung dieser Aufgabe ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 343.

Aufgabe 345. Gegeben sind von einem Dreieck die Seite $c = 1800$ m, die zugehörige Höhe $h_c = 1610$ m und der der Seite c anliegende Winkel $\alpha = 70^0\,10'\,40''$; man soll die übrigen Seiten und Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 1800 \text{ m} \\ h_c = 1610 \text{ m} \\ \alpha = 70^0\,10'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Mittels des gegebenen Winkels α und der gegebenen Höhe h_c kann man zunächst aus einem der rechtwinkligen Dreiecke, welche durch die Höhe h_c, je einem der Abschnitte der Seite c und je einer der Seiten a und b gebildet werden (siehe die Erkl. 278—281), zunächst die Seite b und den jener Seite anliegenden Abschnitt der Seite c berechnen.

Da die Seite c gegeben ist, so kann man hiernach leicht auch den andern Abschnitt derselben bestimmen und dann aus dem zweiten jener rechtwinkligen Dreiecke den Winkel β und die Seite a berechnen.

Aufgabe 346. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 150$ dm, die zugehörige Höhe h_c ist $= 24$ dm und die Seite a misst $= 145$ dm; man soll die Winkel und die Seite b des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 150 \text{ dm} \\ h_c = 24 \text{ dm} \\ a = 145 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 345. Man beachte hierbei die Erkl. 271.

Aufgabe 347. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 68$ m, die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 60$ m; man soll die Winkel und Seiten dieses Dreiecks berechnen, unter der Voraussetzung, dass $\alpha = 2\beta$ ist.

Gegeben: $\begin{cases} a = 68 \text{ m} \\ h_c = 60 \text{ m} \\ \alpha = 2\beta \end{cases}$

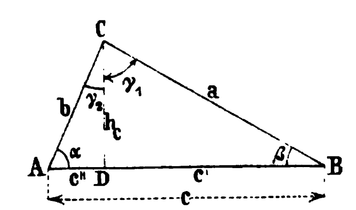
Andeutung. Mittels der gegebenen Seite a und der gegebenen Höhe h_c kann man leicht den Winkel β berechnen; da gemäss der Aufgabe:

$$\alpha = 2\beta$$

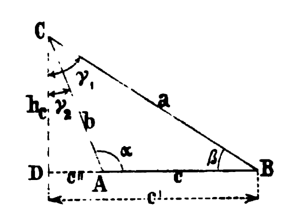
sein soll, so ist alsdann auch α bekannt. Die Seiten kann man hiernach mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 348. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist $= 7{,}04$ m und die Winkel γ_1 und γ_2, welche diese Höhe mit den beiden andern Seiten a und b bildet, sind bezw. $= 84^0\ 6'\ 8{,}4''$ und $53^0\ 31'\ 22''$; man soll die Seiten berechnen.

Figur 121.



Figur 122.



Gegeben: $\begin{cases} h_c = 7{,}04 \text{ m} \\ \gamma_1 = 84^0\ 6'\ 8{,}4'' \\ \gamma_2 = 53^0\ 31'\ 22'' \end{cases}$

Andeutung. Denkt man sich die Aufgabe als Konstruktionsaufgabe, wie es die synthetische Auflösung einer trig. Aufgabe erfordert, und denkt man sich diese Konstruktionsaufgabe gelöst, so ergibt sich ein spitzwinkliges Dreieck, wie das durch die Figur 121 dargestellte, und auch in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe γ_1 grösser als γ_2 ist, ein stumpfwinkliges Dreieck, wie das durch die Figur 122 dargestellte: beide Dreiecke genügen den Bedingungen der Aufgabe.

Nach dieser Betrachtung erhält man für den gesuchten Winkel γ des Dreiecks:

A) . . . $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$ (s. Figur 121)

und

A₁) . . . $\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$ (s. Figur 122)

Aus den rechtwinkligen Dreiecken CDB und CDA kann man in weiterem die Seiten a und b und die Winkel α und β berechnen.

Für den Winkel β erhält man zwei Werte, desgleichen für die Seite c, welche man mittels der Sinusregel berechnen kann.

Aufgabe 349. Der Winkel γ eines Dreiecks sei $= 15^0\ 22'\ 37''$, die diesem Winkel gegenüberliegende Seite $c = 90$ m und die zu dieser Seite gehörige Höhe $h_c = 120$ m; man soll hieraus die nicht gegebenen Stücke und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \gamma = 15^0\ 22'\ 37'' \\ c = 90 \text{ m} \\ h_c = 120 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 123, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CBD die Relation:

a) . . . $h_c = a \cdot \sin\beta$ (s. Erkl. 50)

ferner ergibt sich aus dem Dreieck ABC nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

oder

$$\text{b)} \ldots a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt nunmehr die weitere Gleichung:

$$\text{c)} \ldots h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}$$

Setzt man in diese Gleichung nach der Erkl. 282 für:

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

so erhält man:

$$h_c = \frac{c}{2\sin\gamma} \cdot [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

oder, wenn man in Rücksicht, dass $(\alpha + \beta)$ und γ Supplementwinkel sind, nach der Erkl. 94 für:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$$

setzt:

$$h_c = \frac{c}{2\sin\gamma} \cdot [\cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma]$$

und diese goniometrische Gleichung enthält nur noch die unbekannte Funktion $\cos(\alpha - \beta)$; löst man in bezug auf diese Unbekannte auf, so erhält man:

$$\frac{2h_c \cdot \sin\gamma}{c} = \cos(\alpha - \beta) + \cos\gamma$$

oder

$$\text{A)} \;.\; \cos(\alpha - \beta) = \frac{2h_c \cdot \sin\gamma}{c} - \cos\gamma$$

mittels welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus dem für $\alpha - \beta$ hiernach berechneten Wert und aus dem für $\alpha + \beta$ $(= 180^0 - \gamma)$ gegebenen Wert kann man leicht die Winkel α und β selbst berechnen. Die gesuchten Seiten kann man alsdann einfach nach der Sinusregel berechnen.

Man kann die Seiten a und b auch unabhängig von dem berechneten Winkel, wie folgt berechnen:

Nach den in der Erkl. 101 aufgestellten Formeln 88p und 88r hat man:

$$\text{a}_1) \ldots c^2 = (a - b)^2 + 4ab \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\text{b}_1) \ldots c^2 = (a + b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

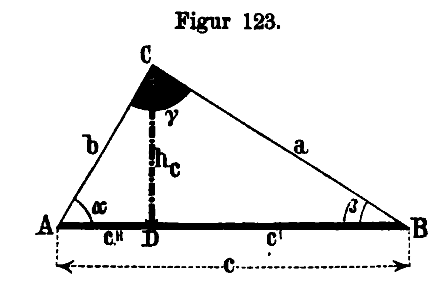
aus diesen Gleichungen ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{c}_1) \ldots a - b = \sqrt{c^2 - 4ab \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$\text{d}_1) \ldots a + b = \sqrt{c^2 + 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

Figur 123.



Erkl. 282. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha \cdot \sin\beta$$

(Siehe Formel 194 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Berücksichtigt man nun, dass nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{ab \cdot \sin\gamma}{2}$$

und dass auch:

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

ist, dass man also nach diesen zwei Gleichungen:

$$\frac{ab \cdot \sin\gamma}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

oder für:

$$ab = \frac{ch_c}{\sin\gamma}$$

setzen kann, so gehen in Rücksicht dessen vorstehende Gleichungen c_1) und d_1) über in:

$$e_1) \ldots a - b = \sqrt{c^2 - \frac{4 \cdot c \cdot h_c \cdot \sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma}}$$

und

$$f_1) \ldots a + b = \sqrt{c^2 + \frac{4 \cdot c \cdot h_c \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}{\sin\gamma}}$$

Setzt man noch nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

reduziert, und berücksichtigt die Erkl. 120 und 121, so erhält man die Relationen:

$$B) \ldots a - b = \sqrt{c^2 - 2ch_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$B_1) \ldots a + b = \sqrt{c^2 + 2ch_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

Nach welchen Gleichungen man $a + b$ und $a - b$ und somit auch die einzelnen Seiten a und b berechnen kann.

Aufgabe 350. Die Seite c eines Dreiecks misst 390 m, die zugehörige Höhe h_c ist 252 m lang und die Differenz der beiden der Seite c anliegenden Winkel α und β beträgt $22^0\ 58'\ 10''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c = 390 \text{ m} \\ h_c = 252 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 22^0\ 58'\ 10'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 349. Auf dieselbe Weise wie dort $(\alpha - \beta)$ berechnet wurde, berechne man in dieser Aufgabe zunächst $(\alpha + \beta)$.

Aufgabe 351. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $= 79^0\ 45'$, das Verhältnis der beiden diesen Winkel einschliessenden Seiten a und b ist $= 4:1$ und die zur dritten Seite gehörige Höhe h_c ist 60 m lang; man soll hieraus die beiden andern Winkel und die Seiten des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} \gamma = 79^0\ 45' \\ a:b = 4:1 \\ h_c = 60 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 336. Man berechne zuerst die Winkel eines Dreiecks, welches dem geforderten Dreieck ähnlich ist und zwar aus dem Verhältnis 4 : 1 zweier Seiten und dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ

(siehe den zweiten Aehnlichkeitssatz in der Erkl. 273). Dies kann man wie folgt:

Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

oder, in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe der Quotient $\frac{a}{b} = \frac{4}{1}$ ist.

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{4}{1}$$

Nach dem in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz ist hiernach:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{4+1}{4-1}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 283 angeführten Formeln benutzt:

$$\frac{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{5}{3}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 15:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{5}{3}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

und nach dieser Gleichung kann man $\alpha-\beta$ berechnen.

Da ferner $\alpha+\beta = 180^0 - \gamma$ ist, so können hiernach leicht die Winkel α und β bestimmt werden.

Erkl. 288. Sind α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, bezw. solche Winkel, welche zusammen $= 180^0$ betragen, so bestehen die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe die Formeln 261 und 262 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 352. Das Verhältnis der zwei Seiten a und c eines Dreiecks ist $= 4:3$, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel β ist $= 60^0$ und die zur Seite c gehörige Höhe h_c misst 6,928 m. Man soll das Dreieck trigonometrisch berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a:c = 4:3 \\ \beta = 60^0 \\ h_c = 6{,}928 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 351.

Aufgabe 353. Das Verhältnis der zwei Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 4:1$, die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c ist $= 60$ m und der Winkel α, welcher der Seite a gegenüberliegt, ist $= 79^0 75'$; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a:b = 4:1 \\ h_c = 60 \text{ m} \\ \alpha = 79^0 45' \end{cases}$$

Andeutung. Durch das gegebene Verhältnis 4:1 der Seiten a und b und durch den der grösseren dieser beiden Seiten, nämlich durch den der Seite a gegenüberliegenden Winkel α ist ein Dreieck bestimmt, das dem zu berechnenden Dreieck ähnlich ist (siehe den vierten Aehnlichkeitssatz in der Erkl. 273). Analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 336 gesagt ist, kann man hiernach zunächst die Winkel β und γ bestimmen, dann kann man weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 343 gesagt wurde.

Aufgabe 354. In einem Dreieck verhalten sich die Seiten a und b wie $1:1,2$, die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c beträgt 5,5 m, und der Sinus des der Seite a gegenüberliegenden Winkels α ist $= 0,2345678$. Man soll hieraus die Seite c berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 1:1,2 \\ h_c = 5,5 \text{ m} \\ \sin\alpha = 0,2345678 \end{cases}$

Andeutung. Aus der gegebenen Beziehung:

$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = 0,2345678$$

kann man zunächst den Winkel α berechnen, wobei man die Erkl. 271, ferner aber auch zu berücksichtigen hat, dass nach dem gegebenen Verhältnis der Seiten a und b die Seite b grösser als die Seite a, folglich auch der Winkel β grösser als der Winkel α sein muss und dementsprechend α kein stumpfer Winkel sein kann.

Ist der Winkel α berechnet, so ist diese Aufgabe 354 auf die vorhergehende zurückgeführt.

Man kann auch im weiteren, da nicht allein α sondern auch $\sin\alpha$ bekannt ist, wie folgt verfahren:

Nach der Sinusregel ist:

$$\sin\alpha : \sin\beta = a : b$$

da nun gemäss der Aufgabe:

$$a : b = 1 : 1,2$$

ist, so erhält man hieraus:

$$\sin\alpha : \sin\beta = 1 : 1,2$$

oder, wenn man für $\sin\alpha$ den gegebenen Wert substituiert und diese Proportion nach $\sin\beta$ auflöst:

$$\text{A)} \ldots \sin\beta = \frac{0,2345678}{1,2}$$

Aus dieser Gleichung kann man β berechnen, welchem Winkel nach der Erkl. 271 und nach dem vorstehend gesagten zwei Werte entsprechen können. Mittels der berechneten Winkel α und β und der gegebenen Höhe h_c kann man im weiteren leicht die Seiten a und b berechnen, dann die Seite c nach der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 355. Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 40$ m, die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 12$ m und das Verhältnis $3:1$ der beiden andern Seiten a und b; man soll die Seiten a und b und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a:b = 3:1 \\ c = 40 \text{ m} \\ h_c = 12 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach der in der Andeutung zur Aufgabe 349 aufgestellten Gleichung c) ist:

$$h_c = \frac{c \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 66 und in Rücksicht, dass γ und $(\alpha + \beta)$ Supplementwinkel sind:

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

setzt und jene Gleichung umformt:

$$\text{a)} \ldots . \frac{\sin\alpha \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{h_c}{c}$$

Ferner hat man gemäss der Aufgabe und nach der Sinusregel die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{3}{1}$$

Diese beiden goniometrischen Gleichungen, in welchen die unbekannten Funktionen Sinus der Winkel α, β und $(\alpha+\beta)$ enthalten sind, forme man nunmehr so um, dass man schliesslich nur noch eine Funktion eines Winkels hat. (Siehe Abschnitt 25 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie).

Aufgabe 356. Zwei Seiten a und b eines Dreiecks verhalten sich wie $41{,}61:28{,}09$ und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β verhalten sich wie $3:2$; wie gross sind die Seiten und die Winkel des Dreiecks, wenn die zur dritten Seite c gehörige Höhe $h_c = 200$ m misst?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a:b = 41{,}61:28{,}09 \\ \alpha:\beta = 3:2 \\ h_c = 200 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel α und β wie folgt:

Da gemäss der Aufgabe zwischen α und β die Relation:

$$\alpha:\beta = 3:2$$

bestehen soll, so muss hiernach, wenn man:

$$\text{a)} \ldots \alpha = 3\delta$$

setzt:

$$\text{b)} \ldots \beta = 2\delta$$

sein. Zur Bestimmung des noch unbekannten Winkels δ, besteht nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

oder in Rücksicht der Gleichungen a) und b) und in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe der Quotient $\frac{a}{b} = \frac{41{,}61}{28{,}09}$ ist,

$$\frac{\sin 3\delta}{\sin 2\delta} = \frac{41{,}61}{28{,}09}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 266:

$$\sin 3\delta = 3\sin\delta - 4\sin^3\delta$$

und nach der Erkl. 52:

$$\sin 2\delta = 2\sin\delta\cdot\cos\delta$$

so erhält man:

$$\frac{3\sin\delta - 4\sin^3\delta}{2\sin\delta\cdot\cos\delta} = \frac{41{,}61}{28{,}09}$$

oder

$$\frac{3 - 4\sin^2\delta}{2\cos\delta} = \frac{41{,}61}{28{,}09}$$

Setzt man jetzt nach der Erkl. 145:

$$\sin^2\delta = 1 - \cos^2\delta$$

so erhält man schliesslich für $\cos\delta$ die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\text{A)} \ldots \frac{3 - 4(1 - \cos^2\delta)}{2\cos\delta} = \frac{41{,}61}{28{,}09}$$

Diese Gleichung kann man nach $\cos\delta$ auflösen und dann den Winkel δ berechnen. Ist δ berechnet, so kennt man auch nach den Gleichungen a) und b) die Winkel α und β. Im weiteren verfahre man nunmehr wie in der Andeutung zur Aufgabe 343 gesagt ist.

---

e) Aufgaben, in welchen Segmente von Seiten, bezw. Projektionen von Seiten gegeben sind.

Aufgabe 357. Wie gross sind die drei Winkel eines Dreiecks, wenn die Seite a = 48,3 m, die Seite b = 54,8 m lang ist, und wenn die zur Seite c gehörige Höhe h_c diese Seite in zwei Abschnitte zerlegt, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt c' = 28,98 m misst?

Gegeben: $\begin{cases} a = 48{,}3 \text{ m} \\ b = 54{,}8 \text{ m} \\ c' = 28{,}98 \text{ m} \end{cases}$ (s. Erkl. 281)

Andeutung. Die zur Seite c gehörige Höhe h_c bildet mit je einem der Abschnitte c' und c'' der Seite c (siehe die Erkl. 278 und 279 und die Figuren 118 und 119) und mit je einer der beiden andern Seiten a und b des Dreiecks ein rechtwinkliges Dreieck; aus dem einen dieser Dreiecke kann man mittels der gegebenen Seite a und dem anliegenden Abschnitt c' den Winkel β berechnen. Mittels der hiernach für β gefundenen zwei Werte und den gegebenen Seiten a und b kann man im weiteren durch Anwendung der Sinusregel den Winkel α berechnen, wobei die Erkl. 271 berücksichtigt werden muss.

Aufgabe 358. Die Seite b eines Dreiecks misst 15 m, der ihr anliegende Abschnitt c'' der Seite c, welcher von der zur Seite c gehörigen Höhe gebildet wird, ist = 9 m und der der Seite c gegenüberliegende Winkel γ beträgt 59° 29′ 23,1″; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Erkl. 284. Unter der rechtwinkligen Projektion eines Punkts auf eine Gerade versteht man den Fusspunkt des Perpendikels, welchen man von jenem Punkt auf die Gerade fällen kann. Der Perpendikel selbst heisst die Projicierende jenes Punkts.

Unter der rechtwinkligen Projektion einer Strecke auf eine Gerade versteht man die Entfernung der Fusspunkte der Perpendikel, welche man von den Endpunkten jener Strecke auf die Gerade fällen kann. Die Perpendikel selbst heissen die Projicierenden jener Strecke. Fällt der eine Endpunkt jener Strecke in die Gerade, so ist der eine Perpendikel (die eine Projicierende) gleich Null, und die Projektion des einen Endpunkts jener Strecke fällt mit diesem Endpunkt zusammen; wie es z. B. bei der rechtwinkligen Projektion einer Seite eines Dreiecks auf einer der andern Dreiecksseiten der Fall ist.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie und der darstellenden Goniometrie.)

Gegeben: $\begin{cases} b = 15 \text{ m} \\ c'' = 9 \text{ m} \\ \gamma = 59^0\, 29'\, 23{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches durch die gegebene Seite b, den gegebenen Abschnitt c'', d. i. die rechtwinklige Projektion der Seite b auf die Seite c (siehe Erkl. 284), und der Höhe h_c gebildet wird, berechne man den Winkel α. Zur Berechnung der Seiten a und c kann man im weiteren die Sinusregel benutzen.

Aufgabe 359. Die Seite b eines Dreiecks ist 15 m lang, der derselben gegenüberliegende Winkel β ist = 67° 22′ 48,5″ und der Abschnitt c', welcher von der zur Seite c gehörigen Höhe auf dieser Seite gebildet wird und dem Winkel β anliegt, misst 5 m, wie gross sind die nicht gegebenen Stücke des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b = 15 \text{ m} \\ \beta = 67^0\, 22'\, 48{,}5'' \\ c' = 5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 357.

Aufgabe 360. Die Seite a eines Dreiecks sei $= 37$ m, der ihr gegenüberliegende Winkel $\alpha = 53^0\ 7'\ 48{,}4''$ und die zur Seite c gehörige Höhe h_c teilt die Seite c in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt $c' = 35$ m sei. Welches müssen die Längen der nicht gegebenen Seiten und wie gross müssen die übrigen Winkel sein?

Gegeben: $\begin{cases} a = 37\text{ m} \\ \alpha = 53^0\ 7'\ 48{,}4'' \\ c' = 35\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 358.

Aufgabe 361. Die zwei Winkel β und γ eines Dreiecks betragen bezw. $79^0\ 36'\ 40''$ und $33^0\ 23'\ 54{,}6''$; der dem Winkel β anliegende Abschnitt c' der Seite c, welcher durch die zu dieser Seite gehörige Höhe gebildet wird, ist $= 91$ km; man berechne die drei Seiten des Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} \beta = 79^0\ 36'\ 40'' \\ \gamma = 33^0\ 23'\ 54{,}6'' \\ c' = 91\text{ km} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst aus β und c' die Seite a, dann mittels Anwendung der Sinusregel die Seiten b und c.

Aufgabe 362. In einem Dreieck ist die Seite $b = 530$ m, der Winkel $\alpha = 31^0\ 53'\ 26{,}9''$ und der Abschnitt c', welcher auf der Seite c durch die zugehörige Höhe gebildet wird und der Seite b nicht anliegt, ist $= 1950$ m; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b = 530\text{ m} \\ \alpha = 31^0\ 53'\ 26{,}9'' \\ c' = 1950\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus b und α berechne man die Höhe h_c, aus h_c und c' berechne man alsdann die Seite a und den Winkel β. Da $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$, so berechne man die Seite c mittels der Sinusregel. Man beachte die Erkl. 271.

Aufgabe 363. Die beiden Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h_c geteilt wird, messen bezw. $= 45$ dm und $= 5$ dm, und der dem Abschnitt c'' anliegende Winkel α des Dreiecks beträgt $60^0\ 8'\ 4{,}8''$; man soll die Seiten und nicht gegebenen Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c' = 45\text{ dm} \\ c'' = 5\text{ dm} \\ \alpha = 60^0\ 8'\ 4{,}8'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne aus c'' und α die Seite b, beachte, dass $c = c' + c''$ ist und berechne mittels Anwendung der Sinusregel die Seite a und die Winkel γ und β, berücksichtige hierbei die Erkl. 271.

Aufgabe 364. Von einem Dreieck kennt man die Seite $b = 25$ m und die beiden Abschnitte $c' = 143$ m und $c'' = 147{,}931$ m, in welche die Seite c durch die ihr zugehörige Höhe zerlegt wird. Man berechne die Winkel und die dritte Seite.

Gegeben: $\begin{cases} b = 25\text{ m} \\ c' = 143\text{ m} \\ c'' = 147{,}931\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 363.

Aufgabe 365. Die zwei Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe zerlegt wird, messen bezw. 1000 und 1250 m, der Winkel γ_1, welchen jene Höhe mit der Seite a des Dreiecks bildet, beträgt $60^0\ 0'\ 6''$; wie gross sind die Winkel und Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c' = 1000\text{ m} \\ c'' = 1250\text{ m} \\ \gamma_1 = 60^0\ 0'\ 6'' \end{cases}$

Andeutung. Aus c' und γ' berechne man, siehe die Figuren 121 und 122, die Seite a, den Winkel β und die Höhe h_c, dann berechne man aus h_c und c'' die Winkel α und γ_2.

Aufgabe 366. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 5$ m, der der Seite b anliegende Abschnitt c'', welchen die zur Seite c gehörige Höhe h_c auf c bildet, ist $= 2$ m und der Winkel γ_2, welchen diese Höhe mit der Seite b bildet, ist $= 42^0\ 18'\ 37{,}5''$. Man soll das Dreieck trigonometrisch berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 5\text{ m} \\ c'' = 2\text{ m} \\ \gamma_2 = 42^0\ 18'\ 37{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 365.

Aufgabe 367. Die beiden Segmente c' und c'', in welche die Seite c eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe geteilt wird, messen bezw. 171 m und 51 m, wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn der der Seite c gegenüberliegende Winkel $\gamma = 70^0\,42'\,30''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} c' = 171\text{ m} \\ c'' = 51\text{ m} \\ \gamma = 70^0\,42'\,30'' \end{cases}$

Andeutung. Man drücke die Höhe h_c einmal in c' und β, ein andermal in c'' und α aus; man erhält:

$$h_c = c'' \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

und

$$h_c = c' \cdot \operatorname{tg}\beta \quad \text{(s. Erkl. 46)}$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt die weitere Gleichung:

a) . . . . $c' \cdot \operatorname{tg}\beta = c'' \cdot \operatorname{tg}\alpha$

und mittels dieser Gleichung kann man die Differenz der Winkel α und β wie folgt berechnen:

In Rücksicht der Erkl. 120 erhält man:

$$c' \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = c'' \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$c' \cdot \sin\beta \cdot \cos\alpha = c'' \cdot \sin\alpha \cdot \cos\beta$$

oder

$$\frac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\beta\cos\alpha} = \frac{c'}{c''}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 285:

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right]$$

und nach der Erkl. 286:

$$\sin\beta \cdot \cos\alpha = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right]$$

und reduziert, so erhält man:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)} = \frac{c'}{c''}$$

Bringt man jetzt den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung und reduziert gleichzeitig, so ergibt sich hieraus:

$$\frac{2 \cdot \sin(\alpha+\beta)}{2 \cdot \sin(\alpha-\beta)} = \frac{c'+c''}{c'-c''}$$

und hiernach erhält man für:

$$\sin(\alpha-\beta) = \frac{c'-c''}{c'+c''} \cdot \sin(\alpha+\beta)$$

oder, in Rücksicht, dass $\alpha+\beta = 180^0 - \gamma$ ist, dass also nach der Erkl. 66:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$$

gesetzt werden kann:

A) . . . $\sin(\alpha-\beta) = \dfrac{c'-c''}{c'+c''} \cdot \sin\gamma$

hat man nach dieser Gleichung $\alpha - \beta$ berechnet und hierbei die Erkl. 271 berücksichtigt, so kann man aus $\alpha+\beta = 180^0 - \gamma$ und aus jenem für $\alpha-\beta$ berechneten Wert, leicht die Winkel α und β selbst bestimmen und dann in Rücksicht, dass $c = c' + c''$ ist, mittels Anwendung der Sinusregel die Seiten a und b berechnen.

Erkl. 285. Eine goniometrische Formel heisst:

$$2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$$

(Siehe Formel 192 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 286. Eine goniometrische Formel heisst:

$$2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)$$

(Siehe Formel 193 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

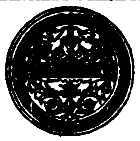
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

277. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 276. — Seite 241—256. Mit 15 Figuren.

Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 276. — Seite 241—256. Mit 15 Figuren.

Inhalt:

Fortsetzung der Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck im allgemeinen. Aufgaben in welchen zwei Höhen; in welchen drei Höhen vorkommen; in welchen eine Schwerlinie vorkommt.

Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt **a.** M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 368. Die beiden Segmente c' und c'', in welche die Seite c eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe geteilt wird, sind bezw. 425,96 und 291,78 m lang, die der Seite c anliegenden Winkel α und β differieren um $\delta = 10^0 20' 12''$; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c' = 425{,}96 \text{ m} \\ c'' = 291{,}78 \text{ m} \\ \beta - \alpha = \delta = 10^0 20' 12'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 367; man berechne zunächst aus c', c'' und $(\alpha - \beta)$ die Summe $\alpha + \beta$, wobei die Erkl. 271 zu berücksichtigen ist.

Aufgabe 369. Die Seite b eines Dreiecks misst 4,79 m, die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist 0,92 m und der Abschnitt c', welchen diese Höhe auf der Seite c bildet und der dritten Seite a anliegt, ist 14,38 m lang. Man soll hieraus die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} b = 4{,}79 \text{ m} \\ h_c = 0{,}92 \text{ m} \\ c' = 14{,}38 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches durch die Höhe h_c, der gegebenen Seite b und dem der Seite b anliegenden Abschnitt c'' der Seite c (d. i. die rechtwinklige Projektion der Seite b auf die Seite c, siehe Erkl. 284) gebildet wird, siehe Figur 118, berechne man den Winkel α und den Abschnitt c''; berücksichtige aber hierbei die Erkl. 271 (s. Figur 119).

Ferner berechne man aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches durch die gegebene Höhe h_c, der andern Seite a und dem dieser Seite a anliegenden und gegebenen Abschnitt c' der Seite c (d. i. die rechtwinklige Projektion der Seite a auf die Seite c, s. Erkl. 284) gebildet wird, den Winkel β und die Seite a. Den Winkel γ berechne man mittels der Relation:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

Aufgabe 370. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c misst 20 m, der eine der Abschnitte, in welche die Seite c durch die Höhe zerlegt wird, ist $c'' = 117{,}6238$ m lang und der dem andern Abschnitt c' anliegende Winkel β beträgt $11^0 25' 16{,}3''$, wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c = 20 \text{ m} \\ c'' = 117{,}6238 \text{ m} \\ \beta = 11^0 25' 16{,}3'' \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne aus c'' und h_c zunächst den Winkel α und die Seite b, dann kann man im weiteren mittels Anwendung der Sinusregel die Seiten c und a berechnen.

Aufgabe 371. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $131^0 24' 44''$, die zur gegenüberliegenden Seite c gehörige Höhe h_c misst 60 m und das eine Segment c'' dieser Seite c ist 301,1 m lang; man soll die übrigen Winkel und die Seiten des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} \gamma = 131^0 24' 44'' \\ h_c = 60 \text{ m} \\ c'' = 301{,}1 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Aus c'' und h_c berechne man die Seite b und den Winkel α, beachte, dass letzterem nur ein Wert entsprechen kann, indem γ bereits ein stumpfer Winkel ist. Dann benutze man im weiteren die Sinusregel.

Aufgabe 372. Die Höhe h_c, welche zur Seite c eines Dreiecks gehört, misst 40 dm, der der Seite a anliegende Abschnitt c', welcher auf der Seite c durch jene Höhe gebildet wird, ist 399 dm lang und der der

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c = 40 \text{ dm} \\ c' = 399 \text{ dm} \\ \gamma = 96^0 57' 20{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 371.

Seite c gegenüberliegende Winkel γ beträgt $96^0 57' 20{,}1''$. Man berechne die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks.

Aufgabe 373. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist $= 9{,}98$ m lang, die beiden Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c durch jene Höhe geteilt wird, messen bezw. 6,1 m und 10,45 m; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Erkl. 287. Ergeben sich bei der Berechnung der Länge einer Seite eines Dreiecks (oder irgend einer andern Figur) negative Werte für dieselbe, so sind dieselben zu vernachlässigen, indem negative Seiten eines Dreiecks keinen Sinn zulassen.

Erkl. 288. Wie in der Erkl. 279 erwähnt, hat man für eine Dreiecksseite c, welche durch den Fusspunkt der zu ihr gehörigen Höhe h_c in zwei Abschnitte c' und c'' geteilt wird:

a) . . . $c = c' + c''$ (siehe Figur 118)

b) . . . $c = c' - c''$ („ „ 119)

und

c) . . . $c = c'' - c'$ („ „ 120)

Diese drei Relationen kann man nun allgemein wie folgt zusammenfassen:

d) . . . $c = \pm c' \pm c''$

welche Gleichung man folgender Diskussion unterziehen kann:

Ist c' grösser als c'', so können nur die Beziehungen:

$$c = c' + c''$$

und

$$c = c' - c''$$

Gültigkeit haben; ist hingegen c' kleiner als c'', so können nur die Beziehungen:

$$c = c' + c''$$

$$c = - c' + c'' \text{ oder } = c'' - c'$$

Gültigkeit haben; in keinem Fall kann aber in Rücksicht der vorigen Erkl. 287 die Beziehung:

$$c = - c' - c''$$

Gültigkeit haben.

Aus dieser Diskussion ergibt sich ganz allgemein: Der grössere der Abschnitte c' und c'' muss immer das Vorzeichen $+$ haben, der kleinere jener Abschnitte kann dann das Vorzeichen $+$ oder $-$ haben; ist hiernach $c' > c''$ so kann die Beziehung bestehen:

1) . . . $c = c' \pm c''$

Ist hingegen $c' < c''$ so kann die Beziehung bestehen:

2) . . . $c = c'' \pm c'$

Gegeben: $\begin{cases} h_c = 7{,}98 \text{ m} \\ c' = 6{,}1 \text{ m} \\ c'' = 10{,}45 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus den rechtwinkligen Dreiecken, welche durch die Höhe h_c, je einem der Abschnitte c' und c'' und je einer der Seiten a und b gebildet werden, berechne man die Seiten a und b; man erhält:

A) . . . $a = \sqrt{h_c^2 + c'^2}$
und
B) . . . $b = \sqrt{h_c^2 + c''^2}$ (siehe die Erkl. 194 und 287)

Für die gesuchte Seite c erhält man in Rücksicht der Erkl. 278—280 und in Rücksicht, dass c'' grösser als c' ist:

C) . . . $c = c'' \pm c'$ (siehe Erkl. 288)

Zur Berechnung der Winkel α und β aus den gegebenen Stücken, denke man sich das Dreieck aus den Seiten a und b und der Höhe h_c konstruiert, man wird, da sich nach den für c' und c'' gegebenen Zahlenwerten aus den Gleichungen A) und B) ergibt, dass die Seite b grösser als a sein muss, entweder ein spitzwinkliges Dreieck, siehe Figur 118, oder ein stumpfwinkliges Dreieck, siehe Figur 120, erhalten.

Aus der Figur 118 erhält man:

D) . . . $\operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{c''}$

und

E) . . . $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'}$

ferner erhält man aber auch aus der Fig. 120:

E₁) . . . $\operatorname{tg}(2R - \beta) = \frac{h_c}{c'}$

Mittels dieser Gleichungen kann man die Winkel α und β berechnen, wonach man für β zwei Werte erhalten muss. Die Gleichungen E) und E_1) kann man auch in Rücksicht der Erkl. 288, nach welcher für den Fall, dass $c' < c''$ ist, der kleinere Abschnitt c' positiv oder negativ sein kann, wie folgt zusammenfassen:

F) . . . $\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{\pm c'}$

Wählt man das obere Vorzeichen $+$, so ist hiernach:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'} \text{ (s. Gleich. E)}$$

wählt man das untere Vorzeichen $-$, so ist:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'}$$

Erkl. 289. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(2R - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

(Siehe Formel 23 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{h_c}{c'}$$

$$-\operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'}$$

oder, da nach der Erkl. 289:

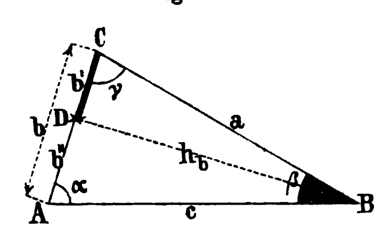
$$\operatorname{tg}(2R - \beta) = -\operatorname{tg}\beta$$

gesetzt werden kann:

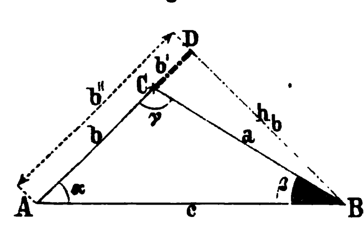
$$\operatorname{tg}(2R - \beta) = \frac{h_c}{c'} \text{ (siehe Gleichung } E_1)$$

Aufgabe 374. In einem Dreieck ABC verhält sich die **grösste** Seite c zur Seite b wie $3:1$; der der Seite b gegenüberliegende Winkel β misst $17^0\,28'\,30''$ und die Projektion b' der dritten Seite a auf die Seite b misst 40 m. Wie gross sind die drei Seiten und die drei Winkel dieses Dreiecks?

Figur 124.



Figur 125.



Gegeben: $\begin{cases} c : b = 3 : 1 \\ \beta = 17^0\,28'\,30'' \\ b' = 40\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht die Relation:

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{c}{b}$$

da man für den Quotienten $\frac{c}{b}$ gemäss der Aufgabe $= \frac{3}{1}$ setzen kann und da der Winkel β gegeben ist, so hat man hiernach zur Berechnung des Winkels γ die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{3}{1}\cdot\sin\beta$$

oder

$$A) \ldots \sin\gamma = \frac{\sin\beta}{3}$$

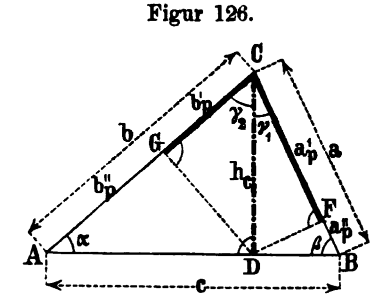
Setzt man für β den gegebenen Zahlenwert und berechnet hieraus den Winkel γ, so wird man in Rücksicht der Erkl. 271 für denselben zwei Werte erhalten. Zur Untersuchung, welcher dieser Werte der Aufgabe genügt, beachte man, dass der Aufgabe gemäss die Seite c **grösser** als die Seite b sein soll, dass also nach der Erkl. 181 jener berechnete Winkel γ **grösser** als der Winkel β sein muss. Nach dieser Betrachtung berechne man, siehe die Figuren 124—125, die Seite a aus der gegebenen Projektion b' dieser Seite auf die Seite b und aus dem berechneten Winkel γ, bezw. aus dessen Supplementwinkel. Ist a berechnet, so kann man leicht mittels der Sinusregel die Seiten b und c berechnen.

Aufgabe 375. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist 12 m lang, die rechtwinkligen Projektionen a'_p und b'_p dieser Höhe auf die beiden Seiten a und b sind bezw. $=$ 8 und 6 m lang. Man berechne hieraus die Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} h_c = 12\text{ m} \\ a'_p = 8\text{ m} \\ b'_p = 6\text{ m} \end{array}\right\}$ (s. Erkl. 290)

Andeutung. Fasst man die Aufgabe als Konstruktionsaufgabe auf und denkt man sich das Dreieck aus den gegebenen Stücken konstruiert, so wird man in Rücksicht, dass nach der Erkl. 278 der Fusspunkt der Höhe h_c

Figur 126.



Erkl. 290. In diesem Buch sind die Abschnitte oder Segmente, in welche eine Seite zerlegt wird, im allgemeinen durch die jene Seiten bezeichnenden Buchstaben, welchen rechts oben kleine Indices hinzugefügt sind, bezeichnet, wie in der Erkl. 281 bereits erwähnt. Werden diese Abschnitte nicht durch die den Seiten zugehörigen Höhen, sondern durch andre auf ihr senkrecht stehende Linien gebildet, so ist dem betreffenden Buchstaben ausserdem noch rechts unten der Buchstabe p klein beigefügt. In Figur 126 wird z. B. durch den Perpendikel DF die Seite a in die zwei Abschnitte a' und a'' zerlegt, der erstere liegt der Seite b an und erhält deshalb den Index ′, der zweite liegt der alphabetisch nachfolgenden Seite c an und erhält deshalb den Index ″; da ferner diese Abschnitte durch einen Perpendikel (zur Seite a) gebildet werden, so erhalten sie zum Unterschied von andern Abschnitten noch den Index p und werden hiernach durch a'_p und a''_p bezeichnet.

auf der Seite c selbst oder auch auf deren Verlängerung liegen kann, und in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe die Projektion a'_p grösser als die Projektion b'_p ist, zwei Figuren erhalten, welche im allgemeinen den Figuren 126 und 127 entsprechen.

Aus den in jenen Figuren enthaltenen rechtwinkligen Dreiecken CDF und CDG kann man mittels der gegebenen Höhe h_c und den gegebenen Projektionen a'_p und b'_p die Winkel γ' und γ'' leicht berechnen; in Rücksicht, dass:

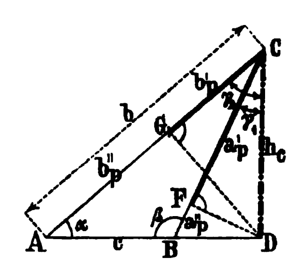
$$\gamma = \gamma_1 + \gamma_2 \text{ (siehe Figur 126)}$$

bezw. dass:

$$\gamma = \gamma_2 - \gamma_1 \text{ (siehe Figur 127)}$$

ist, kann man also hiernach den Winkel γ berechnen. Ist γ berechnet, so hat man im weiteren die Aufgabe 349 zu lösen.

Figur 127.



Aufgabe 376. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c misst 5 m und die senkrechten Entfernungen ihres Fusspunktes von den beiden andern Seiten a und b messen bezw. = 2 und 3 m; man soll hieraus die Seiten und Winkel, sowie den Flächeninhalt berechnen.

Erkl. 291. In diesem Buch sind Strecken, welche auf der Seite eines Dreiecks senkrecht (perpendikulär) stehen, also rechtwinklig projicierende Linien sind (siehe Erkl. 284), und nicht zugleich Höhen des Dreiecks sind, im allgemeinen mit dem Buchstaben p bezeichnet, und zwar sind dieselben, je nachdem sie sich auf die Seite a oder die Seite b oder die Seite c beziehen, bezw. durch p_a, p_b oder p_c bezeichnet.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} h_c = 5 \text{ m} \\ p_a = 2 \text{ m} \\ p_b = 3 \text{ m} \end{array} \right\} \text{ (s. Erkl. 291)}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 375.

---

f) Aufgaben, in welchen zwei Höhen vorkommen.

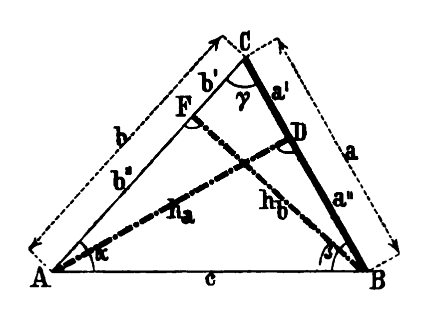
Aufgabe 377. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b messen bezw. 12,9231 und 11,2 m, die Seite a ist 13 m lang. Man berechne hieraus die Winkel und die übrigen Seiten des Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} h_a = 12{,}9231 \text{ m} \\ h_b = 11{,}2 \text{ m} \\ a = 13 \text{ m} \end{array} \right.$$

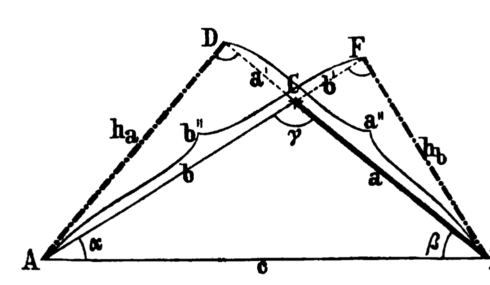
Andeutung. Nach der Erkl. 34 hat man für den Flächeninhalt F des Dreiecks einmal:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

Figur 128.



Figur 129.



ein andermal:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

aus beiden Gleichungen folgt:

$$\frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots \ldots \ldots \ldots b = \frac{a \cdot h_a}{h_b}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a, h_a und h_b gegebenen Zahlenwerte die Seite b berechnen kann. Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BFC, siehe Figur 128, die Relation:

$$\text{B)} \ldots \ldots \ldots \sin\gamma = \frac{h_b}{a}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann, wobei man die Erkl. 271 berücksichtigen muss, siehe auch die Figur 129.

Nunmehr kann man aus den Seiten a und b und dem von beiden eingeschlossenen Winkel γ, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Winkel α und β und die dritte Seite c berechnen.

Aufgabe 378. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $= 124^0\, 58'\, 33{,}6''$, die zu den diesen Winkel einschliessenden Seiten gehörigen Höhen h_a und h_b messen bezw. 23,7624 und 82,7586 m; man soll hieraus die nicht gegebenen Winkel und Seiten, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_a = 23{,}7624 \text{ m} \\ h_b = 82{,}7586 \text{ m} \\ \gamma = 124^0\, 58'\, 33{,}6'' \end{cases}$$

Andeutung. Jede der gegebenen Höhen ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Seite b bezw. die Seite a ist und dessen einer spitze Winkel gleich dem gegebenen Winkel γ ist; aus diesen Dreiecken kann man leicht die Seiten a und b berechnen. Aus a, b und γ kann man im weiteren, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die übrigen geforderten Stücke berechnen. Da der gegebene Winkel γ ein **stumpfer** ist, so müssen die beiden andern Winkel α und β spitze Winkel sein.

Aufgabe 379. Die Seite c eines Dreiecks ist 517,628 m lang, die zu den beiden andern Seiten a und b gehörigen Höhen h_a und h_b messen bezw. 315 und 416 m; wie gross sind die Winkel, die nicht gegebenen Seiten und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_a = 315 \text{ m} \\ h_b = 416 \text{ m} \\ c = 517{,}628 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Jede der gegebenen Höhen h_a und h_b ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die gegebene Seite c ist. Aus diesen rechtwinkligen Dreiecken kann man auf einfache Weise die Winkel α und β berechnen und kann dann mittels der Relation:

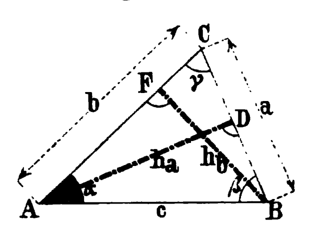
$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

auch den Winkel γ bestimmen.

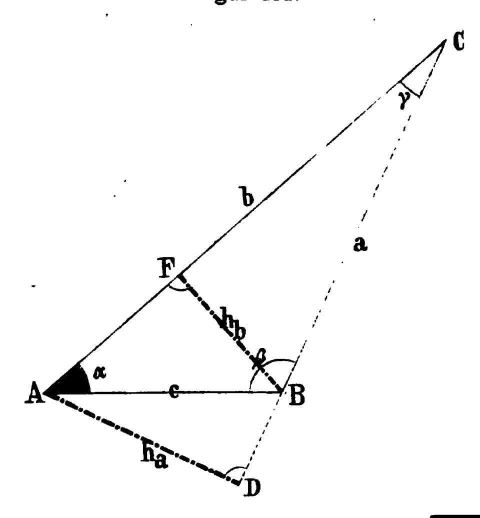
Mittels der Sinusregel die Seiten bestimmen und den Inhalt nach der Erkl. 151 berechnen.

Aufgabe 380. In einem Dreieck ist der Winkel $\alpha = 59^0\,53'\,44{,}7''$, die zur Gegenseite a gehörige Höhe h_a ist $= 18{,}05953$ m und die zur Seite b gehörige Höhe h_b ist $= 15{,}52$ m. Man soll den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Figur 130.



Figur 131.



Gegeben: $\begin{cases} h_a = 18{,}05953 \text{ m} \\ h_b = 15{,}52 \text{ m} \\ \alpha = 59^0\,53'\,44{,}7'' \end{cases}$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABF, siehe Figur 130, erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$$

oder

$$\text{A)} \ldots c = \frac{h_b}{\sin\alpha}$$

wonach man die Seite c berechnen kann.

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD, siehe Figur 130:

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$$

oder in Rücksicht der Gleichung A):

$$\text{B)} \ldots \sin\beta = \frac{h_a \cdot \sin\alpha}{h_b}$$

wonach man den Winkel β berechnen kann.

Berücksichtigt man hierbei die Erkl. 271, so ergibt sich, dass auch ein Dreieck von der durch die Figur 131 dargestellten Form den Bedingungen der Aufgabe genügt. Aus c, α, β und γ [$= 180 - (\alpha + \beta)$] kann man mittels der Sinusregel die Seiten a und b berechnen. Zur Berechnung des Inhalts benutze man den in der Erkl. 151 aufgestellten Satz.

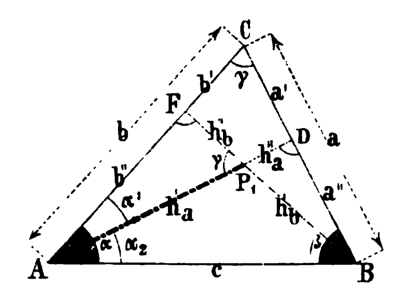
Aufgabe 381. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b messen bezw. 60,7860 und 228,1967 m, der eine der auf der Seite b gebildeten Abschnitte, welcher der Seite a anliegt, ist $b' = 41{,}8361$ m lang; man berechne hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks.

Gegeben: $\begin{cases} h_a = 60{,}7860 \text{ m} \\ h_b = 228{,}1967 \text{ m} \\ b' = 41{,}8361 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe die Figuren 128 und 129, aus h_b und b_1 zunächst den Winkel γ bezw. dessen Supplementwinkel und die Seite a, dann berechne man aus dem für γ gefundenen Wert und h_a die Seite b und verfahre im weiteren, da man jetzt zwei Seiten a und b und den von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel γ kennt, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 382. Die zwei Winkel α und β eines Dreiecks sind bezw. $= 53^0\ 7'\ 48{,}4''$ und $67^0\ 22'\ 48{,}5''$, die zur Seite a gehörige Höhe h_a wird von der zur Seite b gehörigen Höhe h_b so geschnitten, dass der nach der Ecke A des Dreiecks hinliegende Abschnitt h'_a der Höhe $h_a = 9{,}75$ m ist. Man soll aus diesen Angaben die Seiten des Dreiecks berechnen.

Figur 132.



Erkl. 292. In diesem Buch sind die Abschnitte, in welche sich die Höhen eines Dreiecks gegenseitig zerlegen, im allgemeinen mit den den Höhen entsprechenden Bezeichnungen h_a, h_b und h_c (s. Erkl. 277) bezeichnet. Die nach den Ecken des Dreiecks hin liegenden Abschnitte der Höhen enthalten ferner noch den Index $'$ und die nach den Seiten hin liegenden Abschnitte den Index $''$, wie z. B. in der Figur 132 angedeutet ist.

Erkl. 293. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Stehen die Schenkel eines Winkels oder deren Verlängerungen senkrecht auf den Schenkeln eines andern Winkels oder deren Verlängerungen, so sind diese beiden Winkel einander gleich.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

In Figur 132 ist z. B. $P_1F \perp CA$, ferner ist: P_1A, bezw. dessen Verlängerung $P_1D \perp CB$ und somit ist nach vorstehendem Lehrsatz:

$$\sphericalangle AP_1F = \sphericalangle ACB = \gamma$$

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 53^0\ 7'\ 48{,}4'' \\ \beta = 67^0\ 22'\ 48{,}5'' \\ h'_a = 9{,}75 \text{ (s. Erkl. 292)} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 132, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so beachte man, dass nach der Erkl. 293 der Winkel AP_1F gleich dem Winkel ACD, also $= \gamma$ ist.

Da nun γ mittels der Relation:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

leicht bestimmt werden kann, und da h'_a gegeben ist, so kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck AFP_1 den Abschnitt b'' berechnen. Da man alsdann in dem rechtwinkligen Dreieck AFB die Kathete b'' und den Winkel α kennt, so kann man hieraus die Seite c berechnen und schliesslich kann man aus der Seite c und den bekannten Winkeln γ, α und β mittels der Sinusregel die Seiten a und b berechnen.

Aufgabe 383. Die zwei Winkel α und β eines Dreiecks sind bezw. $= 73^0\ 44'\ 23{,}3''$ und $9^0\ 31'\ 38{,}2''$, die zur Seite a gehörige Höhe h_a wird von der zur Seite b gehörigen Höhe h_b so geschnitten, dass der nach der Seite a hin liegende Abschnitt h''_a der Höhe $h_a = 17{,}4641$ m ist. Welches sind die Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 73^0\ 44'\ 23{,}3'' \\ \beta = 9^0\ 31'\ 38{,}2'' \\ h''_a = 17{,}4641 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 382.

Aufgabe 384. Die zur Seite a eines Dreiecks gehörige Höhe h_a wird durch eine der beiden andern Dreieckshöhen in zwei Abschnitte $h'_a = 42{,}2917$ und $h''_a = 17{,}4641$ m zerlegt; der jener Seite a anliegende Winkel β misst $9^0\ 31'\ 38{,}2''$; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h'_a = 42{,}2917 \text{ m} \\ h''_a = 17{,}4641 \text{ m} \\ \beta = 9^0\ 31'\ 38{,}2'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe

ist analog der Auflösung der Aufgabe 382, siehe auch die Erkl. 294.

Erkl. 294. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die drei Höhen eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz muss durch den Schnittpunkt irgend zwei der Höhen eines Dreiecks auch die dritte Höhe desselben gehen.

Aufgabe 385. Das Verhältnis der zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b ist $= 1:6$, die Seite a misst 145 m und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $96^0\,43'\,58{,}5''$. Wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h_a : h_b = 1:6 \\ a = 145 \text{ m} \\ \gamma = 96^0\,43'\,58{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Aus a und γ berechne man, siehe Figur 128, die Höhe h_b; dann bestimme man mittels des gegebenen Verhältnisses und des für h_b gefundenen Wertes die Höhe h_a. Hierauf berechne man aus h_a und γ die Seite b. Da man alsdann die Seiten a und b und den Winkel γ kennt, so verfahre man weiter wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 386. Die Seite c eines Dreiecks ist 40 m lang, der ihr anliegende Winkel α beträgt $67^0\,22'\,40''$ und die von den Endpunkten auf die beiden andern Seiten gefällten Höhen h_a und h_b stehen in dem Verhältnis von $1:3$. Man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a : h_b = 1:3 \\ c = 40 \text{ m} \\ \alpha = 67^0\,22'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 385.

Aufgabe 387. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b verhalten sich wie $1:3$, jene Seite a misst 37 m und die dritte Seite c ist 40 m lang. Man berechne hieraus die dritte Seite b und die drei Winkel des Dreiecks.

Erkl. 295. Nach der Erkl. 34 hat man für den Inhalt F eines Dreiecks, dessen Seiten durch a, b und c und dessen drei Höhen bezw. durch h_a, h_b und h_c bezeichnet werden, die Relationen:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a \cdot h_a}{2};$$

$$\text{b)} \ldots F = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

und

$$\text{c)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Aus je zweien dieser Gleichungen folgt:

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

$$\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und

$$\frac{b \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Gegeben: $\begin{cases} h_a : h_b = 1:3 \text{ m} \\ a = 37 \text{ m} \\ c = 40 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach der Erkl. 295 besteht die Relation:

$$a : b = h_b : h_a$$

oder dieselbe umgeschrieben, die Relation:

$$\text{a)} \ldots b : a = h_a : h_b$$

Da nun das Verhältnis $h_a : h_b$ gemäss der Aufgabe $= 1:3$ ist, so hat man hiernach die Beziehung:

$$\text{A)} \ldots b : a = 1 : 3$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass die Seite a gegeben ist, so kann man mittels dieser Proportion die Seite b berechnen. Ist die Seite b berechnet, so kennt man die drei Seiten a, b und c des Dreiecks und kann im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

oder bezw.:

$$a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

$$a \cdot h_a = c \cdot h_c$$

und

$$b \cdot h_b = c \cdot h_c$$

Schreibt man diese Gleichungen als Proportionen, so erhält man:

1) . . . $a : b = h_b : h_a$

2) . . . $a : c = h_c : h_a$

und

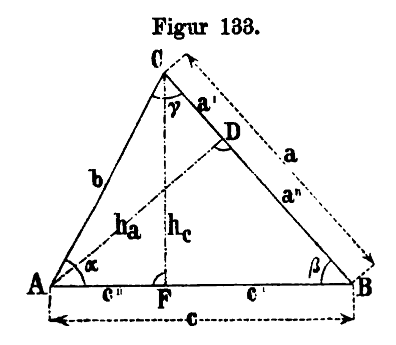
3) . . . $b : c = h_c : h_b$

d. h. „in jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten **umgekehrt** wie die zugehörigen Höhen."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 388. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks stehen in dem Verhältnis 10 : 7, die dritte Seite c steht mit der zu ihr gehörigen Höhe h_c im Verhältnis 2,5 : 1,9 und die zur Seite a gehörige Höhe h_a misst 32,45 m. Man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 133.



Gegeben: $\begin{cases} a : b = 10 : 7 \\ c : h_c = 2{,}5 : 1{,}9 \\ h_a = 32{,}45 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man denke sich ein dem zu berechnenden Dreieck, siehe Figur 133, ähnliches Dreieck und berechne aus diesem Dreieck zunächst die Winkel α, β und γ. Dies kann man wie folgt:

Aus den rechtwinkligen Dreiecken CFA und CFB erhält man:

a) . . . $\frac{c''}{h_c} = \operatorname{ctg} \alpha$

und

b) . . . $\frac{c'}{h_c} = \operatorname{ctg} \beta$

und hieraus ergibt sich durch Addition:

$$\frac{c' + c''}{hc} = \operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta$$

oder

c) . . . $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{c}{h_c}$

und in Rücksicht des für $\frac{c}{h_c}$ gegebenen Zahlenwertes:

A) . . . $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} \beta = \frac{2{,}5}{1{,}9}$

Ferner hat man nach der Sinusregel:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{a}{b}$$

oder in Rücksicht des für $\frac{a}{b}$ gegebenen Zahlenwertes:

B) . . . $\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{10}{7}$

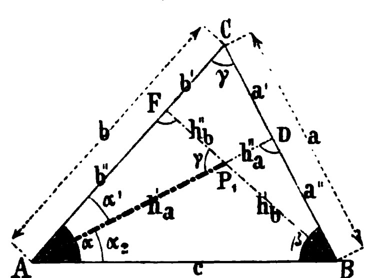
Nunmehr löse man die goniometrischen Gleichungen A) und B), welche die beiden unbekannten Winkel α und β enthalten, nach einer Funktion eines dieser Winkel auf (siehe Kleyers Lehrbuch der Goniometrie) und berechne diesen Winkel. Hat man denselben

gefunden, so kann man mittels Gleichung B) den zweiten Winkel berechnen. Mittels der berechneten Winkel und der gegebenen Höhe h_a kann man dann leicht die Seite c und hierauf mittels der Sinusregel die Seiten a und b berechnen.



Aufgabe 389. Die zwei zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass der der Seite b anliegende Abschnitt h''_b der Höhe h_b zu dem der Seite a nicht anliegenden Abschnitt h'_a der Höhe h_a in dem Verhältnis von 3:2 steht; die Seite b misst ferner 120 m und der Winkel α beträgt 81° 40′ 35″; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen, welche nicht bekannt sind.

Figur 134.

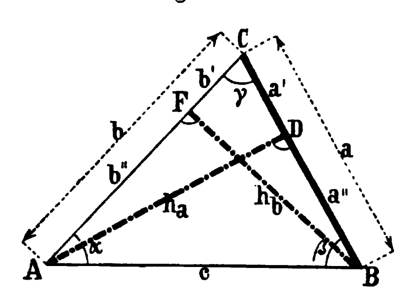


$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h''_b : h'_a = 3:2 \\ b = 120\,\text{m} \\ \alpha = 81^0\,40'\,35'' \end{cases}$$

Andeutung. Zunächst berechne man mittels des gegebenen Verhältnisses, siehe Figur 134, den Winkel α_1, dann berechne man aus α_1 und b den Winkel γ. Da man alsdann die Winkel und die Seite b des Dreiecks kennt, so kann man im weiteren die Sinusregel anwenden.

Aufgabe 390. In einem Dreieck ist die rechtwinklige Projektion b' der Seite a auf die Seite $b = 12$ m und die Projektion a' der Seite b auf die Seite $a = 9$ m; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn die dritte Seite $c = 45$ m misst?

Figur 135.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c = 45\,\text{m} \\ b' = 21\,\text{m} \\ a' = 9\,\text{m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 135, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so hat man nach der Formel 88 zwischen den drei Seiten a, b und c und dem Winkel γ die Relation:

$$\text{a)} \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Ferner ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und BFC die Relationen:

$$\text{b)} \ldots a = \frac{b'}{\cos\gamma}$$

und

$$\text{c)} \ldots b = \frac{a'}{\cos\gamma}$$

Aus den Gleichungen a) bis c) erhält man durch Substitution:

$$\text{A)} \ldots c^2 = \frac{b'^2}{\cos^2\gamma} + \frac{a'^2}{\cos^2\gamma} - \frac{2a'b'}{\cos^2\gamma} \cdot \cos\gamma$$

und mittels dieser goniometrischen Gleichung kann man den Winkel γ berechnen. Aus γ

und den gegebenen Strecken a' und b' kann man dann im weiteren leicht die Seiten a und b und hierauf die Winkel α und β berechnen.

g) Aufgaben, in welchen die drei Höhen eines Dreiecks vorkommen.

Aufgabe 391. Die zu den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a, h_b und h_c messen bezw. 10,12 und 14 m; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h_a = 10\,\text{m} \\ h_b = 12\,\text{m} \\ h_c = 14\,\text{m} \end{cases}$

Andeutungen:

1) Man berechne zuerst die gesuchten Winkel des Dreiecks wie folgt:

Nach den Formeln 173 bis 175 (siehe die Aufgabe 119 und die Erkl. 159) bestehen zur Berechnung der Winkel eines Dreiecks aus den drei Seiten die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\text{b)} \ldots \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

und

$$\text{c)} \ldots \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Ferner hat man nach der Erkl. 295 zwischen den drei Höhen eines Dreiecks und den drei Seiten desselben die Beziehungen:

$$\text{d)} \ldots a : b = h_b : h_a$$

$$\text{e)} \ldots a : c = h_c : h_a$$

und

$$\text{f)} \ldots b : c = h_c : h_b$$

Aus den Gleichungen d) und e) erhält man:

$$\text{g)} \ldots b = \frac{a \cdot h_a}{h_b}$$

und

$$\text{h)} \ldots c = \frac{a \cdot h_a}{h_c}$$

Setzt man diese Werte für b und c in Gleichung a), so erhält man:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a^2 \cdot h^2_a}{h^2_b} + \frac{a^2 \cdot h^2_a}{h^2_c} - a^2}{2 \cdot \frac{a \cdot h_a}{h_b} \cdot \frac{a\,h_a}{h_c}}$$

oder, wenn man den Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch a^2 dividiert:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{h^2_a}{h^2_b} + \frac{h^2_a}{h^2_c} - 1}{\frac{2h^2_a}{h_b \cdot h_c}}$$

und hieraus ergibt sich durch Reduktion:

$$\text{A)} \ldots \cos\alpha = \frac{h^2_a \cdot h^2_b + h^2_a \cdot h^2_c - h^2_b \cdot h^2_c}{2h^2_a \cdot h_b \cdot h_c}$$

Erkl. 296. Aus den in der Erkl. 295 aufgestellten Proportionen:

$$\text{a)} \ldots a : b = h_b : h_a$$

$$\text{b)} \ldots a : c = h_c : h_a$$

und

$$\text{c)} \ldots b : c = h_c : h_b$$

kann man wie folgt eine laufende Proportion bilden:

Nimmt man an, der Seite a entspreche die Masszahl 1, so muss nach der Proportion a) der Seite b die Masszahl $\frac{h_a}{h_b}$ und nach der Proportion b) der Seite c die Masszahl $\frac{h_a}{h_c}$ entsprechen und man hat in Rücksicht jener Annahme die Relation:

$$\frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{h_a}{h_b}} = \frac{c}{\frac{h_a}{h_c}}$$

dividiert man Glied für Glied dieser Gleichung mit h_b, so erhält man die laufende Proportion:

$$\text{a)} \ldots \frac{a}{h_b} = \frac{b}{h_a} = \frac{c}{\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}}$$

welche man nach der Erkl. 88 auch in der Form schreiben kann:

$$\text{b)} \ldots a : b : c = h_b : h_a : \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$$

hieraus ergibt sich nach dem in der Erkl. 273 angeführten 3. Aehnlichkeitssatz, dass wenn man aus den drei Höhen eines Dreiecks ein anderes Dreieck so konstruiert, dass dessen Seiten bezw. $= h_b$, h_a und $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$ sind, man ein Dreieck erhält, welches jenem Dreieck ähnlich ist.

in analoger Weise erhält man aus den Gleichungen b) und c):

$$\text{B)} \ldots \cos\beta = \frac{h^2_b \cdot h^2_a + h^2_b \cdot h^2_c - h^2_a \cdot h^2_c}{2 h^2_b \cdot h_a \cdot h_c}$$

und

$$\text{C)} \ldots \cos\gamma = \frac{h^2_c \cdot h^2_a + h^2_c \cdot h^2_b - h^2_a \cdot h^2_b}{2 h^2_c \cdot h_a \cdot h_b}$$

mittels welchen drei Gleichungen man in Rücksicht der für die drei Höhen gegebenen Zahlenwerte die drei Winkel unabhängig von einander berechnen kann. Die Seiten des Dreiecks kann man alsdann im weiteren aus den für die Winkel berechneten Werten und den für die Höhen gegebenen Werten berechnen, indem durch die drei Höhen das Dreieck in rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird.

2) Die gesuchten Winkel des Dreiecks kann man auch zuerst wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 296 besteht zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks und dessen drei Höhen h_a, h_b und h_c die Relation:

$$\text{i)} \ldots a : b : c = h_b : h_a : \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$$

Denkt man sich nunmehr ein Dreieck, dessen drei Seiten a_1, b_1 und c_1 bezw. solche Längen haben, dass sie den in irgend eine Längeneinheit ausgedrückten Masszahlen:

$$h_b,\ h_a \text{ und } \frac{h_a \cdot h_b}{h_c}$$

entsprechen, so ist dieses Dreieck ähnlich dem zu berechnenden, und nach der Erkl. 7 sind dessen Winkel gleich den zu berechnenden Winkeln.

Hiernach berechne man, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, aus den drei Seiten a_1, b_1 und c_1 jenes gedachten Dreiecks, welchen bezw. die Masszahlen:

$$h_b = 12,\ h_a = 10 \text{ und } \frac{h_a \cdot h_b}{h_c} = \frac{10 \cdot 12}{14}$$

beizulegen sind, die drei Winkel α, β und γ desselben, welche die in der Aufgabe verlangten Winkel sind. Die gesuchten Seiten kann man im weiteren, wie in der Andeutung 1) gesagt ist, berechnen.

3) Will man die Seiten a, b und c unabhängig von den Winkeln berechnen, so kann man wie folgt verfahren:

Nach der Formel 194 besteht die Relation:

$$\text{k)} \ldots F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

in welcher:

$$\text{k}_1) \ldots s = \frac{a+b+c}{2}$$

nämlich gleich der halben Summe der drei Seiten ist, ferner bestehen nach der Erkl. 295 die Relationen:

$$\text{l)} \ldots F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$\text{m)} \ldots F = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

und

$$\text{n)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Aus den Gleichungen l) und m) erhält man:

$$\text{o)} \ldots b = \frac{a \cdot h_a}{h_b}$$

ferner erhält man aus den Gleichungen l) und n):

$$\text{p)} \ldots c = \frac{a \cdot h_a}{h_c}$$

Setzt man die Werte für b und c aus den Gleichungen o) und p) in die Gleichung k_1) und drückt hiernach s, $s - a$, $s - b$, und $s - c$ in die drei Höhen und in die Seite a aus, setzt alsdann diese Werte in Gleichung k) und ausserdem in derselben für F nach Gleichung b) den Wert $\frac{a \cdot h_a}{2}$, so erhält man eine Gleichung, in welcher nur die drei Höhen und die Seite a vorkommen. Diese somit erhaltene Gleichung kann man alsdann nach a auflösen und hiernach a berechnen. In ganz analoger Weise kann man die Seiten b und c unabhängig von einander berechnen. Hat man die Seiten berechnet, so kann man aus denselben, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, auch die Winkel berechnen.

Den gesuchten Inhalt F kann man aus den drei Höhen direkt wie folgt berechnen:

Setzt man in die Gleichungen k) und k_1):

$$\alpha) \ldots \text{für } a = a \cdot h_a \cdot \frac{1}{h_a}$$

$$\beta) \ldots \text{„} \quad b = a \cdot h_a \cdot \frac{1}{h_b}$$

und

$$\gamma) \ldots \text{„} \quad c = a \cdot h_a \cdot \frac{1}{h_c}$$

[siehe die Gleichungen o) und p)]

so erhält man nach gehöriger Reduktion aus Gleichung k_1):

$$s = a \cdot h_a \cdot \left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right)$$

oder, wenn man:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}\right) = s_1$$

setzt:

$$\text{q)} \ldots s = a \cdot h_a \cdot s_1$$

und aus Gleichung k:

$$F = a^2 h^2_a \sqrt{s_1 \left(s_1 - h_a^{-1}\right)\left(s_1 - h_b^{-1}\right)\left(s_1 - h_c^{-1}\right)}$$

oder, wenn man:

$$a^2 h^2_a = 4F^2$$

setzt und reduziert:

$$1) \ldots F = \frac{1}{4\sqrt{s_1\left(s_1-\frac{1}{h_a}\right)\left(s_1-\frac{1}{h_b}\right)\left(s_1-\frac{1}{h_c}\right)}}$$

in welcher Formel nach vorstehendem:

$$1\text{a}) \ldots s_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$$

bedeutet.

Substituiert man noch den Wert für s_1 aus Gleichung 1 a) in Gleichung 1) und reduziert, so erhält man auch für den Flächeninhalt die Formel:

$$2) \ldots F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}}$$

Aufgabe 392. Die drei Höhen h_a, h_b und h_c eines Dreiecks sind bezw. $= \frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ m lang, man berechne hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks?

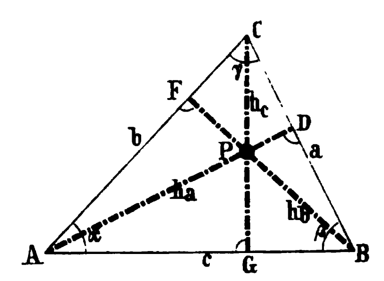
Gegeben: $\begin{cases} h_a = \frac{1}{3}\,\text{m} \\ h_b = \frac{1}{4}\,\text{m} \\ h_c = \frac{1}{5}\,\text{m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 391. Die Auflösung wird ergeben, dass das Dreieck ein rechtwinkliges ist.

Aufgabe 393. Die Höhen h_a und h_b eines Dreiecks verhalten sich wie 1:6, der Winkel α, durch welchen die Höhe h_a geht, beträgt 73° 44′ 23,3″ und die dritte Höhe h_c ist 24 m lang; man soll aus diesen Angaben die Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a : h_b = 1:6 \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \\ h_c = 24\,\text{m} \end{cases}$

Figur 136.



Erkl. 297. Wie in der Erkl. 294 bereits erwähnt, schneiden sich die drei Höhen in einem Punkt; dieser Punkt liegt bei dem spitzwinkligen Dreieck, siehe Figur 136, innerhalb, bei dem stumpfwinkligen Dreieck, siehe Figur 137, ausserhalb des Dreiecks.

Andeutung. Nach der Erkl. 295 besteht die Relation:

$$\text{a}) \ldots h_a : h_b = b : a$$

ferner ist nach der Sinusregel:

$$\text{b}) \ldots b : a = \sin\beta : \sin\alpha$$

Aus diesen Relationen folgt:

$$\sin\beta : \sin\alpha = h_a : h_b$$

oder

$$\text{A}) \ldots \sin\beta = \frac{h_a}{h_b} \cdot \sin\alpha$$

Setzt man in derselben den für α gegebenen Wert und den für den Quotienten $h_a : h_b$ gegebenen Wert, so kann man aus dieser Gleichung den Winkel β berechnen, wobei die Erkl. 271 beachtet werden muss (siehe die Figuren 136 und 137). Ferner kann man, siehe die Figuren 136 und 137, aus α und

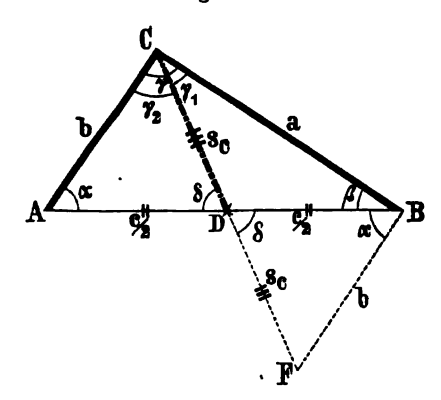
Figur 137.

h_c die Seite b berechnen; dann kann man, da hiernach alle Winkel und eine Seite als bekannt vorausgesetzt werden können, die übrigen Seiten mittels der Sinusregel berechnen.

h) Aufgaben, in welchen eine Schwerlinie des Dreiecks vorkommt.

Aufgabe 394. Die Seiten a und b eines Dreiecks sind bezw. = 13 m und 15 m lang, die zur dritten Seite c gehörige Schwerlinie s_c misst 12,1655 m; man soll hieraus die dritte Seite, die Winkel und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Figur 138.



Erkl. 298. In Figur 138 ist:

$$\overline{AD} = \overline{DB} = \frac{c}{2},$$ da CD als Schwerlinie des Dreiecks durch die Mitte D der Seite AB gehen muss (s. Erkl. 210)

ferner ist:

$$\overline{CD} = \overline{DF} = s_c \text{ nach Konstruktion}$$

und $\sphericalangle ADC = \sphericalangle BDF = \delta$ als Scheitelwinkel.

Hieraus folgt, dass nach dem in der Erkl. 79 angeführten zweiten Kongruenzsatz:

$$\triangle BDF \cong \triangle ADC$$

ist, und aus dieser Kongruenz folgt, dass in beiden Dreiecken die homologen Stücke bezw. einander gleich sein müssen, dass also:

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ b = 15 \text{ m} \\ s_c = 12{,}1655 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutungen:

1) (zur synthetischen Auflösung). Anschliessend an die Konstruktion eines Dreiecks aus zwei Seiten a und b und der zur dritten Seite c gehörigen Schwerlinie s_c kann man die geforderten Stücke wie folgt berechnen:

Ist, siehe Figur 138, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht und man verlängert die Schwerlinie s_c um sich selbst, verbindet alsdann den Endpunkt F dieser Verlängerung mit dem Endpunkt B, so erhält man das Dreieck BCF, dessen drei Seiten nach der Erkl. 298 bzw. $= a$, $= b$ und $= 2 \cdot s_c$, also gemäss der Aufgabe gegeben sind, und dessen drei Winkel bezw. $= \gamma_1$, γ_2 und $(\alpha + \beta)$ sind; man kann zur Berechnung der Winkel dieses Dreiecks verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde. Man erhält z. B., wenn man in der in der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 185:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

unter Vergleichung der Figuren 57 und 138:

$$\alpha = \alpha + \beta$$
$$b = b$$
$$c = a$$
$$a = 2 s_c$$

und $$s = \frac{a + b + 2 s_c}{2} = S$$

$$\overline{BF} = \overline{AC} = b$$
$$\sphericalangle BFD = \sphericalangle ACD = \gamma_2$$
und dass
$$\sphericalangle DBF = \sphericalangle DAC = \alpha$$
sein muss.

Erkl. 299. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man von einem Eckpunkt eines Dreiecks aus eine Strecke nach dem Mittelpunkt der gegenüberliegenden Seite, so ist die Summe der Quadrate der beiden dieser Strecke anliegenden Seiten gleich der doppelten Summe der Quadrate jener Verbindungsstrecke und der Hälfte der dritten Seite."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Bringt man diesen Satz in bezug auf die Figur 138 in Anwendung, so erhält man aus jener Figur:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

(siehe die folgende Erkl. 300)

Erkl. 300. Die in der vorigen Erkl. 299 aufgestellte Relation:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

kann man auch trigonometrisch wie folgt herleiten:

Nach dem in Antwort der Frage 21 aufgestellten Projektionssatz erhält man aus dem Dreieck ABC der Figur 138:

$$\text{a)} \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

ferner erhält man noch diesen Satz aus dem Dreieck CBF der Figur 188:

$$\overline{CF}^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass $\overline{CF} = 2 \cdot s_c$ und dass $(\alpha + \beta)$ und γ Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 94:

$$\cos(\alpha + \beta) = -\cos\gamma$$

ist

$$(2s_c)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot -\cos\gamma$$

oder

$$\text{b)} \ldots 4s^2_c = a^2 + b^2 + 2ab\cos\gamma$$

Addiert man die Gleichungen a) und b), so erhält man:

$$\text{c)} \ldots c^2 + 4s^2_c = 2a^2 + 2b^2$$

oder, wenn man diese Gleichung durch 4 dividiert:

$$\frac{c^2}{4} + s^2_c = \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$$

und hieraus erhält man jene herzuleitende Relation:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

welche man auch in der einfacheren Form:

$$\text{d)} \ldots a^2 + b^2 = 2s^2_c + \frac{1}{2}c^2$$

schreiben kann.

setzt, die Relation:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2} = \sqrt{\frac{(S-b) \cdot (S-a)}{S(S-2 \cdot s_c)}}$$

mittels welcher Relation man in Rücksicht, dass:

$$\text{A}_1) \ldots S = \frac{a + b + 2s_c}{2}$$

bedeutet, die Summe der Winkel α und β des Dreiecks ABC, siehe Figur 138, berechnen kann. Hat man auf diese Weise $\alpha + \beta$ berechnet, so kann man aus diesem berechneten Wert und aus den für a und b gegebenen Werten nach dem Tangentensatz mittels der Relation:

$$\text{B)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

$\frac{\alpha - \beta}{2}$, bezw. die Differenz der Winkel α und β berechnen und hiernach die Winkel α, β und auch γ bestimmen. Die dritte Seite c kann man alsdann auf einfache Weise mittels der Sinusregel berechnen; desgleichen den Inhalt nach der Erkl. 151 berechnen.

2) (zur analytischen Auflösung). Man berechne zuerst die Seite c aus den gegebenen Stücken mittels Anwendung des in Erkl. 299 erwähnten planimetrischen Lehrsatzes; nach dieser Erkl. 299 besteht nämlich die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$$

und hieraus erhält man:

$$a^2 + b^2 = 2s^2_c + 2 \cdot \frac{c^2}{4}$$

$$\frac{c^2}{2} = a^2 + b^2 - 2s^2_c$$

oder

$$\text{C)} \ldots c = \sqrt{2(a^2 + b^2 - 2s^2_c)}$$

Ist auf diese Weise die dritte Seite c berechnet, so kann man im weiteren die Winkel α, β und γ direkt mittels der in der gelösten Aufgabe 119 aufgestellten Formeln 185—187 berechnen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

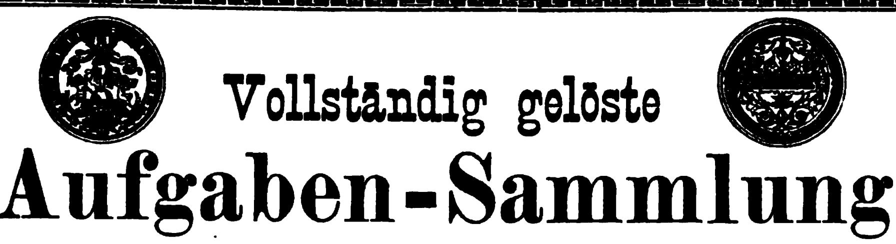
der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

278. Heft. | **Preis des Heftes 25 Pf.** | **Ebene Trigonometrie.** Forts. v. Heft 277. — Seite 257—272. Mit 10 Figuren.



Vollständig gelöste
Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 277. — Seite 257—272. Mit 10 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen eine Schwerlinie; in welchen eine Schwerlinie und eine Höhe vorkommt.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—26 kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten** und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen Kapiteln** angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen **gelösten Aufgaben**) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen hierzu** werden später in besonderen Heften für die Hand **des** Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 395. Aus den Seiten $b = 25$ m und $c = 150$ m eines Dreiecks und der zu letzterer Seite c gehörigen Schwerlinie $s_c = 72{,}111$ m soll man die dritte Seite und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 139.

Gegeben: $\begin{cases} b = 25 \text{ m} \\ c = 150 \text{ m} \\ s_c = 72{,}111 \text{ m} \end{cases}$

Andeutungen:

1) Man berechne zuerst die gesuchte dritte Seite a mittels dem in der Erkl. 299 aufgestellten planimetrischen Lehrsatz; nach demselben erhält man für a, siehe Figur 139, die Bestimmungsgleichung:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left[s^2_c + \left(\frac{c}{2} \right)^2 \right]$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots a = \sqrt{2 s^2_c + \frac{c^2}{2} - b^2}$$

Hat man hiernach a berechnet, so kann man, da nunmehr die drei Seiten des Dreiecks bekannt sind, die Winkel desselben bestimmen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

2) Man kann auch zuerst die gesuchten Winkel des Dreiecks wie folgt berechnen:

Aus dem Dreieck ADC, siehe Figur 139, erhält man nach dem in Antwort der Frage 21 aufgestellten Projektionssatz:

$$s^2_c = b^2 + \left(\frac{c}{2} \right)^2 - 2 \cdot b \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha$$

oder, wenn man diese Gleichung reduziert und in bezug auf $\cos \alpha$ auflöst:

$$s^2_c = b^2 + \frac{c^2}{4} - bc \cdot \cos \alpha$$

$$bc \cdot \cos \alpha = b^2 + \frac{c^2}{4} - s^2_c$$

$$bc \cdot \cos \alpha = \frac{4b^2 + c^2 - 4s^2_c}{4}$$

oder

$$\text{B)} \ldots \cos \alpha = \frac{c^2 + 4(b^2 - s^2_c)}{4bc}$$

Hat man nach dieser Gleichung den Winkel α berechnet, so kennt man in dem Dreieck ABC die zwei Seiten b und c und den von beiden eingeschlossenen Winkel α und kann dann im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 396. Die drei Seiten eines Dreiecks betragen $a = 456$ m, $b = 512$ m und $c = 560$ m; wie gross ist die Transversale, welche die kleinste von diesen Seiten halbiert?

Gegeben: $\begin{cases} a = 456 \text{ m} \\ b = 512 \text{ m} \\ c = 560 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Da die kleinste der gegebenen Seiten die Seite a ist, so ist gemäss der Aufgabe die Schwerlinie s_a zu berechnen; dies kann man wie folgt:

1) Nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Lehrsatz besteht, s. Fig. 140,

zwischen den drei Seiten a, b und c und der zur Seite a gehörigen Schwerlinie s_a die Relation:

$$\text{a)} \ldots b^2 + c^2 = 2 \cdot \left[s_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 \right]$$

Löst man dieselbe in bezug auf s_a auf, so erhält man:

$$\frac{b^2 + c^2}{2} = s_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

oder

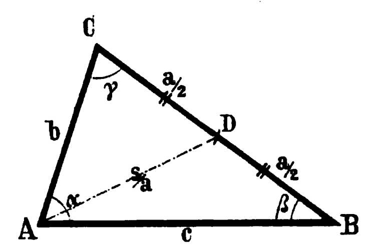
$$\text{A)} \ldots s_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Schwerlinie s_a berechnen kann.

oder

2) Man berechne zuerst aus den drei gegebenen Seiten, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, den Winkel β oder den Winkel γ; dann berechne man aus $\frac{a}{2}$, c und β oder aus $\frac{a}{2}$, b und γ die geforderte Schwerlinie s_a, siehe Figur 140.

Figur 140.



Aufgabe 397. Die Seite c eines Dreiecks misst 305,256 dm, die zu dieser Seite gehörige Schwerlinie misst 136,247 dm und der Winkel α ist $= 55^0\,47'\,16''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c = 305{,}256 \text{ dm} \\ s_c = 136{,}247 \text{ dm} \\ \alpha = 55^0\,47'\,16'' \end{cases}$$

Andeutung. Man kennt in dem Dreieck BDC, siehe Figur 139, die Seite $\overline{CD} = s_c$, die Seite $DB = \frac{c}{2}$ und in Rücksicht, dass gemäss des in der Aufgabe gegebenen Zahlenbeispiels $\frac{c}{2} > s_c$ ist, den der **kleineren** jener Seiten, nämlich den der Seite s_c gegenüberliegenden Winkel β. Aus diesem Dreieck kann man hiernach, wie in der Auflösung der Aufgaben 120 und 121 gezeigt wurde, die Seite a berechnen. Ist a berechnet, so kann man aus a, α und c nach der Sinusregel den Winkel γ berechnen. Die Auflösung ergibt, wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt wurde, zwei Lösungen.

Aufgabe 398. Aus der zur Seite c gehörigen Schwerlinie $s_c = 43{,}8292$ m eines Dreiecks, aus der Seite $b = 29$ m und dem derselben anliegenden Winkel $\alpha = 43^0\,36'\,10{,}1''$ soll man die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks sowie dessen Inhalt berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} s_c = 43{,}8292 \text{ m} \\ b = 29 \text{ m} \\ \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 397.

Aufgabe 399. Der Winkel γ eines Dreiecks misst $96^0\,57'\,20{,}1''$, die durch denselben gehende Schwerlinie s_c misst 199,0602 m und die jenem Winkel anliegende Seite a misst

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} \gamma = 96^0\,57'\,20{,}1'' \\ s_c = 199{,}0603 \text{ m} \\ a = 401 \text{ m} \end{cases}$$

401 m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Andeutung. Man bilde die Figur 138 wie in der Andeutung zur Aufgabe 394 gesagt wurde, beachte dass in dem Dreieck BCF:

die Seite $\overline{CF} = 2s_c$

„ „ $\overline{BC} = a$

und der Winkel $CBF = \alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ ist, dass man also in dem Dreieck BCF zwei Seiten, und in Rücksicht, dass gemäss der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte $2s_c < a$ ist, den der kleineren jener Seiten, nämlich den der Seite $2s_c$ gegenüberliegenden Winkel $(\alpha + \beta)$ bezw. $(180^0 - \gamma)$ kennt. Wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt wurde, kann man hiernach aus jenem Dreieck die Seite b berechnen. Ist b berechnet, so kennt man in dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und b und den von beiden eingeschlossenen Winkel und man kann im weiteren hieraus, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite c und die Winkel α und β, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Aufgabe 400. Die Seite c eines Dreiecks misst 240 m, die ihr zugehörige Schwerlinie ist 80,0562 m lang und der der Seite c gegenüberliegende Winkel γ ist $139^0\,56'\,16{,}7''$; man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 240 \text{ m} \\ s_c = 80{,}0562 \text{ m} \\ \gamma = 139^0\,56'\,16{,}7'' \end{cases}$

Andeutung. Da die direkte Berechnung der gesuchten Winkel des Dreiecks sehr weitläufig ist, indem komplizierte goniometrische Gleichungen entstehen, so berechne man zuerst die Seiten a und b des Dreiecks; dies kann man wie folgt:

Nach dem in Antwort der Frage 22 bewiesenen Projektionssatz ist:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$$

oder

a) . . . $a^2 + b^2 = c^2 + 2ab\cdot\cos\gamma$

Ferner besteht nach dem in der Erkl. 299 aufgestellten goniometrischen Satz bezw. nach der in der Erkl. 300 aufgestellten Gleichung d) die weitere Relation:

b) . . . $a^2 + b^2 = 2s_c^2 + \frac{1}{2}c^2$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich zunächst die Beziehung:

$$c^2 + 2ab\cdot\cos\gamma = 2s_c^2 + \frac{1}{2}c^2$$

woraus man das Produkt ab der Seiten a und b wie folgt bestimmen kann:

$$2ab\cdot\cos\gamma = 2s_c^2 + \frac{c^2}{2} - c^2$$

$$2ab\cdot\cos\gamma = 2s_c^2 - \frac{c^2}{2}$$

$$2ab\cdot\cos\gamma = \frac{4s_c^2 - c^2}{2}$$

Erkl. 301. Eine goniometrische Formel heisst:

a) . . . $1 - \cos\alpha = 2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

(Siehe Formel 64a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Multipliciert man diese Formel mit -1, so erhält man:

b) . . . $\cos\alpha - 1 = -2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

und hieraus erhält man:

c) . . . $ab = \frac{4s^2_c - c^2}{4\cos\gamma}$

oder

d) . . . $2ab = \frac{4s^2_c - c^2}{2\cos\gamma}$

Addiert man diese Gleichung zur Gleichung b), so erhält man:

$$a^2 + 2ab + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2} + \frac{4s^2_c - c^2}{2\cos\gamma}$$

oder, diese Gleichung wie folgt reduziert:

$$(a+b)^2 = \frac{4s^2_c\cdot\cos\gamma + c^2\cdot\cos\gamma + 4s^2_c - c^2}{2\cos\gamma}$$

$$(a+b)^2 = \frac{4s^2_c(\cos\gamma+1) + c^2(\cos\gamma-1)}{2\cos\gamma}$$

$$(a+b)^2 = \frac{4s^2_c\cdot 2\cos^2\frac{\gamma}{2} + c^2\cdot -2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos\gamma}$$ (s. die Erkl. 252 und 301)

$$(a+b)^2 = \frac{8s^2_c\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} - 2c^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos\gamma}$$

mithin:

A) . . . . $a+b = \sqrt{\frac{4s^2_c\cos^2\frac{\gamma}{2} - c^2\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}}$

Subtrahiert man hingegen jene Gleichung d) von Gleichung b) so erhält man:

$$a^2 - 2ab + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2} - \frac{4s^2_c - c^2}{2\cos\gamma}$$

oder, diese Gleichung reduziert:

$$(a-b)^2 = \frac{4s^2_c\cdot\cos\gamma + c^2\cos\gamma - 4s^2_c + c^2}{2\cos\gamma}$$

$$a) - b)^2 = \frac{4s^2_c(\cos\gamma-1) + c^2(\cos\gamma+1)}{2\cos\gamma}$$

$$(a-b)^2 = \frac{4s^2_c\cdot -2\sin^2\frac{\gamma}{2} + c^2\cdot 2\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos\gamma}$$ (s. die Erkl. 301 und 252)

$$(a-b)^2 = \frac{-8s^2_c\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2c^2\cos^2\frac{\gamma}{2}}{2\cos\gamma}$$

mithin:

B) . . . . $a-b = \sqrt{\frac{c^2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 4s^2_c\sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\gamma}}$

Aus der Gleichung A) kann man in Rücksicht der für c, s_c und γ gegebenen Zahlenwerte die Summe der Seiten a und b, und aus der Gleichung B) kann man die Differenz dieser Seiten berechnen und hiernach alsdann jede der Seiten a und b leicht bestimmen. Diese für $a+b$ und $a-b$ berechneten Werte kann man dann im weiteren zur Berechnung der Winkel α und β benutzen; denn nach dem Tangentensatz ist:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{a-b}{a+b}$$

da nun $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, also hiernach:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

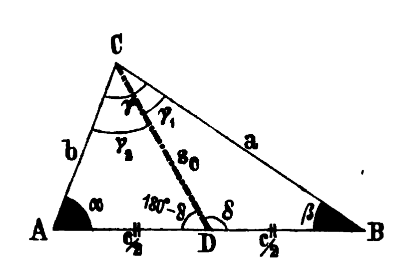
gesetzt werden kann, so erhält man hiernach:

$$\text{C)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

hat man hiernach $\alpha-\beta$ berechnet, so kann man aus diesem berechneten Wert und in Rücksicht, dass $\alpha+\beta = 180^0-\gamma$ ist, leicht die Winkel α und β bestimmen.

Aufgabe 401. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Schwerlinie s_c ist gleich 73,583 m, die dieser Seite anliegenden Winkel α und β sind bezw. $= 63^0\,17'\,8''$ und $= 18^0\,9'\,11''$, wie gross sind die drei Seiten dieses Dreiecks?

Figur 141.



Gegeben: $\begin{cases} s_c = 73{,}583 \text{ m} \\ \alpha = 63^0\,17'\,8'' \\ \beta = 18^0\,9'\,11'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel γ_1 und γ_2, welche die Schwerlinie s_c mit den Seiten a und b bildet; dies kann man wie folgt:

Ist, siehe Figur 141, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ergeben sich aus den Dreiecken ADC und BDC nach der Sinusregel bezw. die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \frac{\sin\gamma_2}{\sin(180^0-\delta)} = \frac{\frac{c}{2}}{b}$$

und

$$\text{b)} \ldots \frac{\sin\gamma_1}{\sin\delta} = \frac{\frac{c}{2}}{a}$$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b), so resultiert:

$$\frac{\sin\gamma_2}{\sin(180^0-\delta)}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\gamma_1} = \frac{\frac{c}{2}}{b}\cdot\frac{a}{\frac{c}{2}}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 66:

$$\sin(180^0-\delta) = \sin\delta$$

ist und jene Gleichung reduziert:

$$\text{c)} \ldots \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{a}{b}$$

Ferner ergibt sich auch nach der Sinusregel aus dem ganzen Dreieck ABC die Relation:

$$\text{d)} \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

und aus den Gleichungen c) und d) folgt:

$$\text{e)} \ldots \frac{\sin\gamma_2}{\sin\gamma_1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin\gamma_2 + \sin\gamma_1}{\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1} = \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$$

oder, wenn man jetzt die in der Erkl. 268 aufgestellte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}$$

oder, da:

$$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = \frac{\gamma}{2} = 180^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

also:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(180^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ (s. Erkl. 19)}$$

gesetzt werden kann:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

oder und in Rücksicht der Erkl. 15:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\alpha+\beta}{2}$$

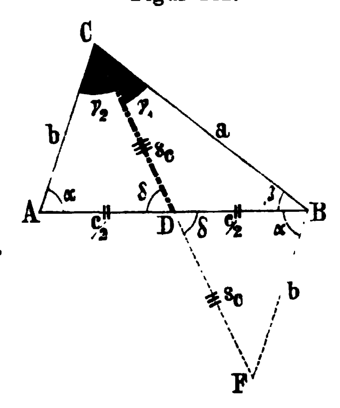
Mittels dieser Gleichung kann man die Differenz der Winkel γ_1 und γ_2 berechnen, da man auch die Summe dieser Winkel kennt, dieselbe ist $= 180^0 - (\alpha + \beta)$, so kann man alsdann leicht die Winkel γ_1 und γ_2 berechnen. Sind diese Winkel γ_1 und γ_2 berechnet, so kennt man in jedem der Dreiecke ADC und BDC eine Seite, nämlich die Seite s_c, und zwei Winkel, nämlich γ_2 und α bezw. γ_1 und β und kann somit im weiteren, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten a, b und $\frac{c}{2}$ bezw. c berechnen.

Aufgabe 402. Die Mittellinie s_c eines Dreiecks, welche zur Seite c gehört, ist $=$ 5 m und die beiden Winkel γ_1 und γ_2, welche sie mit den beiden andern Seiten a und b des Dreiecks bildet, sind bezw. $=$ 36° 52′ 11,63″ und 53° 7′ 48,37″; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} s_c = 5 \text{ m} \\ \gamma_1 = 36^0\, 52'\, 11{,}63'' \\ \gamma_2 = 53^0\, 7'\, 48{,}37'' \end{cases}$$

Andeutung. Denkt man sich, wie in der Andeutung zur Aufgabe 394 gesagt ist, die Mittellinie s_c, siehe Figur 142, um sich selbst verlängert und den Endpunkt F dieser Ver-

Figur 142.



längerung mit B (oder auch mit A) verbunden, so erhält man das Dreieck BCF, in welchem die Seite $CF = 2 \cdot s_c$ und nach der Erkl. 298 die beiden dieser Seite anliegenden Winkel FCB und CFB bezw. $= \gamma_1$ und γ_2 sind und man kann somit zunächst, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten a und b ($= BF$) berechnen. Dann kann man im weiteren die Seite c mittels des in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satzes berechnen und die Winkel α und β nach der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 403. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Mittellinie s_c ist $= 1{,}2$ m lang, die Seite a dieses Dreiecks misst 2,4 m und der Winkel γ_2, welchen die Mittellinie mit der andern Seite b des Dreiecks bildet, beträgt $16^0\,20'$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks und welches ist dessen Inhalt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} s_c = 1{,}2 \text{ m} \\ a = 2{,}4 \text{ m} \\ \gamma_2 = 16^0\,20' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der vorigen Aufgabe 402, nur beachte man, dass gemäss der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte in dem Dreieck BCF die Seite $\overline{CF} = 2 \cdot s_c = 2 \cdot 1{,}2 = 2{,}4$ m und die Seite $\overline{CB} = a$ ebenfalls $= 2{,}4$ m lang ist, dass also das Dreieck BCF ein gleichschenkliges Dreieck ist, in welchem man den Schenkel und den Basiswinkel γ_2 kennt.

Aufgabe 404. Die Seite a eines Dreiecks misst 229 dm, die Winkel γ_1 und γ_2, welche die zur Seite c gehörige Schwerlinie s_c mit jener Seite a und der dritten Seite b bildet, betragen bezw. $60^0\,0'\,44''$ und $71^0\,24'$; man soll hieraus die beiden andern Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 229 \text{ dm} \\ \gamma_1 = 60^0\,0'\,44'' \\ \gamma_2 = 71^0\,24' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 402. Man kennt von dem Dreieck BCF, siehe Figur 142, die Seite $\overline{BC} = a$ und den Winkel $FCB = \gamma_1$ und den Winkel $CFB = \gamma_2$ und kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, aus diesem Dreieck die Seite b berechnen. Ist diese Seite b berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und b und den von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel γ ($= \gamma_1 + \gamma_2$).

Aufgabe 405. In einem Dreieck sind die zwei Seiten a und b bezw. $= 94{,}631$ m und 59,728 m, der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel $\gamma = 48^0\,4'\,12{,}7''$. Man soll die Stücke bestimmen, in welche der Winkel γ durch die von seinem Scheitel nach der Mitte der Gegenseite gezogene Linie geteilt wird.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 94{,}631 \text{ m} \\ b = 59{,}728 \text{ m} \\ \gamma = 48^0\,4'\,12{,}7'' \end{cases}$$

Gesucht: γ_1 und γ_2

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 142, mittels der aus dem Dreieck BCF nach dem Tangentensatz sich ergebenden Relation:

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 - \gamma_2}{2}}{\operatorname{tg} \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}} = \frac{a - b}{a + b}$$

aus welcher man:

A) . . . $\operatorname{tg}\frac{\gamma_1-\gamma_2}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

erhält; die Differenz der Winkel γ_1 und γ_2, da man auch deren Summe kennt, indem $\gamma_1+\gamma_2=\gamma$ ist, so kann man dann leicht die geforderten Winkel γ_1 und γ_2 berechnen.

Aufgabe 406. Von einem Dreieck kennt man die zwei Seiten $a=145$ m und $b=25$ m, und den Winkel $\gamma_2=46^0\,43'\,58{,}5''$, welchen die auf der dritten Seite gezogene Schwerlinie s_c mit der Seite b bildet. Wie gross ist die dritte Seite und welches sind die drei Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a=145\text{ m}\\ b=25\text{ m}\\ \gamma_2=46^0\,43'\,58{,}5''\end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der vorigen Aufgabe 405. Man kennt von dem Dreieck BCF, siehe Figur 142, die zwei Seiten a und b und, in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte, den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel γ_2. Hieraus kann man den Winkel $\alpha+\beta$ berechnen und dann kann man aus:

$$\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$$

den Winkel γ bestimmen. Die dritte Seite c findet man mittels Anwendung der Sinusregel.

Aufgabe 407. Die Seite c eines Dreiecks misst 5 m, die nach dieser Seite gezogene Schwerlinie s_c misst 3 m und der spitze Winkel δ, welchen diese Schwerlinie mit der Seite c bildet, ist $=75^0\,36'\,40''$; man soll hieraus die Winkel und nicht gegebenen Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c=5\text{ m}\\ s_c=3\text{ m}\\ \delta=75^0\,36'\,40''\end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst (siehe Figur 141) aus $\frac{c}{2}$, s_c und δ, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite b, den Winkel α und den Winkel γ_2: dann berechne man in derselben Weise aus $\frac{c}{2}$, s_c und $(180^0-\delta)$ die Seite a, den Winkel β und den Winkel γ_1.

Aufgabe 408. Die zur Seite c gehörige Schwerlinie s_c eines Dreiecks misst 19,209 m, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel γ ist $=93^0\,41'\,42{,}8''$ und der spitze Winkel δ, welchen die Schwerlinie s_c mit der Seite c bildet, ist $=50^0\,3'\,6''$; man soll hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} s_c=19{,}209\text{ m}\\ \gamma=93^0\,41'\,42{,}8''\\ \delta=50^0\,3'\,6''\end{cases}$

Andeutung. Aus dem Dreieck ADC, siehe Figur 143, erhält man nach der Sinusregel:

$$\frac{c}{2}:s_c=\sin\gamma_2:\sin\alpha$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass α und $(\delta+\gamma_2)$ Supplementwinkel sind, und hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\sin\alpha=\sin(\delta+\gamma_2)$$

setzt:

a) . . . . $\frac{c}{2}=s_c\cdot\frac{\sin\gamma_2}{\sin(\delta+\gamma_2)}$

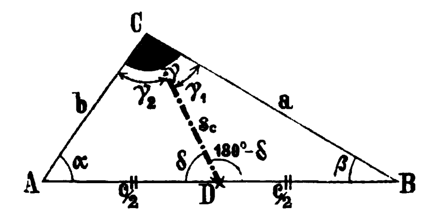
In analoger Weise erhält man aus dem Dreieck BDC:

$$\frac{c}{2} = s_c \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin(180^0 - \delta + \gamma_1)}$$

oder

$$\frac{c}{2} = s_c \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin[180^0 - (\delta - \gamma_1)]}$$

Figur 143.



und nach der Erkl. 66:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{c}{2} = s_c \cdot \frac{\sin\gamma_1}{\sin(\delta - \gamma_1)}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt nach gehöriger Reduktion:

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{\sin\gamma_2}{\sin(\delta + \gamma_2)} = \frac{\sin\gamma_1}{\sin(\delta - \gamma_1)}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin\gamma_2 + \sin\gamma_1}{\sin\gamma_2 - \sin\gamma_1} = \frac{\sin(\delta + \gamma_2) + \sin(\delta - \gamma_1)}{\sin(\delta + \gamma_2) - \sin(\delta - \gamma_1)}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 aufgestellten goniometrischen Formeln in Anwendung bringt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta+\gamma_2+\delta-\gamma_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta+\gamma_2-\delta+\gamma_1}{2}}$$

Diese Gleichung reduziert, ergibt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\delta+\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}\right)}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2+\gamma_1}{2}}$$

Setzt man $\gamma_2 + \gamma_1 = \gamma$ und bringt in bezug auf $\operatorname{tg}\left(\delta + \frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}\right)$ die in der Erkl. 246 aufgestellte Formel in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}} = \frac{\dfrac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}\delta\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}}{\operatorname{tg}\gamma}$$

oder

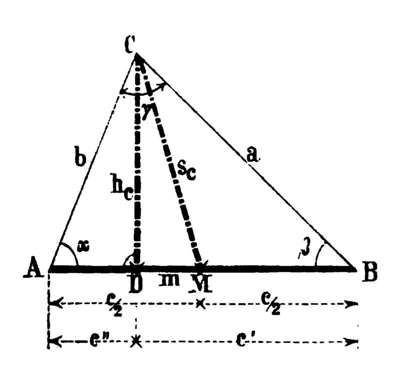
$$\text{A)} \ldots\ldots \frac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}}{1 - \operatorname{tg}\delta\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2} = \operatorname{tg}^2\gamma$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nun noch die Funktion Tangens des unbekannten Winkels $\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}$ vorkommt. Diese Gleichung löse man im weiteren in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\gamma_2-\gamma_1}{2}$ auf, substituiere alsdann die für δ und γ gegebenen Zahlenwerte und berechne die Differenz der Winkel γ_1 und γ_2, da auch deren Summe bekannt ist, indem $\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ ist, so kann man dann leicht die Winkel γ_1 und γ_2 selbst berechnen und hat die Aufgabe auf die Aufgabe 402 zurückgeführt.

i) Aufgaben, in welchen eine Schwerlinie (Mittelinie) und eine Höhe vorkommen.

Aufgabe 409. Die Seite c eines Dreiecks misst 150 m, die zugehörige Höhe h_c 24 m und die durch die Mitte dieser Seite c gehenden Schwerlinie s_c ist 72,111 m; wie gross sind die übrigen Stücke des Dreiecks?

Figur 144.



Gegeben: $\begin{cases} s_c = 72{,}111 \text{ m} \\ h_c = 24 \text{ m} \\ c = 150 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 144, ABC das Dreieck, in welchem die Seite c, die Schwerlinie s_c und die Höhe h_c gleich den gegebenen sind, so beachte man, dass sich aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC u. BDC die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{c''}$$

und

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'}$$

ergeben.

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$\text{c)} \ldots c'' = \overline{AM} - \overline{DM} = \frac{c}{2} - m$$

und

$$\text{d)} \ldots c' = \overline{BM} + \overline{DM} = \frac{c}{2} + m$$

ist, und dass man aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM für:

$$\text{e)} \ldots m = \sqrt{s^2_c - h^2_c}$$

erhält, so ergeben sich aus den Gleichungen a) bis c) zur Berechung der Winkel α und β die Relationen:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{\frac{c}{2} - \sqrt{s^2_c - h^2_c}}$$

und

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{\frac{c}{2} + \sqrt{s^2_c - h^2_c}}$$

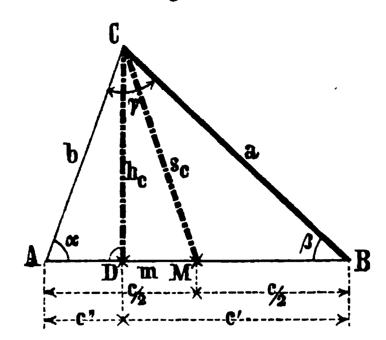
Hat man nach diesen Gleichungen α und β berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite c und die beiden anliegenden Winkel, und kann somit im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 410. Von einem Dreieck kennt man die nach der Seite c gezogene Schwerlinie $s_c = 19{,}2094$ dm, die zu dieser Seite gehörige Höhe $h_c = 12$ dm und die Seite $a =$ 37 dm; man soll die nicht bekannten Stücke des Dreiecks hieraus berechnen.

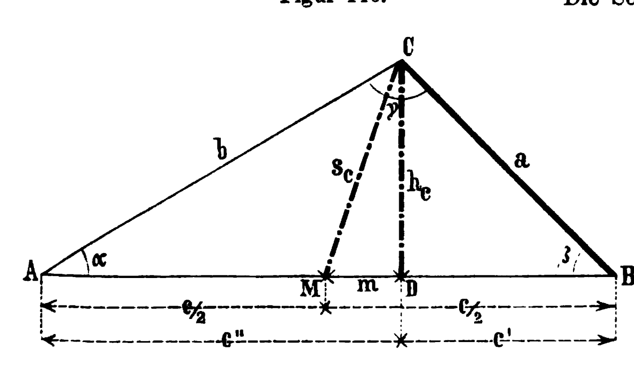
Gegeben: $\begin{cases} s_c = 19{,}2094 \text{ dm} \\ h_c = 12 \text{ dm} \\ a = 37 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Den Winkel β kann man, siehe Figur 145, direkt aus h_c und a berechnen, dann kann man aus dem Dreieck CMB mittels des berechneten Winkels β und der gegebenen Stücke s_c und a, wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt wurde, die Seite $\overline{BM} = \frac{c}{2}$ jenes Dreiecks und somit auch die Seite c des Dreiecks ABC berechnen, wofür man zwei Werte erhalten wird.

Figur 145.



Figur 146.



Die Seite c kann man auch **unabhängig** von dem Winkel β wie folgt berechnen:

Aus der Figur 145 ergibt sich:

$$\overline{BM} = \overline{BD} - \overline{MD}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \quad \frac{c}{2} = c' - m$$

da sich ferner aus dem rechtwinkligen Dreieck CDB:

$$\text{b)} \ldots \quad c' = \pm\sqrt{a^2 - h^2_c}$$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM:

$$\text{c)} \ldots \quad m = \pm\sqrt{s^2_c - h^2_c}$$

ergibt, so erhält man in Rücksicht der Gleichungen b) und c) aus Gleichung a):

$$\frac{c}{2} = \pm\sqrt{a^2 - h^2_c} - \left(\pm\sqrt{s^2_c - h^2_c}\right)$$

oder

$$c = 2\cdot\left(\pm\sqrt{a^2 - h^2_c} \mp \sqrt{s^2_c - h^2_c}\right)$$

In bezug auf die verschiedenen Vorzeichen der in dieser Gleichung vorkommenden Wurzeln hat man zu beachten, dass der erste Wurzelwert, gemäss der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte, **grösser** als der zweite Wurzelwert ist, dass somit, da ein **negativer** Wert für c keinen Sinn zulässt:

$$\text{A)} \ldots \quad c = 2\left(\sqrt{a^2 - h^2_c} \mp \sqrt{s^2_c - h^2_c}\right)$$

ist. Nach dieser Gleichung kann man die Seite c berechnen.

Die Seite c, welche man aus:

$$c = 2\cdot\left(\sqrt{a^2 - h^2_c} - \sqrt{s^2_c - h^2_c}\right)$$

erhält, entspricht der Seite c des durch die Figur 145 dargestellten Dreiecks; die Seite c, welche man aus:

$$c = 2\cdot\left(\sqrt{a^2 - h^2_c} + \sqrt{s^2_c - h^2_c}\right)$$

erhält, entspricht der Seite c des durch die Figur 146 dargestellten Dreiecks. Kennt man hiernach a, c und β des Dreiecks ABC, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 411. In einem Dreieck ist die nach der Seite c gezogene Schwerlinie $s_c = 43{,}8292$ m; die zu dieser Seite gehörige Höhe $h_c = 20$ m und der der Seite c anliegende Winkel $\alpha = 43^0\,36'\,10{,}1''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Stücke dieses Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} s_c = 43{,}8292 \text{ m} \\ h_c = 20 \text{ m} \\ \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 145, aus α und h_c die Seite b, dann hat man im weiteren die frühere Aufgabe 298. Die Aufgabe ergibt zwei Lösungen.

Aufgabe 412. Der Winkel γ eines Dreiecks beträgt 55° 16′ 30,3″, die zur Gegenseite gehörige Höhe h_c misst 399 m und die zu dieser Seite gehörige Schwerlinie s_c ist 452,76 m lang; man soll hieraus die beiden andern Winkel und die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \gamma = 55^0\, 16'\, 30{,}3'' \\ h_c = 399 \text{ m} \\ s_c = 452{,}76 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 145, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man zunächst die Seite c wie folgt berechnen: nach dem in Antwort der Frage 22 bewiesenen Projektionssatz hat man die Relation:

$$\text{a)} \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

ferner hat man nach dem in der Erkl. 299 aufgestellten planimetrischen Satz, bezw. nach der in der Erkl. 300 aufgestellten Gleichung b):

$$\text{b)} \ldots a^2 + b^2 = 2s_c^2 + \frac{c^2}{2}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst:

$$\text{c)} \ldots c^2 = 2s_c^2 + \frac{c^2}{2} - 2ab \cdot \cos\gamma$$

und es bleibt nur noch übrig das Produkt der unbekannten Seiten zu eliminieren; berücksichtigt man zu diesem Zweck, dass:

$$\text{f)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und dass nach der Erkl. 151:

$$\text{g)} \ldots F = \frac{a \cdot b \cdot \sin\gamma}{2}$$

ist, dass also nach diesen beiden Gleichungen:

$$\frac{ab \sin\gamma}{2} = \frac{ch_c}{2}$$

mithin:

$$\text{h)} \ldots ab = \frac{ch_c}{\sin\gamma}$$

gesetzt werden kann, so geht in Rücksicht dessen die Gleichung c) über in:

$$\text{i)} \ldots c^2 = 2s_c^2 + \frac{c^2}{2} - 2 \cdot \frac{ch_c}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma$$

und man hat eine Gleichung, in welcher nur noch die Unbekannte c vorkommt; löst man diese Gleichung in bezug auf c auf, so erhält man nach der Erkl. 302:

$$\text{A)} \ldots c = \sqrt{4s_c^2 + 4h_c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma} - 2h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Ist die Seite c auf diese Weise berechnet, so kennt man in dem zu berechnenden Dreieck c, s_c und γ und man kann in weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 400 gesagt ist.

Erkl. 302. Aus nebenstehender Gleichung i)

$$c^2 = 2s_c^2 + \frac{c^2}{2} - 2 \cdot \frac{ch_c}{\sin\gamma} \cdot \cos\gamma$$

erhält man c wie folgt:

$$c^2 - \frac{c^2}{2} + 2ch_c \cdot \frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = 2s_c^2$$

$$\frac{c^2}{2} + 2ch_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma = 2s_c^2$$

$$c^2 + 4h_c \operatorname{ctg}\gamma \cdot c = 4s_c^2$$

$$c^2 + 4h_c \operatorname{ctg}\gamma \cdot c + (2h_c \operatorname{ctg}\gamma)^2 = 4s_c^2 - (2h_c \operatorname{ctg}\gamma)^2$$

$$(c + 2h_c \operatorname{ctg}\gamma)^2 = 4s_c^2 + 4h_c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma$$

$$c + 2h_c \operatorname{ctg}\gamma = \pm \sqrt{4s_c^2 + 4h_c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma}$$

$$c = -2h_c \operatorname{ctg}\gamma \pm \sqrt{4s_c^2 + 4h_c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma}$$

oder, da die Seite c nicht negativ sein kann, mithin das zweite Vorzeichen der Wurzel keine Gültigkeit hat:

$$c = \sqrt{4s_c^2 + 4h_c^2 \operatorname{ctg}^2\gamma} - 2h_c \cdot \operatorname{ctg}\gamma$$

Aufgabe 413. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 36{,}324$ m, die zu ihr gehörige Schwerlinie s_c ist $= 29{,}723$ und der Winkel, welchen diese Schwerlinie mit der zur Seite a gehörigen Höhe h_c bildet, ist $\varepsilon = 11^0\, 16'\, 28'$; man soll hieraus die Seiten und Winkel dieses Dreiecks bestimmen.

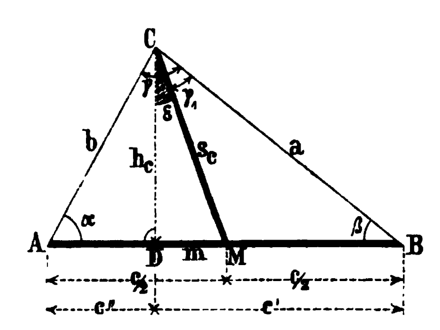
Gegeben: $\begin{cases} c = 36{,}324 \text{ m} \\ s_c = 29{,}723 \text{ m} \\ \sphericalangle h_c s_c = \varepsilon = 11^0\, 16'\, 28'' \text{ (s. Erkl. 303)} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 147, ABC das Dreieck dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man

z. B. den Winkel α zunächst wie folgt berechnen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC ergibt sich:

Figur 147.



$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{c''}$$

Da sich nun aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM die Relation ergibt:

$$\text{b)} \ldots h_c = s_c \cdot \cos\varepsilon \quad \text{(s. Erkl. 51)}$$

und da, siehe Figur 147:

$$\text{c)} \ldots c'' = \overline{AM} - \overline{DM} = \frac{c}{2} - m$$

ist, und sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM:

$$\text{d)} \ldots m = s_c \cdot \sin\varepsilon \quad \text{(s. Erkl. 50)}$$

ergibt, so geht in Rücksicht der Gleichungen b) bis d) die Gleichung a) über in:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{s_c \cdot \cos\varepsilon}{\frac{c}{2} - s_c \sin\varepsilon}$$

und man hat zur Berechnung des Winkels α die Gleichung:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{2 s_c \cdot \cos\varepsilon}{c - 2 s_c \sin\varepsilon}$$

In ganz derselben Weise erhält man aus den Dreiecken BCM und CDM zur Berechnung des Winkels β die analoge Relation:

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{2 s_c \cdot \cos\varepsilon}{c + 2 s_c \sin\varepsilon}$$

Erkl. 306. In diesem Buch sind, zur raschen Erkennung solcher Winkel, welche eine Transversale mit irgend einer andern Transversalen oder mit einer Seite bildet, dieselben im Text oft dadurch kurz bezeichnet, dass die Buchstaben, welche jene Linien bezeichnen, neben einander geschrieben sind und vor diese beiden Buchstaben das Winkelzeichen gesetzt ist, so bedeutet z. B.: $\sphericalangle h_c s_c$ den Winkel eines Dreiecks, welchen, s. Figur 147 die zur Seite c gehörige Höhe h_c mit der zu dieser Seite gehörigen Schwerlinie s_c bildet.

Hat man nach diesen Gleichungen die Winkel α und β berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite c und die zwei Winkel α und β und kann alsdann die Seiten a und b berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Man kann die Seiten a und b auch unabhängig von den berechneten Winkeln α und β wie folgt berechnen:

Nach dem Projektionssatz (siehe Antwort der Frage 21 und 22) erhält man aus dem Dreieck AMC:

$$b^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s^2_c - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c \cdot \cos\delta$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht, dass δ und ε die spitzen Winkel des rechtwinkligen Dreiecks CDM sind, dass also:

$$\cos\delta = \sin\varepsilon$$

gesetzt werden kann:

$$b^2 = \frac{c^2}{4} + s^2_c - c \cdot s_c \cdot \sin\varepsilon$$

oder

$$\text{C)} \ldots b = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4 s^2_c - 4 c s_c \sin\varepsilon}$$

In analoger Weise erhält man aus dem Dreieck BCM:

$$a^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + s^2_c - 2 \cdot \frac{c}{2} \cdot s_c \cdot \cos(180^0 - \delta)$$

oder, da nach der Erkl. 94:

$$\cos(180^0 - \delta) = -\cos\delta$$

und nach der Erkl. 19:

$$\cos\delta = \sin\varepsilon$$

mithin:

$$\cos(180^0 - \delta) = -\sin\varepsilon$$

gesetzt werden kann:

$$\text{D)} \ldots a = \frac{1}{2}\sqrt{c^2 + 4s^2_c + 4cs_c\sin\varepsilon}$$

Nach den Gleichungen C) und D) kann man die Seiten a und b unabhängig von den Winkeln berechnen.

Die Berechnung der Seiten a und b nach den Gleichungen C) und D) kann man dadurch vereinfachen, dass man dem für a und b erhaltenen Ausdruck durch Einführung eines Hülfswinkels eine logarithmisch-bequeme Form gibt. (Siehe Abschnitt 26 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 414. Die Seite c eines Dreiecks ist 408 m lang, die zu ihr gehörige Höhe h_c misst 40 m und der Winkel γ_1, welchen die zur Seite c gehörige Mittellinie s_c mit einer der beiden andern Seiten, z. B. mit der Seite a, bildet, beträgt $30^0 40' 10''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} c = 408 \text{ m} \\ h_c = 40 \text{ m} \\ \sphericalangle s_c a = \gamma_1 = 30^0 40' 10'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Man berechne zuerst den Winkel, welchen die Höhe h_c mit der Schwerlinie s_c bildet, dies kann man wie folgt:

Ist, siehe Figur 147, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM die Relation:

$$\text{a)} \ldots m = h_c \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \text{ (s. Erkl. 46)}$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC die analoge Relation:

$$\text{b)} \ldots m + \frac{c}{2} = h_c \cdot \operatorname{tg}(\varepsilon + \gamma_1)$$

Setzt man die sich hiernach für den Abschnitt m ergebenden Werte einander gleich, so hat man die goniometrische Gleichung:

$$h_c \operatorname{tg}\varepsilon = h_c \operatorname{tg}(\varepsilon + \gamma_1) - \frac{c}{2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 246 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

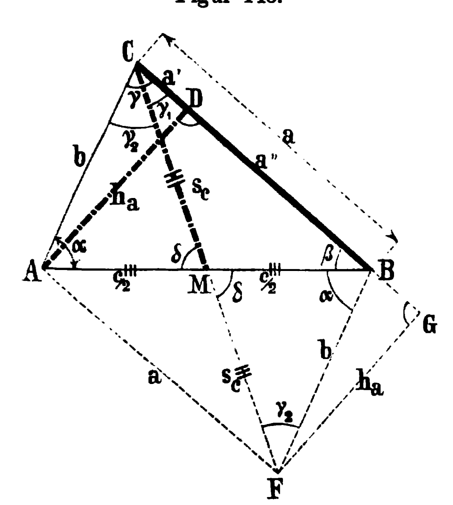
$$\text{A)} \ldots h_c \operatorname{tg}\varepsilon = h_c \cdot \frac{\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\gamma_1}{1 - \operatorname{tg}\varepsilon \cdot \operatorname{tg}\gamma_1} - \frac{c}{2}$$

Löst man diese Gleichung, welche nur noch die unbekannte Funktion $\operatorname{tg}\varepsilon$ enthält, in bezug auf $\operatorname{tg}\varepsilon$ auf, und substituiert in den hiernach für $\operatorname{tg}\varepsilon$ gefundenen Ausdruck die für h_c, c und γ_1 gegebenen Zahlenwerte,

so kann man den Winkel ε berechnen. Berechnet man ferner mittels des für ε berechneten und des für h_c gegebenen Werts aus dem rechtwinkligen Dreieck CDM die Mittellinie s_c, so kennt man von dem Dreieck ABC: c, s_c und $\sphericalangle\, h_c\, s_c\ (= \varepsilon)$ und kann im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe gesagt wurde. Man kann aber auch aus dem rechtwinkligen Dreieck CDB, in welchem h_c und $\sphericalangle\, DCB = \varepsilon + \gamma_1$ bekannt ist, die Seite a und den Winkel β berechnen und dann, da man hiernach von dem Dreieck ABC die Seiten c und a und den von beiden eingeschlossenen Winkel β kennt, verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 415. Die zur Seite c gehörige Schwerlinie eines Dreiecks s_c ist 199,0603 m lang, die Seite a misst 401 m und die zu dieser Seite gehörige Höhe h_a ist 40,6983 m lang; **man soll hieraus die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.**

Figur 148.



Erkl. 304. Verbindet man in der Figur 148 F mit A, so erhält man nach der Erkl. 305 das Parallelogramm $AFBC$; da nun in einem jeden Parallelogramm je zwei der parallelen Seiten überall gleichen senkrechten Abstand haben, so ergibt sich hieraus, dass in der Figur 148 $FG = AD = h_a$ sein muss.

Erkl. 305. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Halbieren sich die Diagonalen eines Vierecks, so ist dieses Viereck ein Parallelogramm."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} s_c &= 199{,}0603 \text{ m} \\ a &= 401 \text{ m} \\ h_a &= 40{,}6983 \text{ m} \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 148, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man verlängert, wie in der Andeutung zur Aufgabe 394 gesagt, die Schwerlinie s_c um sich selbst, und verbindet F mit B, so erhält man das Dreieck BCF, in welchem die zwei Seiten $\overline{CF}$ $(= 2 \cdot s_c)$ und $\overline{BC}\,(= a)$ und nach der Erkl. 304 die zur Seite $\overline{BC}$ gehörige Höhe $\overline{FG}$ $(= h_a)$ bekannt sind. Aus dem Dreieck BCF kann man somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 346 gesagt, die Seite b und den Winkel $(\alpha + \beta)$ bezw. den Winkel γ $[\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)]$ berechnen; dann kann man, da nunmehr von dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und b und der von beiden eingeschlossene Winkel γ bekannt sind, zur Berechnung der dritten Seite c und der Winkel α und β verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Da in der Figur 148 nach Konstruktion:

$$CM = MF$$
und $$AM = MB$$

ist, so muss nach diesem Lehrsatz das Viereck $AFBC$ ein ∥gr sein.

Aufgabe 416. Von einem Dreieck kennt man die Seite $b = 15$ m, die zur zweiten Seite a gehörige Höhe $h_a = 14{,}2703$ m und die zur dritten Seite c gehörige Mittellinie $s_c = 17{,}6718$ m; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b = 15 \text{ m} \\ h_a = 14{,}2703 \text{ m} \\ s_c = 17{,}6718 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 148, aus b und h_a den Winkel γ, beachte hierbei die Erkl. 271; da alsdann von dem Dreieck ABC b, γ und s_c bekannt sind, so verfahre man im weiteren analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 399 gesagt wurde.

Aufgabe 417. Von einem Dreieck kennt man den Winkel $\gamma = 66^0 59' 25{,}4''$, die zur Gegenseite c gehörige Schwerlinie $s_c = 72{,}111$ m und die zu einer der beiden andern Seiten, nämlich zur Seite a gehörige Höhe $h_a = 56{,}1468$ m; man soll hieraus die nicht gegebenen Winkel und die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \gamma = 66^0 59' 25{,}4'' \\ s_c = 72{,}111 \text{ m} \\ h_a = 56{,}1468 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 148. aus γ und h_a die Seite b, dann verfahre man im weiteren analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 399 gesagt wurde.

Aufgabe 418. Die Seite c eines Dreiecks misst 240 m, die zu ihr gehörige Schwerlinie s_c misst 80,0562 m und die zu einer der beiden andern Seiten, z. B. die zur Seite a gehörige Höhe h_a ist 34,1117 m lang. Man soll hieraus die Winkel und die nicht gegebenen Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 240 \text{ m} \\ s_c = 80{,}0562 \text{ m} \\ h_a = 34{,}1117 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der vorigen Aufgaben 415 bis 417; man berechne zuerst den Winkel β und verfahre im weiteren analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 397 gesagt ist.

Aufgabe 419. Die zur Seite a eines Dreiecks gehörige Höhe h_a ist $= 81{,}7467$ m und die zur Seite c gehörige Schwerlinie $s_c = 88{,}459$ m lang, ferner ist der von den Seiten a und c eingeschlossene Winkel $\beta = 15^0 11' 21{,}4''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h_a = 81{,}7467 \text{ m} \\ s_c = 88{,}459 \text{ m} \\ \beta = 15^0 11' 21{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst, siehe Figur 148, aus h_a und β die Seite c und verfahre alsdann im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 397 gesagt ist, da man nunmehr in dem zu berechnenden Dreieck c, s_c und β kennt.

Aufgabe 420. Die zu den Seiten a und b gehörigen Höhen eines Dreiecks sind $h_a = 12{,}9231$ und $h_b = 11{,}2$ m und die zur dritten Seite c gehörige Schwerlinie ist $s_c = 12{,}1655$ m; man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a = 12{,}9231 \text{ m} \\ h_b = 11{,}2 \text{ m} \\ s_c = 12{,}1655 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 149, ABC das Dreieck, in welchem h_a, h_b und s_c gleich den gegebenen Stücken sind, und man verlängert s_c um sich selbst, verbindet alsdann den Endpunkt F dieser Verlängerung mit A und B, so erhält man das Dreieck BCG

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

279. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 278. — Seite 273—288. Mit 10 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 278. — Seite 273—288. Mit 10 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen zwei Schwerlinien, auch zwei Schwerlinien und eine Höhe, und drei Schwerlinien vorkommen; in welchen eine winkelhalbierende Transversale, auch das Verhältnis zweier Dreiecksseiten vorkommt.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

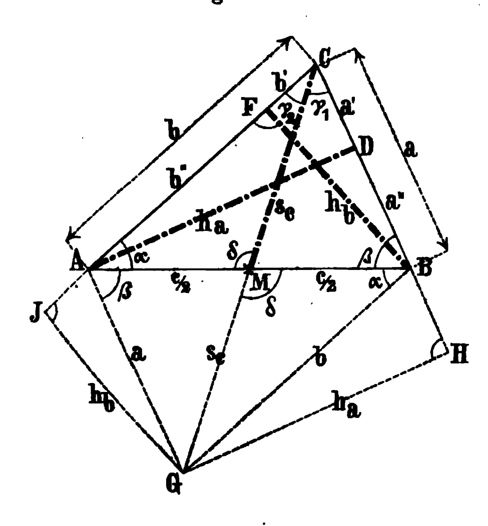
Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 149.



und das Dreieck ACG, bezw. nach der Erkl. 305 das $\|$ gr $AGBC$. Nimmt man nun G als die Spitze des Dreiecks BCG an und fällt die Höhe GH, so erhält man das rechtwinklige Dreieck CHG, in welchem $\overline{CG} = 2s_c$ nach Konstruktion, und in welchem nach der Erkl. 304 $\overline{GH} = \overline{AD} = h_a$ ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich somit:

A) . . . $\sin\gamma_1 = \frac{h_a}{2 \cdot s_c}$

Nimmt man ferner G als Spitze des Dreiecks AGC an und fällt die Höhe GJ, so erhält man das rechtwinklige Dreieck CJG, in welchem nach Konstruktion $\overline{CG} = 2 \cdot s_c$, und in welchem nach der Erkl. 304 $\overline{GJ} = \overline{BF} = h_b$ ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich somit:

B) . . . $\sin\gamma_2 = \frac{h_b}{2 \cdot s_c}$

Nach den Gleichungen A) und B) kann man die Winkel γ_1 und γ_2 berechnen. Hat man diese Winkel berechnet, so kann man aus:

C) . . . $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$

den Winkel γ bestimmen. Mittels des hiernach für γ berechneten Werts und der für h_a und h_b gegebenen Werte, kann man im weiteren aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und BFC die Seiten a und b bestimmen. Hiernach kann man, da man nunmehr von dem Dreieck ABC die Seiten a und b und den von beiden eingeschlossenen Winkel γ kennt, weiter verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

---

k) Aufgaben, in welchen zwei Schwerlinien (Mittellinien), auch zwei Schwerlinien und eine Höhe, und drei Schwerlinien vorkommen.

Aufgabe 421. Die nach den Seiten a und b eines Dreiecks gezogenen Schwerlinien s_a und s_b messen bezw. 0,972 m und 0,865 m und bilden einen Winkel $\varepsilon = 72^0\,19'$ miteinander; man soll hieraus die Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

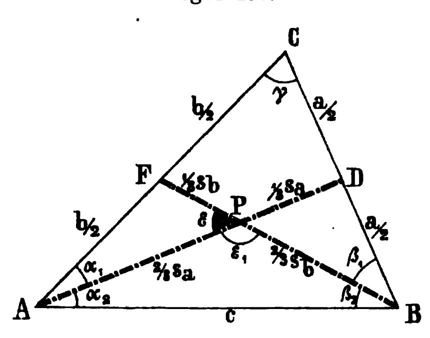
Gegeben: $\begin{cases} s_a = 0{,}972\,\text{m} \\ s_b = 0{,}865\,\text{m} \\ \sphericalangle s_a s_b = \varepsilon = 72^0\,19' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 150, ABC das Dreieck, dessen Schwerlinien s_a und s_b gleich den gegebenen sind, und welche der Aufgabe gemäss, den spitzen Winkel ε mit einander bilden, so erhält man aus dem Dreieck BDP in Rücksicht des in der Erkl. 306 angeführten planimetrischen Satzes zur Berechnung der gesuchten Seite a nach dem Projektionssatz (siehe Antw. der Fragen 21 und 22) die Relation:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3}s_b\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3}s_a \cdot \frac{2}{3}s_b \cdot \cos\varepsilon$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion:

Figur 150.



Erkl. 306. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die drei Schwer- oder Mittellinien eines Dreiecks, d. s. die Verbindungslinien der Ecken eines Dreiecks mit den Mitten der ihnen gegenüberliegenden Seiten schneiden sich in einem Punkt und zwar so, dass dieser Punkt von jeder Ecke um $\frac{2}{3}$, von der Mitte einer jeden Seite um $\frac{1}{3}$ je derjenigen Schwerlinie entfernt ist, welche durch die betreffende Ecke und der ihr gegenüberliegenden Seite geht."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz schneiden sich, s. Fig. 150, die Schwerlinien s_a und s_b des Dreiecks ABC in dem Punkt P so, dass $PA = \frac{2}{3} s_a$, $PD = \frac{1}{3} s_a$, bezw. dass $PB = \frac{2}{3} s_b$ und dass $PF = \frac{1}{3} s_b$ ist.

$$\frac{a^2}{4} = \frac{1}{9} s_a^2 + \frac{4}{9} s_b^2 - \frac{4}{9} s_a \cdot s_b \cdot \cos\varepsilon$$

$$a^2 = \frac{4}{9} (s_a^2 + 4 s_b^2 - 4 s_a \cdot s_b \cdot \cos\varepsilon)$$

oder

A) . . . $a = \frac{2}{3} \sqrt{s_a^2 + 4 s_b^2 - 4 s_a s_b \cos\varepsilon}$

In ganz analoger Weise erhält man aus dem Dreieck AFP:

B) . . . $b = \frac{2}{3} \sqrt{4 s_a^2 + s_b^2 - 4 s_a s_b \cos\varepsilon}$

Ferner erhält man nach dem Projektionssatz aus dem Dreieck ABP zur Berechnung der dritten Seite c:

$$c^2 = \left(\frac{2}{3} s_a\right)^2 + \left(\frac{2}{3} s_b\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{3} s_a \cdot \frac{2}{3} s_b \cdot \cos\varepsilon_1$$

oder, wenn man diese Gleichung reduziert und berücksichtigt, dass:

$$\varepsilon_1 = 180^0 - \varepsilon$$

also:

$$\cos\varepsilon_1 = \cos(180^0 - \varepsilon)$$

oder nach der Erkl. 94:

$$\cos\varepsilon_1 = \cos(180^0 - \varepsilon) = -\cos\varepsilon$$

gesetzt werden kann:

$$c^2 = \frac{4}{9} s_a^2 + \frac{4}{9} s_b^2 + \frac{4}{9} \cdot 2 s_a s_b (-\cos\varepsilon)$$

$$c^2 = \frac{4}{9} (s_a^2 + s_b^2 + 2 s_a s_b \cos\varepsilon)$$

oder

C) . . . $c = \frac{2}{3} \sqrt{s_a^2 + s_b^2 + 2 s_a s_b \cos\varepsilon}$

Hat man nach den Gleichungen A) bis C) die drei Seiten berechnet, so kann man, da nunmehr diese drei Seiten als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, zur Berechnung der Winkel und des Inhalts im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 422. Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 408$ dm und die zu den beiden andern Seiten a und b gehörigen Schwerlinien $s_a = 209{,}457$ dm und $s_b = 403{,}9954$ dm; man soll hieraus die beiden andern Seiten und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 408 \text{ dm} \\ s_a = 209{,}457 \text{ dm} \\ s_b = 403{,}9954 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe die Figur 150 und die Erkl. 306, aus $\frac{2}{3} s_a$, $\frac{2}{3} s_b$ und der Seite c den Winkel ε_1, welchen die Schwerlinien s_a und s_b mit einander bilden, dann kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde.

Aufgabe 423. Die zur Seite a eines Dreiecks gehörige Schwerlinie s_a ist 240 m lang, der Winkel α_2, welchen diese Schwerlinie s_a mit der Seite c bildet, ist $= 22^0\,18'\,40''$ und der Winkel β_2, welchen die Seite c mit der zur Seite b gehörigen Schwerlinie s_c bildet, beträgt $19^0\,0'\,30''$; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} s_a = 240\text{ m} \\ \sphericalangle s_a c = \alpha_2 = 22^0\,18'\,40'' \\ \sphericalangle s_b c = \beta_2 = 19^0\,0'\,30'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 150, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so kennt man von dem Dreieck ABP die Seite c und die Winkel α_2 und β_2; aus diesen gegebenen Stücken kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite $BP = \frac{2}{3} s_b$, sowie den Winkel ε_1 berechnen. Da man hiernach von dem Dreieck ABC die beiden Schwerlinien s_a und s_b (letztere ist aus dem für $\frac{2}{3} s_b$ berechneten Wert leicht zu bestimmen) und den von denselben gebildeten Winkel ε_1 kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde.

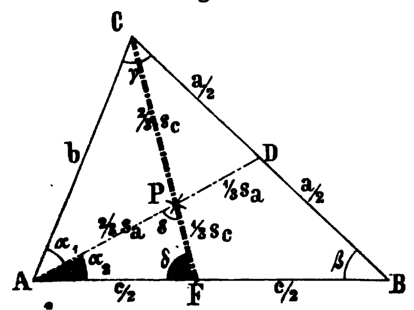
Aufgabe 424. Die Seite c eines Dreiecks ist 1000 m lang, die zu einer der beiden andern Seiten, z. B. zur Seite a gehörige Schwerlinie s_a misst 845 m und der Winkel β_2, welchen jene Seite c mit der zur dritten Seite b gehörigen Schwerlinie s_b bildet, beträgt $42^0\,50'\,40''$; man soll hieraus die beiden andern Seiten und die Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 1000\text{ m} \\ s_a = 845\text{ m} \\ \sphericalangle s_b c = \beta_2 = 42^0\,50'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 150, aus c, $\frac{2}{3} s_a$ und β_2 den Winkel ε_1 und die Strecke $\frac{2}{3} s_b$. Da man alsdann von dem Dreieck die zwei Schwerlinien s_a und s_b (s_b ergibt sich leicht aus dem für $\frac{2}{3} s_b$ berechneten Wert) und den von denselben gebildeten Winkel ε_1 kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde.

Aufgabe 425. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Schwerlinie s_c misst 450,8 m, der spitze Winkel δ, welchen dieselbe mit der Seite c bildet, ist $56^0\,20'\,8''$ und der Winkel α_2, welchen die Seite c mit der zur Seite a gehörigen Schwerlinie s_a bildet, beträgt $20^0\,32'\,20''$; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Figur 151.



Gegeben: $\begin{cases} s_c = 450{,}8\text{ m} \\ \sphericalangle s_c c = \delta = 56^0\,20'\,8'' \\ \sphericalangle s_a c = \alpha_2 = 20^0\,32'\,20'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 151, aus dem Dreieck AFP, in welchem die Winkel α_2 und δ sowie die Seite FP bekannt sind, indem $FP = \frac{1}{3} s_c$ ist und hiernach aus s_c leicht bestimmt werden kann, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite $AP = \frac{2}{3} s_a$ und den Winkel ε. Da man hiernach von dem Dreieck ABC die beiden Schwerlinien s_c und s_a (letztere ist leicht aus dem für $\frac{2}{3} s_a$ berechneten Wert zu bestimmen) und den von beiden gebildeten Winkel ε kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde.

Aufgabe 426. In einem Dreieck messen die zu den Seiten a und c gehörigen Schwerlinien s_a und s_c bezw. $=$ 36,08 und 42,65 m und der spitze Winkel δ, welchen die Schwerlinie s_c mit der Seite c bildet, beträgt $62^0\,8'\,42''$; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} s_a = 36{,}08 \text{ m} \\ s_c = 42{,}65 \text{ m} \\ \sphericalangle s_c c = \delta = 62^0\,8'\,42'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 425; man berechne, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, siehe Figur 151, aus $\frac{1}{3}s_c$, $\frac{2}{3}s_a$ und δ, zunächst den Winkel ε; dann verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde.

Aufgabe 427. Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 232$ m, die zu ihr gehörige Schwerlinie $s_c = 120{,}9339$ m und die zu einer der beiden andern Seiten des Dreiecks, z. B. die zur Seite a gehörige Schwerlinie $s_a = 125{,}1489$ m; man soll hieraus die beiden nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 232 \text{ m} \\ s_c = 120{,}9339 \text{ m} \\ s_a = 125{,}1489 \text{ m} \end{cases}$

Figur 152.

Andeutung. Man kennt in dem Dreieck AFP, siehe Figur 152, die Seiten $AF = \frac{c}{2}$, die Seite $FP = \frac{1}{3}s_c$ und die Seite $AP = \frac{2}{3}s_a$; wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt, kann man somit aus diesem Dreieck den Winkel ε berechnen. Dann kann man im weiteren aus s_c, s_a und ε, wie in der Andeutung zur Aufgabe 421 gesagt wurde, die gesuchten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Man kann auch zuerst die Seite a wie folgt berechnen:

Aus dem Dreieck ABD, siehe Figur 152, erhält man nach dem Projektionssatz:

a) .... $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2_a + c^2 - 2 \cdot s_a \cdot c \cdot \cos\alpha_2$

ferner erhält man in Rücksicht der Erkl. 306 nach der Formel 173 (siehe Auflösung der Aufgabe 119) aus dem Dreieck AFP:

$$\cos\alpha_2 = \frac{\left(\frac{2}{3}s_a\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2}{2 \cdot \frac{2}{3}s_a \cdot \frac{c}{2}}$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$\cos\alpha_2 = \frac{\frac{4}{9}s^2_a + \frac{c^2}{4} - \frac{1}{9}s^2_c}{\frac{2}{3}s_a \cdot c}$$

b) .... $\cos\alpha_2 = \frac{16 s^2_a + 9 c^2 - 4 s^2_c}{24 s_a \cdot c}$

Setzt man diesen Wert für $\cos\alpha_2$ in Gleichung a) so erhält man:

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 = s^2_a + c^2 - 2 \cdot s_a \cdot c \cdot \frac{16 s^2_c + 9 c - 4 s^2_c}{24 s_a c}$$

und diese Gleichung reduziert und in bezug auf a aufgelöst, gibt:

$$\frac{a^2}{4} = s^2_a + c^2 - \frac{16 s^2_a + 9c^2 - 4s^2_c}{12}$$

$$a^2 = 4s^2_a + 4c^2 - \frac{16 s^2_a + 9c^2 - 4s^2_c}{3}$$

$$a^2 = \frac{12 s^2_a + 12c^2 - 16 s^2_a - 9c^2 + 4s^2_c}{3}$$

$$a^2 = \frac{3c^2 - 4s^2_a + 4s^2_c}{3}$$

oder

$$\text{A)} \;.\; a = \sqrt{c^2 + \frac{4}{3}(s^2_c - s^2_a)}$$

In analoger Weise kann man mittels der aus dem Dreieck AFC sich ergebenden Relation:

$$\text{c)} \ldots b^2 = s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2 - 2 \cdot s_c \cdot \frac{c}{2} \cdot \cos\delta$$

und der aus dem Dreieck AFP sich ergebenden Relation:

$$\text{d)} \ldots \cos\delta = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}s_c\right)^2 - \left(\frac{2}{3}s_a\right)^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{1}{3}s_c}$$

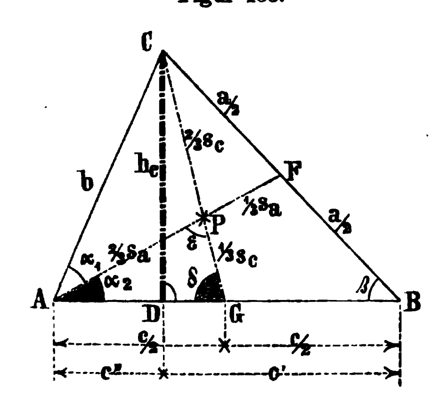
die Seite b bestimmen; man erhält analog wie vorhin:

$$\text{B)} \ldots b = \sqrt{\frac{2}{3}(s^2_c + 2s^2_a) - \frac{1}{2}c^2}$$

Da nunmehr die drei Seiten a, b und c bekannt sind, so kann man hiernach die Winkel des Dreiecks berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 428. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist $= 15{,}4$ m, der Winkel δ, welchen die zur Seite c gehörige Schwerlinie s_c mit dieser Seite c bildet, ist $= 67^0\,28'\,46''$ und der Winkel α_2, welchen die zur Seite a gehörige Schwerlinie s_a mit der Seite c bildet, ist $= 53^0\,47'\,36''$; man soll hieraus den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Figur 153.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c = 15{,}4 \text{ m} \\ \sphericalangle s_c c = \delta = 67^0\,28'\,46'' \\ \sphericalangle s_a c = \alpha_2 = 53^0\,47'\,36 \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 153, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so erhält man aus dem Dreieck AGP nach der Sinusregel und in Rücksicht der Erkl. 306:

$$\text{a)} \ldots . \; \frac{c}{2} : \frac{1}{3}s_c = \sin\varepsilon : \sin\alpha_2$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf c auf und berücksichtigt man, dass:

$$\varepsilon = 180^0 - (\delta + \alpha_2)$$

dass also hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\sin\varepsilon = \sin[180^0 - (\delta + \alpha_2)] = \sin(\delta + \alpha_2)$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\text{b)} \ldots c = \frac{2}{3}s_c \cdot \frac{\sin(\delta + \alpha_2)}{\sin\alpha_2}$$

Um hieraus die nicht gegebene Schwerlinie s_c zu eliminieren, beachte man, dass sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CDG die Relation:

$$\sin\delta = \frac{h_c}{s_c}$$

oder

$$c) \ldots s_c = \frac{h_c}{\sin \delta}$$

ergibt; substituiert man diesen Wert für s_c in Gleichung b), so erhält man zur Berechnung der Seite c die Relation:

$$d) \ldots c = \frac{2}{3} h_c \cdot \frac{\sin(\delta + \alpha_2)}{\sin\delta \cdot \sin\alpha_2}$$

Da ferner nach der Erkl. 34:

$$e) \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

ist, so erhält man in Rücksicht der Gleichung d) zur Berechnung des gesuchten Inhalts F:

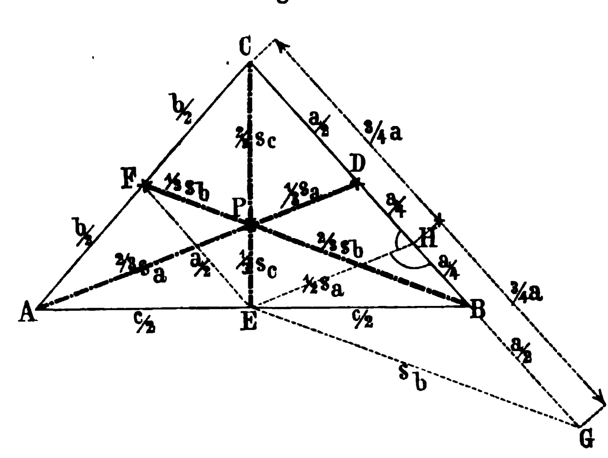
$$A) \ldots F = \frac{1}{3} h^2_c \cdot \frac{\sin(\delta + \alpha_2)}{\sin\delta \cdot \sin\alpha_2}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann, wenn man in derselben für h_c, δ und α_2 die gegebenen Zahlenwerte substituiert.

Aufgabe 429. Die drei Schwerlinien eines Dreiecks seien $s_a = 12{,}9711$, $s_b = 11{,}2361$ und $s_c = 12{,}1655$ m; wie gross sind die Seiten und Winkel und der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} s_a = 12{,}9711 \text{ m} \\ s_b = 11{,}2361 \text{ m} \\ s_c = 12{,}1655 \text{ m} \end{cases}$

Figur 154.



Andeutung. Ist, siehe Figur 154, ABC ein Dreieck, in welchem die drei Schwer-, d. s. die Verbindungslinien der Ecken des Dreiecks mit den Mitten der ihnen gegenüberstehenden Seiten, gleich den gegebenen sind, so kann man zur Bestimmung der Seiten a, b und c dieses Dreiecks wie folgt verfahren:

Will man die Seite a berechnen, so verlängere man diese Seite $a = CB$ um $BG = \frac{a}{2}$, verbinde E mit G und ziehe EH parallel AD; hierdurch erhält man die beiden Dreiecke EHC und EHG, deren sämtliche Seiten in die gegebenen Schwerlinien und in die gesuchte Seite a ausgedrückt werden können, es ist nämlich:

$\overline{EC} = s_c$

$\overline{EG} = \overline{FB} = s_b$ (s. Erkl. 307 bis 310)

$\overline{EH} = \frac{s_a}{2}$ (s. Erkl. 311)

$\overline{CH} = \overline{CD} + \overline{DH} = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4} a$ (s. Erkl. 312)

und

$\overline{GH} = \overline{GB} + \overline{BH} = \frac{a}{2} + \frac{a}{4} = \frac{3}{4} a$ (s. Erkl. 312)

Erkl. 307. Verbindet man in der Figur 154 E mit F, so ist das hierdurch entstandene Viereck $FEGB$ nach der Erkl. 308 ein Parallelogramm.

Erkl. 308. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Viereck zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Da in der Figur 154 nach der Erkl. 309:

$$FE \parallel BC \text{ bezw. } \parallel BG$$

und $FE = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}a$

und da ferner nach Konstruktion auch:

$$\overline{BG} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}a$$

ist, so muss nach vorstehendem Lehrsatz das Viereck $FEGB$ ein gr sein.

Erkl. 309. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man die Mitten zweier Seiten eines Dreiecks, so ist diese Verbindungslinie parallel und gleich der dritten Seite.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Da z. B. in der Figur 154 E und F die Mitten der Seiten AB und AC sind, so ist nach diesem Lehrsatz die Verbindungslinie

$$EF \parallel BC \text{ und } = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}a$$

Erkl. 310. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem gr sind je zwei der gegenüberliegenden Seiten einander gleich.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz muss in dem Viereck $FEGB$ der Fig. 154, welches nach der Erkl. 307 ein gr ist:

$$\overline{EG} = \overline{FB} = s_b$$

sein.

Erkl. 311. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man zu einer Seite eines Dreiecks eine Parallele, so schneidet dieselbe ein Dreieck ab, das dem ganzen Dreieck ähnlich ist.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Da in der Figur 154 $EH \parallel AD$ ist, so ist nach diesem Satz:

$$\triangle EBH \sim \triangle ABD$$

Aus der Aehnlichkeit dieser Dreiecke ergibt sich nach der Erkl. 7 die Proportion:

$$\text{a)} \ldots \overline{EH} : \overline{AD} = \overline{EB} : \overline{AB}$$

Da nun nach Konstruktion:

$$\overline{AB} = 2 \cdot \overline{EB}$$

ist, so ergibt sich hieraus:

$$\overline{EH} : \overline{AD} = \overline{EB} : 2 \cdot \overline{EB}$$

oder

$$\overline{EH} : \overline{AD} = 1 : 2$$

und hieraus erhält man:

$$\text{b)} \ldots \overline{EH} = \frac{1}{2}\overline{AD} \text{ oder } = \frac{1}{2}s_a$$

In Rücksicht dieser für die Seiten der Dreiecke EHC und EHG zu substituirender Werte erhält man nach den Formeln 173 bis 175 (siehe Auflösung der Aufgabe 119) z. B. für den Kosinus des Winkels EHC die Relation:

$$\cos\sphericalangle EHC = \frac{\overline{EH}^2 + \overline{CH}^2 - \overline{EC}^2}{2 \cdot \overline{EH} \cdot \overline{CH}}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \cos\sphericalangle EHC = \frac{\left(\frac{s_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - s^2_c}{2 \cdot \frac{s_a}{2} \cdot \frac{3}{4}a}$$

ferner hat man nach jenen Formeln für den Kosinus des Winkels EHG die Relation:

$$\cos\sphericalangle EHG = \frac{\overline{EH}^2 + \overline{HG}^2 - \overline{EG}^2}{2 \cdot \overline{EH} \cdot \overline{HG}}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \cos\sphericalangle EHG = \frac{\left(\frac{s_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - s^2_b}{2 \cdot \frac{s_a}{2} \cdot \frac{3}{4}a}$$

Da nun $\sphericalangle EHC$ und $\sphericalangle EHG$ Supplementwinkel sind und nach der Erkl. 94 der Kosinus eines Winkels gleich dem negativen Kosinus dessen Supplementwinkels ist, da also $\cos\sphericalangle EHC = -\cos\sphericalangle EHG$ ist, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus den Gleichungen a) und b) für die Seite a die Bestimmungsgleichung:

$$1) \ldots \frac{\left(\frac{s_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - s^2_c}{2\frac{s_a}{2} \cdot \frac{3}{4}a} = -\frac{\left(\frac{s_a}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{4}a\right)^2 - s^2_b}{2 \cdot \frac{s_a}{2} \cdot \frac{3}{4}a}$$

Reduziert man diese Gleichung und löst dieselbe in bezug auf a auf, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{2}{3}\sqrt{2(s^2_b + s^2_c) - s^2_a}$$

In ganz analoger Weise erhält man:

$$\text{B)} \ldots b = \frac{2}{3}\sqrt{2(s^2_a + s^2_c) - s^2_b}$$

und

$$\text{C)} \ldots c = \frac{2}{3}\sqrt{2(s^2_a + s^2_b) - s^2_c}$$

Hat man nach diesen Gleichungen A) bis C) die drei Seiten des Dreiecks berechnet, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, die Winkel und den Inhalt des Dreiecks berechnen. Für den Inhalt F erhält man:

$$\text{D)} \; F = \frac{1}{3}\sqrt{(s_a+s_b+s_c)(s_a+s_b-s_c)(s_a-s_b+s_c)(-s_a+s_b+s_c)}$$

oder, wenn man:

Erkl. 312. Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke ABD und EBH, siehe Figur 154 und Erkl. 311 ergibt sich:

$$\overline{BH}:\overline{BD}=\overline{BE}:\overline{BA}$$

da nun $\overline{BD}=\frac{a}{2}$

$$\overline{BA}=c$$

$$\overline{BE}=\frac{c}{2}$$

ist, so ist hiernach:

$$\overline{BH}:\frac{a}{2}=\frac{c}{2}:c$$

oder

$$\overline{BH}:\frac{a}{2}=\frac{1}{2}:1$$

mithin:

a) .... $\overline{BH}=\frac{a}{4}$

Da ferner:

$$\overline{DH}=\overline{BD}-\overline{BH}$$

oder $\overline{DH}=\frac{a}{2}-\frac{a}{4}$ (s. Gleichung a)

ist, so erhält man hieraus:

b) .... $\overline{DH}=\frac{a}{4}$ (s. Erkl. 313)

Erkl. 313. Die in der Erkl. 312 aufgestellte Gleichung b):

$\overline{DH}=\frac{a}{4}$ (s. Figur 154)

kann man auch direkt aus dem planimetrischen Lehrsatz ableiten:

„Zieht man durch die Mitte einer Seite eines Dreiecks eine Parallele zu einer der beiden andern Seiten, so wird die dritte Seite halbiert."

Dieser Satz ist eine Folgerung des in der Erkl. 309 erwähnten Satzes.

E_1) ... $\frac{s_a+s_b+s_c}{2}=s$

setzt:

E) ... $F=\frac{4}{3}\sqrt{(s-s_a)(s-s_b)s(s-s_c)}$

---

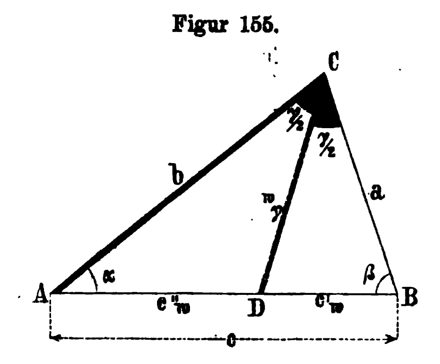
l) Aufgaben, in welchen eine winkelhalbierende Transversale, auch das Verhältnis zweier Dreiecksseiten vorkommen.

Aufgabe 430. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $57^0\,7'\,18''$, die denselben halbierende Transversale w_γ misst 10,248 m und die dem Winkel γ anliegende Seite b ist 14 m lang; welche Werte erhält man hiernach für die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks und wie gross ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases}\gamma=57^0\,7'\,18''\\ w_\gamma=10{,}248\text{ m}\\ b=14\text{ m}\end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 155, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so beachte man, dass in dem Teildreieck ADC die zwei Seiten w_γ und b, sowie der von beiden eingeschlossene Winkel $\frac{\gamma}{2}$ bekannt sind; wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man somit aus diesem Dreieck den Winkel α bestimmen; man erhält unter anderem nach der in jener Auflösung aufgestellten Formel 137 zur Berechnung des Winkels α die Relation:

Figur 155.



Erkl. 314a. In diesem Buch sind die Teile (Abschnitte oder Segmente), in welche eine Seite eines Dreiecks durch eine Transversale zerlegt wird, im allgemeinen mit den diese Seiten bezeichnenden Buchstaben bezeichnet, welchen, je nachdem diese Abschnitte einer Dreiecksseite anliegen, die mit einem früheren oder späteren Buchstaben des Alphabets bezeichnet ist, der Index ' oder " noch beigefügt ist (siehe die Erkl. 281 und 290). Werden solche Abschnitte durch eine winkelhalbierende Transversale gebildet, so sind jenen Bezeichnungen ausserdem noch der Buchstabe $_w$ rechts unten klein beigefügt, analog wie in der Erkl. 290 gesagt ist.
In der Figur 155 z. B. sind hiernach die durch die Transversale w_γ auf der Seite c gebildeten Abschnitte bezw. durch c'_w und c''_w bezeichnet.

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{w_\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{b - w_\gamma \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Ist α hiernach berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite b und die beiden Winkel α und γ und kann somit im weiteren, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die noch fehlenden Stücke des Dreiecks ABC berechnen.

Aufgabe 431. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ ist 34 m lang, die Seite a misst 93 m und der von den Seiten a und c eingeschlossene Winkel β beträgt 14° 15′ 2,3″; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} w_\gamma = 34 \text{ m} \\ a = 93 \text{ m} \\ \beta = 14^0\, 15'\, 2{,}3'' \end{cases}$$

Andeutung. Mittels der gegebenen Transversale w_γ, der gegebenen Seite a und dem gegebenen Winkel β kann man aus einem der Dreiecke, in welche die Transversale w_γ das Dreieck zerlegt, siehe Figur 155, den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ berechnen. Da man alsdann von dem ganzen Dreieck die Seite a und die beiden anliegenden Winkel $\gamma\left(=2\cdot\frac{\gamma}{2}\right)$ und β kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 432. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ misst 743,3416 m, die beiden andern Winkel α und β sind bezw. = 57° 15′ 12″ und = 46° 48′ 16″; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

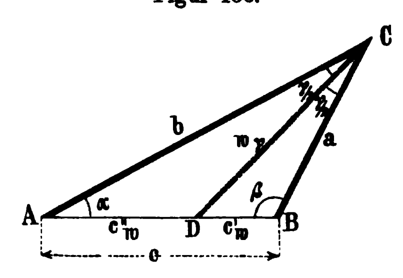
$$\text{Gegeben:} \begin{cases} w_\gamma = 743{,}3416 \text{ m} \\ \alpha = 57^0\, 15'\, 12'' \\ \beta = 46^0\, 48'\, 16'' \end{cases}$$

Andeutung. Man beachte, dass in jedem der Dreiecke, in welche das gedachte Dreieck durch die Transversale w_γ zerlegt wird, zwei Winkel $\left(\alpha \text{ und } \frac{\gamma}{2}, \text{ bezw. } \beta \text{ und } \frac{\gamma}{2}\right)$, indem $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$ ist, sowie eine Seite (w_γ)

bekannt sind, dass man somit aus jedem einzelnen dieser Dreiecke, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, eine der gesuchten Dreiecksseiten berechnen kann.

Aufgabe 433. Man soll aus den beiden Seiten $a = 13$ m und $b = 15$ m eines Dreiecks und aus der Länge $w_\gamma = 12{,}0934$ m der den Winkel γ halbierenden Transversale die Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Figur 156.



Erkl. 314. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Das Quadrat über der den Winkel eines Dreiecks halbierenden Transversale ist gleich dem Rechteck, gebildet aus den jenen Winkel einschliessenden Seiten des Dreiecks, vermindert um das Rechteck, gebildet aus den beiden auf der Gegenseite gebildeten Abschnitten."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ergibt sich aus der Fig. 156 die Relation:

$$1) \ldots w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$$

(siehe auch die Erkl. 319).

Erkl. 315. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Eine jede Mediane eines Dreiecks, d. i. die Halbierungslinie eines Winkels eines Dreiecks, teilt die Gegenseite in zwei Abschnitte, welche sich verhalten wie die jenem Winkel anliegenden Dreiecksseiten."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ergibt sich aus der Fig. 156 die Relation:

$$1) \ldots c'_w : c''_w = a : b$$

Diesen Satz kann man auch wie folgt trigonometrisch herleiten:

Aus den Dreiecken ADC und BDC der Figur 156 erhält man nach der Sinusregel die Relation:

$$a) \ldots c''_w : w_\gamma = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\alpha$$

und

$$b) \ldots c'_w : w_\gamma = \sin\frac{\gamma}{2} : \sin\beta$$

Gegeben: $\begin{cases} a = 13 \\ b = 15 \text{ m} \\ w_\gamma = 12{,}0934 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 314 aufgestellten planimetrischen Satz besteht zwischen den Seiten a und b und den Abschnitten c'_w und c''_w der dritten Seite c und der winkelhalbierenden Transversale w_γ die Relation:

$$a) \ldots w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$$

ferner besteht nach dem in der Erkl. 315 aufgestellten planimetrischen Satz zwischen den Seiten a und b und jenen Abschnitten der dritten Seite c die Relation:

$$c'_w : c''_w = a : b$$

aus welcher Relation man nach der Erkl. 316 für jene Abschnitte bezw.:

$$b) \ldots c'_w = \frac{a \cdot c}{a + b}$$

und

$$c) \ldots c''_w = \frac{b \cdot c}{a + b}$$

erhält. Substituiert man die Werte für c'_w und c''_w aus den Gleichungen b) und c) in die Gleichung a), so resultiert:

$$w^2_\gamma = ab - \frac{a \cdot c}{a + b} \cdot \frac{b \cdot c}{a + b}$$

und hieraus findet man die zu berechnende Seite c wie folgt:

$$w^2_\gamma (a + b)^2 = ab(a + b)^2 - ab \cdot c^2$$
$$ab \cdot c^2 = ab(a + b)^2 - w^2_\gamma (a + b)^2$$
$$c = \sqrt{\frac{(a + b)^2 (ab - w^2_\gamma)}{ab}}$$

mithin:

$$A) \ldots c = (a + b) \cdot \sqrt{\frac{ab - w^2_\gamma}{ab}}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann:

Zur Berechnung des Winkels γ ergibt sich nach der Formel 173, bezw. nach dem Projektionssatz aus dem Dreieck ADC, siehe Figur 156, die Relation:

$$d) \ldots \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 + w^2_\gamma - c''^2_w}{2b \cdot w_\gamma}$$

oder, wenn nach vorstehender Gleichung c):

$$f) \ldots c''_w = \frac{b \cdot c}{a + b}$$

und hierin für c den Wert aus Gleichung A) substituiert:

und hieraus erhält man, wenn man die Gleichung b) durch die Gleichung a) dividiert:

c) . . . $c'_w : c''_w = \sin\alpha : \sin\beta$

Da ferner auch nach der Sinusregel sich aus dem Dreieck ABC die Relation:

d) . . . $\sin\alpha : \sin\beta = a : b$

ergibt, so erhält man aus den Gleichungen c) und d) jene herzuleitende Relation:

$$c'_w : c''_w = a : b$$

Erkl. 316. Nach dem in voriger Erkl. 315 aufgestellten Satz hat man zwischen den Abschnitten c'_w und c''_w, in welche die Seite c eines Dreiecks durch die den Gegenwinkel γ halbierende Transversale zerlegt wird, und den jenen Winkel γ einschliessenden Seiten a und b die Relation:

$$\frac{c'_w}{c''_w} = \frac{a}{b}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{c'_w + c''_w}{a+b} = \frac{c'_w}{a} \text{ oder } = \frac{c''_w}{b}$$

oder, in Rücksicht, dass:

$$c'_w + c''_w = c$$

ist

$$\frac{c}{a+b} = \frac{c'_w}{a} \text{ oder } = \frac{c''_w}{b}$$

Für die Abschnitte c'_w und c''_w erhält man also hiernach die Beziehungen:

a) . . . $c'_w = \dfrac{a \cdot c}{a+b}$

und

b) . . . $c''_w = \dfrac{b \cdot c}{a+b}$

Erkl. 317. Ist, siehe die Figuren 156 u. 157, $\overline{CD}$ eine ganz beliebige Transversale W_γ, welche durch den Scheitel des Winkels γ geht, so erhält man nach dem Projektionssatz aus den Dreiecken ADC und BDC die Relationen:

a) . . . $W^2_\gamma = b^2 + c''^2_w - 2b \cdot c''_w \cdot \cos\alpha$

und

b) $W^2_\gamma = a_2{}^2 + c'^2_w - 2a \cdot c'_w \cdot \cos\beta$

bezw. für die Figur 157:

b$_1$) . . . $W^2_\gamma = a^2 + c'^2_w - 2a \cdot c'_w \cos(2R - \beta)$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach den Formeln 173 und 174, siehe Auflösung der Aufgabe 119 und vergleiche die Figuren 57, 156 und 157 in jenen Gleichungen a) und b):

c) . . . für $\cos\alpha = \dfrac{b^2 + c''^2_w - W^2_\gamma}{2bc''_w}$

und

d) . . . für $\cos\beta = \dfrac{a^2 + c'^2_w - W^2_\gamma}{2a^2 \cdot c'_w}$

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 + w^2_\gamma - \left(\dfrac{b\cdot(a+b)\sqrt{\dfrac{ab - w^2_\gamma}{ab}}}{a+b}\right)^2}{2bw_\gamma}.$$

oder

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{b^2 + w^2_\gamma - b^2 . \dfrac{ab - w^2_\gamma}{ab}}{2bw_\gamma}$$

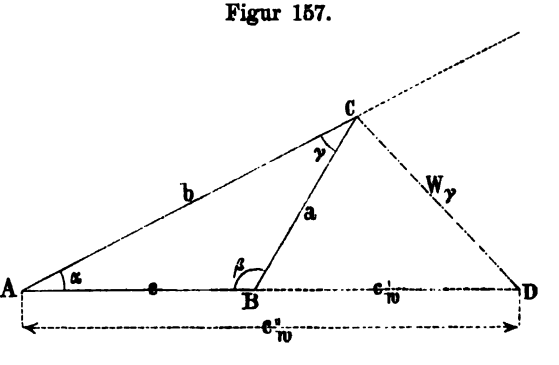
$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{ab^2 + aw^2_\gamma - ab^2 + bw^2_\gamma}{2abw_\gamma}$$

mithin:

B) . . . $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{(a+b)\,w_\gamma}{2ab}$ (s. Erkl. 320)

nach welcher Gleichung man den Winkel $\dfrac{\gamma}{2}$ bezw. den Winkel γ berechnen kann, u. s. f.

Figur 157.



bezw.

$$\text{d}_1) \;.\;.\; \text{für } \cos(2R - \beta) = \frac{a^2 + c'^2_w - W^2_\gamma}{2a^2 \cdot c'_w}$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\text{e}) \;.\; W^2_\gamma = b^2 + c''^2_w - 2bc''_w \cdot \frac{b^2 + c''^2_w - W^2_\gamma}{2bc''_w}$$

und

$$\text{f}) \;.\; W^2_\gamma = a^2 + c'^2_w - 2a \cdot c'_w \cdot \frac{a^2 + c'^2_w - W^2_\gamma}{2a^2 \cdot c'_w}$$

Löst man eine jede dieser Gleichungen in bezug auf W^2_γ auf, so erhält man jedesmal:

$$1) \;.\;.\;.\; W^2_\gamma = \frac{a^2 c''_w + b^2 c'_w - c \cdot c'_w \cdot c''_w}{c}$$

In analoger Weise erhält man für eine beliebige, durch die Winkel α, bezw. β gehende Transversale W_α oder W_β bezw.:

$$2) \;.\;.\;.\; W^2_\alpha = \frac{b^2 a''_w + c^2 a'_w - a \cdot a'_w \cdot a''_w}{a}$$

oder

$$3) \;.\;.\;.\; W^2_\beta = \frac{a^2 b''_w + c^2 b'_w - b \cdot b'_w \cdot b''_w}{b}$$

Dieser für jede beliebige Scheiteltransversale eines Dreiecks gültige Satz wurde von „Stewart“ aufgestellt und wird nach ihm benannt.

Erkl. 318. Aus dem in der Erkl. 317 aufgestellten Stewartschen Satz kann man den in der Erkl. 299 aufgestellten Satz über die Schwerlinien eines Dreiecks wie folgt ableiten:

Da der in voriger Erkl. 317 aufgestellte Satz Stewarts für jede beliebige Scheiteltransversale Gültigkeit hat, so muss er auch für die Schwerlinie eines Dreiecks Gültigkeit haben; setzt man in Rücksicht, dass die Schwerlinien eines Dreiecks durch die Mitten der Seiten des Dreiecks gehen in den in der Erkl. 317 aufgestellten Gleichungen 1) bis 3):

$$c'_w = c''_w = \frac{c}{2}$$

$$\text{bezw. } a'_w = a''_w = \frac{a}{2}$$

$$\text{und } b'_w = b''_w = \frac{b}{2}$$

und berücksichtigt man, dass für diesen Fall jene beliebigen Scheiteltransversalen W_γ, W_β und W_α nunmehr die Schwerlinien s_c, s_b und s_a des Dreiecks vorstellen, so gehen jene Gleichungen bezw. über in:

$$\text{a}) \;.\;.\;.\; s^2_c = \frac{a^2 \cdot \frac{c}{2} + b^2 \cdot \frac{c}{2} - c \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2}}{c}$$

$$\text{b}) \;.\;.\;.\; s^2_b = \frac{b^2 \cdot \frac{a}{2} + c^2 \cdot \frac{a}{2} - a \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2}}{a}$$

und

$$\text{c}) \;.\;.\;.\; s^2_c = \frac{a^2 \cdot \frac{b}{2} + c^2 \cdot \frac{b}{2} - b \cdot \frac{b}{2} \cdot \frac{b}{2}}{b}$$

und aus diesen Gleichungen erhält man bezw.:

$$1) \ldots a^2 + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2}$$

$$2) \ldots b^2 + c^2 = 2s^2_c + \frac{a^2}{2}$$

und

$$3) \ldots a^2 + c^2 = 2s^2_c + \frac{b^2}{2}$$

nämlich die in den Erkl. 299 und 300 ausgedrückten Beziehungen zwischen den Schwerlinien und den drei Seiten eines Dreiecks.

Erkl. 319. Aus dem in der Erkl. 317 aufgestellten Stewartschen Satz kann man den in der Erkl. 314 aufgestellten Satz über die winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks wie folgt ableiten:

Da der in der Erkl. 317 aufgestellte Satz Stewarts für jede beliebige Scheiteltransversale Gültigkeit hat, so muss er auch für die winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks Gültigkeit haben; setzt man daher z. B. in den beiden ersten Gliedern der in der Erkl. 317 aufgestellten Gleichung 1) nach den in der Erkl. 316 aufgestellten Gleichungen a) und b):

$$c'_w = \frac{a \cdot c}{a+b}$$

$$\text{und } c''_w = \frac{b \cdot c}{a+b}$$

und dementsprechend $W_\gamma = w_\gamma$, indem nunmehr jene beliebige Winkeltransversale W_γ in die specielle winkelhalbierende Transversale w_γ übergegangen ist, so erhält man:

$$w^2_\gamma = \frac{a^2 \cdot \left(\frac{bc}{a+b}\right) + b^2 \cdot \left(\frac{ac}{a+b}\right) - c \cdot c'_w \cdot c''_w}{c}$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$w^2_\gamma = \frac{\frac{a^2bc + b^2ac}{a+b} - c \cdot c'_w \cdot c''_w}{c}$$

$$w^2_\gamma = \frac{\frac{abc\,(a+b)}{a+b} - c \cdot c'_w \cdot c''_w}{c}$$

oder

1) .... $w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$, nämlich die in der Erkl. 314 aufgestellte Relation.

Aufgabe 434. Der Winkel γ eines Dreiecks beträgt $59^0\,29'\,23{,}1''$, die denselben halbierende Transversale w_γ misst 12,0934 m und die jenem Winkel gegenüberliegende Seite c misst 14 m; man soll hieraus die beiden andern Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \\ w_\gamma = 12{,}0934 \text{ m} \\ c = 14 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Da mit dem Winkel γ die Summe der beiden andern Winkel α und β des Dreiecks gegeben, indem:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$$

ist, so berechne man zunächst die Differenz dieser Winkel; dies kann man mittels Anwendung der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Mollweidschen Formel 89:

Erkl. 320. Bezeichnet man die drei Seiten eines Dreiecks mit a, b und c, den von beiden eingeschlossenen Winkel mit γ und die diesen Winkel halbierende Transversale mit w_γ, so bestehen nach den in Andeutung der Aufgabe 438 entwickelten Gleichungen A) und B) die Beziehungen:

$$\text{a)} \ldots c = (a+b)\sqrt{\frac{ab - w^2\gamma}{ab}}$$

und

$$\text{b)} \ldots \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)\,w\gamma}{2ab}$$

Diese Beziehungen kann man ebenso wie die in den Erkl. 314 und 315 aufgestellten Sätze oft mit Vorteil in Anwendung bringen.

Setzt man z. B. in Gleichung a) für ab den sich auf Gleichung b) für ab ergebenden Wert:

$$\text{c)} \ldots ab = \frac{(a+b)\,w_\gamma}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$$

so erhält man:

$$c = (a+b)\sqrt{\frac{\frac{(a+b)\,w_\gamma}{2\cos\gamma} - w^2_\gamma}{\frac{(a+b)\,w_\gamma}{2\cos\frac{\gamma}{2}}}}$$

oder

$$c = (a+b)\sqrt{\frac{(a+b)\,w_\gamma - 2w^2_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\frac{(a+b)\,w_\gamma}{2\cos\frac{\gamma}{2}}}}$$

$$c = (a+b)\sqrt{\frac{(a+b) - 2\,w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}}$$

$$c^2 = (a+b)^2\cdot\frac{a+b-2w_\gamma\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}{a+b}$$

mithin:

$$\text{d)} \ldots c^2 = (a+b)\left(a+b-2w_\gamma\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

nämlich eine Gleichung, in welcher die Summe der beiden Seiten a und b eines Dreiecks, die dritte Seite c, der Winkel γ und die diesen Winkel halbierende Transversale w_γ vorkommt.

Setzt man ferner in Gleichung b) für ab den aus Gleichung a) sich ergebenden Wert, oder was dasselbe ist, löst man die Gleichung d) in bezug auf $(a+b)$ auf, so erhält man der Reihe nach:

$$c^2 = (a+b)^2 - (a+b)\,2w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$(a+b)^2 - 2w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}(a+b) + \left(w_\gamma\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 = c^2 + \left(w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2$$

$$\left((a+b) - w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2}\right)^2 = c^2 + w^2_\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

$$(a+b) - w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2} = \pm\sqrt{c^2 + w^2_\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$\text{f)} \ldots a+b = w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{c^2 + w^2_\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{a)} \ldots \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

wie folgt:

Setzt man in jener Gleichung a) in Rücksicht, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, für:

$$\text{b)} \ldots \cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

und nach der in der Erkl. 320 aufgestellten Gleichung f) für:

$$\text{c)} \ldots a+b = w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{c^2 + w^2\gamma\cos^2\gamma}$$

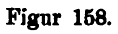
und löst die somit erhaltene Gleichung in bezug auf $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ auf, so erhält man:

$$\text{A)}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{c}\left(w_\gamma\cos\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{c^2 + w^2_\gamma\cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)$$

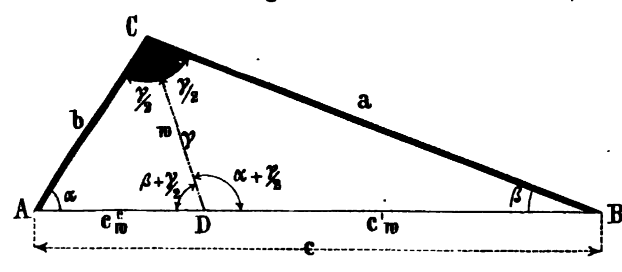
Nach welcher Gleichung man $\alpha-\beta$ berechnen kann.

Aus $\alpha+\beta$ und $\alpha-\beta$ berechne man die einzelnen Winkel α und β und verfahre dann im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 435. In einem Dreieck sind die Seiten a und b bezw. $= 82{,}315$ m und $56{,}594$ m, der von beiden eingeschlossene Winkel γ ist $= 98^0\,56'\,22''$. Man soll hieraus die drei winkelhalbierenden Transversalen des Dreiecks berechnen.



Figur 158.



Gegeben: $\begin{cases} a = 82{,}315 \text{ m} \\ b = 56{,}594 \text{ m} \\ \gamma = 98^0\,56'\,22'' \end{cases}$

Gesucht: w_γ, w_α und w_β.

Andeutung. Man berechne zuerst die beiden andern Winkel α und β des Dreiecks, indem man aus der nach dem Tangentensatz sich ergebenden Relation:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2}$$

bezw., da $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$

und $\operatorname{tg} \frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$

ist, aus der Relation:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg} \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}$$

die Differenz der Winkel α und β berechnet und dann hieraus und aus der bekannten Summe $\alpha + \beta$ $(= 180^0 - \gamma)$ die einzelnen Winkel α und β bestimmt.

Ist nun, siehe Figur 158, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht und ist z. B. CD die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ, so ergeben sich aus den Dreiecken ADC und BDC, in Rücksicht, dass nach dem in der Erkl. 112 angeführten planimetrischen Satz die Winkel ADC u. BDC bezw. $= \beta + \frac{\gamma}{2}$ und $= \alpha + \frac{\gamma}{2}$ sind, nach der Sinusregel die Relationen:

$$\text{b)} \ldots \frac{w_\gamma}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

und

$$\text{c)} \ldots \frac{w_\gamma}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

Aus der Relation b) erhält man:

$$\text{A)} \ldots w_\gamma = \frac{a \sin\beta}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

und aus der Relation c) erhält man:

$$\text{A}_1) \ldots w_\gamma = \frac{b \sin\alpha}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

Nach jeder dieser Gleichungen kann man die winkelhalbierende Transversale w_γ berechnen. In ganz analoger Weise erhält man, wenn man in dem Dreieck ABC die winkelhalbierenden Transversalen w_β und w_α zieht,

zur Berechnung derselben die jenen analoge Relationen:

B) . . . $w_\alpha = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}$

oder

B₁) . . . $w_\alpha = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$

und

C) . . . $w_\beta = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}$

und

C₁) . . . $w_\beta = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}$

Aufgabe 436. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. = 14, 12 und 10 m lang; man soll hieraus die den Winkel α halbierende Transversale berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 14\,\text{m} \\ b = 12\,\text{m} \\ c = 10\,\text{m} \end{cases}$

Gesucht: w_γ

Andeutung. Nach der Erkl. 314 besteht zwischen der winkelhalbierenden Transversale w_γ, den Seiten a und b und den Abschnitt c'_w und c''_w der dritten Seite c die Relation:

a) . . . $w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$

ferner bestehen nach der Erkl. 316 die Relationen:

b) . . . $c'_w = \frac{ac}{a+b}$

und

c) . . . $c''_w = \frac{bc}{a+b}$

In Rücksicht der Gleichungen b) und c) geht die Gleichung a) über in:

$$w^2_\gamma = ab - \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+b}$$

und hieraus erhält man:

$$w^2_\gamma = ab - ab \cdot \frac{c^2}{(a+b)^2}$$

$$w^2_\gamma = ab\left(1 - \frac{c^2}{(a+b)^2}\right)$$

$$w^2_\gamma = ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}$$

$$w_\gamma = \sqrt{ab \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{(a+b)^2}}$$

oder

A) . . . $w_\gamma = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab\,[(a+b)^2 - c^2]}$

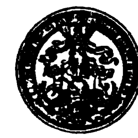
oder in Rücksicht der Erkl. 37:

A₁) . . . $w_\gamma = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab\,(a+b+c)\,(a+b-c)}$

Mittels einer der Gleichungen A) und A₁) kann man die gesuchte Transversale w_γ aus den drei Seiten leicht berechnen.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

284. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 279. — Seite 289—304. Mit 7 Figuren.




Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 279. — Seite 289—304. Mit 7 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen die durch winkelhalbierende Transversalen gebildeten Seitenabschnitte; in welchen winkelhalbierende Transversalen und Höhen, auch Seitenabschnitte u. Verhältnisse; in welchen Abschnitte zweier winkelhalbierender Transversalen vorkommen.

Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

—— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. ——
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe und Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale** lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der **Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 437. Von einem Dreieck kennt man den Winkel $\gamma = 65^0\ 30'\ 42''$, die denselben halbierende Transversale $w_\gamma = 50$ m und das Verhältnis 2 : 3 der jenen Winkel einschliessenden Seiten a und b; man soll die Winkel und die Seiten berechnen.

Figur 159.

Gegeben: $\left\{ \begin{aligned} \gamma &= 65^0\ 30'\ 42'' \\ w_\gamma &= 50 \text{ m} \\ a : b &= 2 : 3 \end{aligned} \right.$

Andeutung. Da nach dem in der Erkl. 273 angeführten zweiten Aehnlichkeitssatz zwei Dreiecke ähnlich sind, wenn das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks gleich dem Verhältnis zweier Seiten des andern Dreiecks ist und wenn die von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel einander gleich sind, und da ferner in ähnlichen Dreiecken die homologen Winkel bezw. einander gleich sind, so denke man sich, siehe Figur 159, ein dem zu berechnenden Dreieck ABC ähnliches Dreieck CA_1B_1 und suche zunächst aus dem durch die Aufgabe gegebenen Verhältnis 3 : 2 zweier Seiten desselben und aus dem von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ die beiden andern Winkel α und β, wie folgt zu berechnen:

Nach der Sinusregel erhält man aus dem gedachten ähnlichen Dreieck CA_1B_1 die Relation:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2}{3}\left(= \frac{a}{b}\right)$$

oder, wenn man den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung bringt:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2+3}{2-3}$$

und dann den linken Quotienten dieser Gleichung nach der in der Erkl. 268 angeführten Formel reduziert:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{5}{-1}$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = -\frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$

Da man nun $\alpha+\beta$ bezw. $\frac{\alpha+\beta}{2}$ mittels der Relation:

B) . . . $\alpha+\beta = 180^0 - \gamma$

bestimmen kann, indem der Winkel γ gegeben ist, so kann man mittels der Gleichung A) $\frac{\alpha-\beta}{2}$, bezw. $\alpha-\beta$ berechnen und dann die Winkel α und β leicht bestimmen. Zu beachten ist hierbei folgendes:

Nach Gleichung A) ist die Tangens von $\frac{\alpha-\beta}{2}$ negativ, das deutet an, dass nach der Erkl. 321 der Wert für $\frac{\alpha-\beta}{2}$ ein negativer ist, dass also β grösser als α ist, wie sich ja auch aus dem gegebenen Verhältnis und

Erkl. 321. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

(Siehe Formel 33 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

der Erkl. 181 ergeben muss, indem in jedem Dreieck der grösseren Seite der grössere Winkel gegenüberliegt.

Nach der Erkl. 321 kann man also für jene Gleichung die Gleichung:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right) = \frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

bezw. die Gleichung:

$$B_1) \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2} = \frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$$

substituieren.

Hat man hiernach die Winkel α und β bestimmt, so kann man mittels der Sinusregel aus dem Dreieck ADC, in welchem die Seite $DC = w_\gamma$ gegeben und die Winkel α, ACD $\left(=\frac{\gamma}{2}\right)$ und ADC $\left(=2R-\alpha-\frac{\gamma}{2}\right)$ bekannte Winkel sind, die Seite b berechnen; in gleicher Weise kann man die Seite a berechnen und dann aus dem Dreieck ABC mittels der Sinusregel die dritte Seite c bestimmen.

Aufgabe 438. Die beiden Seiten a und b eines Dreiecks verhalten sich wie $8:29$, die dritte Seite c misst 60,5 m und die Länge derjenigen Transversale w_γ, welche den der Seite c gegenüberliegenden Winkel γ halbiert, beträgt 20,9 m; man soll hieraus die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a:b = 8:29 \\ c = 60{,}5\text{ m} \\ w_\gamma = 20{,}9\text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 159, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man die Seiten a und b wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 315 besteht die Relation:

$$c'_w : c''_w = a:b$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$a:b = 8:29$$

ist:

$$a) \ldots c'_w : c''_w = 8:29$$

Ferner hat man die Beziehung:

$$b) \ldots c'_w : c''_w = c$$

Mittels dieser Gleichungen, nach welchen das Verhältnis der Abschnitte c'_w und c''_w sowie die Summe derselben bekannt ist, kann man die einzelnen Abschnitte c'_w und c''_w berechnen; dann kann man mittels des in der Erkl. 314 aufgestellten Satzes, nach welchem die Beziehung besteht:

$$c) \ldots w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$$

das Produkt ab der Seiten a und b in w_γ, c'_w und c''_w ausdrücken und dann kann man mittels dieses für ab gefundenen Werts und mittels der in der Aufgabe gegebenen Beziehung:

$$a:b = 8:29$$

die Seiten a und b berechnen; man erhält:

$$A) \ldots a = \sqrt{\frac{8}{29}w^2_\gamma + \frac{8^2c^2}{(8+29)^2}}$$

und

$$\text{B)} \ldots b = \sqrt{\frac{29}{8} w^2_\gamma + \frac{29^2 c^2}{(8+29)^2}}$$

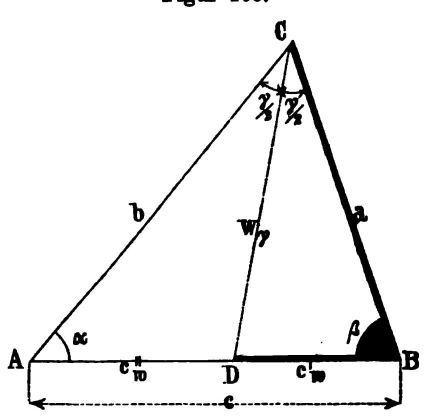
Hat man nach diesen Gleichungen die Seiten a und b berechnet, so kennt man von dem Dreieck die drei Seiten a, b und c und kann somit im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt ist, die gesuchten Winkel des Dreiecks berechnen.

---

m) Aufgaben, in welchen die durch winkelhalbierende Transversalen gebildeten Seitenabschnitte, auch die Differenz zweier Winkel gegeben sind.

Aufgabe 439. Der Winkel γ eines Dreiecks sei durch eine Transversale w_γ halbiert; diese Transversale teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte c'_w und c''_w, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt $c'_w = 6{,}5$ m misst. Die Seite a selbst misst 13 m und der derselben anliegende Winkel β beträgt $67^0\,22'\,48{,}5''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 160.



Gegeben: $\begin{cases} c'_w = 6{,}5\text{ m} \text{ (s. Erkl. 314a)} \\ a = 13\text{ m} \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 160, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man mittels der gegebenen Stücke c'_w, a und β aus dem Dreieck BCD den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde. Da man alsdann von dem Dreieck ABC die Seite a und die Winkel β und $\gamma \left(= 2 \cdot \frac{\gamma}{2}\right)$ kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 440. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ misst 28,3332 m, der eine der Abschnitte, in welche hierdurch die Gegenseite c zerlegt wird, und zwar der der Seite b anliegende Abschnitt c''_w misst 22,0588 m; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn die Differenz der der Seite c anliegenden Winkel α und β $64^0\,12'\,45{,}1''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} w_\gamma = 28{,}3332\text{ m} \\ c''_w = 22{,}0588\text{ m} \\ \alpha - \beta = \vartheta = 64^0\,12'\,45{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 160, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man will zunächst den Winkel α berechnen, so drücke man den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ in jenen zu berechnenden Winkel α und in die gegebene Differenz $\alpha - \beta = \vartheta$ aus, dies kann man wie folgt:

Da:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

ist, so ist:

$$\text{a)} \ldots \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

berücksichtigt man ferner, dass gemäss der Aufgabe:

$$\alpha - \beta = \vartheta$$

ist, dass also hiernach:

$$\text{b)} \ldots \beta = \alpha - \vartheta$$

gesetzt werden kann, so erhält man aus Gleichung a):

$$\frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha + \alpha - \vartheta}{2}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \left(\alpha - \frac{\vartheta}{2}\right)$$

Setzt man diesen Wert für $\frac{\gamma}{2}$ in der aus dem Dreieck ACD nach der Sinusregel sich ergebenden Relation:

$$\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\alpha} = \frac{c''_w}{w_\gamma}$$

so erhält man:

$$\frac{\sin\left[90^0 - \left(\alpha - \frac{\vartheta}{2}\right)\right]}{\sin\alpha} = \frac{c''_w}{w_\gamma}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 19:

$$\frac{\cos\left(\alpha - \frac{\vartheta}{2}\right)}{\sin\alpha} = \frac{c''_w}{w_\gamma}$$

Entwickelt man ferner $\cos\left(\alpha - \frac{\vartheta}{2}\right)$ nach der in der Erkl. 225 aufgestellten Formel, so erhält man:

$$\frac{\cos\alpha\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\alpha\sin\frac{\vartheta}{2}}{\sin\alpha} = \frac{c''_w}{w_\gamma}$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\cos\frac{\vartheta}{2} + \sin\frac{\vartheta}{2} = \frac{c''_w}{w_\gamma}$$

$$\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}} = \frac{c''_w}{w_\gamma\cdot\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 120 und 121:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \frac{c''_w}{w_\gamma\cdot\cos\frac{\vartheta}{2}}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \operatorname{ctg}\alpha = \frac{c''_w}{w_\gamma\cdot\cos\frac{\vartheta}{2}} - \operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}$$

Nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann. Ist α berechnet, so kann man aus $\alpha - \beta = \vartheta$ leicht β und aus:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

auch γ bestimmen. Berechnet man ferner aus β, $\frac{\gamma}{2}$ und w_γ den Abschnitt c'_w, so kennt man auch, da:

$$c = c'_w + c''_w$$

ist, die Seite c, und kann dann zur Berechnung der Seiten a und b aus c und den Winkeln die Sinusregel in Anwendung bringen.

Aufgabe 441. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite b dieses Dreiecks anliegende Abschnitt $c''_w = 26{,}77$ m misst, die Seite b misst 29 m und die Differenz der der Seite c anliegenden Winkel α und β beträgt $32^0\,36'\,10''$; man soll das Dreieck trigonometrisch berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} c''_w &= 26{,}77 \text{ m} \\ b &= 29 \text{ m} \\ \alpha - \beta &= 32^0\,36'\,10'' \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 440.

Aufgabe 442. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ misst 28,6107 m und die beiden Abschnitte c'_w und c''_w, in welche diese Transversale die Gegenseite zerlegt, messen bezw. 189,12 und 50,88 m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} w_\gamma &= 28{,}6107 \text{ m} \\ c'_w &= 189{,}12 \text{ m} \\ c''_w &= 50{,}88 \text{ m} \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Für die gesuchte Seite c des Dreiecks hat man zunächst:

A) . . . $c = c'_w + c''_w$

zur Berechnung der Seiten a und b hat man nach der Erkl. 314 die Relation:

a) . . . $w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$

und nach der Erkl. 315 die Relation:

b) . . . $a : b = c'_w : c''_w$

Aus den Gleichungen a) und b) kann man die Seiten a und b berechnen; man wird erhalten:

B) . . . $a = \sqrt{\frac{c'_w}{c''_w}(w^2_\gamma + c'_w \cdot c''_w)}$

und

C) . . . $b = \sqrt{\frac{c''_w}{c'_w}(w^2_\gamma + c'_w \cdot c''_w)}$

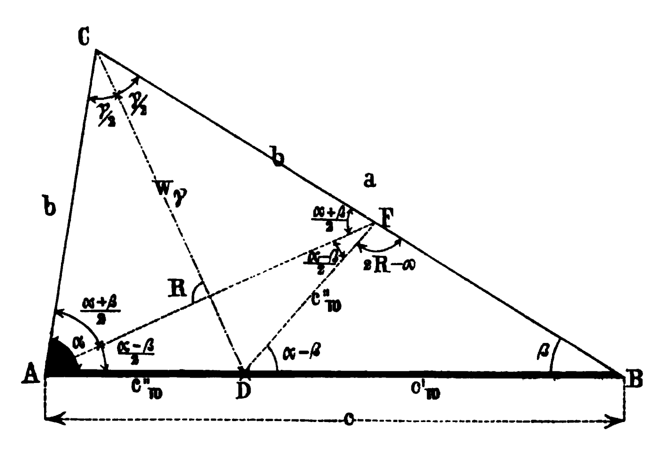
Hat man nach diesen Gleichungen die Seiten des Dreiecks berechnet, so kann man im weiteren die Winkel desselben berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 443. Die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ teilt die Gegenseite c in die beiden Abschnitte c'_w und c''_w, welche bezw. = 448 m und 140 m lang sind; der dem Abschnitt c''_w anliegende Winkel α misst $70^0\,40'\,30''$; man soll hieraus die beiden andern Winkel und die beiden andern Seiten des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} c'_w &= 448 \text{ m} \\ c''_w &= 140 \text{ m} \\ \alpha &= 70^0\,40'\,30'' \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 161, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man trägt die Seite b auf der Seite a von C nach CF ab, und verbindet A mit F, so erhält man das gleichschenklige Dreieck AFC; dessen Basiswinkel, wie in der Figur angedeutet, je $= \frac{\alpha+\beta}{2}$ sind, (s. Erkl. 322). Verbindet man ferner F mit D, so erhält man nach der Erkl. 323 das gleichschenklige Dreieck

Figur 161.



Erkl. 322. Da, siehe Figur 161, die Dreiecke ABC und AFC den Winkel γ gemeinschaftlich haben, so muss die Summe der beiden andern Winkel α und β des Dreiecks ABC gleich der Summe der beiden andern Winkel CAF und AFC des Dreiecks CAF sein, und da ferner dieses Dreieck nach Konstruktion (siehe nebenstehende Andeutung) ein gleichschenkliges ist, indem $CF = CA$ gemacht wurde, und in einem gleichschenkligen Dreieck die Basiswinkel einander gleich sind, so muss jeder der Winkel CAF und $AFC = \frac{\alpha+\beta}{2}$ sein.

Erkl. 323. Da die Transversale w_γ in der Figur 161 den Winkel γ halbiert und dieser Winkel der Scheitelwinkel des gleichschenkligen Dreiecks AFC ist, so muss die Transversale w_γ senkrecht auf der Basis AF des gleichschenkligen Dreiecks AFC stehen und diese Basis halbieren. Da ferner D ein Punkt in der zu AF senkrechten Transversale w_γ ist, so muss nach der Erkl. 324 das Dreieck AFD ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck sein.

Erkl. 324. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Der in der Mitte einer Strecke errichtete Perpendikel ist der geometrische Ort (siehe Erkl. 201) für die Spitzen aller gleichschenkligen Dreiecke über jener Strecke.“ (Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 325. In der Figur 161 ist:

$$\sphericalangle DAF = \sphericalangle DAC - \sphericalangle FAC$$

oder

$$\sphericalangle DAF = \alpha - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$= \alpha - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}$$

AFD, dessen Schenkel AD und FD je $= c''_w$ und dessen Basiswinkel FAD und DFA je $= \frac{\alpha-\beta}{2}$ sind (s. Erkl. 325); ferner erhält man das Dreieck DBF, dessen Winkel und Seiten die in der Figur verzeichneten Werte haben (s. Erkl. 326 und 327). Da nun gemäss der Aufgabe die Strecken c'_w und c''_w und der Winkel α gegeben sind, so kennt man in dem Dreieck DBF die zwei Seiten c'_w und c''_w und den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite c'_w gegenüberliegenden Winkel $(2R - \alpha)$ und kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt ist, den Winkel β berechnen. Ist β berechnet, so kennt man in dem ganzen Dreieck ABC die Seite:

$$c = c'_w + c''_w$$

und die beiden der Seite c anliegenden Winkel α und β und kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt ist, die Seiten a und b berechnen.

mithin ist:

a) . . $\sphericalangle DAF = \frac{\alpha - \beta}{2}$

und da $\sphericalangle DAF = \sphericalangle DFA$ ist, so ist auch:

b) . . $\sphericalangle DFA = \frac{\alpha - \beta}{2}$

Erkl. 826. In der Figur 161 ist:

$$\begin{aligned}\sphericalangle DFB &= 2R - \sphericalangle AFC - \sphericalangle DFA \\ &= 2R - \frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{\alpha - \beta}{2} \\ &= 2R - \frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \\ &= 2R - \alpha\end{aligned}$$

Erkl. 827. In dem gleichschenkligen Dreieck ADF der Figur 161 ist:

$$\sphericalangle ADF = 2R - 2 \cdot \frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder

a) . . $\sphericalangle ADF = 2R - (\alpha - \beta)$

Da nun $\sphericalangle BDF = 2R - ADF$ ist, so ist nach Gleichung a):

$$\sphericalangle BDF = 2R - [2R - (\alpha - \beta)]$$

oder

b) . . $\sphericalangle BDF = \alpha - \beta$

Aufgabe 444. Der Winkel γ eines Dreiecks sei durch eine Gerade halbiert und diese Gerade teilt die gegenüberliegende Seite c des Dreiecks in die beiden Abschnitte $c'_w = 444{,}8$ m und $c''_w = 138{,}6$ m: wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn der jenem Abschnitt c'_w anliegende Winkel β des Dreiecks $68^0\,40'\,32{,}5''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} c'_w = 444{,}8 \text{ m} \\ c''_w = 138{,}6 \text{ m} \\ \beta = 68^0\,40'\,32{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 443.

Aufgabe 445. Die zwei Abschnitte c'_w und c''_w, in welche die Seite c eines Dreiecks durch die den Winkel γ desselben halbierende Transversale zerlegt wird, messen bezw. $= 1000$ m und $= 500$ m, die Differenz der der Seite c anliegenden Winkel α und β beträgt 20^0; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c'_w = 1000 \text{ m} \\ c''_w = 500 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 20^0 \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 443. Man berechne aus dem Dreieck DBF, siehe Figur 161, zunächst den Winkel β.

Aufgabe 446. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite b des Dreiecks anliegende Abschnitt $c''_w = 6{,}5$ m misst, die der Seite c anliegenden Winkel α und β sind bezw. $53^0\,7'\,48{,}4''$ und $67^0\,22'\,48{,}5''$; man soll hieraus die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c''_w = 6{,}5 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 443. In dem Dreieck DBF, siehe Figur 161, kennt man gemäss der Aufgabe die Seite c''_w den Winkel $2R - \alpha$ und den Winkel β.

Aufgabe 447. Der Winkel γ eines Dreiecks beträgt $120^0\,10'\,30''$, die diesen Winkel γ halbierende Transversale teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte c'_w und c''_w, welche bezw. 126,35 m und 568,32 m messen; man soll die übrigen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \gamma = 120^0\,10'\,30'' \\ c'_w = 126{,}35 \text{ m} \\ c''_w = 568{,}32 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus dem Dreieck DBF der Figur 161 erhält man nach dem Tangentensatz:

$$\frac{c''_w + c'_w}{c''_w - c'_w} = \frac{\text{tg}\,[\beta + (2R - \alpha)]}{\text{tg}\,[\beta - (2R - \alpha)]}$$

Da nun:

$$\text{tg}\,[\beta + (2R - \alpha)] = \text{tg}\,[2R - (\alpha - \beta)]$$

also hiernach und nach der Erkl. 289:

$$\text{tg}\,[\beta + (2R - \alpha)] = \text{tg}\,[2R - (\alpha - \beta)] = -\text{tg}\,(\alpha - \beta)$$

und da ferner:

$$\text{tg}\,[\beta - (2R - \alpha)] = \text{tg}\,(-[2R - (\alpha + \beta)])$$

oder nach der Erkl. 321:

$$= -\text{tg}\,[2R - (\alpha + \beta)]$$

also hiernach und nach der Erkl. 289:

$$\text{tg}\,[\beta - (2R - \alpha)] = -[-\text{tg}\,(\alpha + \beta)]$$

oder

$$= \text{tg}\,(\alpha + \beta)$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\frac{c''_w + c'_w}{c''_w - c'_w} = \frac{-\text{tg}(\alpha - \beta)}{\text{tg}\,(\alpha + \beta)}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 321:

$$-\text{tg}\,(\alpha - \beta) = \text{tg}\,[-(\alpha - \beta)] = \text{tg}\,(\beta - \alpha)$$

und in Rücksicht, dass $(\alpha + \beta)$ und γ Komplementwinkel sind, nach der Erkl. 19 $\text{tg}\,(\alpha + \beta) = \text{ctg}\,\gamma$ setzt:

$$\frac{c''_w + c'_w}{c''_w - c'_w} = \frac{\text{tg}\,(\beta - \alpha)}{\text{ctg}\,\gamma}$$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\text{A)} \ldots \text{tg}\,(\beta - \alpha) = \frac{c''_w + c'_w}{c''_w - c'_w} \cdot \text{ctg}\,\gamma$$

nach welcher Gleichung man $\beta - \alpha$ berechnen kann. Hat man $\beta - \alpha$ berechnet, so kann man aus diesem berechneten Werte und in Rücksicht, dass:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$$

ist, leicht die einzelnen Winkel α und β berechnen. Da ferner die Seite:

$$c = c'_w + c''_w$$

ist, also bekannt ist, so kann man im weiteren aus der Seite c und den Winkeln α und β, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seiten a und b des Dreiecks berechnen.

Aufgabe 448. Von einem Dreieck kennt man die zwei Winkel $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$ und $\beta = 67^0\,22'\,48{,}5''$, sowie den Abschnitt $c'_w = 6{,}5$ m der Seite c, welcher durch die den Gegenwinkel γ halbierende Transversale gebildet wird und dem Winkel β anliegt.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \\ c'_w = 6{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Denkt man sich ein Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und trägt alsdann die kleinere Seite a auf der grösseren Seite b ab, so kann man

sich (analog wie in der Figur 161 das Dreieck BDF) ein Dreieck bilden, in welchem die Winkel α, $\beta - \alpha$ und die Seite c'_w vorkommen, und aus welchem man hiernach, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite jenes Dreiecks berechnen kann, welche gleich dem andern Abschnitt c''_w der Seite c ist; da hiernach leicht c ($= c'_w + c''_w$) bestimmt werden kann, so kennt man von dem zu berechnenden Dreieck die Seite c, die Winkel α und β und kann im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 449. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte c'_w und c''_w, welche bezw. $= 6{,}5$ und $7{,}5$ m lang sind. Zwischen den Winkeln α und β, welche der Seite c anliegen, besteht die Beziehung, dass $\alpha = 3\beta$ ist; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} c'_w = 6{,}5 \text{ m} \\ c''_w = 7{,}5 \text{ m} \\ \alpha = 3\beta \end{array} \right.$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 161, das Dreieck ABC, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und denkt man sich das Hülfsdreieck BDF gebildet, wie in der Andeutung zur Aufgabe 443 gesagt ist, und beachtet man, dass in demselben der der Seite c''_w gegenüberliegende Winkel $= \beta$, der von den beiden Seiten c'_w und c''_w eingeschlossene Winkel $= 3\beta - \beta = 2\beta$ und dass der dritte Winkel $= 2R - 2\beta - \beta = 2R - 3\beta$ ist, so erhält man mittels Anwendung der Sinusregel die Relation:

$$\frac{c'_w}{c''_w} = \frac{\sin(2R - 3\beta)}{\sin\beta}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\text{A)} \ldots \quad \frac{c'_w}{c''_w} = \frac{\sin 3\beta}{\sin\beta}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur der unbekannte Winkel β vorkommt, formt man dieselbe so um, dass man nur eine Funktion des unbekannten Winkels β hat, so kann man den Winkel β berechnen u. s. f. In bezug auf jene Umformung bringe man zunächst die in der Erkl. 266 aufgestellte Formel in Anwendung, wonach man erhält:

$$\frac{c'_w}{c''_w} = \frac{3\sin\beta - 4\sin^3\beta}{\sin\beta}$$

oder

$$\text{A}_1) \ldots \quad \frac{c'_w}{c''_w} = 3 - 4\sin^2\beta$$

welche Gleichung nunmehr noch in bezug auf $\sin\beta$ aufzulösen ist. Negative Werte, welche sich für $\sin\beta$ ergeben, haben in bezug auf die Aufgabe keinen Sinn.

---

n) Aufgaben, in welchen winkelhalbierende Transversalen und Höhen, auch Seitenabschnitte und Verhältnisse vorkommen.

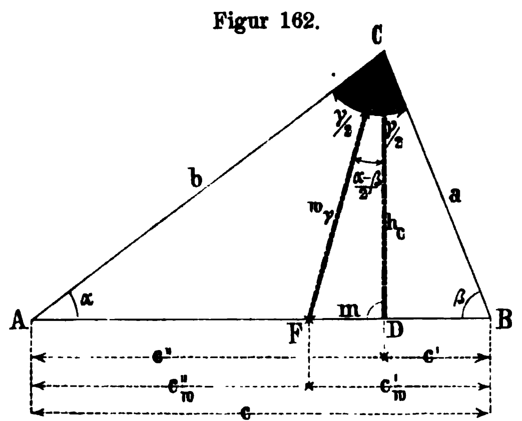
Aufgabe 450. Die zur Seite a eines Dreiecks gehörige Höhe h_a misst 12,9231 m und der Winkel γ dieses Dreiecks ist $= 59^0\,29'\,23{,}1''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn die jenen Winkel γ halbierende Transversale $w_\gamma = 12{,}0934$ m misst?

Gegeben: $\begin{cases} h_a = 12{,}9231 \text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \\ w_\gamma = 12{,}0934 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die gegebene Höhe h_a ist die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen einer spitze Winkel gleich dem gegebenen Winkel γ (wenn derselbe ein **stumpfer** Winkel wäre, gleich dem Supplementwinkel desselben) ist und dessen Hypotenuse die Seite b des zu berechnenden Dreiecks ist. Aus diesem Dreieck kann man auf einfache Weise die Seite b berechnen. Ist die Seite b berechnet, so kennt man von dem zu berechnenden Dreieck b, w_γ und γ und kann infolge dessen weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 430 gesagt wurde.

Aufgabe 451. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $59^0\,29'\,23{,}1''$, die diesen Winkel halbierende Transversale w_γ misst 12,0934 m und die Höhe h_c, welche zu der dem Winkel γ gegenüberliegenden Seite c gehört, misst 12 m; man soll hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 162.



Gegeben: $\begin{cases} h_c = 12 \text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \\ w_\gamma = 12{,}0934 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches, siehe Figur 162, von der Höhe h_c und der winkelhalbierenden Transversale w_γ gebildet wird, berechne man zunächst den Winkel, welchen jene beiden Linien miteinander bilden, und welcher nach der Erkl. 328 $= \frac{\beta - \alpha}{2}$, nämlich gleich der **halben** Differenz der Dreieckswinkel α und β ist. Hat man auf diese Weise $\beta - \alpha$ berechnet, so kann man in Rücksicht, dass die Summe $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$, also gemäss der Aufgabe bekannt ist, die einzelnen Winkel α und β berechnen. Da man hiernach von dem zu berechnenden Dreieck die Winkel, die Höhe h_c und auch die Transversale w_γ kennt, so kann man im weiteren verfahren, entweder wie in der Andeutung zur Aufgabe 343 oder wie in der Andeutung zur Aufgabe 432 gesagt ist.

Erkl. 328. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst: „Der Winkel, welchen die einen Winkel eines Dreiecks halbierende Transversale mit der von dem Scheitel dieses Winkels gefällten Höhe bildet, ist gleich der halben Differenz der der Gegenseite anliegenden Winkel."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ist, siehe Figur 162:

$$\sphericalangle DCF = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Dies kann man wie folgt beweisen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 162 ergibt sich:

$$\sphericalangle ACD = 90^0 - \alpha$$

Da nun:

$$\sphericalangle ACD = \sphericalangle ACF + \sphericalangle FCD = \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle FCD$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$\text{a)} \dots \frac{\gamma}{2} + \sphericalangle FCD = 90^0 - \alpha$$

ist. Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC:

$$\sphericalangle DCB = 90^0 - \beta$$

da nun:

$$\sphericalangle DCB = \sphericalangle FCB - \sphericalangle FCD = \frac{\gamma}{2} - \sphericalangle FCD$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$\text{b)} \dots \frac{\gamma}{2} - \sphericalangle FCD = 90^0 - \beta$$

ist. Subtrahiert man die Gleichung b) von der Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{\gamma}{2} + \sphericalangle FCD - \left(\frac{\gamma}{2} - \sphericalangle FCD\right) = 90^0 - \alpha - (90^0 - \beta)$$

oder

$$2 \cdot \sphericalangle FCD = -\alpha + \beta$$

mithin

$$1) \dots \sphericalangle FCD = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Fällt der Fusspunkt D der Höhe h_c diesseits des Schnittpunktes F der Transversalen w_γ und der Seite c, so erhält man in analoger Weise:

$$2) \dots \sphericalangle FCD = \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Aufgabe 452. Die zur Seite c gehörige Höhe h_c eines Dreiecks ist $= 24$ m, der dieser Seite c gegenüberliegende Winkel γ wird durch eine Transversale w_γ halbiert, welche 28,3332 m misst, und der der Seite c anliegende Winkel α ist $= 73^0\,44'\,23{,}3''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c = 24 \text{ m} \\ w_\gamma = 28{,}3332 \text{ m} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 451.

Aufgabe 453. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 290$ m, die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 200$ m und die den Winkel γ halbierende Transversale $w_\gamma = 225$ m; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 290 \text{ m} \\ h_c = 200 \text{ m} \\ w_\gamma = 225 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 451.

Aufgabe 454. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist $= 20$ m lang, der durch diese Höhe auf der Seite c gebildete Abschnitt c', welcher der Seite a anliegt, misst 99 m und die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ ist 20,8155 m lang, man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c = 20 \text{ m} \\ c' = 99 \text{ m} \\ w_\gamma = 20{,}8155 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 162, aus h_c und w_γ die Differenz der Winkel α und β wie in der Andeutung zur Aufgabe 451 gesagt wurde, dann berechne man aus c' und h_c den Winkel β und die Seite a; da man alsdann von dem Dreieck ABC die Seite b, den Winkel α und die Differenz $\alpha - \beta$ kennt, so kann man leicht, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, hieraus die übrigen Stücke berechnen.

Aufgabe 455. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale teilt die Gegenseite in die Abschnitte $c'_w = 29{,}6$ m und $c''_w = 10{,}4$ m; die zu einer der beiden andern Seiten, z. B. zur Seite a gehörige Höhe h_a misst 12,973 m; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c'_w = 29{,}6 \text{ m} \\ c''_w = 10{,}4 \text{ m} \\ h_a = 12{,}973 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man beachte, dass die Höhe h_a die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist; dessen Hypotenuse die Seite c und dessen einer spitze Winkel der Winkel β ist; in Rücksicht, dass h_a gegeben und dass c aus:

$$c = c'_w + c''_w$$

leicht bestimmt werden kann, kann man aus jenem Dreieck den Winkel β berechnen. Da man nunmehr von dem zu berechnenden Dreieck den Winkel β und die Abschnitte c'_w und c''_w kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 443 gesagt ist, indem man sich, siehe Figur 161, das Hülfsdreieck BDF gebildet denkt und aus demselben zunächst α berechnet u. s. f.

Aufgabe 456. Die Seite a eines Dreiecks misst 13 m, die zur Seite c gehörige Höhe h_c teilt die Seite c in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt $c' = 7{,}6154$ m misst, ferner teilt die den Winkel γ halbierende Transversale die Gegenseite c in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt $c'_w = 7{,}5$ m misst; man soll hieraus die beiden andern Seiten und die Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ c' = 7{,}6154 \text{ m} \\ c'_w = 7{,}5 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 162, aus a und c' die Höhe h_c und den Winkel β, dann berechne man aus h_c und m $(= c'_w - c')$ die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$, wonach man dann α leicht bestimmen kann. Da man nunmehr von dem zu berechnenden Dreieck die Seite a und die beiden Winkel α und β kennt, so kann man im weiteren, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt ist, die übrigen Stücke berechnen.

Aufgabe 457. Das Verhältnis der beiden Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 3:1$, die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ, welcher von jenen Seiten eingeschlossen wird, ist 20 m lang und die zur dritten Seite gehörige Höhe h_c misst 17 m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a:b = 3:1 \\ w_\gamma = 20 \text{ m} \\ h_c = 17 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zunächst die Differenz der Winkel α und β aus dem rechtwinkligen Dreieck CDF der Figur 162, mittels der aus diesem Dreieck sich ergebenden Relation:

$$\text{A)} \; \ldots \; \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h_c}{w_\gamma}$$

Dann berechne man, indem man sich ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck denkt, dessen Seiten a und b in dem gegebenen Verhältnis stehen, die Summe der Winkel α und β mittels der nach dem Tangentensatz aus diesem gedachten Dreieck sich ergebenden Relation:

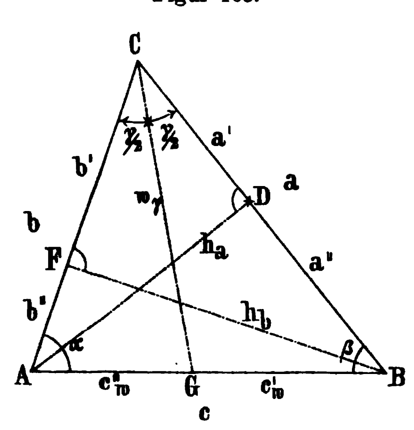
$$\text{B)} \; \ldots \; \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}} = \frac{a + b}{a - b}$$

indem man in derselben für a und b die gegebenen Verhältniszahlen 3 und 1 und für $\frac{\alpha - \beta}{2}$ den vorhin berechneten Wert substituiert.

Ist hiernach α und β berechnet, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 432 oder wie in der Andeutung zur Aufgabe 343 gesagt ist.

Aufgabe 458. In einem Dreieck verhält sich die zur Seite a gehörige Höhe h_a zu dem der Seite a anliegenden Abschnitt b', welchen die zur Seite b gehörige Höhe h_b auf der Seite b bildet, wie 3 : 2; ferner verhält sich jene Seite a zu dem der Seite b anliegenden Abschnitt a' derselben, welcher durch die zugehörige Höhe h_a gebildet wird, wie 7 : 2, und die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ misst 100 m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 163.



Gegeben: $h_a : b'$
$a : a'$
und w_γ

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_a : b' = 3 : 2 \\ a : a' = 7 : 2 \\ w_\gamma = 100\,\text{m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 163, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kann man zunächst den Winkel γ wie folgt berechnen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACD erhält man:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\gamma = \frac{h_a}{a'}$$

ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck BCF:

$$\text{b)} \ldots \cos\gamma = \frac{b'}{a}$$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b), so wird:

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma} = \frac{h_a}{a'} \cdot \frac{a}{b'}$$

oder

$$\frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma} = \frac{h_a}{b_1} \cdot \frac{a}{a_1}$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\frac{h_a}{b_1} = \frac{3}{2}$$

und

$$\frac{a}{a_1} = \frac{7}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots . \frac{\operatorname{tg}\gamma}{\cos\gamma} = \frac{3}{2} \cdot \frac{7}{2}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, die in bezug auf eine Funktion des Winkels γ leicht aufgelöst werden kann, und mittels welcher man somit den Winkel γ berechnen kann.

Nunmehr bestimme man zur Berechnung der Winkel α und β das Verhältnis der Seiten a und b wie folgt:

Aus dem Dreieck ADC erhält man:

$$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

oder, wenn man nach der gegebenen Proportion:

$$h_a : b' = 3 : 2$$

für:

$$h_a = \frac{3b'}{2}$$

setzt:

$$\sin\gamma = \frac{3b'}{2b}$$

und hieraus erhält man:

$$c) \ldots b = \frac{3b'}{2\sin\gamma}$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck BFC:

$$\cos\gamma = \frac{b'}{a}$$

oder

$$d) \ldots a = \frac{b'}{\cos\gamma}$$

Aus den Gleichungen c) und d) ergibt sich für das Verhältnis der Seiten a und b:

$$\frac{a}{b} = \frac{b'}{\cos\gamma} : \frac{3b'}{2\sin\gamma}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{2\sin\gamma}{3\cos\gamma}$$

oder

$$f) \ldots \frac{a}{b} = \frac{2}{3} \cdot \operatorname{tg}\gamma$$

Berücksichtigt man ferner, dass nach der Sinusregel auch:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus der Gleichung f):

$$g) \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{3}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 aufgestellten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man weiter:

$$\frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta} = \frac{2\operatorname{tg}\gamma + 3}{2\operatorname{tg}\gamma - 3}$$

oder nach der Erkl. 268:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{2\operatorname{tg}\gamma + 3}{2\operatorname{tg}\gamma - 3}$$

und wenn man, in Rücksicht, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

setzt und jene Gleichung in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$ auflöst:

$$A) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2\operatorname{tg}\gamma - 3}{2\operatorname{tg}\gamma + 3} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man die Differenz der Winkel α und β berechnen kann; da nun deren Summe $= 180^0 - \gamma$ ist, so kann man leicht hiernach die einzelnen Winkel α

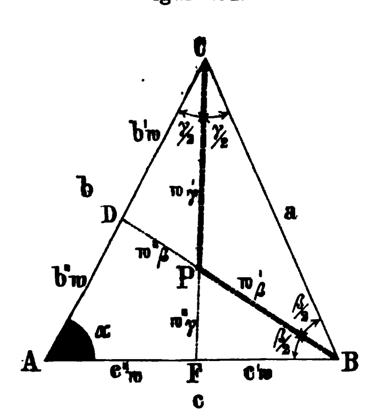
und β berechnen. Sind die Winkel α, β und γ des Dreiecks berechnet, so kann man im weiteren, da die Transversale w_γ gegeben ist, verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 432 gesagt wurde.

---

o) Aufgaben, in welchen Abschnitte zweier winkelhalbierender Transversalen vorkommen.

Aufgabe 459. Von einem Dreieck kennt man den Winkel $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$ und die Abschnitte $w'_\beta = 8{,}2173$ m und $w'_\gamma = 9{,}0934$ m der Halbierungslinien w_β und w_γ der Winkel β und γ, welche bezw. zwischen den Scheitel jener Winkel und dem Durchschnittspunkt jener Transversalen liegen; wie gross sind die Winkel und die Seiten dieses Dreiecks?

Figur 164.



Erkl. 329. In diesem Buch sind die Abschnitte, in welche sich die winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks gegenseitig zerlegen (s. Erkl. 330) in ganz analoger Weise bezeichnet wie die Höhenabschnitte, siehe die Erkl. 292.

So ist z. B. in der Figur 164 der nach dem Scheitel C hin liegende Abschnitt der Transversale w_γ mit w'_γ und der nach der Seite c hin liegende Abschnitt dieser Transversale mit w''_γ bezeichnet.

Erkl. 330. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die drei die Winkel eines Dreiecks halbierenden Transversalen schneiden sich in einem Punkt und dieser Punkt hat die Eigenschaft, dass er gleichweit von den drei Seiten des Dreiecks entfernt ist (er

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ w'_\beta = 8{,}2173 \text{ m} \\ w'_\gamma = 9{,}0934 \text{ m (s. Erkl. 329)} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 164, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so kennt man in dem Dreieck BCP die Seite $BP = w'_\beta$, die Seite $CP = w'_\gamma$ und die Summe $\frac{\beta+\gamma}{2}$ der Winkel $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$, indem $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$, also $\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$ ist.

Bringt man in Rücksicht dessen den Tangentensatz in Anwendung, so erhält man aus dem Dreieck BCP:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{4}}{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{4}} = \frac{w'_\gamma - w'_\beta}{w'_\gamma + w'_\beta}$$

oder, da wie oben erwähnt:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

also $\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{4} = \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\alpha}{4}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$

gesetzt werden kann (siehe Erkl. 19):

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{4} = \frac{w'_\gamma - w'_\beta}{w'_\gamma + w'_\beta} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$$

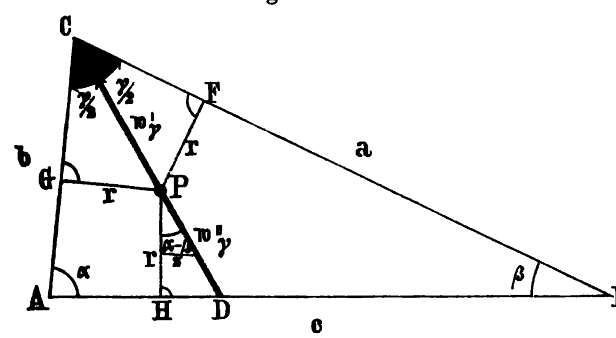
mittels welcher Gleichung man $\frac{\beta-\gamma}{4}$ bezw. $\beta - \gamma$ berechnen kann; hat man hiernach $\beta - \gamma$ berechnet, so kann man, da $\beta + \gamma$ bekannt ist, leicht die einzelnen Winkel α und β berechnen. Dann kann man aus dem Dreieck BCP die Seite a und hiernach mittels Anwendung der Sinusregel die übrigen Seiten b und c berechnen.

ist also der Mittelpunkt des dem Dreieck **einbeschriebenen Kreises**; siehe die späteren Abschnitte, welche Aufgaben über: das Dreieck in Verbindung mit dem Kreis enthalten)."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 460. In einem Dreieck ist der Winkel $\gamma = 80^0\,30'\,40''$ und die beiden Abschnitte w'_γ und w''_γ, in welche die diesen Winkel halbierende Transversale w_γ durch eine der beiden andern winkelhalbierenden Transversalen zerlegt wird, messen bezw. 70 und 40 m; man soll hieraus die beiden andern Winkel und die Seiten des Dreiecks berechnen.

Figur 165.



Erkl. 331. Denkt man sich, siehe Fig. 165, in dem Dreieck ABC die zu AB gehörige Höhe h_a gefällt, so ist nach der Erkl. 328 der von h_a und w_γ gebildete Winkel $= \frac{\alpha-\beta}{2}$; da nun die gedachte Höhe h_a **parallel** dem Perpendikel PH ist, so muss auch:

$$\sphericalangle HPD = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

sein.

Gegeben: $\begin{cases} \gamma = 80^0\,30'\,40'' \\ w'_\gamma = 70 \text{ m} \\ w''_\gamma = 40 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 165, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und ist P der Punkt in welchem sich die drei winkelhalbierenden Transversalen des Dreiecks schneiden, siehe Erkl. 330, und man fällt von diesem Punkt die drei Perpendikel PF, PG und PH auf die Dreiecksseiten, so müssen dieselben nach jener Erkl. 330 **einander gleich** sein.

Bezeichnet man jeden dieser Perpendikel mit dem Buchstaben r, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck CGP für denselben:

a) $r = w'_\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$ (s. Erkl. 50)

Berücksichtigt man ferner, dass in dem rechtwinkligen Dreieck PHD nach der Erklärung 331:

$$\sphericalangle HPD = \frac{\alpha-\beta}{2}$$

ist, so erhält man aus diesem Dreieck:

b) . . . $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{r}{w''_\gamma}$

Substituiert man hierin für r den Wert aus Gleichung a), so erhält man:

A) . . . . $\cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{w'_\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{w''_\gamma}$

nach welcher Gleichung man $\frac{\alpha-\beta}{2}$, bezw. $\alpha-\beta$ berechnen kann; aus dem für $\alpha-\beta$ hiernach berechneten Wert und aus dem für $\alpha+\beta$ bekannten Wert ($\alpha+\beta = 180^0-\gamma$) kann man alsdann die einzelnen Winkel α und β berechnen. Da man hiernach von dem Dreieck ABC die Transversale w_γ ($= w'_\gamma + w''_\gamma$) und die Winkel kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 432 gesagt wurde.

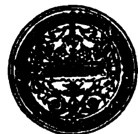
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Herrn Lund,

285. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 284. — Seite 305—320. Mit 12 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 284. — Seite 305—320. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

C Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

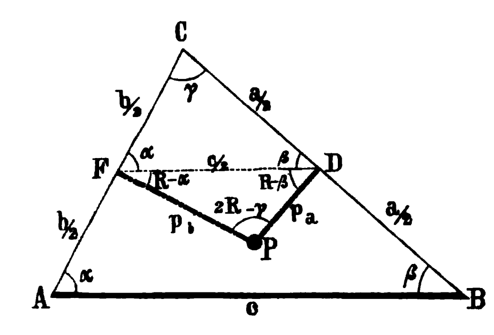
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

p) Aufgaben, in welchen die in den Mitten der Seiten errichteten Perpendikel vorkommen.

Aufgabe 461. Von einem Dreieck kennt man die Seite $c = 150$ m und die in den Mitten der beiden andern Seiten a und b errichteten Senkrechten $p_a = 30$ m und $p_b = 50$ m bis zu ihrem Durchschnittspunkt; man soll die übrigen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Figur 166.



Erkl. 332. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Viereck ist die Summe der vier Winkel $= 4R$".

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Da in dem Viereck $CFPD$, siehe Figur 166, jeder der beiden Winkel CFP und CDP ein rechter Winkel ist, weil die Strecken PD und PF bezw. senkrecht auf den Seiten CB und CA stehen, so muss nach jenem Satz:

$$\sphericalangle FCD + \sphericalangle FPD = 2R$$

sein, und hieraus ergibt sich:

$$\sphericalangle FPD = 2R - \gamma$$

Gegeben: $\begin{cases} c = 150 \text{ m} \\ p_a = 30 \text{ m} \\ p_b = 50 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 166, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man verbindet die Mitten D und F der Seiten a und b, so erhält man das Hülfsdreieck DFP, dessen drei Seiten gegeben sind, indem die Seiten p_a und p_b dieses Dreiecks gemäss der Aufgabe direkt gegeben sind und indem die Seite FD nach der Erkl. 309 $= \frac{c}{2}$ ist. Da nun in dem Dreieck DFP der Winkel FPD nach der Erkl. 332 $= 2R - \gamma$ und da $\sphericalangle PFD = 90^0 - \alpha$ und $\sphericalangle PDF = 90^0 - \beta$ ist, weil nach der Erkl. 309 die Strecke FD auch parallel der Seite AB ist und weil die Strecken PF und PD senkrecht zu den Seiten AC und BC sind, so erhält man aus diesem Dreieck nach dem in der Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formeln 173 bis 175 die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \cos(90^0 - \alpha) = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p_b^2 - p_a^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot p_b}$$

$$\text{b)} \ldots \cos(90^0 - \beta) = \frac{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p_a^2 - p_b^2}{2 \cdot \frac{c}{2} \cdot p_a}$$

und

$$\text{c)} \ldots \cos(2R - \gamma) = \frac{p_a^2 + p_b^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}{2p_a \cdot p_b}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 19:

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

ebenso:

$$\cos(90^0 - \beta) = \sin\beta$$

und nach der Erkl. 94:

$$\cos(2R - \gamma) = -\cos\gamma$$

setzt und reduziert:

$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = \frac{c^2 + 4(p_b^2 - p_a^2)}{4cp_b}$$

$$\text{B)} \ldots \sin\beta = \frac{c^2 + 4(p_a^2 - p_b^2)}{4cp_a}$$

und

$$-\cos\gamma = \frac{4(p_a^2 + p_b^2) - c^2}{8p_a \cdot p_b}$$

oder

$$\text{C)} \ldots \cos\gamma = \frac{c^2 - 4(p_a^2 + p_b^2)}{8p_a \cdot p_b}$$

Hat man nach diesen drei Gleichungen die Winkel des Dreiecks berechnet, so kann man mittels derselben und der gegebenen Seite c nach der Sinusregel die drei Seiten berechnen.

Aufgabe 462. Die zwei in den Mitten der Seiten a und b eines Dreiecks errichteten Perpendikel p_a und p_b messen bis zu ihrem Durchschnitt bezw. 110,8 m und 92,2 m und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α misst 60° 30′ 20″; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} p_a = 110{,}8\,\text{m} \\ p_b = 92{,}2\,\text{m} \\ \alpha = 60^0\,30'\,20'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 463. Die in den Mitten der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks errichteten Senkrechten messen bis zu ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt bezw. $p_a = 50$ m, $p_b = 40$ m und $p_c = 30$ m; wie gross sind die Winkel und Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} p_a = 50\,\text{m} \\ p_b = 40\,\text{m} \\ p_c = 30\,\text{m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 167 und die Erkl. 333, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht und verbindet man, wie in der Andeutung zur Aufgabe 461 gesagt, die Mitten D und F, so erhält man das Hülfsdreieck DFP, in welchem nach der Erkl. 309 die Seite $FD = \frac{c}{2}$ und in welchem nach der Erkl. 332 der Winkel $DPF = 2R - \gamma$ ist. Nach dem Projektionssatz (siehe Antw. der Frage 22) erhält man somit aus diesem Hülfsdreieck:

$$\left(\frac{c}{2}\right)^2 = p^2_a + p^2_b - 2 \cdot p_a \cdot p_b \cdot \cos(2R - \gamma)$$

oder, wenn man nach der Erkl. 94:

$$\cos(2R - \gamma) = -\cos\gamma$$

setzt:

$$\text{a)} \;..\; \left(\frac{c}{2}\right)^2 = p^2_a + p^2_b + 2p_a \cdot p_b \cos\gamma$$

Verbindet man ferner P mit A oder mit B, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck APG, in Rücksicht, dass in demselben nach den Erkl. 333 und 334 der Winkel $APG = \gamma$ ist, wie in der Figur angedeutet:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{c}{2} : p_c$$

oder

$$\text{b)} \;..\; \frac{c}{2} = p_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

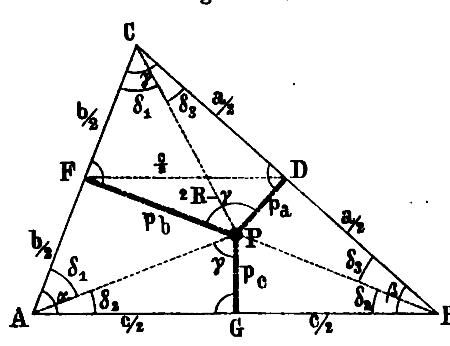
Aus den Gleichungen a) und b) erhält man durch Substitution:

$$\text{c)} \;...\; \left(p_c \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)^2 = p^2_a + p^2_b + 2p_a p_b \cos\gamma$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel γ vorkommt, und welche zunächst so umzuformen ist, dass nur noch eine Funktion des unbekannten Winkels vorkommt. Setzt man zu diesem Zweck:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Figur 167.



Erkl. 333. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die in den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Senkrechten schneiden sich in einem Punkt. Dieser Punkt hat die Eigenschaft, dass er gleichweit von allen Ecken des Dreiecks absteht (er ist somit der Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises, siehe die späteren Abschnitte, welche: „Aufgaben über den Kreis in Verbindung mit dem Dreieck enthalten).

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ist in der Figur 167:

$$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$$

Erkl. 334. Da nach dem in der Erkl. 333 angeführten planimetrischen Satz in der Fig. 167 die Dreiecke APC, APB und BPC gleichschenklige Dreiecke sind, so müssen auch die Basiswinkel eines jeden dieser Dreiecke einander gleich sein, wie in der Figur 167 durch die Buchstaben δ_1, δ_2 und δ_3 angedeutet ist.

Hiernach ergeben sich aus der Figur 167 die Beziehungen:

a) . . . $\delta_1 + \delta_2 = \alpha$

b) . . . $\delta_1 + \delta_3 = \gamma$

c) . . . $\delta_2 + \delta_3 = \beta$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man durch Substitution:

d) . . . $\gamma - \delta_3 + \delta_2 = \alpha$

und aus den Gleichungen d) und c) erhält man durch Substitution:

$$\gamma - (\beta - \delta_2) + \delta_2 = \alpha$$

oder

$$\gamma - \beta + \delta_2 + \delta_2 = \alpha$$
$$2\delta_2 = \alpha + \beta - \gamma$$

oder

$$\delta_2 = \frac{\alpha + \beta - \gamma}{2}$$

oder, wenn man noch berücksichtigt, dass $\alpha + \beta = 2R - \gamma$ ist:

$$\delta_2 = \frac{2 \cdot R - \gamma - \gamma}{2}$$

oder

e) . . $\delta_2 = R - \gamma$

Da nun in dem rechtwinkligen Dreieck APG

$$\sphericalangle APG = R - \delta_2$$

ist, so erhält man in Rücksicht der Gleichung e):

$$\sphericalangle APG = R - (R - \gamma)$$

oder

f) . . $\sphericalangle APG = \gamma$

wie in der Figur angedeutet ist.

Erkl. 335. Ausführliches über die Auflösung kubischer Gleichungen findet man in Kleyers Lehrbuch der kubischen Gleichungen und in Kleyers Lehrbüchern der höheren Gleichungen.

also

$$tg^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{\sin^2 \frac{\gamma}{2}}{\cos^2 \frac{\gamma}{2}}$$

und hierin nach der Erkl. 145 für $\sin^2 \frac{\gamma}{2} = 1 - \cos^2 \frac{\gamma}{2}$, so erhält man die Gleichung:

$$p^2_c \cdot \frac{1 - \cos^2\gamma}{\cos^2\gamma} = p^2_a + p^2_b + 2p_a \cdot p_b \cdot \cos\gamma$$

Bringt man in Rücksicht, dass $\cos\gamma$ die Unbekannte ist, dieselbe auf ihre geordnete Form, so erhält man:

A) . $\cos^3\gamma + \frac{p^2_a + p^2_b + p^2_c}{2p_a \cdot p_b} \cos^2\gamma = \frac{p^2_c}{2p_a \cdot p_b}$

nämlich in bezug auf $\cos\gamma$ eine kubische Gleichung (s. Erkl. 335).

q) Aufgaben, in welchen besondere Transversalen vorkommen.

Aufgabe 464. Eine von der Ecke A eines Dreiecks ABC ausgehende Transversale teilt die Gegenseite a in zwei Abschnitte a' und a'', die sich verhalten wie 2 : 3. Wie gross sind die drei Winkel dieses Dreiecks, wenn jene Transversale mit der Seite c einen Winkel $\alpha_2 = 17^0\,12'$ und mit der Seite b einen Winkel $\alpha_1 = 26^0\,4'$ bildet?

Gegeben: $\begin{cases} a' : a'' = 2 : 3 \\ \alpha_1 = 26^0\,4' \\ \alpha_2 = 17^0\,12' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 168, ABC das Dreieck, in welchem die Transversale t die in der Aufgabe erwähnten Eigenschaften hat, so kann man die Winkel β und γ dieses Dreiecks zunächst wie folgt berechnen:

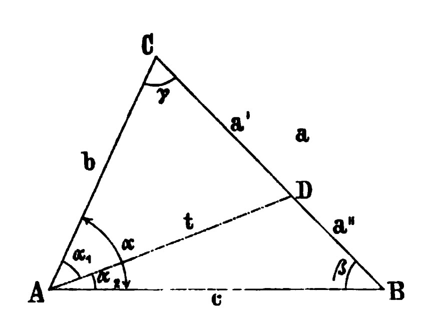
Aus den Dreiecken ADC und ADB ergeben sich nach der Sinusregel die Relationen:

a) . . . $a' : t = \sin\alpha_1 : \sin\gamma$

und

b) . . . $a'' : t = \sin\alpha_2 : \sin\beta$

Figur 168.



Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b) und reduziert, so erhält man weiter:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

und hieraus erhält man zunächst für das Verhältnis der Sinus der zu berechnenden Winkel β und γ:

$$A_1) \ldots \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{a'}{a''} \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1}$$

wonach man in Rücksicht des für den Quotienten $\frac{a'}{a''}$ gegebenen Werts und der für die Winkel α_1 und α_2 gegebenen Werte jenes Verhältnis berechnen kann. Setzt man für dieses nunmehr bekannte Verhältnis den Buchstaben v, so ist also:

$$A_2) \ldots \frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = v$$

und hieraus kann man die Winkel β und γ wie folgt berechnen:

Setzt man:

$$\frac{\sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{v}{1}$$

und bringt den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man weiter:

$$\frac{\sin\beta + \sin\gamma}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{v+1}{v-1}$$

oder, in Rücksicht der Erkl. 268:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{v+1}{v-1}$$

Da nun:

$$\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$$

also:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha}{2}$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} = \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\alpha}{2}\right) = \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \quad \text{(siehe Erkl. 19)}$$

ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$A) \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{v-1}{v+1} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man $\frac{\beta-\gamma}{2}$, bezw. $\beta - \gamma$ bestimmen kann. Aus diesem für $\beta - \gamma$ berechneten und aus dem für $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha = 180^0 - (\alpha_1 + \alpha_2)$ bekannten Wert kann man alsdann die einzelnen Winkel α und β berechnen.

Aufgabe 465. Die Seite a eines Dreiecks ist 500 m lang, der derselben gegenüberliegende Winkel α beträgt $75^0\,40'\,35''$, eine von dem Scheitel des Winkels α ausgehende Transversale teilt den Winkel α im Verhältnis 3:2 und die Seite a im Verhältnis 23:10; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 500\text{ m} \\ \alpha = 75^0\,40'\,35'' \\ \alpha_1 : \alpha_2 = 3:2 \\ a' : a'' = 23:10 \end{array}\right.$

Andeutung. Man berechne zunächst aus dem gegebenen Verhältnis:

a) . . . $\alpha_1 : \alpha_2 = 3:2$

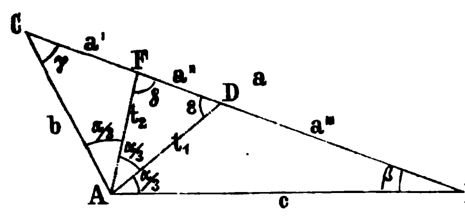
und in Rücksicht, dass:

b) . . . $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 75^0\,40'\,35''$

ist, die einzelnen Winkel α_1 und α_2; dann berechne man aus diesen Winkeln α_1 und α_2 und dem gegebenen Verhältnis $a' : a''$, wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 464 gesagt wurde, die Winkel β und γ des Dreiecks. Da man hiernach von dem zu berechnenden Dreieck die Seite a und die Winkel kennt, so kann man im weiteren verfahren, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gesagt wurde.

Aufgabe 466. Von einem Dreieck kennt man den Winkel $\alpha = 111^0\,36{,}6'$ und die beiden diesen Winkel in drei gleiche Teile teilenden Transversalen $t_1 = 5$ dm und $t_2 = 4$ dm. Man soll den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Figur 169.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} \alpha = 111^0\,36'\,6'' \\ t_1 = 5\text{ dm} \\ t_2 = 4\text{ dm} \end{array}\right\}$ t_1 und t_2 sind Transversalen, welche den Winkel α in drei gleiche Teile teilen.

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 169, den Inhalt F_1 des mittleren Dreiecks ADF aus $\frac{\alpha}{3}$, t_1 und t_2 mittels dem in Erkl. 151 aufgestellten Satz. Dann berechne man mittels Anwendung des Tangentensatzes die Winkel δ und ε dieses Dreiecks, bezw. deren Nebenwinkel. Hiernach berechne man die Inhalte F_2 und F_3 der Dreiecke ABD und AFC nach der in der Erkl. 130 aufgestellten Formel 104, und zwar F_2 aus t_1, $\frac{\alpha}{3}$ und dem Nebenwinkel von ε und F_3 aus t_2, $\frac{\alpha}{3}$ und dem Nebenwinkel von δ. Für den gesuchten Inhalt F des Dreiecks ABC hat man alsdann: $F = F_1 + F_2 + F_3$

Aufgabe 467. Der Winkel α eines Dreiecks wird durch zwei Transversalen t_1 und t_2 in drei gleiche Teile geteilt; wie gross sind die durch diese Transversalen auf der gegenüberliegenden Seite gebildeten Abschnitte, wenn die jenem Winkel α gegenüberliegende Seite $a = 3700$ m und die derselben anliegenden Winkel β und γ bezw. $= 33^0\,14'$ und $58^0\,43'$ messen.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 3700\text{ m} \\ \beta = 33^0\,14' \\ \gamma = 58^0\,43' \end{array}\right\}$ Der Winkel α wird durch Transversalen in drei gleiche Teile geteilt

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 169, zunächst den Winkel α aus:

A) . . . $\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$

und hiernach den Winkel $\alpha/_3$.

Dann verfahre man zur Berechnung der gesuchten Abschnitte a', a'' und a''' weiter wie folgt:

Aus den Dreiecken AFC und AFB erhält man nach der Sinusregel:

a) . . . . $\frac{t_2}{a'} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha/_3}$

und

b) . . . . $\frac{t_2}{a'' + a'''} = \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{2\alpha}{3}}$

Und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Elimination der Grösse t_2:

$$a' \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{3}} = (a'' + a''') \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\frac{2\alpha}{3}}$$

oder, wenn man $a'' + a''' = a - a'$ setzt:

$$\text{B)} \ldots a' \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\frac{\alpha}{3}} = (a - a') \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\frac{2\alpha}{3}}$$

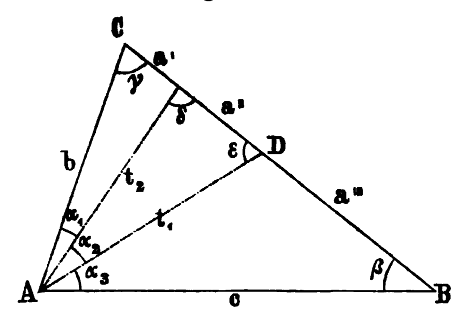
in welcher Gleichung nur noch die unbekannte Grösse a' vorkommt und nach welcher man somit den Abschnitt a' berechnen kann. In ganz derselben Weise kann man den Abschnitt a''' berechnen und dann kann man a'' aus der Beziehung:

$$a'' = a - (a' + a''')$$

berechnen.

Aufgabe 468. Der Winkel $\alpha = 72^0\,24'\,9''$ eines Dreiecks ist in die drei Teile α_1, α_2 und α_3 geteilt, welche sich verhalten wie $1:2:3$. Wie gross ist der mittlere der Abschnitte, in welche die Teillinien des Winkels α die gegenüberliegende Seite a teilen, wenn die beiden äusseren Abschnitte a' und a''' derselben bezw. $= 25$ und 360 m lang sind?

Figur 170.



Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 72^0\,24'\,9'' \\ \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 1:2:3 \\ a' = 25 \text{ m} \\ a''' = 360 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst aus dem gegebenen Verhältnis:

$$\text{a)} \ldots \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3 = 1:2:3$$

und in Rücksicht, dass:

$$\text{b)} \ldots \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 72^0\,24'\,9''$$

ist, wie in der Andeutung zur Aufgabe 327 gesagt wurde, die einzelnen Winkel α_1, α_2 und α_3. Dann berechne man den gesuchten Abschnitt a'', siehe Figur 170, wie folgt:

Aus den Dreiecken AFC und AFD erhält man nach der Sinusregel:

$$\text{c)} \ldots \frac{t_2}{a_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_1}$$

und

$$\text{d)} \ldots \frac{t_2}{a''} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha_2}$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Elimination der Grösse t_2 die Beziehung:

$$\text{e)} \ldots a' \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_1} = a'' \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\sin\alpha_2}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$\varepsilon = 180^0 - (\alpha_2 + \delta)$$

und dass nach der Erkl. 113:

$$\delta = \alpha_1 + \gamma$$

ist, dass also hiernach:

$$\varepsilon = 180^0 - (\alpha_2 + \alpha_1 + \gamma)$$

und somit für:

$$\sin\varepsilon = \sin[180^0 - (\alpha_2 + \alpha_1 + \gamma)]$$
$$= \sin(\alpha_2 + \alpha_1 + \gamma) \text{ (s. Erkl. 66)}$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$a' \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_1} = a'' \cdot \frac{\sin(\alpha_2 + \alpha_1 + \gamma)}{\sin\alpha_2}$$

und wenn man in bezug auf $\sin[(\alpha_2+\alpha_1)+\gamma]$ die in der Erkl. 95 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$a'\cdot\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha_1}=a''\cdot\frac{\sin(\alpha_2+\alpha_1)\cdot\cos\gamma+\cos(\alpha_2+\alpha_1)\cdot\sin\gamma}{\sin\alpha_2}$$

Dividiert man diese Gleichung durch $\sin\gamma$, so geht dieselbe, in Rücksicht der Erkl. 121, über in:

$$\frac{a'}{\sin\alpha_1}=a''\cdot\frac{\sin(\alpha_2+\alpha_1)\cdot\operatorname{ctg}\gamma+\cos(\alpha_2+\alpha_1)}{\sin\alpha_2}$$

und hieraus erhält man für $\operatorname{ctg}\gamma$:

$$\operatorname{ctg}\gamma=\frac{a'\cdot\sin\alpha_2}{a''\cdot\sin\alpha_1\cdot\sin(\alpha_2+\alpha_1)}-\frac{\cos(\alpha_2+\alpha_1)}{\sin(\alpha_2+\alpha_1)}$$

oder nach der Erkl. 121:

$$\text{f) }\operatorname{ctg}\gamma=\frac{a'\sin\alpha_2}{a''\cdot\sin\alpha_1\,(\sin\alpha_2+\alpha_1)}-\operatorname{ctg}(\alpha_2+\alpha_1)$$

durch welche Gleichung der unbekannte Winkel γ in die zu berechnende Streeke a' und in die gegebenen Stücke ausgedrückt ist.

In derselben Weise kann man aus den Dreiecken ADF und ADB eine analoge Beziehung für $\operatorname{ctg}\beta$ aufstellen, man erhält:

$$\text{g) }\operatorname{ctg}\beta=\frac{a'''\sin\alpha_2}{a''\cdot\sin\alpha_3\sin(\alpha_2+\alpha_3)}-\operatorname{ctg}(\alpha_2+\alpha_3)$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$$

somit:

$$\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{ctg}[180^0-(\alpha+\gamma)]=-\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)$$
(s. Erkl. 336)

und dass nach der Erkl. 337:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\gamma-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma}$$

ist, so geht in Rücksicht dessen die Gleichung g) über in:

$$\text{h) }.\;-\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma}=\frac{a'''\sin\alpha_2}{a''\cdot\sin\alpha_3\sin(\alpha_2+\alpha_3)}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\operatorname{ctg}\gamma$ auf und setzt den für $\operatorname{ctg}\gamma$ sich ergebenden Wert in Gleichung f), so erhält man endlich eine Bestimmungsgleichung für den gesuchten Abschnitt a''.

Erkl. 336. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}(2R-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha$$

(Siehe Formel 26 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 337. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$$

(Siehe Formel 47 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

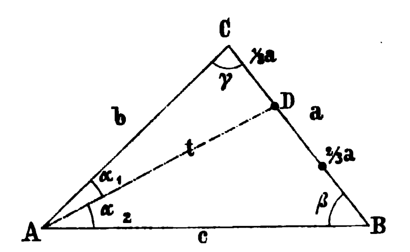
Aufgabe 469. Die Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. $=$ 13, 15 und 14 m lang. Die Seite a ist in drei gleiche Teile geteilt und der der Seite b zunächst liegende Teilpunkt ist mit der Gegenecke verbunden. Man soll die Länge dieser Verbindungslinie berechnen.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a=13\text{ m}\\ b=15\text{ m}\\ c=14\text{ m}\end{array}\right\}$ Die Seite a ist in drei gleiche Teile geteilt und der der Seite b zunächst liegende Teilpunkt ist mit der Ecke A verbunden

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 317 aufgestellten allgemeinen Satz von Stewart besteht, siehe Figur 171, zur Berechnung der gesuchten Scheiteltransversale t für diesen Fall die Relation:

$$t^2=\frac{b^2\cdot\frac{2}{3}a+c^2\cdot\frac{1}{3}a-a\cdot\frac{1}{3}a\cdot\frac{2}{3}a}{a}$$

Figur 171.



und hieraus erhält man:

$$t^2 = \frac{6ab^2 + 8ac^2 - 2a^3}{9a}$$

$$t = \sqrt{\frac{6b^2 + 8c^2 - 2a^2}{9}}$$

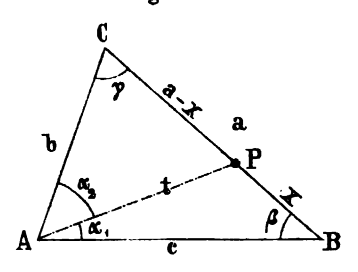
oder

A) . . $t = \frac{1}{3} \sqrt{6b^2 + 8c^2 - 2a^2}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte die Transversale t leicht berechnen kann.

Aufgabe 470. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks sind bezw. = 50 m und 25,8 m, der von beiden eingeschlossene Winkel γ ist $= 62^0\,30'\,44''$. Die Seite a soll durch einen Punkt P in zwei solche Teile geteilt werden, dass das Quadrat über der Verbindungslinie dieses Punktes P mit der gegenüberliegenden Ecke A des Dreiecks seinem Inhalt nach gleich dem Rechteck ist, welches man aus jenen Teilen bilden kann. Wie gross sind die beiden Teile, in welche die Seite a durch den Punkt P zerlegt wird.

Figur 172.



Gegeben: $\begin{cases} a = 50 \text{ m} \\ b = 25{,}8 \text{ m} \\ \gamma = 62^0\,30'\,44'' \end{cases}$

Gesucht: einen Punkt in der Seite a, welcher der in der Aufgabe gegebenen Bedingung entspricht.

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 317 erwähnten allgemeinen Satz von Stewart, besteht, wenn man, siehe Figur 172, den einen Abschnitt PB mit x, also den andern Abschnitt PC mit $a - x$ bezeichnet, die Relation:

a) . . . $t^2 = \frac{b^2 \cdot x + c^2 (a - x) - a \cdot x \cdot (a - x)}{a}$

ferner hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

b) . . . $t^2 = x \cdot (a - x)$

und schliesslich ergibt sich nach dem Projektionssatz aus dem Dreieck ABC die Relation:

c) . . . $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma}$

Drückt man nunmehr mittels der aus den Gleichungen a) und b) sich ergebenden Gleichung die gesuchte Strecke x in a, b und c aus und substituiert schliesslich für c den Wert aus Gleichung c), so erhält man eine Gleichung, nach welcher man die gesuchte Strecke x berechnen kann.

Aufgabe 471. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. = 145, 25 und 150 m. Vom Scheitelpunkt des der Seite c gegenüberliegenden Winkels γ ist eine Transversale gezogen, welche die Seite c im Verhältnis 10 : 7 teilt; man soll die Länge derselben, sowie die Winkel berechnen, welche sie mit den Seiten a und b bildet.

Gegeben: $\begin{cases} a = 145 \text{ m} \\ b = 25 \text{ m} \\ c = 150 \text{ m} \end{cases}$ eine durch γ gehende Scheiteltransversale, welche die Seite c im Verhältnis 10 : 7 teilt

Andeutung. Zunächst berechne man die Abschnitte c' und c'' der Seite c aus dem gegebenen Verhältnis:

a) . . . $c' : c'' = 10 : 7$

und aus der Beziehung:

b) . . . $c' + c'' = c$

Berücksichtigt man ferner, dass der Abschnitt c' der Seite c der Dreiecksseite a anliegt, so hat man alsdann zur Berechnung der gesuchten Transversale t nach dem in

der Erkl. 317 aufgestellten allgemeinen Satz von Stewart, die Gleichung:

$$\text{A)} \ldots t = \sqrt{\frac{a^2 \cdot c'' + b^2 \cdot c' - c \cdot c' \cdot c''}{c}}$$

nach welcher Gleichung man die Transversale t berechnen kann, wenn man in derselben die für a, b und c gegebenen und die für c' und c'' vorher berechneten Werte substituiert. Da nunmehr a, b, c, c', c'' und t bekannt sind, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, die geforderten Winkel γ_1 und γ_2, welche die Transversale t bezw. mit den Seiten a und b bildet, berechnen.

Aufgabe 472. Zwischen den zwei Seiten a und b eines Dreiecks ist eine Strecke parallel zur dritten Seite c gezogen und zwar so, dass dieselbe gleich dem der Seite c anliegenden Abschnitt a'' der Seite a ist; wie lang ist jene zur Seite c parallele Transversale, wenn $c = 102$ dm misst und die dieser Seite anliegenden Winkel α und β bezw. $= 79^0\,36'\,40''$ und $33^0\,23'\,54{,}6''$ sind?

Gegeben: $\begin{cases} c = 102 \text{ m} \\ \alpha = 79^0\,36'\,40'' \\ \beta = 33^0\,23'\,54{,}6'' \end{cases}$

Gesucht: eine zu c parallele Transversale, welche der in der Aufgabe erwähnten Bedingung entspricht.

Andeutung. Ist, siehe Figur 173, ABC das gegebene Dreieck und ist DF die zu berechnende Transversale, welche der Seite c parallel ist, so muss, wenn man dieselbe mit x bezeichnet, gemäss der Aufgabe der Seitenabschnitt BF ebenfalls $= x$, also der Seitenabschnitt $FC = a - x$ sein. Aus dem Dreieck DFC erhält man nach der Sinusregel:

$$\text{a)} \ldots \ldots \frac{x}{a - x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Ferner erhält man nach der Sinusregel aus dem Dreieck ABC:

$$\text{b)} \ldots \ldots \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma}$$

Substituiert man den aus Gleichung b) für a) sich ergebenden Wert:

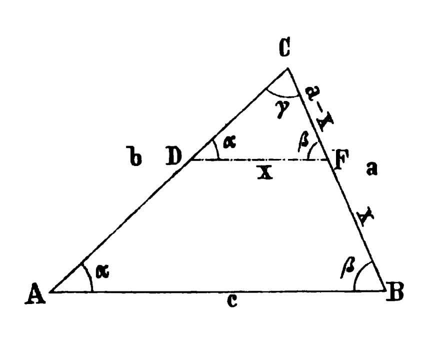
$$\text{c)} \ldots \ldots a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

in Gleichung a), so erhält man, in Rücksicht, dass mit dem Winkel α und β auch der dritte Winkel γ gegeben ist, für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{A)} \ldots \ldots \frac{x}{\frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} - x} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

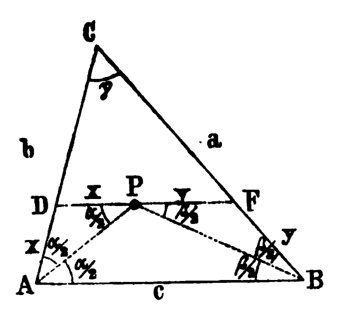
Löst man diese Gleichung in bezug auf x auf und substituiert alsdann für α, β, γ und c die gegebenen Zahlenwerte, so kann man hiernach die gesuchte Transversale x berechnen.

Figur 173.



Aufgabe 473. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 102$ dm, die derselben anliegenden Winkel α und β messen bezw. 79' 36' 40'' und 33° 23' 54,6''. Parallel zur Seite c ist zwischen den Seiten a und b eine Strecke so gezogen, dass dieselbe gleich der Summe der beiden der Seite c anliegenden Abschnitten der Seiten a und b ist. Wie lang muss diese Strecke sein?

Figur 174.



Gegeben: $\begin{cases} c = 102 \text{ dm} \\ \alpha = 79^0 36' 40'' \\ \beta = 33^0 23' 54{,}6'' \end{cases}$

Gesucht: eine zu c parallele Transversale, welche der in der Aufgabe erwähnten Bedingung entspricht.

Andeutung. Ist, siehe Figur 174, ABC das gegebene Dreieck und ist DF die zu c parallele Transversale, welche gemäss der Aufgabe der Bedingung:

a) . . . $\overline{DF} = \overline{AD} + \overline{BF}$

entspricht, so muss es auf der Strecke DF einen Punkt P geben, welcher die Eigenschaft hat, dass wenn er mit A und B verbunden wird, die beiden somit erhaltenen Dreiecke APD und BPF gleichschenklige Dreiecke sind, denn in diesem Fall ist:

b) . . . $\overline{DF} = \overline{DP} + \overline{FP} = \overline{AD} + \overline{BF}$

was obiger Bedingung entspricht.

Da nun:

$\sphericalangle DAP = \sphericalangle DPA$ (als Basiswinkel eines gleichschenkligen Dreiecks)

und

$\sphericalangle DPA = \sphericalangle PAB$ (als Wechselwinkel)

ist, so muss:

c) . . $\sphericalangle DAP = \sphericalangle DPA = \sphericalangle PAB = \frac{\alpha}{2}$

sein, wie in der Figur angedeutet; desgl. muss:

d) . . . $\sphericalangle FBP = \sphericalangle FPB = \sphericalangle PBA = \frac{\beta}{2}$

sein.

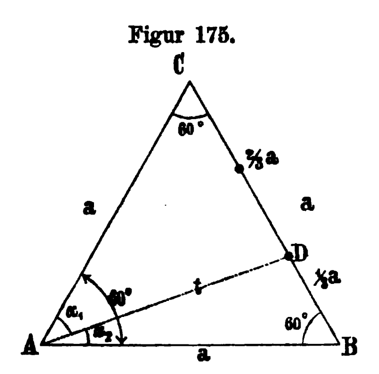
In dem Dreieck ABP kennt man also gemäss der Aufgabe die Seite c und die derselben anliegenden Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$; man kann somit aus demselben, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ dieses Dreiecks berechnen. Da man alsdann von den gleichschenkligen Dreiecken APD und BPF die Grundlinien $\overline{AP}$ und $\overline{BP}$ und die Basiswinkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ kennt, so kann man hiernach alsdann leicht aus diesen Dreiecken die Abschnitte x und y berechnen und hiernach die gesuchte Transversale $\overline{DF}$ $(= x + y)$ bestimmen.

Aufgabe 474. Eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist in drei gleiche Teile geteilt und einer der erhaltenen Teilpunkte ist mit der jener Seite gegenüberliegenden Ecke verbunden; wie gross sind die Teile, in welche der jener Seite gegenüberliegende Winkel geteilt wird und in welchem Verhältnis steht jene Verbindungslinie zur Seite des Dreiecks?

Gegeben: Ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite in drei gleiche Teile geteilt ist und in welchem eine Transversale so gezogen ist, dass sie durch einen der Teilpunkte jener Seite und durch die gegenüberliegende Ecke geht.

Andeutung. Man bestimme zunächst das Verhältnis der Sinus der Winkel α_1 und α_2, indem man, siehe Figur 175, die Transversale t, welche eine Seite des Dreiecks ADC und auch des Dreiecks ADB

Figur 175.



Erkl. 338. Fällt man in einem gleichseitigen Dreieck, dessen Seite mit a bezeichnet sei, die zu einer Seite gehörige Höhe und berücksichtigt man, dass zwischen dieser Höhe h und der Seite a nach der Auflösung der Aufgabe 116, die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$$

und dass sich aus jedem der rechtwinkligen Dreiecke, in welche die Höhe h das gleichseitige Dreieck zerlegt, die Beziehungen ergeben:

$$\text{b)} \ldots \sin 60^0 = \frac{h}{a}$$

und

$$\text{c)} \ldots \cos 60^0 = \frac{a}{2} : a$$

so erhält man aus den Gleichungen a) und b)

$$\sin 60^0 = \frac{a\sqrt{3}}{2a}$$

oder

$$1) \ldots\ldots \sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

und aus der Gleichung c):

$$2) \ldots\ldots \cos 60^0 = \frac{1}{2}$$

ist, nach der Sinusregel einmal in $\frac{2}{3}a$, α_1 und 60^0, ein andermal in $\frac{1}{3}a$, α_2 und 60^0 ausdrückt, diese für t sich ergebenden Werte einander gleich setzt, aus der erhaltenen Gleichung jenes Verhältnis $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$ bestimmt.

Dann beachte man, dass:

$$\alpha_2 = 60^0 - \alpha_1$$

ist, und substituiere hiernach in jenem Verhältnis $\sin\alpha_1 : \sin\alpha_2$ für $\sin\alpha_2$ den Wert $\sin(60^0 - \alpha_1)$, entwickele letztere Funktion nach der in der Erkl. 232 angeführten goniometrischen Formel und beachte, dass nach der Erkl. 338 $\sin 60^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ und $\cos 60^0 = \frac{1}{2}$ ist. Man erhält hiernach eine goniometrische Gleichung, in welcher nur die unbekannte Funktion $\sin\alpha_1$ vorkommt und nach welcher somit der Winkel α_1 berechnet werden kann. Das gesuchte Verhältnis der Transversale t zur Seite a des Dreiecks bestimme man aus einem der Dreiecke ADB und ADC mittels der Sinusregel.

Man erhält z. B. aus dem Dreieck ADC:

$$t : \frac{2}{3}a = \sin 60^0 : \sin\alpha_1$$

oder

$$\text{a)} \ldots\ldots t : a = \frac{2}{3} \cdot \sin 60^0 : \sin\alpha_1$$

wonach der Quotient $t : a$, wenn für α_1 der berechnete Winkel substituiert wird, leicht berechnet werden kann. Man kann auch, wie in der Andeutung zur Aufgabe 469 gesagt ist, mittels des allgemeinen Satzes von Stewart die Transversale t in die Seite a des gleichschenkligen Dreiecks ausdrücken und hieraus das Verhältnis $t : a$ bestimmen.

Aufgabe 475. Eine Seite eines gleichseitigen Dreiecks ist in drei gleiche Teile geteilt und jeder der beiden erhaltenen Teilpunkte ist mit der jener Seite gegenüberliegenden Ecke verbunden. Wie gross sind die drei Teile, in welche der jener Seite gegenüberliegende Winkel hiernach geteilt wird und in welchem Verhältnis stehen jene Verbindungslinien zur Seite des Dreiecks?

Gegeben: { Ein gleichseitiges Dreieck, dessen eine Seite in drei gleiche Teile geteilt ist, und in welchem zwei Transversalen so gezogen sind, dass sie durch die Teilpunkte jener Seite und die gegenüberliegende Ecke gehen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 474. Man bestimme zuerst, wie in der Andeutung zu jener Aufgabe gesagt wurde, nach einander die Teilwinkel, welche den Dreiecksseiten anliegen und bestimme dann den mittleren Teilwinkel durch Abzug jener beiden berechneten Teilwinkel von 60^0.

Aufgabe 476. Ein Winkel eines gleichseitigen Dreiecks wird durch eine Transversale im Verhältnis 4 : 5 geteilt. In welchem

Gegeben: $\left\{ \begin{aligned} \alpha &= 60^0 \\ \alpha_1 : \alpha_2 &= 4 : 5 \end{aligned} \right.$

Verhältnis teilt diese Transversale die gegenüberliegende Seite a?

Andeutung. Man bestimme zuerst aus:

$$a) \ldots \alpha_1 : \alpha_2 = 4:5$$

und

$$b) \ldots \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha = 60^0$$

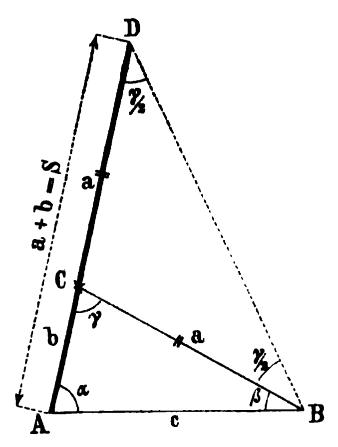
die Winkel α_1 und α_2; dann drücke man, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 474 gesagt wurde, mittels der Sinusregel die den Winkel α teilende und das gedachte Dreieck in zwei Dreiecke zerlegende Transversale t, einmal in den Sinus des Winkels α', den Abschnitt a' der geteilten Gegenseite a und in den Sinus von 60°, ein andermal in den Sinus des Winkels α_2, den Abschnitt a'' jener Gegenseite und in den Sinus von 60° aus, setze diese Werte für jene Transversale einander gleich und bestimme hieraus das Verhältnis, bezw. den Quotient $a':a''$.

---

r) Aufgaben, in welchen die Summe zweier Seiten, auch die Differenz zweier Winkel und das Verhältnis zweier Seiten gegeben ist.

Aufgabe 477. In einem Dreieck sind zwei Winkel α und β bezw. $= 73^0\,44'\,23{,}3''$ und $9^0\,31'\,38{,}2''$ und die Summe S der zwei diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten a und b ist $= 170$ m; man soll die Seiten und den Inhalt des Dreiecks bestimmen.

Figur 176.



Erkl. 339. Berücksichtigt man, dass:

$$a) \ldots \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

mithin:

$$b) \ldots \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

also

$$1) \ldots \sin\frac{\gamma}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

(s. Erkl. 19)

und dass ferner in Rücksicht der Gleichung b):

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = \beta + 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 170 \text{ m} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \end{cases}$

Andeutungen:

1) Anschliessend an die planimetrische Konstruktion eines Dreiecks aus der Summe zweier Seiten und den diesen Seiten gegenüberliegenden Winkeln, kann man die geforderten Stücke mittels folgender Betrachtung berechnen.

Ist, siehe Figur 176, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man denkt sich die Seite a auf der Verlängerung der Seite b nach CD hinabgetragen und D mit B verbunden, so erhält man das Dreieck ABD, dessen Seite $AD = a + b = S$ ist und dessen Winkel die in der Fig. 176 eingetragenen Werte haben (siehe auch die Erkl. 340). Aus diesem Dreieck erhält man zur Berechnung der Seite c die Relation:

$$\frac{S}{c} = \frac{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder

$$A) \ldots\ldots c = S \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$$

oder auch nach der Erkl. 339:

$$A_1) \ldots\ldots c = S \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Ist die Seite c hiernach berechnet, also bekannt, so kann man eine der Seiten a und b

oder

$$\beta + \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}$$

also

$$2) \ldots \sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (s. Erkl. 19)}$$

ist, so geht die nebenstehende Gleichung A) über in:

$$c = S \cdot \frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Erkl. 340. Man kann auch, statt wie in der Figur 176 die Seite a an die Seite b anzutragen, wie in der Figur 177 angedeutet ist, die Seite b an die Seite a antragen. Aus dem Dreieck ABD der Figur 177 erhält man dann nach der Sinusregel:

$$\frac{S}{c} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 339:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha + \beta}{2}$$

und nach der Erkl. 341:

$$\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$$

setzt und jene Gleichung nach c) auflöst:

$$c = S \cdot \frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

nämlich dieselbe Gleichung als die in nebenstehender Andeutung 1) entwickelte Gleichung A).

Erkl. 341. Da nach der Gleichung b) in der Erkl. 339:

$$a) \ldots \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

ist, so ist:

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = \alpha + 90^0 - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

oder

$$\alpha + \frac{\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\beta - \alpha}{2}$$

mithin:

$$b) \ldots \sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\left(90^0 - \frac{\beta - \alpha}{2}\right)$$

$$= \cos\frac{\beta - \alpha}{2} \text{ (s. Erkl. 19)}$$

$$\text{oder } = \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (s. Erkl. 126)}$$

mittels der Sinusregel berechnen und die andere Seite aus der gegebenen Relation:

$$a + b = S$$

bestimmen. Zur Berechnung des Inhalts F benutzt man am besten den in der Erkl. 151 aufgestellten Satz.

2) Nach der Mollweideschen Formel 89, siehe Antw. der Frage 21, besteht zur Berechnung der Seite c die Relation:

$$\frac{a + b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

und hieraus erhält man, $a + b = S$ gesetzt, für die Seite c:

$$B) \ldots c = S \cdot \frac{\cos\frac{\alpha + \beta}{2}}{\cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

nämlich dieselbe Gleichung als Gleichung A).

3. Man kann auch zuerst die Seiten a und b berechnen und zwar mittels Anwendung des Tangentensatzes; man erhält nach demselben:

$$\frac{a + b}{a - b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}$$

oder, da:

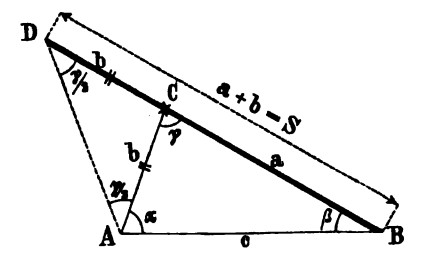
$$a + b = S$$

ist:

$$C) \ldots\ldots a - b = S \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Hat man nach Gleichung C) die Differenz der Seiten a und b berechnet, so kann man aus der hiernach berechneten Differenz und der gegebenen Summe dieser Seiten die einzelnen Seiten a und b berechnen; und kann dann ferner die Seite c mittels der Sinusregel bestimmen.

Figur 177.



Aufgabe 478. Die Summe der beiden Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 170$ m, der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 42^0\,37'\,24''$ und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $70^0\,30'\,44{,}5''$. Man soll hieraus die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 170\,\text{m} \\ \gamma = 42^0\,37'\,24'' \\ \alpha = 70^0\,30'\,44{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 479. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 1250$ m, die dritte Seite c misst 1002 m und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel γ beträgt $123^0\,10'\,42''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Erkl. 342. Nach dem Projektionssatz besteht zwischen den drei Seiten a, b und c und dem Winkel γ die Relation:

a) . . . . $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

addiert und subtrahiert man auf der rechten Seite diese Gleichung $2ab$, so erhält man:

$$c^2 = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab - 2ab\cos\gamma$$

oder

$$c^2 = (a+b)^2 - 2ab\,(1+\cos\gamma)$$

und wenn man hierin nach der Erkl. 252:

$$1 + \cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

setzt

1) . . . $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$

In analoger Weise kann man für die Seiten a und b, wenn die denselben gegenüberliegenden Winkel mit α und β bezeichnet werden, bezw. die analogen Relationen herleiten:

2) . . . $a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

und

3) . . . $b^2 = (a+c)^2 - 4ac\cdot\cos^2\frac{\beta}{2}$

In analoger Weise kann man ferner, wenn man in jener nach dem Projektionssatz sich ergebenden Relation a) anstatt $2ab$ zu addieren und zu subtrahieren, $-2ab$ addiert und subtrahiert, und in der weitern Entwicklung die in der Erkl. 301 aufgestellte goniometrische Formel in Anwendung bringt, die Relation:

4) . . . $c^2 = (a-b)^2 + 4ab\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}$

und in analoger Weise die weiteren Relationen:

5) . . . $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

und

6) . . . $b^2 = (a-c)^2 + 4ac\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}$

herleiten.

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 1250\,\text{m} \\ c = 1002\,\text{m} \\ \gamma = 123^0\,10'\,42'' \end{cases}$

Andeutungen:

1) Man kann in analoger Weise verfahren wie in der Andeutung 1) zur Aufgabe 477 gesagt ist, und zunächst nach der in jener Andeutung aufgestellten Gleichung A) den Winkel $\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)$, bezw. den Winkel β berechnen und dann die Seiten a und b mittels Anwendung der Sinusregel oder mittels Anwendung des Tangentensatzes bestimmen.

2) Man kann, wie in der Andeutung 2) der Aufgabe 477, die Mollweidesche Formel 89 in Anwendung bringen, in derselben:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{180^0 - \gamma}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

setzen und hieraus die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen und dann in Rücksicht, dass $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ ist, die einzelnen Winkel berechnen, dann weiter verfahren wie vorhin angedeutet ist.

3) Man kann auch zuerst die Seiten a und b mittels Anwendung des Projektionssatzes, bezw. mittels Anwendung der in der Erkl. 342 aus dem Projektionssatz abgeleiteten Formeln wie folgt berechnen:

Aus der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 1):

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

erhält man in Rücksicht der gegebenen Beziehung:

a) . . . $a + b = S$

für das Produkt der Seiten a und b die Relation:

b) . . . $ab = \dfrac{S^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}$

aus welchen beiden Gleichungen die Seiten a und b leicht durch Substitution berechnet werden können. Die Winkel α und β kann man dann im weiteren nach der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 480. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 6954{,}2$ m, der dieser Seite anliegende Winkel α beträgt $56^0\,48'\,17{,}2''$ und die Summe der beiden andern Seiten a und b ist $S = 9468{,}4$ m; man soll die nicht bekannten Seiten und Winkel hieraus berechnen.

Erkl. 343. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\text{a)} \ldots \frac{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}$$

(Siehe Formel 170 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in diese Formel $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ u. $\beta = \frac{\beta}{2}$ und kehrt dieselbe um, so erhält man:

$$\text{b)} \ldots \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

Erkl. 344. Nach der Sinusregel besteht zwischen den drei Seiten a, b und c und den drei Winkeln α, β und γ eines Dreiecks die Relation:

$$\text{a)} \ldots a:b:c = \sin\alpha:\sin\beta:\sin\gamma$$

oder die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Aus dieser laufenden Proportion erhält man durch Anwendung des in der Erkl. 234 aufgestellten Satzes:

$$\frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\left(\text{oder} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ oder } = \frac{c}{\sin\gamma}\right)$$

oder

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Setzt man hierin nach der in der Erkl. 345 angeführten goniometrischen Formel:

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{a+b+c}{a} = \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$1) \ldots \frac{a+b+c}{a} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

in derselben Weise erhält man die analogen Relationen:

Gegeben: $\begin{cases} c = 6954{,}2 \text{ m} \\ \alpha = 56^0\,48'\,17{,}2'' \\ a+b = S = 9468{,}4 \text{ m} \end{cases}$

Andeutungen:

1) Nach der Mollweideschen Formel 89, siehe Antw. der Frage 21, besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{a+b}{c} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$a+b = S$$

und dass man nach der in der Erkl. 343 aufgestellten Formel für:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

setzen kann, so erhält man:

$$\frac{S}{c} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

Diese Gleichung in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$S - S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = c + c\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$S - c = S\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}(S+c) = S-c$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{S-c}{(S+c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{S-c}{S+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

Ist hiernach β berechnet, so kann man im weiteren die Seiten mittels Anwendung der Sinusregel berechnen.

2) Setzt man in der in der Erkl. 344 aufgestellten Gleichung 13:

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

für $a+b = S$

und löst dieselbe in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ auf, so erhält man:

$$\frac{S-c}{S+c} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{S-c}{S+c}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{S-c}{S+c}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

2) .... $\frac{a+b+c}{a}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

und

3) .... $\frac{a+b+c}{c}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$

Schreibt man die Relation b) in der Form:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{-c}{-\sin\gamma}$$

und bringt den in der Erkl. 234 aufgestellten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a+b-c}{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$$

$$\left(\text{oder} = \frac{b}{\sin\beta} \text{ oder} = \frac{c}{\sin\gamma}\right)$$

oder

$$\frac{a+b-c}{a}=\frac{\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Setzt man hierin nach der in der Erkl. 346 angeführten goniometrischen Formel:

$$\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{a+b-c}{a}=\frac{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder

4) .. $\frac{a+b-c}{a}=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

In derselben Weise erhält man die analogen Relationen:

5) .... $\frac{a+b-c}{b}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

6) .... $\frac{a+b-c}{c}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

7) .... $\frac{a-b+c}{a}=\frac{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

8) .... $\frac{a-b+c}{b}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

9) .... $\frac{a-b+c}{c}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

nämlich wiederum die in der Andeutung 1) aufgestellte Gleichung A), nach welcher der Winkel β berechnet werden kann.

3) Man kann auch zuerst die Seiten a und b berechnen, und zwar mittels Anwendung des Projektionssatzes; nach demselben ist:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

Da nun:

$$a+b=S$$

ist, also:

$$a=S-b$$

gesetzt werden kann, so geht in Rücksicht dessen jene Gleichung über in:

$$(S-b)^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

und diese Gleichung nach b aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$S^2-2Sb+b^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\alpha$$

$$S^2-c^2=2Sb-2bc\cos\alpha$$

$$2(S-c\cdot\cos\alpha)\cdot b=S^2-c^2$$

oder

C) . . . $b=\frac{S^2-c^2}{2(S-c\cdot\cos\alpha)}$

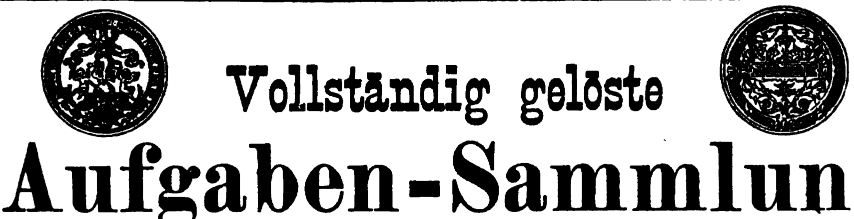
nach welcher Gleichung die Seite b berechnet werden kann; ist b berechnet, so kann man dann die Seite a aus der gegebenen Beziehung:

$$a+b=S$$

und die Winkel nach der Sinusregel berechnen.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

286. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 285. — Seite 321—336. Mit 5 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 285. — Seite 321—336. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck; Fortsetzung. Aufgaben, in welchen die Differenz zweier Seiten, auch die Differenz zweier Winkel und die Summe zweier Seiten vorkommen; in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten und eine Höhe oder zwei Höhen oder Seitenabschnitte, auch die Summe oder Differenz einer Seite und einer Höhe oder eines Seitenabschnitts vorkommen; in welchen die Summen oder Differenzen zweier durch eine Höhe gebildeten Seitenabschnitte vorkommen.

C Stuttgart 1886.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wir

☛ Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—26 kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben** beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften **für die Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$10) \ldots \frac{-a+b+c}{a} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

$$11) \ldots \frac{-a+b+c}{b} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$12) \ldots \frac{-a+b+c}{c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Durch Division der Gleichung 4) durch die Gleichung 1) erhält man ferner:

$$\frac{a+b-c}{a+b+c} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht der Erkl. 120 und 121:

$$13) \ldots \frac{a+b-c}{a+b+c} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Eine weitere grosse Anzahl dieser ähnlichen Gleichungen kann man sich durch entsprechende Division irgend zweier der Gleichungen 1) bis 12) bilden.

Erkl. 345. Bezeichnen α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, ist also deren Summe $= 180^0$, so besteht die Relation:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 269 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 346. Bezeichnen α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, ist also deren Summe $= 180^0$, so besteht die Relation:

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 270 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 481. In einem Dreieck ist die Summe S zweier Seiten a und $b = 28$ m, die dritte Seite c misst 14 m und die Differenz der derselben anliegenden Winkel α und β beträgt $\delta = 14^0\,15'\,0{,}1''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b = S = 28\,\text{m} \\ c = 14\,\text{m} \\ \alpha - \beta = \delta = 14^0\,15'\,0{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Man kann zuerst analog wie in den Andeutungen 1) und 2) der Aufgabe 477 gesagt ist, die Summe der Winkel α und β berechnen, dann diese einzelnen Winkel bestimmen und zur Berechnung der Seiten a und b alsdann im weiteren die Sinusregel in Anwendung bringen.

Aufgabe 482. Von einem Dreieck ist gegeben der Winkel $\gamma = 84^0\,27'\,16''$, die Summe $S = 10$ m der ihn einschliessenden Seiten a und b und die Differenz $\delta = 11^0\,24'\,32''$ der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β. Man soll aus

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} \gamma = 84^0\,27'\,16'' \\ a+b = S = 10\,\text{m} \\ \alpha - \beta = \delta = 11^0\,24'\,32'' \end{cases}$$

Andeutung. Berechnet man aus:

$$\alpha - \beta = \delta$$

und aus:

$$\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$$

diesen Angaben den Inhalt, sowie die nicht gegebenen Stücke des Dreiecks berechnen.

die Winkel α und β, so hat man diese Aufgabe auf die Aufgabe 477 zurückgeführt. Man kann auch direkt die Mollweidesche Formel 89 oder den Tangentensatz in Anwendung bringen, mittels ersterem die Seite c, mittels letzterem die Seiten a und b bestimmen.

Aufgabe 483. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 196{,}886$ m, der von beiden eingeschlossene Winkel γ ist $= 35^0\,40'$ und das Verhältnis jener Seiten ist $= 33:35$; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} a + b = S = 196{,}886\text{ m} \\ \gamma = 35^0\,40' \\ a:b = 33:35 \end{array}\right.$$

Andeutung. Man berechne zunächst aus den gegebenen Relationen:

$$\text{a)} \ldots a + b = 196{,}886\text{ m}$$

und

$$\text{b)} \ldots\ldots a:b = 33:35$$

die einzelnen Seiten a und b, dann kann man im weiteren zur Berechnung der Winkel α und β den Tangentensatz in Anwendung bringen, u. s. f.

Aufgabe 484. Die Summe der Seiten b und c eines Dreiecks ist $S = 29$ m und die Summe der Seiten a und c ist $S_1 = 27$ m; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$ beträgt.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} b + c = S = 29\text{ m} \\ a + c = S_1 = 27\text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \end{array}\right.$$

Andeutung. Nach der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 2) ist:

$$a^2 = (b+c)^2 - 4bc \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe:

$$\text{a)} \ldots b + c = S$$

ist:

$$\text{b)} \ldots bc = \frac{S^2 - a^2}{4\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

Da auch ferner noch gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{c)} \ldots a + c = S_1$$

gegeben ist, so hat man hiernach drei Gleichungen mit den drei Unbekannten a, b und c; eliminiert man aus Gleichung b) zuerst a, indem man nach Gleichung c) für:

$$a = S_1 - c$$

setzt, drückt dann aus der somit erhaltenen Gleichung die Seite c in die unbekannte Seite b und in die gegebenen Stücke aus und substituiert den somit für c erhaltenen Wert in Gleichung a), so erhält man eine Bestimmungsgleichung für b, welche in bezug auf b aufgelöst, gibt:

$$\text{A)} \ldots b = \frac{S_1 + S\cos\alpha \pm \sqrt{4S_1(S_1 - S)\cos^2\frac{\alpha}{2} + S^2\cos^2\alpha}}{1 + 2\cos\alpha}$$

nach welcher Gleichung man die Seite b berechnen kann, u. s. f.

Aufgabe 485. Die beiden Seiten b und c eines Dreiecks messen zusammen $S = 175$ m und die Seite c misst mit der dritten Seite a zusammen $S_1 = 295$ m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen, wenn der der Seite c gegenüberliegende Winkel $\gamma = 96^0 43' 58{,}5$ beträgt.

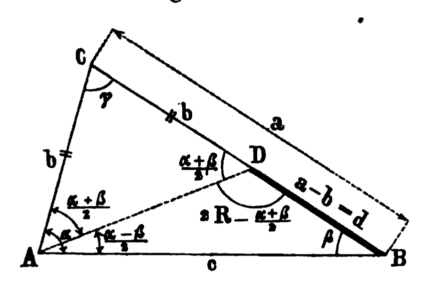
Gegeben: $\begin{cases} b + c = S = 175 \text{ m} \\ a + c = S_1 = 295 \text{ m} \\ \gamma = 96^0 43' 58{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 484.

s) Aufgaben, in welchen die Differenz zweier Seiten, auch die Differenz zweier Winkel und die Summe zweier Seiten gegeben ist.

Aufgabe 486. Die Differenz der zwei Seiten a und b eines Dreiecks sei $= d = 120$ m, die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β seien bezw. $= 73^0 44' 23{,}3''$ und $9^0 31' 38{,}2''$; wie gross sind die Seiten und welches ist der Inhalt des Dreiecks?

Figur 178.



Erkl. 347. Da in den gleichschenkligen Dreiecken ADC der Figuren 178 und 179:

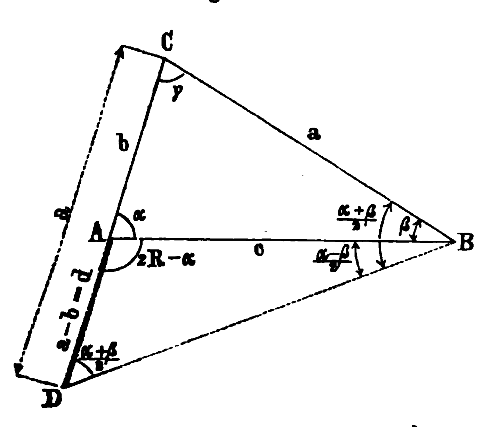
a) . . . $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

ist, so muss jeder der Basiswinkel dieser Dreiecke

$$= \frac{2R - \gamma}{2} = \frac{2R - [2R - (\alpha + \beta)]}{2}$$

oder $= \frac{\alpha + \beta}{2}$ sein.

Figur 179.



Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 120 \text{ m} \\ \alpha = 73^0 44' 23{,}3'' \\ \beta = 9^0 31' 38{,}2'' \end{cases}$

Andeutungen:

1) Anschliessend an die planimetrische Konstruktion eines Dreiecks aus der Differenz zweier Seiten und den diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel, kann man die geforderten Stücke mittels folgender Betrachtung berechnen:

Ist, siehe Figur 178, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man denkt sich, in Rücksicht dass gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 181, die Seite b kleiner als die Seite a ist, die kleinere Seite b auf der grösseren Seite a nach CD abgetragen und D mit A verbunden, so erhält man das Dreieck ABD, dessen Seite $BD = a - b = d$ ist, und dessen Winkel nach der Erkl. 347 die in der Figur 178 eingetragenen Werte haben (siehe auch die Erkl. 348). Aus diesem Dreieck erhält man zur Berechnung der Seite c nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin\left(2R - \frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

mithin:

$$\text{A) . . . . } c = d \cdot \frac{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

Ist hiernach die Seite c berechnet, also bekannt, so kann man eine der Seiten a und b mittels der Sinusregel und dann die andere Seite aus der gegebenen Relation:

$$a - b = d$$

berechnen. Zur Berechnung des Inhalts F benutzt man am besten den in der Erkl. 511 aufgestellten Satz.

Erkl. 348. Man kann auch, anstatt wie in der Figur 178, die kleinere Seite b auf der grössern Seite a abzutragen, wie in der Fig. 179 angedeutet ist, die grössere Seite a auf der kleinern Seite b abtragen.

Aus dem Dreieck ABD der Figur 179 erhält man dann nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{c}{d} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

woraus sich:

$$\text{a)} \ldots\ldots c = d \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

ergibt.

Vergleiche hiermit die in nebenstehender Andeutung 1) aufgestellte Gleichung A).

2) Nach der Mollweideschen Formel 90, siehe Antw. der Frage 21, besteht zur Berechnung der Seite c die Relation:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und hieraus erhält man, $a - b = d$ gesetzt, für die Seite c:

$$\text{B)} \ldots c = d \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

nämlich dieselbe Gleichung als Gleichung A).

3) Man kann auch zuerst die Seiten a und b berechnen und zwar mittels Anwendung des Tangentensatzes; man erhält nach demselben:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder, da:

$$a - b = d$$

ist:

$$\text{C)} \ldots a + b = d \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Hat man nach Gleichung C) die Summe der Seiten a und b berechnet, so kann man aus der hiernach berechneten Summe und aus der gegebenen Differenz jener Seiten die einzelnen Seiten a und b berechnen, und kann dann ferner die Seite c mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 487. Die Seite c eines Dreiecks ist 75,924 m lang, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel γ beträgt 40° 20′ 30″ und die Differenz der beiden andern Seiten a und b ist $d = 37{,}962$ m; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c = 75{,}924 \text{ m} \\ \gamma = 40^0\, 20'\, 30'' \\ a - b = d = 37{,}962 \text{ m} \end{cases}$

Andeutungen:

1) Man kann in analoger Weise verfahren wie in der Andeutung 1) zur vorigen Aufgabe 486 gesagt ist, und zunächst nach der in jener Andeutung aufgestellten Gleichung A), aus c, d $(= a - b)$ und $\frac{\alpha+\beta}{2} \left(= \frac{180^0 - \gamma}{2}\right)$ die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen, wobei man jedoch beachten muss, dass dem Winkel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ nach der Erkl. 271 zwei Werte entsprechen können; dann hieraus und aus der bekannten Winkelsumme die einzelnen Winkel α und β berechnen. Sind somit diese Winkel berechnet, so kann man die Seiten a und b mittels der Sinusregel bestimmen.

2) Man kann auch, analog wie in der Andeutung 2) der vorigen Aufgabe gesagt wurde,

Erkl. 349. Aus der nebenstehenden Gleichung k):

$$\frac{2S^2+2d^2}{4} - 2\cdot\frac{S^2-d^2}{4}\cdot\cos\gamma = c^2$$

erhält man S wie folgt:

$$S^2 + d^2 - (S^2 - d^2)\cdot\cos\gamma = 2c^2$$

$$S^2 - S^2\cdot\cos\gamma + d^2 + d^2\cdot\cos\gamma = 2c^2$$

$$S^2(1-\cos\gamma) + d^2(1+\cos\gamma) = 2c^2$$

Setzt man nunmehr nach den Erkl. 301 und 252:

$$1-\cos\gamma = 2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

und $1+\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2}$

so erhält man:

$$2S^2\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2} + 2d^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2} = 2c^2$$

$$S^2 = \frac{c^2 - d^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}$$

$$S = \sqrt{\frac{c^2 - d^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\sin^2\frac{\gamma}{2}}}$$

oder

$$S = \frac{\sqrt{c^2 - d^2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

die Mollweidesche Formel 90 in Anwendung bringen und verfahren wie in der vorstehenden Andeutung 1) gesagt ist.

3) Man kann auch zuerst die Seiten a und b mittels Anwendung des Projektionssatzes, bezw. mittels Anwendung der in der Erkl. 342 aus dem Projektionssatz abgeleiteten Formeln berechnen.

Aus der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 4):

$$c^2 = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

erhält man in Rücksicht der gegebenen Beziehung:

a) . . . $a - b = d$

für das Produkt der Seiten a und b die Relation:

b) . . . $ab = \dfrac{c^2-d^2}{4\sin^2\frac{\gamma}{2}}$

aus welchen beiden Gleichungen die Seiten a und b leicht durch Substitution berechnet werden können. Die Winkel α und β kann man alsdann im weiteren nach der Sinusregel berechnen.

4) Man kann auch zuerst die Seiten a und b ohne Anwendung der in der Erkl. 342 aufgestellten Hülfsgleichungen wie folgt berechnen:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $a - b = d$

ferner hat man nach dem Projektionssatz die Beziehung:

b) . . . $a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma = c^2$

aus welchen beiden Gleichungen man zunächst die Summe $a+b$ folgendermassen bestimmen kann:

Setzt man:

c) . . . $a + b = S$

so erhält man aus den Gleichungen a) und c) durch Addition bezw. Subtraktion:

d) . . . $a = \dfrac{S+d}{2}$

und

e) . . . $b = \dfrac{S-d}{2}$

oder

f) . . . $a^2 = \dfrac{S^2+2Sd+d^2}{4}$

und

g) . . . $b^2 = \dfrac{S^2-2Sd+d^2}{4}$

Durch Additon dieser beiden Gleichungen f) und g) erhält man weiter:

$$a^2+b^2 = \frac{S^2+2Sd+d^2}{4} + \frac{S^2-2Sd+d^2}{4}$$

oder

$$h) \ldots a^2 + b^2 = \frac{2S^2 + 2d^2}{4}$$

und durch Multiplikation der Gleichungen d) und e) erhält man:

$$a \cdot b = \frac{S+d}{2} \cdot \frac{S-d}{2}$$

oder

$$i) \ldots ab = \frac{S^2 - d^2}{4}$$

Setzt man nunmehr die Werte für $a^2 + b^2$ und für ab aus den Gleichungen h) und i) in Gleichung b) ein, so erhält man:

$$k) \ldots \frac{2S^2 + 2d^2}{4} - 2 \cdot \frac{S^2 - d^2}{4} \cos\gamma = c^2$$

Löst man diese Gleichung nach $S (= a + b)$ auf, so erhält man nach der Erkl. 349:

$$S = \frac{\sqrt{c^2 - d^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

In Rücksicht dieses für $S = a + b$ berechneten Wertes und in Rücksicht der Gleichung a) hat man also zur Berechnung der Seiten a und b die Gleichungen:

$$l) \ldots a + b = \frac{\sqrt{c^2 - d^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}}{\sin \frac{\gamma}{2}}$$

und

$$o) \ldots a - b = d$$

Hieraus erhält man durch Addition:

$$A) \ldots a = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{c^2 - d^2 \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2}}}{\sin \frac{\gamma}{2}} + d\right)$$

und durch Subtraktion:

$$B) \ldots b = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{c^2 - d^2 \cos^2 \frac{\gamma}{2}}}{\sin \frac{\gamma}{2}} - d\right)$$

Aufgabe 488. In einem Dreieck differieren die Seiten a und b um $d = 1$ km, der der kleineren Seite b gegenüberliegende Winkel β sei $= 45^0$ und die dritte Seite c sei 3 km lang; wie gross sind die nicht gegebenen Winkel und die Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 1 \text{ km} \\ \beta = 45^0 \\ c = 3 \text{ km} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst einen der Winkel, z. B. den Winkel α wie folgt:

Gemäss der Aufgabe ist:

$$a) \ldots a - b = d$$

ferner hat man nach der Mollweideschen Formel 90, siehe Antw. der Frage 21, die Relation:

$$b) \ldots \frac{a-b}{c} = \frac{\sin \frac{\alpha - \beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$\text{c)} \ldots \frac{d}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Bringt man nun in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\text{d)} \ldots \frac{c+d}{c-d} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2} - \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Bringt man jetzt in bezug auf den Quotienten rechts die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben für:

$$\alpha = \frac{\alpha+\beta}{2}$$

und für $\beta = \frac{\alpha-\beta}{2}$

setzt, so erhält man weiter:

$$\frac{c+d}{c-d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\alpha-\beta}{2}}{2}}$$

oder

$$\frac{c+d}{c-d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich zur Berechnung des Winkels α die Relation:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{c+d}{c-d} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Hat man hiernach α berechnet, so kann leicht aus der Beziehung:

$$\text{B)} \ldots \gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

den Winkel γ berechnen und dann die Seiten a und b mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 489. Die Differenz der Seiten a und b eines Dreiecks ist $d = 72$ m, die dritte Seite c misst 120 m und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $43^0\,36'\,10{,}1''$. Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 72\text{ m} \\ c = 120\text{ m} \\ \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 488.

Aufgabe 490. In einem Dreieck ist die Differenz d zweier Seiten a und $b = \frac{1}{2}$ km, die dritte Seite c misst 2 km und die Differenz der derselben anliegenden Winkel α und β beträgt 10^0; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 1/2\text{ km} \\ c = 2\text{ km} \\ \alpha - \beta = 10^0 \end{cases}$

Andeutung. Man bringe die Mollweidesche Formel 90:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

in Anwendung, setze in derselben:

$$a - b = d$$

und berechne dann aus derselben $\frac{\alpha + \beta}{2}$ bzw. $\alpha + \beta$, u. s. f.

Aufgabe 491. Von einem Dreieck kennt man die Differenz der Seiten a und b, dieselbe ist $d = 360$ dm, die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β, dieselbe ist $= 71^0\,35'\,41{,}3''$ und den dritten Winkel γ, welcher $96^0\,57'\,20{,}1''$ beträgt; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 360 \text{ dm} \\ \alpha - \beta = 71^0\,35'\,41{,}3'' \\ \gamma = 96^0\,57'\,20{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne aus der nach dem Tangentensatz sich ergebenden Relation:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

indem man in derselben:

$$a - b = d$$

und

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^0 - \gamma}{2}$$

setzt, zunächst die Summe der Seiten a und b, dann kann man leicht aus $a - b$ und $a + b$ die einzelnen Seiten a und b berechnen.

Aufgabe 492. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 1200{,}50$ m, deren Differenz d beträgt 498,20 m und der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 98^0\,50'$; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a + b = S = 1200{,}50 \text{ m} \\ a - b = d = 498{,}20 \text{ m} \\ \gamma = 98^0\,50' \end{cases}$$

Andeutung. Aus den gegebenen Beziehungen:

$$a + b = S$$

und

$$a - b = d$$

kann man leicht die Seiten a und b berechnen. Die Winkel α und β kann man im weiteren mittels der nach dem Tangentensatz sich ergebenden Relation:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

berechnen, wenn man in derselben:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^0 - \gamma}{2}$$

setzt, die für a und b berechneten Werte und den für γ gegebenen Zahlenwert substituiert, dann aus der hiernach sich ergebenden Gleichung zunächst die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ bestimmt und schliesslich aus dieser Differenz und der bekannten Summe $\alpha + \beta$ die einzelnen Winkel berechnet.

Aufgabe 493. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 13$ m, die Summe $S = 29$ m der Seiten b und c und die Differenz $d = 1$ m dieser Seiten; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ b + c = S = 29 \text{ m} \\ b - c = d = 1 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zunächst aus den gegebenen Beziehungen:

$$b + c = S$$

und

$$b - c = d$$

die Seiten b und c. Da man alsdann die drei Seiten des Dreiecks kennt, so verfahre man im weiteren analog wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gesagt wurde.

Aufgabe 494. Von einem Dreieck kennt man die Summe $S = 28$ m der Seiten a und b, die Summe $S_1 = 29$ m der Seiten b und c und die Differenz $d = -2$ m der Seiten a und b; man soll die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a+b = S = 28\text{ m} \\ b+c = S_1 = 29\text{ m} \\ a-b = d = -2\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne aus den gegebenen Relationen:

$$a+b = S$$
$$a-b = d$$

die Seiten a und b, dann substituiere man den Wert für b in die gegebene Relation:

$$b+c = S_1$$

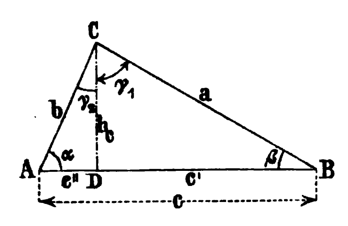
und berechne hieraus die dritte Seite c; dann verfahre man weiter wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

---

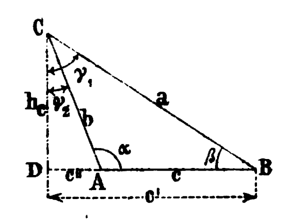
t) Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten und eine Höhe oder zwei Höhen oder Seitenabschnitte (gebildet durch Höhen), auch die Summe oder Differenz einer Seite und einer Höhe oder eines Seitenabschnitts vorkommen.

Aufgabe 495. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen zusammen $S = 170$ m, der der grösseren Seite b gegenüberliegende Winkel β ist $= 75^0\,24'\,36''$ und die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c ist 68 m lang. Wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Figur 180.



Figur 181.



Gegeben: $\begin{cases} a+b = S = 170\text{ m} \\ \beta = 75^0\,24'\,36'' \\ h_c = 68\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist, siehe die Figuren 180 und 181 und die Erkl. 278—280, die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse die Seite a und dessen einer spitze Winkel der gegebene Winkel β ist. Aus diesem Dreieck kann man mittels der gegebenen Höhe h_c und dem gegebenen Winkel β die Seite a berechnen. Ist a berechnet, so kann man aus der gegebenen Beziehung:

$$a+b = S$$

die Seite b berechnen, indem man für a den berechneten Wert substituiert. Dann kann man, siehe Figur 180, aus der Beziehung:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

den Winkel α berechnen, wobei man, siehe die Figuren 180 und 181, berücksichtigen muss, dass nach der Erkl. 271 dem Winkel α zwei Werte entsprechen können. Die dritte Seite c kann man schliesslich mittels Anwendung der Sinusregel berechnen, wobei sich ebenfalls zwei Werte für c ergeben müssen.

Aufgabe 496. Die Summe der beiden Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 28$ m, der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $59^0\ 29'\ 23{,}1''$ und die zur Seite b gehörige Höhe h_b misst 11,2 m; man soll hieraus die Seiten und die nicht gegebenen Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a + b = S = 28\,\text{m} \\ \gamma = 59^0\ 29'\ 23{,}1'' \\ h_b = 11{,}2\,\text{m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 124, aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC mittels der gegebenen Höhe h_b und dem gegebenen Winkel γ zunächst die Seite a, dann bestimme man die Seite b mittels der gegebenen Beziehung $a + b = S$, indem man hierin den für a berechneten Wert substituiert. Da man hiernach von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den von beiden eingeschlossenen Winkel γ kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 497. In einem Dreieck beträgt die Summe S der zwei Seiten a und b = 170 m, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ misst $96^0\ 43'\ 58{,}5''$ und die zur dritten Seite gehörige Höhe h_c ist 24 m lang; man soll aus diesen Angaben die unbekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a + b = S = 170\,\text{m} \\ \gamma = 96^0\ 43'\ 58{,}5'' \\ h_c = 24\,\text{m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zunächst die Seite c wie folgt:

Nach dem in der Erkl. 151 aufgestellten Satz hat man für den Inhalt F des Dreiecks die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$$

ferner hat man auch für diesen Inhalt F die Beziehung:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich die Beziehung:

$$\text{c)} \ldots ab \cdot \sin\gamma = c \cdot h_c$$

Um nun hieraus das Produkt ab zu eliminieren, beachte man, dass nach der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 1) die Beziehung besteht:

$$\text{d)} \ldots c^2 = (a + b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und dass sich hieraus, in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe $a + b = S$ ist, für das Produkt ab:

$$\text{e)} \ldots ab = \frac{S^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}}$$

ergibt. Substituiert man diesen Wert für ab in vorstehende Gleichung c), so erhält man für c die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{S^2 - c^2}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\gamma = c \cdot h_c$$

Setzt man hierin nach der Erkl. 52 für:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

so erhält man ferner:

$$\frac{(S^2 - c^2) \cdot 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}{4 \cos^2 \frac{\gamma}{2}} = c \cdot h_c$$

oder nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht der Erkl. 120:

$$\text{f)} \ldots \frac{S^2 - c^2}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = c \cdot h_c$$

und diese Gleichung in bezug auf c aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$S^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} - c^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = 2 c h_c$$

$$c^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} + 2 c h_c = S^2 \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

$$c^2 + \frac{2 h_c}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot c = S^2$$

$$c^2 + \frac{2 h_c}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}} \cdot c + \left(\frac{h_c}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right)^2 = S^2 + \left(\frac{h_c}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right)^2$$

$$\left(c + \frac{h_c}{\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}\right)^2 = S^2 + h^2_c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2} \quad \text{(s. Erkl. 15)}$$

$$c + h_c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \pm \sqrt{S^2 + h^2_c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}}$$

(s. Erkl. 15)

mithin ist:

$$\text{A)} \ldots c = - h_c \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \sqrt{S^2 + h^2_c \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\gamma}{2}}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Ist hiernach die Seite c berechnet, so kennt man von dem Dreieck $a + b$, γ und c und man kann im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt ist.

Aufgabe 498. Die Summe zweier Winkel a und b eines Dreiecks ist $S = 528$ m, die dritte Seite c misst 424 m und die zu dieser Seite gehörige Höhe h_c ist $= 84$ m lang; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und die Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 528 \text{ m} \\ c = 424 \text{ m} \\ h_c = 84 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 497. Man erhält, wenn man die in der Andeutung der Aufgabe 497 aufgestellte Gleichung f):

$$\frac{S^2 - c^2}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = c \cdot h_c$$

in bezug auf $\operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$ auflöst:

$$\text{A)} \ldots\ldots \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2 c \cdot h_c}{S^2 - c^2}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann. Da hiernach $a + b$, c und γ bekannt ist, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt ist.

Aufgabe 499. Die Summe der zwei Seiten b und c eines Dreiecks ist $S = 175$ m, die zu der letzteren dieser Seiten gehörige Höhe h_c misst 24 m und die dritte Seite a ist 145 m lang; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b + c = S = 175 \text{ m} \\ h_c = 24 \text{ m} \\ a = 145 \text{ m} \end{cases}$

Andeutungen:

1) Denkt man sich in dem zu berechnenden Dreieck die Seite b auf der Verlängerung der Seite c angetragen und den Endpunkt D dieser Verlängerung mit der Ecke C verbunden, so erhält man ein Dreieck BCD, dessen eine Seite $BD = b + c = S$, dessen andere Seite $BC = a$ und dessen zur Seite $b + c$ gehörige Höhe h_c gegeben ist. Dieses Dreieck kann man, wie in der Andeutung zur Aufgabe 346 gesagt ist, berechnen.

2) Man kann aus h_c und a zunächst den Winkel β berechnen, da man alsdann von dem Dreieck $a + b$, β und a kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde.

Aufgabe 500. In einem Dreieck beträgt die Summe S der Seiten b und $c = 449$ dm, die zur letzteren dieser Seiten gehörige Höhe h_c ist 40 dm lang und der der ersteren jener Seiten gegenüberliegende Winkel β ist $= 5^0\,43'\,29{,}3''$; man soll die unbekannten Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b + c = S = 449 \text{ dm} \\ h_c = 40 \text{ dm} \\ \beta = 5^0\,43'\,29{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 499.

Aufgabe 501. Die Summe der Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 250$ m, die Differenz der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β beträgt $23^0\,43'\,10{,}5''$, und die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c ist 28 m lang; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 250 \text{ m} \\ h_c = 28 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 23^0\,43'\,10{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Man kann zunächst die Seite c berechnen, indem man in der in Andeutung der Aufgabe 497 aufgestellten Gleichung A):

$$\text{a)} \ldots c = -h_c \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \sqrt{S^2 + h^2_c \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\gamma}{2}}$$

für $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$ den aus der Gleichung A) der Andeutung zur Aufgabe 498 sich ergebenden Wert:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{S^2 - c^2}{2c \cdot h_c}$$

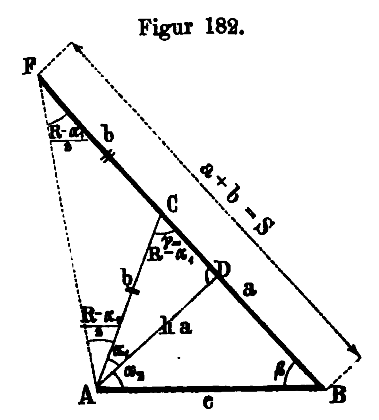
substituiert, u. s. f.

Aufgabe 502. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 14{,}715$ m, die zur Seite a gehörige Höhe h_a bildet mit der Seite b einen Winkel $\alpha_1 = 33^0\,20'\,36''$ und die dritte Seite c misst 7,25 m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 14{,}715 \text{ m} \\ \sphericalangle\, h_a b = \alpha_1 = 33^0\,20'\,36'' \\ c = 7{,}25 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 182, ABC das Dreieck, welches den gegebenen Bedingungen entspricht, und man denkt sich b auf der Verlängerung von a nach CF abgetragen und F mit A verbunden, so erhält man das Dreieck ABF, in welchem die Seite $BF = a + b = S$, die Seite $AB = C$, und in

Figur 182.



welchem ferner nach der Erkl. 113 und in Rücksicht, dass der Winkel $ACD = R - \alpha_1$ ist, der Winkel $AFD = \frac{R - \alpha_1}{2}$ ist. Von diesem Dreieck AFB kennt man also zwei Seiten und den der kleineren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel. Wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt, kann man somit aus jenem Dreieck den Winkel β berechnen. Ist β berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Summe der Seiten a und b, die Seite c und den Winkel β, und kann somit im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde.

Aufgabe 503. Die Summe der beiden Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 1000$ m, der von beiden eingeschlossene Winkel γ ist $= 123^0\,41'\,20''$ und das Verhältnis der Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite c durch die zugehörige Höhe h_c geteilt wird, sei $= 10:7$; man soll hieraus die Seiten und die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 1000 \text{ m} \\ \gamma = 123^0\,41'\,20'' \\ c' : c'' = 10 : 7 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel α und β des Dreiecks wie folgt:

Ist, siehe Figur 180, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken ACD und BCD die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)} \ldots c' = h_c \cdot \operatorname{ctg}\beta \\ \quad \text{und} \\ \text{b)} \ldots c'' = h_c \cdot \operatorname{ctg}\alpha \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 43)}$$

Aus denselben erhält man durch Division:

$$\frac{c'}{c''} = \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

oder, wenn man für das Verhältnis $\frac{c'}{c''}$ den gegebenen Wert setzt:

$$\text{c)} \ldots \frac{\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha} = \frac{10}{7}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Differenzen- und Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\alpha} = \frac{10 - 7}{10 + 7}$$

oder nach der in der Erkl. 350 aufgestellten Formel:

$$\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin(\beta + \alpha)} = \frac{3}{17}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$\alpha + \beta = 2R - \gamma$$

also:

$\sin(\alpha + \beta) = \sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$ (s. Erkl. 66)

ist:

$$\text{A)} \ldots \sin(\beta - \alpha) = \frac{3}{17} \cdot \sin\gamma$$

Mittels welcher Gleichung man $\beta - \alpha$ berechnen kann. Da man hiernach $\beta - \alpha$ und $\beta + \alpha$ $(= 2R - \gamma)$ kennt, so kann man leicht die Winkel α und β berechnen und dann weiter verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt wurde.

Erkl. 350. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)}$$

(Siehe Formel 175 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 504. Die Seiten a und b eines Dreiecks messen zusammen $S = 221$ m und die zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_b sind bezw. $= 23,7624$ und $= 32,7586$ m lang; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 921 \text{ m} \\ h_a = 23,7624 \text{ m} \\ h_b = 32,7586 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man beachte, dass gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \ldots a + b = S$$

und dass nach der Erkl. 295 die weitere Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

besteht, und dass man aus denselben die Seiten a und b berechnen kann. Sind die Seiten a und b hiernach berechnet, so kann man mittels einer derselben und einer der gegebenen Höhen den Winkel γ bestimmen, wonach man von dem Dreieck zwei Seiten und den von beiden eingeschlossenen Winkel kennt.

Aufgabe 505. Die Seite c eines Dreiecks misst mit der ihr zugehörigen Höhe h_c zusammen $S = 284$ dm, die jener Seite anliegenden Winkel α und β betragen bezw. $81^0\,12'\,9,3''$ und $24^0\,11'\,22,3''$; man soll die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c + h_c = S = 284 \text{ dm} \\ \alpha = 81^0\,12'\,9,3'' \\ \beta = 24^0\,11'\,22,3'' \end{cases}$

Andeutung. Man hat gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \ldots c + h_c = S$$

ferner erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken, welche die Höhe h_c mit den Abschnitten c' und c'' der Seite c und den beiden andern Seiten des Dreiecks bildet (siehe die Figuren 180 und 181) die Relationen:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{h_c}{c''}$$

und

$$\text{c)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{h_c}{c'}$$

Setzt man die aus den Gleichungen b) und c) für c' und c'' sich ergebenden Werte:

$$c'' = \frac{h_c}{\operatorname{tg}\alpha}$$

und

$$c' = \frac{h_c}{\operatorname{tg}\beta}$$

in Gleichung a), so erhält man in Rücksicht, dass:

$$c = c' + c''$$

ist, für h_c die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{h_c}{\operatorname{tg}\alpha} + \frac{h_c}{\operatorname{tg}\beta} + h_c = S \quad .$$

Diese Gleichung in bezug auf h_c aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$h_c \cdot \operatorname{tg}\beta + h_c \cdot \operatorname{tg}\alpha + h_c \cdot \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta = S \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

$$h_c(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) = S \cdot \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta$$

oder

$$\text{A)} \ldots h_c = S \cdot \frac{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta}$$

wonach man die Höhe h_c berechnen kann. Ist hiernach h_c berechnet, so kann man leicht aus der Gleichung a) die Seite c bestimmen, u. s. f.

Aufgabe 506. Die Differenz zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $d = 0{,}75$ m, der der grösseren Seite a gegenüberliegende Winkel α ist $= 65^0\,34'\,12{,}6''$ und die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c misst 3,28 m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 0{,}75 \text{ m} \\ a > b \\ \alpha = 65^0\,34'\,12{,}6'' \\ h_c = 3{,}28 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 495.

Aufgabe 507. Die beiden Seiten a und b eines Dreiecks, von welchen $b > a$ ist, differieren um $d = 2$ m, die zur ersteren dieser Seiten gehörige Höhe h_a misst 12,9231 m und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $59^0\,29'\,23{,}1''$; man berechne hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} b - a = d = 2 \text{ m} \\ b > a \\ h_a = 12{,}9231 \text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 496.

Aufgabe 508. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist $= 28$ m, der dieser Seite gegenüberliegende Winkel γ misst $23^0\,43'\,10{,}4''$ und die beiden andern Seiten a und b, von welchen $a > b$ ist, differieren um $d = 144$ m. Man soll die Seiten und die übrigen Winkel berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 144 \text{ m} \\ h_c = 28 \text{ m} \\ \gamma = 23^0\,43'\,10{,}4'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 497; man erhält:

$$\text{A)} \ldots : c = \sqrt{d^2 + h^2{}_c \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}} + h \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$$

Aufgabe 509. Die Differenz zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $d = 370$ m, die dritte Seite c ist $= 1167$ m und die zu dieser Seite gehörige Höhe h_c ist $= 953$ m. Wie gross ist der von den beiden Seiten a und b eingeschlossene Winkel γ?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 370 \text{ m} \\ c = 1167 \text{ m} \\ h_c = 953 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 498; man erhält:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{2c \cdot h_c}{c^2 - d^2}$$

Aufgabe 510. Die Seite b eines Dreiecks ist um $d = 125$ m grösser als die Seite c, die zur letzteren Seite gehörige Höhe h_c misst 24 m und die dritte Seite a ist 145 m lang; man berechne hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} b - c = d = 125 \text{ m} \\ h_c = 24 \text{ m} \\ a = 145 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 499.

Aufgabe 511. Die b Seite eines Dreiecks ist um $d = 220$ m kleiner als die Seite a, und die zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_b sind bezw. $= 81{,}7467$ und $= 171{,}7431$ m lang. Man berechne hieraus die Seiten und Winkel dieses Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = d = 220 \text{ m} \\ h_a = 81{,}7467 \text{ m} \\ h_b = 171{,}7431 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 504.

Aufgabe 512. Die Seite b eines Dreiecks ist um $d = 200$ cm grösser als der ihr anliegende Abschnitt c'' der Seite c, welcher durch die zu c gehörige Höhe auf der Seite c gebildet wird, die den Seiten b und c gegenüberliegenden Winkel β und γ sind bezw. $= 86^0\,3'\,0{,}4''$ und $43^0\,1'\,23{,}5''$. Man soll die Dreiecksseiten berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b - c'' = d = 200 \text{ cm} \\ \beta = 86^0\,3'\,0{,}4'' \\ \gamma = 43^0\,1'\,23{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Man hat gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \ldots b - c'' = d$$

ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck, welches die zur Seite c gehörige Höhe h_c mit der Seite b und dem Abschnitt c'' der Seite c bildet, siehe Figur 180, die Relation:

$$\cos\alpha = \frac{c''}{b}$$

oder

$$\text{b)} \ldots c'' = b\cos\alpha$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man durch Substitution:

$$b - b\cos\alpha = d$$

$$b(1 - \cos\alpha) = d$$

$$b = \frac{d}{1 - \cos\alpha}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 301:

$$\text{A)} \ldots b = \frac{d}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man in dieser Gleichung den für d gegebenen Wert und berücksichtigt man, dass $\alpha = 180 - (\beta + \gamma)$ ist, so kann man hiernach die Seite b berechnen. Die übrigen Seiten kann man aus der berechneten Seite b und den gegebenen Winkeln mittels der Sinusregel berechnen.

---

u) Aufgaben, in welchen die Summen oder Differenzen zweier durch eine Höhe gebildeten Seitenabschnitte, auch Winkeldifferenzen, Höhen, auch Verhältnisse und Summen und Differenzen der Dreiecksseiten vorkommen.

Aufgabe 513. Man kennt von einem Dreieck die Differenz $d = 2{,}2308$ m der Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c desselben durch die zugehörige Höhe h_c zerlegt wird, und die jener Seite c anliegenden Winkel $\alpha = 67^0\,22'\,48{,}5''$ und $\beta = 59^0\,29'\,23{,}1''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Stücke des Dreiecks berechnen und zwar unter der Voraussetzung, dass $c' > c''$ ist.

Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d = 2{,}2308 \text{ m} \\ \alpha = 67^0\,22'\,48{,}5'' \\ \beta = 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{cases}$

Andeutungen:

1) Man kann zunächst eine der Seiten a und b, z. B. die Seite a wie folgt berechnen:

Ist, siehe Figur 183, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \ldots c' - c'' = d$$

ferner ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken BDC und ADC die Relationen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{b)} \ldots c_1 = a \cdot \cos\beta \\ \text{und}\quad &\text{c)} \ldots c_2 = b \cdot \cos\alpha \end{aligned}\right\} \text{(s. die Erkl. 51).}$$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst durch Substitution:

$$\text{d)} \ldots a \cdot \cos\beta - b \cdot \cos\alpha = d$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Alexander Hund,

287. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 286. — Seite 337—352 Mit 7 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 286. — Seite 337—352. Mit 7 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen die Summen oder Differenzen zweier durch eine Höhe gebildeten Seitenabschnitte vorkommen; in welchen Summen oder Differenzen zweier Höhen; in welchen Summen oder Differenzen von Höhenabschnitten vorkommen.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

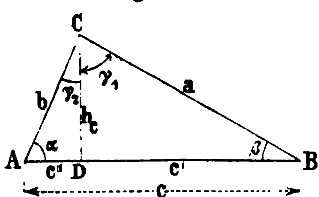
Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

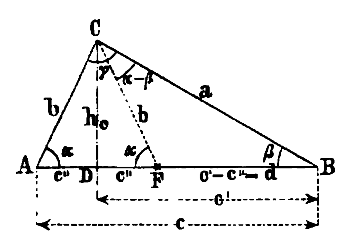
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 183.



Figur 184.



Erkl. 351. Man kann auch, anstatt, wie in nebenstehender Andeutung 2) gesagt wurde, den kleinern Abschnitt c' auf dem grösseren Abschnitt abzutragen, siehe Figur 184, den grössern Abschnitt auf dem kleineren Abschnitt abtragen (siehe die Erkl. 220). Die Lösung der diesbezüglichen Aufgabe bleibt im allgemeinen dieselbe.

Erkl. 352. In dem Dreieck BFC der Figur 184 ist $\sphericalangle BFC = 2R - \alpha$, ferner ist der Winkel $FCB = 2R - [(2R - \alpha) + \beta]$ oder $= 2R - (2R - \alpha) - \beta = 2R - 2R + \alpha - \beta$ mithin $= \alpha - \beta$.

Berücksichtigt man nunmehr, dass sich nach der Sinusregel aus dem ganzen Dreieck ABC für b die Beziehung:

$$\text{e)} \ldots b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$$

ergibt, so erhält man aus den Gleichungen d) und e) für a die Bestimmungsgleichung:

$$a \cdot \cos\beta - \frac{a \cdot \sin\beta \cos\alpha}{\sin\alpha} = d$$

und diese Gleichung nach a aufgelöst, gibt:

$$a\left(\cos\beta - \cos\alpha \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\right) = d$$

$$a \cdot \frac{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}{\sin\alpha} = d$$

mithin:

$$a = \frac{d \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha \cos\beta - \cos\alpha \sin\beta}$$

oder in Rücksicht der in der Erkl. 232 aufgestellten goniometrischen Formel:

$$\text{A)} \ldots a = d \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

nach welcher Gleichung die Seite a berechnet werden kann. Aus dieser Seite a und den gegebenen Winkeln α, β und γ [$= 2R - (\alpha + \beta)$] kann man im weiteren mittels der Sinusregel die übrigen Seiten b und c berechnen.

2) Die Seite a kann man auch, anschliessend an die Konstruktion eines Dreiecks aus der gegebenen Differenz $c' - c''$ und den Winkel α und β wie folgt berechnen:

Trägt man, siehe Figur 184, den kleineren Abschnitt c'' auf dem grösseren Abschnitt c' von D nach DF ab (siehe die Erkl. 351) und verbindet F mit C, so erhält man das gleichschenklige Dreieck AFC, dessen Basiswinkel $= \alpha$ sind und dessen Schenkel gleich der Seite b sind, und das schiefwinklige Dreieck BFC, dessen eine Seite BF gleich der gegebenen Differenz $c' - c'' = d$ ist, dessen beide anderen Seiten bezw. $= a$ und $= b$ sind und dessen Winkel die in der Figur 184 verzeichneten Werte haben (siehe Erkl. 352). Nach der Sinusregel erhält man aus diesem letzteren Dreieck:

$$\frac{a}{d} = \frac{\sin(2R - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 66 zur Berechnung der Seite a die Relation:

$$\text{B)} \ldots a = d \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

nämlich dieselbe Relation als die in der Andeutung 1) aufgestellte.

Aufgabe 514. Die Seiten a und b eines Dreiecks sind bezw. $= 3,57$ m und $= 2,28$ m, die Differenz der beiden Abschnitte c' und c'' in welche die dritte Seite c durch die ihr zugehörige Höhe zerlegt wird und von welchen $c'' > c'$ ist, ist $d = 1,72$ m; wie gross sind die Winkel und die nicht gegebenen Seiten des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c'' - c' = d = 1,72 \text{ m} \\ a = 3,57 \text{ m} \\ b = 2,28 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man bilde sich, wie in der Andeutung 2) der vorigen Aufgabe 513 gesagt wurde, ein Hülfsdreieck und berechne aus diesem Hüfsdreieck, von welchem man die drei Seiten kennt, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, die Winkel α. $180^0 - \beta$ und $\beta - \alpha$, wonach dann leicht die Winkel β und γ und die dritte Seite c bestimmt werden können.

Aufgabe 515. Die beiden auf der Seite c eines Dreiecks durch die zu dieser Seite gehörige Höhe gebildeten Abschnitte c' und c'' differieren um $d = 4$ m, die Seite a dieses Dreiecks misst 13 m und der von diesen Seiten a und c eingeschlossene Winkel β beträgt $67^0\ 22'\ 48,5''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen, wenn man noch weiss, dass der Abschnitt c'' grösser als der Abschnitt c' ist.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c'' - c' = d = 4 \text{ m} \\ a = 13 \text{ m} \\ \beta = 67^0\ 22'\ 48,5'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 513.

Aufgabe 516. Die Höhe, welche zu der Seite c eines Dreiecks gehört, zerlegt diese Seite in zwei Abschnitte c' und c'', von welchen der Abschnitt c' grösser als der Abschnitt c'' ist, und welche um $d = 136$ dm differieren, eine der andern Seiten dieses Dreiecks, z. B. die Seite a misst 145 dm und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel α beträgt $73^0\ 44'\ 23,3''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c' - c'' = d = 136 \text{ dm} \\ a = 145 \text{ dm} \\ \alpha = 73^0\ 44'\ 23,3'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 513.

Aufgabe 517. Von den beiden Abschnitten c' und c'', in welche die Seite c eines Dreiecks durch die zugehörige Höhe h_c zerlegt wird, ist c' um 78 m grösser als c'', die beiden jener Seite c anliegenden Winkel α und β differieren um $\delta = 32^0\ 10'\ 53,8''$, und eine der beiden andern Seiten, z. B. die Seite a misst 101 m; man berechne die nicht gegebenen Stücke dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c' - c'' = 78 \text{ m} \\ \alpha - \beta = 32^0\ 10'\ 53,8'' \\ a = 101 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 513.

Aufgabe 518. Die zur Seite c gehörige Höhe h_c eines Dreiecks ist $= 24$ m, die beiden Abschnitte c' und c'', in welche hierdurch die Seite c geteilt wird und von welchen $c' > c''$ ist, differieren um $d = 136$ m und die beiden der Seite c anliegenden Winkel α und β differieren um $\delta = 64^0\ 12'\ 45,1''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c' - c'' = d = 136 \text{ m} \\ h_c = 24 \text{ m} \\ \alpha - \beta = \delta = 64^0\ 12'\ 45,1'' \end{cases}$$

Andeutung. Bildet man sich, siehe Figur 184, wie in der Andeutung 2) der Aufgabe 513 gesagt wurde, das Hülfsdreieck BCF, so kennt man von diesem Dreieck die Seite $BF = c' - c'' = d$, die zu dieser Seite gehörige Höhe h_c und den dieser Seite gegen-

überliegenden Winkel $\alpha - \beta$. Dieses Hülfsdreieck kann man somit berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gesagt wurde. Ist dieses Dreieck berechnet, so hat die Berechnung der noch fehlenden Stücke jenes Dreiecks keine Schwierigkeiten mehr.

Aufgabe 519. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c misst 12 m und zerlegt die Seite c in zwei Abschnitte c' und c'', welche um $d = 4$ m differieren; wie gross sind die Winkel und Seiten dieses Dreiecks, wenn der der Seite c gegenüberliegende Winkel $\gamma = 59^0\,29'\,23{,}1''$ beträgt und c'' kleiner als c' ist?

Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d = 4\text{ m} \\ h_c = 12\text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Bildet man sich, siehe Fig. 184, wie in der Andeutung 2) der Aufgabe 513 gesagt wurde, das Hülfsdreieck BCF, so kennt man von diesem Dreieck die Seite $BF = c' - c'' = d$, die zu dieser Seite gehörige Höhe h_c und zwischen den in α und β ausgedrückten Winkeln $\alpha - \beta$, $2R - \alpha$ und β dieses Dreiecks die Beziehung:

a) . . . $\alpha + \beta = 2R - \gamma$

Analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gezeigt ist, erhält man nach der in jener Andeutung aufgestellten Gleichung A) die derselben analoge Gleichung:

b) . . . $\cos[(2R - \alpha) - \beta] = \dfrac{2h_c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{d} - \cos(\alpha - \beta)$

und hieraus erhält man:

$$\cos[2R - (\alpha + \beta)] = \frac{2h_c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{d} - \cos(\alpha - \beta)$$

und in Rücksicht der Gleichung a):

$$\cos[2R - (2R - \gamma)] = \frac{2h_c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{d} - \cos(\alpha - \beta)$$

oder

A) . . . $\cos\gamma = \dfrac{2h_c \cdot \sin(\alpha - \beta)}{d} - \cos(\alpha - \beta)$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktionen Sinus und Kosinus der unbekannten Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ vorkommen. Drückt man eine dieser Funktionen nach der Erkl. 145 in die andere aus, so erhält man eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch eine Funktion der Winkeldifferenz $(\alpha - \beta)$ vorkommt und nach welcher man die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ kann man dann die Winkel α und β berechnen und dann weiter verfahren wie in der Andeutung zu der Aufgabe 343 oder in der Andeutung zur Aufgabe 518 gesagt wurde.

Aufgabe 520. Das Verhältnis der zwei Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 25:26$, die beiden diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β differieren um $\delta = 6^0\,21'\,34{,}8''$ und die beiden Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite c durch die ihr zugehörige

Gegeben: $\begin{cases} c'' - c' = d = 3\text{ m} \\ a : b = 25 : 26 \\ \beta - \alpha = \delta = 6^0\,21'\,34{,}8'' \end{cases}$

Andeutung. Man denke sich zunächst ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck, beachte, dass in demselben, in Rück-

Höhe zerlegt wird, differieren um $d = 3$ m; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

sicht des gegebenen Verhältnisses, β **grösser** als α sein muss, und berechne aus demselben mittels der nach dem Tangentensatz sich ergebenden Relation:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta+\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta-\alpha}{2}} = \frac{26+25}{26-25}$$

indem man in derselben den für $\beta - \alpha$ gegebenen Zahlenwert substituiert, die Winkelsumme $\beta + \alpha$. Aus $\beta - \alpha$ und $\beta + \alpha$ bestimme man dann die einzelnen Winkel α und β. Da man hiernach von dem zu berechnenden Dreieck die Differenz $c'' - c'$, die Winkel α und β kennt, so verfahre man dann weiter wie in den Andeutungen zur Aufgabe 513 gesagt wurde.

Aufgabe 521. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks verhalten sich wie 13 : 15, die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c verhält sich zu dieser Seite c wie 6 : 7 und die Differenz der Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c durch die Höhe h_c zerlegt wird, beträgt 4 m; wie gross sind unter der Voraussetzung, dass $c'' > c'$ ist, die Seiten und Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c'' - c' = 4\,\text{m} \\ a : b = 13 : 15 \\ h_c : c = 6 : 7 \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zunächst die gesuchten Winkel wie folgt:

Ist, siehe Figur 183, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so hat man gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{a)} \quad \dots \quad \frac{h_c}{c} = \frac{6}{7}$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC die Relation:

$$\text{b)} \quad \dots \quad h_c = a \cdot \sin\beta$$

und nach der Sinusregel aus dem ganzen Dreieck ABC die Relation:

$$\text{c)} \quad \dots \quad c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Durch Substitution der Werte für h_c und c aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a) erhält man:

$$\text{d)} \quad \dots \quad \frac{a \sin\beta}{\frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}} = \frac{6}{7}$$

oder

$$\text{A)} \quad \dots \quad \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma} = \frac{6}{7}$$

Ferner ergibt sich nach der Sinusregel aus dem Dreieck ABC:

$$\text{e)} \quad \dots \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{a}{b}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\text{f)} \quad \dots \quad \frac{a}{b} = \frac{13}{15}$$

ist:

$$\text{B)} \quad \dots \quad \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{13}{15}$$

Mittels der beiden goniometrischen Gleichungen A) und B) kann man in Rücksicht, dass:

C) . . . . $\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$

ist, eine Funktion des Winkels α oder des Winkels β bestimmen und dann diese Winkel berechnen. Sind auf diese Weise die Winkel α und β berechnet, so kennt man von dem Dreieck die Winkel α und β und die Differenz $c'' - c'$; man kann also zur Berechnung der gesuchten Seiten im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 513 gesagt wurde.

Aufgabe 522. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 28$ m, die Abschnitte c' und c'', welche durch die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c gebildet werden, differieren um $d = 4$ m und die Differenz der Winkel α und β, welche dieser dritten Seite c anliegen, beträgt $\delta = 14^0\,15'\,0{,}1''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c'' - c' = d = 4\text{ m} \\ a + b = S = 28\text{ m} \\ \beta - \alpha = \delta = 14^0\,15'\,0{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 185, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so bilde man sich die Differenz $c'' - c'$, indem man c' von D nach DF abträgt; ferner bilde man sich die Summe $a + b$, indem man a auf der Verlängerung von b nach CG abträgt und verbinde dann F mit C und G. Man erhält hiernach das gleichschenklige Dreieck BCF, das gleichschenklige Dreieck FCG und das schiefwinklige Dreieck AFG. Im letzteren kennt man die Seite $AG = a + b = S$, die Seite $AF = c'' - c' = d$, den Winkel AGF, welcher nach der Erkl. 353 $= \frac{\beta - \alpha}{2}$ ist, die übrigen Winkel haben die in der Figur eingetragenen Werte.

Nach der Sinusregel erhält man aus dem Dreieck AFG die Relation:

$$\frac{S}{d} = \frac{\sin\left(2R - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 66:

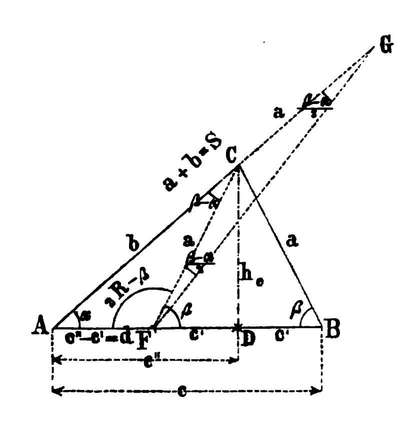
$$\frac{S}{d} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

oder

A) . . . $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{S}{d}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$

und mittels dieser Gleichung kann man zunächst die Winkelsumme $\alpha + \beta$ berechnen. Aus $\alpha + \beta$ und $\beta - \alpha$ kann man dann leicht die Winkel α, β und γ berechnen, dann entweder weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 oder wie in der Andeutung zur Aufgabe 513 gesagt wurde.

Figur 185.



Erkl. 858. Das Dreieck BCF in der Fig. 185 ist gleichschenklig, folglich ist der Winkel $BFC = \beta$ und der Nebenwinkel $AFC = 2R - \beta$.

Der Winkel ACF des Dreiecks AFC ist hiernach

$$= 2R - [\alpha + (2R - \beta)] = 2R - \alpha - 2R + \beta$$
oder
$$= \beta - \alpha$$

Da ferner das Dreieck FCG ebenfalls ein gleichschenkliges Dreieck ist, so muss nach der Erkl. 217 der Basiswinkel CGF desselben $= \frac{\beta - \alpha}{2}$ sein. Hiernach ist der Winkel AFG

$$= 2R - \beta + \frac{\beta - \alpha}{2} \text{ oder } = 2R - \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Aufgabe 523. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 160$ m, die Differenz der Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite c durch die zugehörige Höhe zerlegt wird und von welchen $c' > c''$ ist, ist $d = 136$ m und der dieser Seite c anliegende Winkel α beträgt $73^0\,44'\,23{,}3''$; wie gross sind die übrigen Winkel und die nicht gegebenen Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d = 136 \text{ m} \\ a + b = S = 160 \text{ m} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 522.

Aufgabe 524. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 170$ m, der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $66^0\,59'\,25{,}4''$ und die Differenz der zwei Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird und von welchen c' grösser als c'' ist, ist $d = 80$ m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d = 80 \text{ m} \\ a + b = S = 170 \\ \gamma = 66^0\,59'\,25{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 522. Man löse die in der Andeutung zur Aufgabe 522 enthaltene Gleichung A) in bezug auf $\frac{\beta - \alpha}{2}$ auf beachte, dass $\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$ ist, indem $\frac{\alpha + \beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind.

Aufgabe 525. Die Differenz zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $d = 1{,}5$ m, der Unterschied d_1 der Abschnitte c' und c'', welche durch die zur dritten Seite c gehörige Höhe h_c gebildet werden, ist $= 1{,}8$ m und die Differenz der dieser Seite c anliegenden Winkel α und β beträgt $\delta = 8^0\,5'\,37{,}5''$. Wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} c'' - c' = d_1 = 1{,}8 \text{ m} \\ a - b = d = 1{,}5 \text{ m} \\ \alpha - \beta = \delta = 8^0\,5'\,37{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 522, nur bilde man sich die Differenz $a - b$, indem man die kleinere Seite b von C auf der grösseren Seite a abträgt.

Aufgabe 526. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks differieren um $d = 120$ m und die beiden Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite c durch die zugehörige Höhe zerlegt wird und von welchen $c' > c''$ ist, differieren um $d_1 = 136$ m; wie gross sind die Winkel und Seiten dieses Dreiecks, wenn der der Seite c anliegende Winkel $\beta = 9^0\,31'\,38{,}2''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d_1 = 136 \text{ m} \\ a - b = d = 120 \text{ m} \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 525.

Aufgabe 527. Die Differenz zweier Seiten a und b eines Dreiecks, von welchen $a > b$ ist, ist $d = 72$ m, der von beiden Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $124^0\,58'\,33{,}6''$ und die Differenz der zwei Abschnitte c' und c'', in welche die dritte Seite durch die zugehörige Höhe geteilt wird, ist $d_1 = 78$ m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

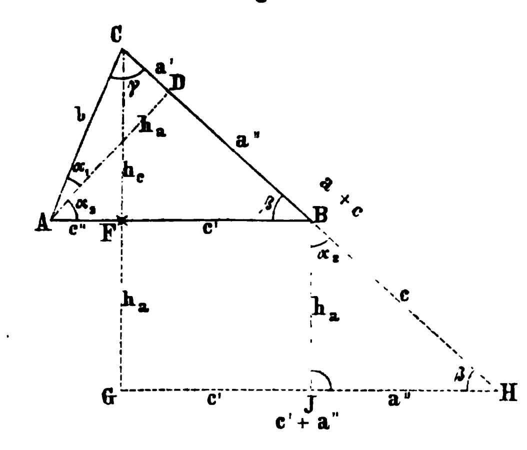
Gegeben: $\begin{cases} c' - c'' = d_1 = 78 \text{ m} \\ a - b = d = 72 \text{ m} \\ \gamma = 124^0\,58'\,33{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 525.

v) Aufgaben, in welchen Summen oder Differenzen zweier Höhen, auch Winkeldifferenzen und Summen oder Differenzen zweier Dreiecksseiten vorkommen.

Aufgabe 528. In einem Dreieck ist die Seite $b = 15$ m, der derselben gegenüberliegende Winkel β ist $= 67^0\ 22'\ 48{,}5''$ und die Summe der beiden zu den zwei andern Seiten a und c gehörigen Höhen h_a und h_c ist $S = 24{,}9231$ m; wie gross sind die übrigen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Figur 186.



Erkl. 354. Dass in dem rechtwinkligen Dreieck CGH der Figur 186 die Hypotenuse CH gleich der Summe $a + c$ der Seiten a und c des Dreiecks ABC ist, kann man wie folgt darthun:

Fällt man, siehe Figur 186, $BJ \perp GH$, so erhält man das rechtwinklige Dreieck BJH, welches dem rechtwinkligen Dreieck ADB kongruent ist, denn es ist:

$$\overline{BJ} = \overline{FG} \quad \text{(als Zwischenparallele)}$$

und da $\overline{FG} = \overline{AD} = h_a$ noch Konstruktion ist, so folgt hieraus, dass:

a) . . . $\overline{BJ} = h_a$

sein muss, ferner ist:

b) . . . $\sphericalangle JHB = \sphericalangle ABC = \beta$ (als korrespondierende Winkel an Parallelen)

und

c) . . . $\sphericalangle BJH = \sphericalangle ADB = R$

Mithin ist nach der Erkl. 79:

$$\triangle BJH \cong \triangle ADB$$

und da in kongruenten Dreiecken die homologen Stücke bezw. einander gleich sind, so folgt hieraus, dass:

d) . . . $\overline{BH} = \overline{AB} = c$

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 24{,}9231 \text{ m} \\ b = 15 \text{ m} \\ \beta = 67^0\ 22'\ 48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 186, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man trägt die Höhe h_a auf der Verlängerung der Höhe h_c nach FG ab, zieht durch G eine Parallele zu AB, verlängert alsdann die Seite BC bis zum Durchschnitt H mit jener Parallelen, so erhält man das rechtwinklige Dreieck CGH in welchem die Seite:

$$\overline{CG} = h_a + h_c$$

die Seite $\overline{CH} = \overline{CB} + \overline{BB} = a + c$ (siehe Erkl. 354) und in welchem:

$$\sphericalangle GHC = \sphericalangle ABC = \beta \text{ ist.}$$

Aus diesem rechtwinkligen Dreieck CGH ergibt sich die Relation:

$$\sin\beta = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass:

$$\overline{CG} = h_a + h_c = S$$
$$\overline{CH} = a + c$$

ist:

A) . . . $a + c = \dfrac{S}{\sin\beta}$

wonach man die Summe der Seiten a und c berechnen kann. Da man alsdann von dem Dreieck die Summe der Seiten a und c, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel β und die dritte Seite b kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

dass also:

e) . . . $\overline{CH} = a + c$

ist. Aus jener Kongruenz ergibt sich weiter noch, dass:

f) . . . $\sphericalangle JBH = \sphericalangle DAB = \alpha_2$

und dass:

g) . . . $\overline{JH} = \overline{BD} = a''$ ist.

Aufgabe 529. Die zu den Seiten a und c eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_c messen zusammen $S = 60{,}81$ m, der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel β ist $= 77^0 11' 3''$ und die eine jener Seiten, z. B. die Seite c ist $= 39{,}88$ m lang; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 60{,}81 \text{ m} \\ \beta = 77^0 11' 3'' \\ c = 39{,}88 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 528. Man berechne, siehe Figur 186, zuerst $a + c$, dann die Seite a. Man kennt alsdann von dem Dreieck ABC zwei Seiten a und c und den von beiden eingeschlossenen Winkel β.

Aufgabe 530. Die Seiten a und c eines Dreiecks messen bezw. $= 145$ und $= 150$ m; die Summe S der zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c ist $= 48{,}8276$ m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 48{,}8276 \text{ m} \\ a = 145 \text{ m} \\ c = 150 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 528. Man berechne zuerst, siehe Figur 186, den Winkel β aus $h_a + h_c$ und aus $a + c$. Man kennt alsdann von dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und c und den von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel β.

Aufgabe 531. Man kennt von einem Dreieck die beiden Winkel $\alpha = 43^0 36' 10{,}1''$ und $\beta = 11^0 25' 16{,}3''$ und die Summe $S = 43{,}7624$ m der beiden Höhen h_a und h_c, und soll aus diesen gegebenen Stücken die Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 43{,}7624 \text{ m} \\ \alpha = 43^0 36' 10{,}1'' \\ \beta = 11^0 25' 16{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 528; man berechne zuerst, siehe Figur 186, aus $h_a + h_c$ und dem Winkel β die Summe $a + c$, da man alsdann von dem Dreieck $a + c$, α und β kennt, so verfahre man weiter wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt wurde.

Aufgabe 532. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b messen zusammen $S = 24{,}1231$ m; die dritte Seite c misst 14 m und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $53^0 7' 48{,}4''$; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_b = S = 24{,}1231 \text{ m} \\ c = 14 \text{ m} \\ \alpha = 53^0 7' 48{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $h_a + h_b = S$

Berücksichtigt man ferner, dass zwischen der Höhe h_b, der Seite c und dem Winkel α die Relation besteht:

b) . . . $\sin\alpha = \dfrac{h_b}{c}$ (s. Figur 180)

so erhält man, wenn man den aus Gleichung b) für h_b sich ergebenden Wert:

c) . . . $h_b = c \cdot \sin\alpha$

in Gleichung a) substituiert, für h_a die Bestimmungsgleichung:

$$h_a + c \cdot \sin\alpha = S$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . . $h_a = S - c \cdot \sin\alpha$

nach welcher Gleichung man die Höhe h_a berechnen kann. Ist h_a auf diese Weise berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Höhe h_a, die Seite c und den Winkel α und kann im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 342 gesagt wurde.

Aufgabe 533. Die zu den beiden Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b messen zusammen $S = 168,8276$ dm; die Differenz der jenen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β, von welchen α grösser als β ist, beträgt $\delta = 64^0\,12'\,45,1$ und die dritte Seite c misst 150 dm; man soll die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_b = S = 168,8276 \text{ dm} \\ \alpha - \beta = \delta = 64^0\,12'\,45,1'' \\ c = 150 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $h_a + h_b = S$

Berücksichtigt man ferner, dass zwischen der Höhe h_b, der Seite c und dem Winkel α die Relation:

b) . . . $\sin\alpha = \frac{h_b}{c}$ (s. Figur 130)

und zwischen der Höhe h_a, der Seite c und dem Winkel β die Relation:

c) . . . $\sin\beta = \frac{h_a}{c}$ (s. Figur 130)

besteht, so erhält man, wenn man die aus den Gleichungen b) und c) bezw. für h_b und h_a sich ergebenden Werte:

$$h_b = c \cdot \sin\alpha$$
$$\text{und } h_a = c \cdot \sin\beta$$

in Gleichung a) substituiert, die Relation:

d) . . . $c \cdot \sin\alpha + c \cdot \sin\beta = S$

Da ferner gemäss der Aufgabe:

e) . . . $\alpha - \beta = \delta$

ist, so hat man somit zwei Gleichungen mit den unbekannten Winkeln α und β, aus welchen man die Winkel α und β wie folgt berechnen kann:

Aus Gleichung d) ergibt sich:

$$\sin\alpha + \sin\beta = \frac{S}{c}$$

oder nach der Erkl. 115:

$$2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{S}{c}$$

und in Rücksicht der Gleichung e):

$$2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\delta}{2} = \frac{S}{c}$$

und hieraus erhält man:

A) .... $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{S}{2c\cdot\cos\frac{\delta}{2}}$

mittels welcher Gleichung man $\alpha+\beta$ berechnen kann; aus $\alpha-\beta$ und $\alpha+\beta$ kann man dann leicht α und β berechnen. Ist α und β berechnet, so kennt man von dem zu berechnenden Dreieck die Seite c und die beiden anliegenden Winkel α und β und kann im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 534. Die Summe der zu den Seiten a und c eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_c beträgt $S = 80,6983$ m, die zur dritten Seite b gehörige Höhe h_b misst 398,0488 m und der dieser dritten Seite b gegenüberliegende Winkel β beträgt 5° 43′ 29,3″; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks hieraus berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 80,6983 \text{ m} \\ h_b = 398,0488 \text{ m} \\ \beta = 5^0\,43'\,29,3'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 186, aus $h_a + h_c$ und β die Summe $a+c$ der Seiten a und c. Da man nunmehr von dem zu berechnenden Dreieck $a+c$, h_b und β kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 497 gesagt wurde.

Aufgabe 535. Die zu den Seiten a und c eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_c messen zusammen $S = 24,9231$ m, jene beiden Seiten, von welchen c grösser als a ist, differieren um $d = 1$ m und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel β beträgt 67° 22′ 48,5″; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S = 24,9231 \text{ m} \\ c - a = d = 1 \text{ m} \\ \beta = 67^0\,22'\,48,5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 528; man berechne aus $h_a + h_c$ und β, siehe Figur 186, die Summe $c+a$; aus $c-a$ und $c+a$ bestimme man c und a. Man kennt hiernach von dem Dreieck die zwei Seiten a und c und den von beiden eingeschlossenen Winkel β.

Aufgabe 536. Die Summe der Seiten a und c eines Dreiecks ist $S = 195$ dm, die Summe der zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c ist $S_1 = 48,8276$ dm und die dritte Seite b misst 25 dm; man soll die drei Winkel und die Seiten a und c des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S_1 = 48,8276 \text{ dm} \\ a + c = S = 195 \text{ dm} \\ b = 25 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne aus $h_a + h_c$ und $a+c$, siehe Figur 186, den Winkel β. Man kennt alsdann von dem zu berechnenden Dreieck β, b und $a+c$, und kann im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 537. Die Seiten a und c eines Dreiecks messen zusammen $S = 221$ m, die zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c messen zusammen $S_1 = 43,7624$ m und der der Seite a gegenüberliegende Winkel α misst 43° 36′ 10,1″; man soll die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_a + h_c = S_1 = 43,7624 \text{ m} \\ a + c = S = 221 \text{ m} \\ \alpha = 43^0\,36'\,10,1'' \end{cases}$

Andeutung. Man berechne aus $h_a + h_c$ und $a+c$, siehe Figur 186, zuerst den Winkel β. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck die Summe $a+c$ und die Winkel α und β (auch γ) kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt wurde.

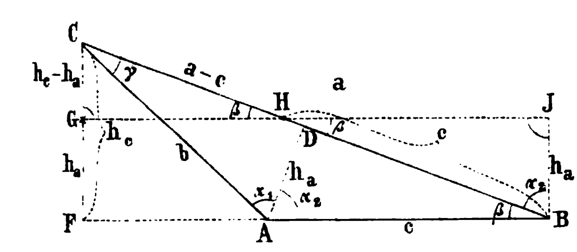
Aufgabe 538. Die Summe der Seiten a und c eines Dreiecks beträgt $S = 809$ m, die Summe der zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c beträgt $S_1 = 80,6983$ m und die Differenz der der dritten Seite b anliegenden Winkel α und γ, von welchen γ grösser ist als α, beträgt $\delta = 19^0\,38'\,19,5''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_a + h_c = S_1 = 80,6983 \text{ m} \\ a + c = S = 809 \text{ m} \\ \gamma - \alpha = \delta = 19^0\,38'\,19,5'' \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne aus $h_a + h_c$ und $a + c$, siehe Figur 186, zunächst den Winkel β. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck $a + c$, $\gamma - \alpha$ und β kennt, so verfahre man im weiteren analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 482 gesagt wurde.

Aufgabe 539. Der Unterschied der zu den Seiten c und a gehörigen Höhen h_c und h_a beträgt $d = 9,8765$ m $(h_c > h_a)$, die Winkel γ und α des Dreiecks, durch welche jene Höhen gehen, sind bezw. $= 35^0\,46'\,20''$ und $116^0\,34'\,40''$. Man soll die Seiten des Dreiecks hieraus berechnen.

Figur 187.



Erkl. 355. Dass in dem rechtwinkligen Dreieck CGH der Figur 187, die Hypotenuse CH gleich der Differenz $a - c$ der Seiten a und c des Dreiecks ABC ist, kann man wie folgt darthun:

Verlängert man GH und fällt von B auf diese Verlängerung den Perpendikel BJ, so erhält man das rechtwinklige Dreieck BJH, welches dem rechtwinkligen Dreieck ADB kongruent ist, denn es ist:

$$\overline{BJ} = \overline{FG} \text{ (als Zwischenparallele)}$$

und da $\overline{FG} = \overline{AD} = h_a$ noch Konstruktion ist, so folgt hieraus, dass:

a) . . . . $\overline{BJ} = \overline{AD} = h_a$

sein muss; ferner ist:

b) . . . $\sphericalangle JHB = \sphericalangle ABD = \beta$ (als Wechselwinkel an Parallelen)

und

c) . . . $\sphericalangle BJH = \sphericalangle ADB = R$

mithin ist nach der Erkl. 79:

$$\triangle BJH \cong \triangle ADB$$

und da in kongruenten Dreiecken die homologen Stücke bezw. einander gleich sind, so folgt hieraus, dass:

d) . . . . $\overline{BH} = \overline{AB} = c$

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c - h_a = d = 9,8765 \text{ m} \\ \gamma = 35^0\,46'\,20'' \\ \alpha = 116^0\,34'\,40'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 187, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man trägt die Höhe h_a vom Fusspunkt F der Höhe h_c auf h_c nach FG ab und zieht GH parallel zu FB, so erhält man das rechtwinklige Dreieck CGH, in welchem

die Seite $\overline{CG} = h_c - h_a = d$

die Seite $\overline{CH} = \overline{CB} - \overline{HB} = a - c$ (siehe Erkl. 355) und in welchem $\sphericalangle GHC = \sphericalangle ABC = \beta$ ist. Aus diesem rechtwinkligen Dreieck CGH ergibt sich die Relation:

$$\sin\beta = \frac{\overline{CG}}{\overline{CH}}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass:

$$\overline{CG} = h_c - h_a = d$$
$$\overline{CH} = a - c$$

und dass:

$$\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma)$$

dass also:

$$\sin\beta = \sin[180^0 - (\alpha + \gamma)] = \sin(\alpha + \gamma)$$

ist:

$$\text{A)} \ldots a - c = \frac{d}{\sin(\alpha + \gamma)}$$

wonach man die Differenz der Seiten a und c berechnen kann. Da man alsdann von dem Dreieck die Differenz der Seiten a und c und die Winkel α und γ (auch β) des Dreiecks kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 486 gesagt wurde.

dass also:

e) .... $\overline{CH} = \overline{CB} - \overline{BH} = a - c$

ist. Aus jener Kongruenz ergibt sich ferner dass:

f) .... $\sphericalangle JBH = \sphericalangle DAB = \alpha_2$

und dass:

g) .... $\overline{JH} = \overline{BD} = a''$ ist.

Aufgabe 540. Die zu den Seiten c und a eines Dreiecks gehörigen Höhen h_c und h_a, von welchen h_c grösser als h_a ist, differieren um $d = 2{,}0488$ m, die dritte Seite b misst 85 m und der derselben gegenüberliegende Winkel β ist $= 24^0\,11'\,22{,}3''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c - h_a = d = 2{,}0488 \text{ m} \\ b = 85 \text{ m} \\ \beta = 24^0\,11'\,22{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 539. Man berechne zuerst, siehe Fig. 187, $a - c$; dann kennt man von dem Dreieck ABC, die Seite b, den Winkel β und die Differenz der Seiten a und c.

Aufgabe 541. Die zu den Seiten c und a eines Dreiecks gehörigen Höhen h_c und h_a, von welchen die Höhe h_c grösser als die Höhe h_a ist, differieren um $d = 3{,}8532$ dm, die eine jener Seiten, nämlich die Seite c ist $= 102$ dm lang und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel β beträgt $33^0\,23'\,54{,}6''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c - h_a = d = 3{,}8532 \text{ dm} \\ c = 102 \text{ dm} \\ \beta = 33^0\,23'\,54{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 539; man bestimme zuerst, siehe Figur 187, $a - c$, dann die Seite a. Man kennt alsdann von dem Dreieck ABC die Seiten a und c und den von beiden eingeschlossenen Winkel β.

Aufgabe 542. Die zwei Seiten a und c eines Dreiecks messen bezw. $= 25$ m und $= 17$ m und die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist um $d = 7{,}68$ m grösser als die zur Seite a gehörige Höhe h_a; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c - h_a = d = 7{,}68 \text{ m} \\ a = 25 \text{ m} \\ c = 17 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 539; man berechne zuerst, siehe Figur 187, aus $h_c - h_a$ und aus $a - c$ den Winkel β. Man kennt alsdann von dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und c und den von beiden eingeschlossenen Winkel β.

Aufgabe 543. Die beiden Seiten a und c eines Dreiecks messen zusammen $S = 125$ dm, und die Differenz der zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c, von welchen h_c grösser als h_a ist, beträgt $d = 9{,}7059$ dm und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel β beträgt $61^0\,55'\,39{,}1''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} h_c - h_a = d = 9{,}7059 \text{ dm} \\ a + c = S = 125 \text{ dm} \\ \beta = 61^0\,55'\,39{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 539; man berechne zunächst, siehe Figur 187, aus $h_c - h_a$ und β die Differenz $a - c$; aus $a + c$ und $a - c$ bestimme man alsdann a und c. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck die Seiten a und c und den Winkel β kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 544. Die Seiten a und c eines Dreiecks, von welchem a grösser als c ist, differieren um $d = 7$ m, die zu diesen Seiten

Gegeben: $\begin{cases} h_c - h_a = d_1 = 3{,}8532 \text{ m} \\ a - c = d = 7 \text{ m} \\ b = 61 \text{ m} \end{cases}$

gehörigen Höhen h_a und h_c, von welchen h_c grösser als h_a ist, differieren um $d_1 = 3{,}8532$ m und die dritte Dreiecksseite b misst 61 m; man berechne die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks.

Andeutung. Man berechne zunächst aus $h_c - h_a$ und $a - c$, siehe Figur 187, den Winkel β. Da man dann von dem zu berechnenden Dreieck die Differenz $a - c$, die Seite b und den Winkel β kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 487 gesagt wurde.

Aufgabe 545. Die Seite a eines Dreiecks ist um $d = 7$ dm grösser als die Seite c und die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist um 3,8532 dm grösser als die zur Seite a gehörige Höhe h_a; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 79^0\,36'\,40''$ ist?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h_c - h_a = 3{,}8532 \text{ dm} \\ \alpha = 79^0\,36'\,40'' \\ a - c = 7 \text{ dm} \end{cases}$$

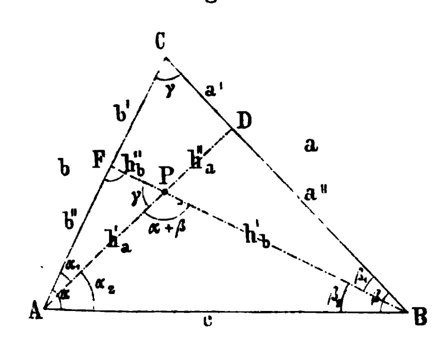
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 544.

---

w) Aufgaben, in welchen Summen und Differenzen von Höhenabschnitten vorkommen.

Aufgabe 546. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass die Summe der beiden Höhenabschnitte h'_a und h'_b, welche nach den Ecken A und B hin liegen, $S = 16$ m beträgt; die beiden Winkel α und β, durch welche jene Höhen gehen, betragen bezw. $53^0\,7'\,48{,}4''$ und $67^0\,22''\,48{,}5''$; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?

Figur 188.



Erkl. 356. Aus der Figur 188 ergeben sich die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

$$\text{b)} \ldots \beta_2 = \beta - \beta_1$$

und

$$\text{c)} \ldots \alpha_1 + \gamma = \beta_1 + \gamma \, (= R)$$

Aus diesen Relationen erhält man zunächst:

$$\text{d)} \ldots \alpha_1 = \alpha - \alpha_2$$

$$\text{e)} \ldots \beta_1 = \beta - \beta_2$$

und

$$\text{f)} \ldots \alpha_1 = \beta_1$$

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} h'_a + h'_b = S = 16 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 188, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und beachtet man, dass, wie in der Erkl. 293 gezeigt ist, der Winkel APF gleich dem Winkel $ACB = \gamma$ ist, dass also dessen Nebenwinkel, bezw. dessen Supplementwinkel $APB = \alpha + \beta$ sein muss und dass hiernach in dem Dreieck ABP:

$$\text{a)} \ldots \alpha_2 + \beta_2 = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist, und beachtet man ferner, dass nach der Erkl. 356:

$$\alpha_2 - \beta_2 = \alpha - \beta$$

bezw. dass:

$$\text{b)} \ldots \beta_2 - \alpha_2 = \beta - \alpha$$

ist (indem nach den für α und β gegebenen Zahlenwerten β grösser als α ist) und bringt man die Mollweidesche Formel 89 in Anwendung, so erhält man aus dem Dreieck ABP zur Berechnung der Seite c die Relation:

$$\frac{c}{h'_b + h'_a} = \frac{\cos\frac{\beta_2 + \alpha_2}{2}}{\cos\frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}}$$

oder in Rücksicht der Gleichungen a) und b):

$$\frac{c}{h'_b + h'_a} = \frac{\cos\left(R - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass $h'_a + h'_b = S$ und dass nach der Erkl. 19:

$$\cos\left(R - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

gesetzt werden kann:

und aus den Gleichungen d) und e) erhält man in Rücksicht der Gleichung f):

g) . . . $\alpha - \alpha_2 = \beta - \beta_2$

oder

h) . . . $\alpha_2 - \beta_2 = \alpha - \beta$

Erkl. 357. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 188 ergibt sich:

a) . . $\alpha_1 = R - \gamma$

oder, da:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist

$$\alpha_1 = R - [2R - (\alpha + \beta)]$$
$$\alpha_1 = R - 2R + (\alpha + \beta)$$

oder

b) . . $\alpha_1 = \alpha + \beta - R$

Da ferner:

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

ist, so erhält man hiernach:

$$\alpha_2 = \alpha - (\alpha + \beta - R)$$

oder

c) . . $\alpha_2 = R - \beta$

In analoger Weise erhält man:

d) . . $\beta_1 = \alpha + \beta - R$

und

e) . . $\beta_2 = R - \alpha$

A) . . . $c = S \cdot \dfrac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$

nach welcher Gleichung man die Seite c aus S, α und β berechnen kann. Ist c berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite c und die beiden anliegenden Winkel α und β und kann dann im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Da man von dem Dreieck ABP die Summe $h'_a + h'_b$ zweier Seiten und die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel α_2 und β_2 kennt, indem nach der Erkl. 357:

$$\alpha_2 = R - \beta$$

und

$$\beta_2 = R - \alpha$$

ist, so kann man auch aus diesem Dreieck die Seite c allgemein berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt wurde.

Aufgabe 547. Die zu den beiden Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass die Summe S des nach der Ecke A hin liegenden Abschnitts h'_a der Höhe h_a und des nach der Seite b hin liegenden Abschnitts h''_b der Höhe $h_b = 14{,}7$ m beträgt; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn die beiden Winkel α und β, durch welche jene Höhen gehen, bezw. $= 53^0\,7'\,48{,}4''$ und $= 67^0\,22'\,48{,}5''$ sind?

Gegeben: $\begin{cases} h'_a + h''_b = S = 14{,}7 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 546. In dem rechtwinkligen Dreieck APF, siehe Fig. 188, kennt man die Summe $h'_a + h''_b = S$ zweier Seiten und nach der Erkl. 293 den Winkel $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 206 gesagt wurde, kann man die Seiten h'_a und h''_b dieses Dreiecks berechnen. Da man nunmehr von dem Dreieck ABP die Seite h'_a und die Winkel α_2 und β_2 kennt, indem nach der Erkl. 357:

$$\alpha_2 = R - \beta$$

und

$$\beta_2 = R - \alpha$$

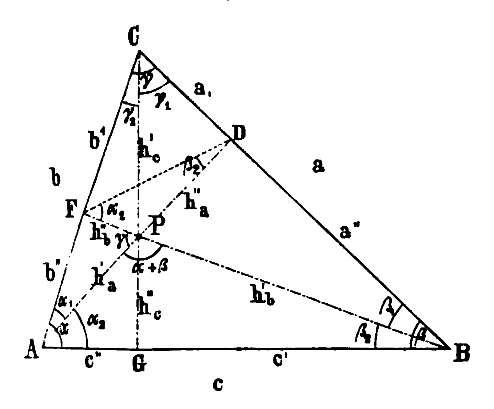
ist, so kann man aus diesem Dreieck nach der Sinusregel die Seite c berechnen. Nunmehr kennt man von dem Dreieck ABC die Seite c und die derselben anliegenden Winkel α und β, siehe Aufgabe 117.

Aufgabe 548. Die zu den beiden Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass die Summe S der beiden nach den Seiten a und b hin liegenden Abschnitte h''_a und h''_b dieser Höhen $= 43{,}9747$ dm beträgt; wie gross sind die Seiten des Dreiecks, wenn die Winkel α und β, durch welche jene Höhen gehen, bezw. $= 79^0\,36'\,40''$ und $= 33^0\,23'\,54{,}6''$ sind?

Gegeben: $\begin{cases} h''_a + h''_b = S = 43{,}9747 \text{ dm} \\ \alpha = 79^0\,36'\,40'' \\ \beta = 33^0\,23'\,54{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 189, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht und man verbindet F mit D, so erhält man das Dreieck DPF, von welchem man die Summe $h''_a + h''_b$ zweier Seiten und die drei Winkel kennt, indem

Figur 189.



Erkl. 358. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Je zwei Höhen eines Dreiecks schneiden sich so, dass die nach den Ecken hinliegenden Abschnitte dieser Höhen umgekehrt proportional sind den nach den Seiten hinliegenden Abschnitten dieser Höhen.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ergibt sich aus der Figur 189 die Proportion:

a) . . . $h'_a : h'_b = h''_b : h''_a$

Da hiernach in den Dreiecken APB und DPF das Verhältnis zweier Seiten des einen Dreiecks gleich dem Verhältnis zweier Seiten des andern Dreiecks ist, und da ferner der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel des einen Dreiecks gleich dem von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel des andern Dreiecks ist (als Scheitelwinkel), so ergibt sich hieraus, dass nach der Erkl. 273 diese beiden Dreiecke ähnlich sind, dass somit auch nach der Erkl. 7 die homologen Winkel beider Dreiecke einander gleich sein müssen, dass also:

$$\sphericalangle PDF = \sphericalangle PBA = \beta_2$$

und

$$\sphericalangle PFD = \sphericalangle PAB = \alpha_2$$

ist.

$\sphericalangle FPD = \alpha + \beta$ und nach der Erkl. 358 $\sphericalangle PDF = \beta_2$ und $\sphericalangle PFD = \alpha_2$, also nach der Erkl. 357 $\sphericalangle PDF = R - \alpha$ und $\sphericalangle PFD = R - \beta$ ist. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt ist, kann man somit aus jenem Dreieck DPF die Abschnitte h''_a und h''_b berechnen. Zieht man dann die dritte Höhe h_c, welche nach der Erkl. 294 durch P gehen muss, und berücksichtigt man, dass

$$\gamma_1 = \alpha_2$$

und

$$\gamma_2 = \beta_2$$

ist, indem die rechtwinkligen Dreiecke BGC und BDA den Winkel β und die rechtwinkligen Dreiecke AGC und AFB den Winkel α gemeinschaftlich haben, dass also nach der Erkl. 357:

a) . . . $\gamma_1 = \alpha_2 = R - \beta$

und

b) . . . $\gamma_2 = \beta_2 = R - \alpha$

ist, so kann man aus den rechtwinkligen Dreiecken PDC und PFC die Seitenabschnitte $CD = a'$ und $FC = b'$ berechnen. Mittels dieser Abschnitte und dem bekannten Winkel $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ kann man im weiteren die Seiten a und b bestimmen, u. s. f.

Aufgabe 549. Die Höhen h_a und h_b, welche zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehören, schneiden sich so, dass der nach der Ecke A hinliegende Abschnitt h'_a der Höhe h_a um $d = 11$ m grösser ist, als der nach der Ecke B hinliegende Abschnitt h'_b der Höhe h_b; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn die Winkel α und β, durch welche jene Höhen gehen, bezw. $= 53^0\ 7'\ 48{,}4''$ und $= 61^0\ 55'\ 39{,}1''$ betragen?

Gegeben: $\begin{cases} h'_a - h'_b = d = 11 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\ 7'\ 48{,}4'' \\ \beta = 61^0\ 55'\ 39{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 546. Man kennt von dem Dreieck ABP, siehe Figur 188, die Differenz $h'_a - h'_b = d$ zweier Seiten desselben und die Winkel α_2 und β_2, indem nach der Erkl. 357:

$$\alpha_2 = R - \beta$$

und

$$\beta_2 = R - \alpha$$

ist. Wie in der Andeutung der Aufgabe 486 gesagt ist, kann man somit aus diesem Dreieck die Seite c berechnen, u. s. f.

Aufgabe 550. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass der Abschnitt h'_a der Höhe h_a, welcher nach der Ecke A hin liegt, um $d = 29,4$ m grösser ist, als der Abschnitt h''_b der Höhe h_b, welcher nach der Seite b hin liegt; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn die Winkel α und β desselben bezw. $= 53^0\,7'\,48,4''$ und $= 61^0\,55'\,39,1''$ betragen?

Gegeben: $\begin{cases} h'_a - h''_b = d = 29,4 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48,4'' \\ \beta = 61^0\,55'\,39,1'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog den Auflösungen der vorigen Aufgaben 549 und 547.

Aufgabe 551. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass der Abschnitt h''_a der Höhe h_a, welcher nach der Seite a hin liegt, um $d = 28,3523$ dm grösser ist, als der Abschnitt h''_b der Höhe h_b, welche nach der Seite b hin liegt; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn die Winkel α und β desselben bezw. $= 79^0\,36'\,40''$ und $= 33^0\,23'\,54,6''$ betragen?

Gegeben: $\begin{cases} h''_a - h''_b = d = 28,3523 \text{ dm} \\ \alpha = 79^0\,36'\,40'' \\ \beta = 33^0\,23'\,54,6'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 548.

---

x) Aufgaben, in welchen die Summe oder Differenz zweier Seiten, und Schwerlinien; die Summe einer Seite und einer Schwerlinie; die Differenz einer Höhe und einer Schwerlinie; die Summe zweier Seiten, und winkelhalbierende Transversalen oder durch solche Transversalen gebildeten Seitenabschnitte; die Summe oder Differenz zweier Seiten, und zwei von winkelhalbierenden Transversalen gebildete Seitenabschnitte vorkommen.

Aufgabe 552. Die Seiten b und c eines Dreiecks messen zusammen $S = 29$ m, die zu einer dieser Seiten, z. B. die zur Seite c gehörige Schwerlinie s_c misst 12,1655 m und die dritte Seite a misst 13 m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b + c = S = 29 \text{ m} \\ s_c = 12,1655 \text{ m} \\ a = 13 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots b + c = S$$

ferner besteht nach den Erkl. 299 und 300 die Relation:

$$\text{b)} \ldots a^2 + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2}$$

Man hat somit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten b und c. Hat man nach diesen Gleichungen die Seiten b und c berechnet, so kann man die Winkel aus den drei Seiten a, b und c berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 553. Die Seite b eines Dreiecks ist um $d = 187$ m grösser als die Seite c, die zur Seite c gehörige Schwerlinie s_c ist 217,9501 m lang und die dritte Seite a misst 197 m; wie gross sind die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} b - c = d = 187 \text{ m} \\ s_c = 217,9501 \text{ m} \\ a = 197 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 552.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ **Das vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

288. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 287. — Seite 353—368. Mit 5 Figuren.




Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 287. — Seite 353—368. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.



Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 554. Die zwei Winkel α und β eines Dreiecks sind bezw. $= 73^0\,44'\,23{,}3''$ und $= 9^0\,31'\,38{,}2''$; die Summe der Seite c, welcher jene Winkel anliegen, und der zu ihr gehörigen Schwerlinie s_c ist $S = 222{,}111$ dm; wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} s_c + c = S = 222{,}111 \text{ dm} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2 \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $s_c + c = S$

dann besteht nach den Erkl. 299 und 300 die Relation:

b) . . . $a^2 + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2}$

und ferner besteht nach der Sinusregel die Relation:

c) . . . $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$

Man hat somit drei Gleichungen mit den drei Unbekannten a, b und c, aus welchen man die gesuchten drei Seiten berechnen kann.

Aufgabe 555. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c und Schwerlinie s_c bilden einen Winkel $\varepsilon = 16^0\,15'\,36{,}73''$ miteinander und die Schwerlinie s_c ist um $d = 1$ m länger als die Höhe h_c. Wie gross sind die Seiten und Winkel jenes Dreiecks, wenn von den beiden andern Seiten die Seite a grösser als b ist und der der kleineren Seite b gegenüberliegende Winkel $\beta = 36^0\,52'\,11{,}64''$ misst?

Gegeben: $\begin{cases} s_c - h_c = d = 1 \text{ m} \\ \sphericalangle h_c s_c = \varepsilon = 16^0\,15'\,36{,}73'' \\ \beta = 36^0\,52'\,11{,}64'' \\ a > b \end{cases}$

Andeutung. Man beachte, dass, siehe Figur 147, die Schwerlinie s_c die Hypotenuse, die Höhe h_c die Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks ist, dessen einer spitze Winkel gleich dem gegebenen Winkel ε, dessen anderer spitzer Winkel also $= 90^0 - \varepsilon$ ist. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 212 gesagt wurde, kann man aus der gegebenen Differenz $s_c - h_c = d$ und dem gegebenen Winkel ε die Höhe h_c und die Schwerlinie s_c berechnen. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck s_c, h_c und β kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 411 gesagt wurde.

Aufgabe 556. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 130$ m, der von beiden eingeschlossene Winkel γ misst $124^0\,58'\,33{,}6''$ und die diesen Winkel halbierende Transversale w_γ misst $20{,}8155$ m; wie gross sind die Seiten und nicht gegebenen Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b = S = 130 \text{ m} \\ \gamma = 124^0\,58'\,33{,}6'' \\ w_\gamma = 20{,}8155 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $a + b = S$

Dann hat man nach der in der Erkl. 320 aufgestellten Gleichung d) die Relation:

b) . . . $c^2 = (a+b)\left(a + b - 2w_\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\right)$

Aus beiden Gleichungen erhält man:

$$c^2 = S \cdot \left(S - 2w_\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\right)$$

oder

A) . . . $c = \sqrt{S\left(S - 2w_\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\right)}$

Hat man nach dieser Gleichung die Seite c berechnet, so kennt man von dem zu berech-

nenden Dreieck $a+b$, c und γ und kann somit weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 557. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen zusammen $S = 170$ dm, die dritte Seite c misst 102 dm und die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ ist 65,2331 dm lang; man soll hieraus die Winkel und die nicht gegebenen Seiten berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b = S = 170 \text{ dm} \\ c = 102 \text{ dm} \\ w_\gamma = 65{,}2331 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 556. Man berechne aus der in der Andeutung der vorigen Aufgabe erwähnten Gleichung b) zunächst den Winkel γ.

Aufgabe 558. Die Seiten a und b eines Dreiecks messen zusammen $S = 52$ m, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ wird durch eine Transversale halbiert, welche die Gegenseite c in die Abschnitte $c'_w = 31{,}3077$ m und $c''_w = 12{,}6923$ m zerlegt. Man soll aus diesen Angaben die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b = S = 52 \text{ m} \\ c'_w = 31{,}3077 \text{ m} \\ c''_w = 12{,}6923 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a+b = S$$

dann ist:

$$\text{b)} \ldots c'_w + c''_w = c$$

ferner hat man nach den Erkl. 314—316 die Relationen:

$$\text{c)} \ldots w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$$

$$\text{d)} \ldots c'_w = \frac{ac}{a+b}$$

und

$$\text{e)} \ldots c''_w = \frac{bc}{a+b}$$

Durch Multiplikation der Gleichungen d) und e) erhält man:

$$\frac{ab \cdot c^2}{(a+b)^2} = c'_w \cdot c''_w$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Gleichungen a) und b):

$$\text{f)} \ldots ab = \frac{S^2}{(c'_w + c''_w)^2} \cdot c'_w \cdot c''_w$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung c), so erhält man:

$$w^2_\gamma = \left(\frac{S^2}{(c'_w + c''_w)^2} - 1\right) \cdot c'_w \cdot c''_w$$

oder

$$\text{g)} \ldots w_\gamma = \sqrt{S^2 - (c'_w + c''_w)^2 \cdot \frac{c'_w \cdot c''_w}{(c'_w + c''_w)^2}}$$

Setzt man diesen Wert für w_γ, den für $a+b$ gegebenen Wert S und den Wert für ab aus Gleichung f) in die in der Erkl. 320 aufgestellte Gleichung b):

$$\text{h)} \ldots \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b) \cdot w_\gamma}{ab}$$

ein, so kann man hieraus den Winkel γ berechnen. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck $a+b$, c und γ kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 559. In einem Dreieck übertrifft die Seite a die Seite b um $d = 120$ m, der der Seite a gegenüberliegende Winkel α ist um $\delta = 64^0\,12'\,45{,}1''$ grösser als der der Seite b gegenüberliegende Winkel β und die den dritten Winkel γ halbierende Transversale w_γ teilt die Gegenseite c in zwei Abschnitte c'_w und c''_w, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt c'_w um $d_1 = 105{,}8824$ m grösser ist als der Abschnitt c''_w; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 120\text{ m} \\ \alpha - \beta = \delta = 64^0\,12'\,45{,}1'' \\ c'_w - c''_w = d_1 = 105{,}8824 \end{cases}$

Andeutung. Konstruiert man sich, siehe Figur 161 und die Andeutung zur Aufgabe 161, das Hülfsdreieck BDF, so kennt man von demselben die Seite $BF = a - b = d$, die Differenz der Seiten BD und DF, dieselbe ist $= c'_w - c''_w = d_1$ und den Winkel BDF, derselbe ist $= \alpha - \beta = \delta$. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 487 gesagt ist, kann man somit aus jenem Dreieck c'_w und c''_w und den Winkel β berechnen. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck $a - b$, c $(= c'_w + c''_w)$ und β kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 488 gesagt wurde.

Aufgabe 560. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks, von welchen $a > b$ ist, differieren um $d = 72$ dm., der der kleineren Seite b gegenüberliegende Winkel β beträgt $11^0\,25'\,16{,}3''$ und die zwei Abschnitte c'_w und c''_w, in welche die dritte Seite c durch die den Gegenwinkel γ halbierende Transversale w_γ zerlegt wird, und von welchen $c''_w > c'_w$ ist, differieren um $d_1 = 66{,}4614$ dm; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 72\text{ dm} \\ \beta = 11^0\,25'\,16{,}3'' \\ c'_w - c''_w = d_1 = 66{,}4614\text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 559.

γ) Aufgaben, in welchen die Summe dreier Seiten; die Differenz zwischen der Summe zweier Seiten und der dritten Seite, auch Höhen, winkelhalbierende Transversalen, Summe oder Differenz zweier Seiten, Differenz einer Seite und Höhe; in welchen ferner die Summe zweier Seiten und einer Höhe; die Summe von drei Höhenabschnitten vorkommen.

Aufgabe 561. Man soll die Seiten a, b, c und den Inhalt eines Dreiecks bestimmen, wenn dessen Umfang $a + b + c = u = 42$ m und zwei Winkel α und β desselben bezw. $= 53^0\,7'\,48{,}4''$ und $= 67^0\,22'\,48{,}5''$ sind.

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 42\text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutungen:

1) Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $a + b + c = u$

Ferner bestehen nach der Sinusregel die Relationen:

b) . . . . $\frac{b}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$

und

c) . . . . $\frac{c}{a} = \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}$$

aus Gleichung c) erhält man:

$$c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha}$$

Setzt man diese Ausdrücke für b und c in Gleichung a), so erhält man für a die Bestimmungsgleichung:

$$a + \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = u$$

und hieraus kann man a, wie folgt bestimmen:

$$a\left(1 + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} + \frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}\right) = u$$

$$a \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}{\sin\alpha} = u$$

setzt man hierin nach der Erkl. 345 für:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

und nach der Erkl. 52 für:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$a \cdot \frac{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = u$$

oder nach gehöriger Reduktion:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

In ganz analoger Weise erhält man:

$$\text{B)} \ldots b = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$\text{C)} \ldots c = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

Benutzt man zur Berechnung des gesuchten Inhalts F die in der Erkl. 151 aufgestellte Formel:

$$F = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\gamma$$

und setzt hierin für a und b die Werte aus den Gleichungen A) und B), so erhält man:

$$F = \frac{u \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{u \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin\gamma}{2}$$

oder, wenn man reduziert und nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

setzt:

$$F = \frac{u^2}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \cdot 2}$$

$$F = \frac{u^2}{4} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

oder nach der Erkl. 120:

$$\text{D)} \ldots F = \frac{u^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Mittels der allgemeinen Relationen A) bis D) kann man, wenn man in denselben die für u, α und β gegebenen Zahlenwerte und für γ den aus der Relation:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

sich ergebenden Wert substituiert, die gesuchten Stücke berechnen.

2) Nach der Sinusregel besteht zwischen den drei Seiten a, b und c und den drei Winkeln α, β und γ eines Dreiecks die Relation:

$$\text{d)} \ldots a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

oder nach der Erkl. 88 die Relation:

$$\text{e)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 234:

$$\text{f)} \ldots \frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

oder

$$\text{g)} \ldots \frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oder

$$\text{h)} \ldots \frac{a+b+c}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Setzt man in diese Gleichungen f) bis h) gemäss der Aufgabe:

$$a + b + c = u$$

ferner nach der Erkl. 345:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und nach der Erkl. 52 in Gleichung f):

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

bezw. in Gleichung g):

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

und in Gleichung h):

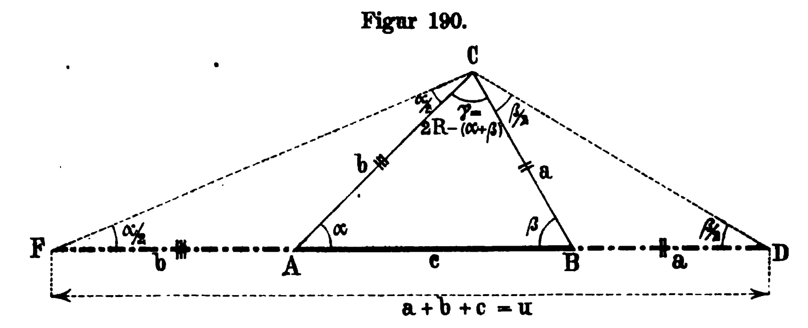
$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und löst diese drei Gleichungen bezw. in bezug auf a, b und c auf und reduziert, so erhält man die in Andeutung 1) entwickelten Gleichung A) bis C).

3) Anschliessend an die Konstruktion eines Dreiecks aus dem gegebenen Umfang und zwei gegebenen Winkeln desselben, kann man die geforderten Stücke wie folgt berechnen:

Ist, siehe Figur 190, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe ent-

Figur 190.



spricht und man bildet sich den Umfang des Dreiecks, d. i. die Summe der drei Seiten, dadurch, dass man z. B. die Seiten a und b auf den Verlängerungen der Seite c nach BD und AF hin abträgt, und verbindet C mit D und F, so erhält man die gleichschenkligen Dreiecke CBD und CAF und das schiefwinklige Dreieck FDC: in letzterem kennt man die Seite FD, dieselbe ist $= a + b + c$ oder $= u$, und die sämtlichen Winkel; letztere haben die in der Figur 190 verzeichneten Werte. Aus diesem Dreieck FDC kann man mittels der Sinusregel zunächst die Seiten FC und DC berechnen; dann kann man mittels der Sinusregel aus dem gleichschenkligen Dreieck FAC, in welchem nunmehr die Basis FC bekannt ist, die Seite b desselben berechnen; dessgl. kann man aus dem Dreieck DBC die Seite a berechnen. Aus b, a und dem gegebenen Umfang u ($= a + b + c$) kann man schliesslich die Seite c bestimmen.

Aufgabe 562. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks beträgt $u = 320$ m, die Seite c verhält sich zur Seite b wie $6:1$ und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β beträgt $9^0\,31'\,38{,}2''$; man soll hieraus die Seiten und die nicht gegebenen Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} a + b + c = u = 320\text{ m} \\ c : b = 6 : 1 \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \end{array}\right.$$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel γ und α des Dreiecks wie folgt:

Gemäss der Aufgabe ist:

a) . . . $c : b = 6 : 1$

ferner ist nach der Sinusregel:

b) . . . $\sin\gamma : \sin\beta = c : b$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich:

$$\sin\gamma : \sin\beta = 6 : 1$$

oder

A) . . . . $\sin\gamma = 6 \cdot \sin\beta$

Nach dieser Gleichung kann man in Rücksicht des für β gegebenen Zahlenwerts den Winkel γ berechnen. Den Winkel α findet man alsdann mittels der Relation:

B) . . . . $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

Sind hiernach die Winkel des Dreiecks berechnet, so verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe 561 gesagt wurde.

Aufgabe 563. Bezeichnet man mit a, b und c die drei Seiten eines Dreiecks, mit α und β die den zwei ersten dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel, so sei:

$$a + b - c = d = 260 \text{ dm}$$
$$\alpha = 65^0\,28'\,13{,}6''$$
$$\text{und } \beta = 42^0\,30'\,3{,}6''$$

wie gross sind die drei Seiten des Dreiecks und wie gross ist dessen Inhalt?

Gegeben: $\begin{cases} a + b - c = d = 260 \text{ dm} \\ \alpha = 65^0\,28'\,13{,}6'' \\ \beta = 42^0\,30'\,3{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Die gesuchten Seiten a, b und c kann man berechnen analog wie in der Andeutung 2) der vorigen Aufgabe gesagt wurde. Nach der Sinusregel ist nämlich:

$$\text{a)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder

$$\text{b)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{-c}{-\sin\gamma}$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 234:

$$\text{c)} \ldots \frac{a+b-c}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

oder

$$\text{d)} \ldots \frac{a+b-c}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \frac{b}{\sin\beta}$$

und

$$\text{e)} \ldots \frac{a+b-c}{\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma} = \frac{-c}{-\sin\gamma} \text{ oder } = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Setzt man in den Gleichungen c) bis e), gemäss der Aufgabe:

$$a + b - c = d$$

nach der Erkl. 346:

$$\sin\alpha + \sin\beta - \sin\gamma = 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und nach der Erkl. 52 in Gleichung c):

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

bezw. in Gleichung d):

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

und in Gleichung e):

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

so erhält man bezw.:

$$\text{f)} \ldots \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{g)} \ldots \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

und

$$\text{h)} \ldots \frac{d}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{c}{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und aus diesen drei Gleichungen erhält man nach gehöriger Reduktion bezw.:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{d}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{B)} \ldots b = \frac{d}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

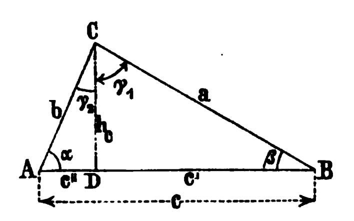
und

$$\text{C)} \ldots . c = \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

nach welchen drei Gleichungen man, in Rücksicht, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, die drei Seiten des Dreiecks berechnen kann. Den Inhalt F kann man alsdann mittels des in Erkl. 151 aufgestellten Satzes berechnen.

Aufgabe 564. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 100$ m, die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist $= 30$ m und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β ist $= 50^0$; wie gross sind die Seiten und die übrigen Winkel des Dreiecks?

Figur 191.



Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 100 \text{ m} \\ h_c = 30 \text{ m} \\ \beta = 50^0 \end{cases}$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 191. aus h_c und β zuerst die Seite a und dann bestimme man aus der gegebenen Relation:

$$a + b + c = u$$

bezw. aus:

$$b + c = u - a$$

die Summe $b + c$. Da man alsdann von dem Dreieck die Summe $b + c$ zweier Seiten, die dritte Seite a und den Winkel β kennt, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde.

Aufgabe 565. In einem Dreieck besteht zwischen den Längen der drei Seiten a, b und c die Beziehung:

$$b + c - a = d = 16 \text{ m}$$

Die zur Seite c gehörige Höhe h_c misst 12 m und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β beträgt $18^0\,55'\,28{,}7''$; man soll die Seiten und die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b + c - a = d = 16 \text{ m} \\ h_c = 12 \text{ m} \\ \beta = 18^0\,55'\,28{,}7'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 564.

Aufgabe 566. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks messen zusammen $u = 42$ m, die zur Seite c gehörige Höhe h_c teilt dieselbe in zwei Abschnitte, von welchen der der Seite b anliegende Abschnitt $c'' = 9$ m misst; wie gross sind die Seiten und die Winkel des Dreiecks, wenn der Winkel α, welcher der Seite a gegenüberliegt, $53^0\,7'\,48{,}4''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 42 \text{ m} \\ c'' = 9 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 564: man berechne, siehe Figur 191, zuerst aus c'' und α, die Seite b, u. s. f.

Aufgabe 567. Der Umfang u eines Dreiecks beträgt 460 m, der Winkel γ desselben ist $= 62^0\,39'\,26{,}7''$ und die vom Scheitel dieses Winkels auf die Gegenseite c gefällte Höhe h_c ist 120 m lang; wie gross sind die drei Seiten dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 460 \text{ m} \\ \gamma = 62^0\,39'\,26{,}7'' \\ h_c = 120 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 192, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC die Relation:

$$\text{a)} \ldots h_c = b \cdot \sin\alpha \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

ferner ergibt sich nach der Sinusregel aus dem Dreieck ABC die Relation:

$$\text{b)} \ldots b = c \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

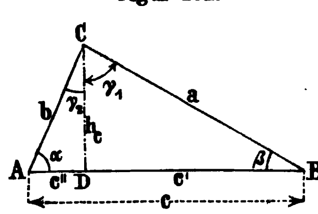
Aus diesen beiden Gleichungen erhält man zunächst durch Substitution:

$$h_c = c \cdot \frac{\sin\beta \sin\alpha}{\sin\gamma}$$

oder

$$\text{c)} \ldots\ldots c = \frac{h_c \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta}$$





Figur 192.

Drückt man nunmehr, wie in den Andeutungen 1) und 2) der Aufgabe 561 gezeigt ist, die Seite c auch in den gegebenen Umfang u und in die Winkel des Dreiecks aus, so erhält man die weitere Gleichung:

$$\text{d)} \ldots c = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}}$$

[siehe die Gleichung C) in der Andeutung 1) der Aufgabe 561].

und aus den Gleichungen c) und d) erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\text{e)} \ldots \frac{h_c \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta} = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}$$

in welcher nur noch die unbekannten Winkel α und β vorkommen. Mittels dieser Gleichung kann man diese Winkel α und β wie folgt berechnen:

Bringt man in bezug auf $\sin\gamma$, $\sin\alpha$, $\sin\beta$ die in der Erkl. 52 erwähnte Formel in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{h_c \cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

oder

$$\frac{h_c \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}} = u$$

und hieraus ergibt sich:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{h_c}{u}\cos\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = 2 \cdot \frac{h_c}{u}\cos\frac{\gamma}{2}$$

und wenn man die in der Erkl. 359 aufgestellte Formel in Anwendung bringt und in derselben $\alpha = \frac{\alpha}{2}$ und $\beta = \frac{\beta}{2}$ setzt:

$$\text{f)} \ldots \cos\frac{\alpha - \beta}{2} - \cos\frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{2h_c}{u}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Erkl. 359. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

(Siehe Formel 194 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Berücksichtigt man noch, dass:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

ist, so ergibt sich aus dieser Gleichung schliesslich:

$$\text{A)} \; \ldots \; \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{2h_c}{u}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ $(= 2R - \gamma)$ kann man dann leicht die Winkel α und β berechnen. Sind die Winkel berechnet, so kann man nach Gleichung c) die Seite c und mittels der Sinusregel die beiden andern Seiten berechnen.

Aufgabe 568. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 250$ dm, die zur Seite c gehörige Höhe h_c misst 20 dm und die Differenz der dieser Seite c anliegenden Winkel α und β ist $= 32^0\,10'\,53{,}8''$; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c = u = 250 \text{ dm} \\ h_c = 20 \text{ dm} \\ \alpha - \beta = 32^0\,10'\,53{,}8'' \end{cases}$

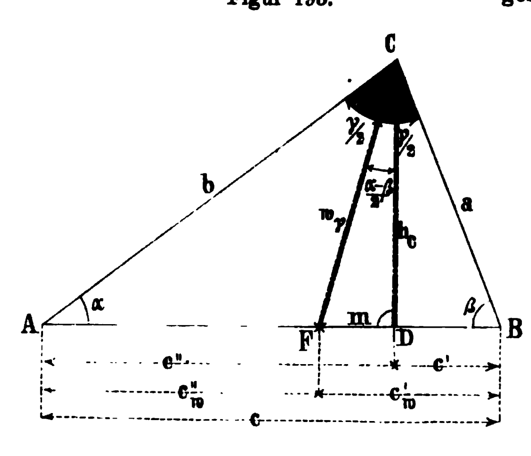
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 567; man berechne zuerst die Summe der Winkel α und β und dann aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ die einzelnen Winkel α und β. u. s. f.

Aufgabe 569. Der Umfang u eines Dreiecks beträgt 490 m, die zur Seite c gehörige Höhe h_c misst 28 m und die den dieser Seite c gegenüberliegenden Winkel γ halbierende Transversale w_γ misst 28,6107 m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c = u = 490 \text{ m} \\ h_c = 28 \text{ m} \\ w_\gamma = 28{,}6107 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck CDF, siehe Figur 193, kann man mittels der für h_c und w_γ gegebenen Werte den von diesen Transversalen h_c und w_γ eingeschlossenen Winkel $\frac{\alpha-\beta}{2}$ (siehe Erkl. 328) berechnen. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck die Summe $a+b+c$, die Höhe h_c und die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ kennt, so kann man alsdann weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 568 gesagt wurde.

Figur 193.



Aufgabe 570. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 42$ m; die Seite b ist um $d = 2$ m grösser als die

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c = u = 42 \text{ m} \\ b - a = d = 2 \text{ m} \\ c - b = d_1 = 1 \text{ m} \end{cases}$

Seite a und die Seite c ist um $d_1 = 1$ m grösser als die Seite b; wie gross sind die Seiten und Winkel?

Andeutung. Aus den in der Aufgabe gegebenen drei Gleichungen:

$$a) \ldots a + b + c = u$$

$$b) \ldots b - a = d$$

$$c) \ldots c - b = d_1$$

kann man jede der drei Seiten a, b und c berechnen. Da man alsdann die drei Seiten des Dreiecks kennt, so verfahre man zur Berechnung der Winkel wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 571. In einem Dreieck beträgt die Summe der drei Seiten a, b und $c = u = 320$ m und die Differenz der beiden ersten Seiten a und b, von welchen a grösser als b ist, $d = 120$ m; wie gross sind die drei Seiten und die Winkel dieses Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 73^0\,44'\,23{,}3''$ beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a + b + c = u = 320 \text{ m} \\ a - b = d = 120 \text{ m} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \end{cases}$$

Andeutung. Wie in den Andeutungen 1) und 2) der Aufgabe 561 gezeigt wurde, besteht in bezug auf die Seite c die Relation:

$$a) \ldots c = \frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

[siehe Gleichung C) in Andeutung 1) der Aufgabe 561]

Ferner besteht nach der Mollweideschen Formel 90, siehe Antwort der Frage 21, die Relation:

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich für die Seite c:

$$c = (a-b) \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$a - b = d$$

ist:

$$b) \ldots c = d \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man nunmehr die goniometrische Gleichung:

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = d \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist:

$$\frac{u}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = d \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

aus welcher Gleichung man durch Umformung mittels Benutzung entsprechender goniometrischer Formeln (siehe Kleyers Lehr-

buch der Goniometrie) eine Funktion des unbekannten Winkels β bestimmen und somit diesen Winkel β selbst berechnen kann. Ist β berechnet, so kennt man von dem Dreieck $a-b$, α und β und kann alsdann im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 486 gesagt wurde.

Aufgabe 572. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 42$ m, die Differenz der beiden ersten Seiten a und b, von welchen b grösser als a ist, ist $d = 2$ m und der der dritten Seite gegenüberliegende Winkel γ beträgt $59^0\,29'\,23{,}1''$; man soll die beiden andern Winkel und die drei Seiten des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b+c = u = 42\text{ m} \\ b-a = d = 2\text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 571.

Aufgabe 573. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks messen zusammen $u = 850$ m, die Seite a ist um $d = 360$ m grösser als die Seite b und der der Seite b gegenüberliegende Winkel β ist $= 5^0\,43'\,29{,}3''$; man soll die Seiten und die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b+c = u = 850\text{ m} \\ a-b = d = 360\text{ m} \\ \beta = 5^0\,43'\,29{,}3'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 571.

Aufgabe 574. Der Umfang u eines Dreiecks ist $= 90$ m, der Winkel γ desselben ist $= 93^0\,41'\,42{,}8''$ und die Gegenseite c dieses Winkels γ ist um $d = 28$ m grösser als die zu derselben gehörige Höhe h_c. Man berechne die Seiten des Dreiecks.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b+c = u = 90\text{ m} \\ \gamma = 93^0\,41'\,42{,}8'' \\ c-h_c = d = 28 \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne zuächst die Seite c wie folgt:

Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

$$\text{a)} \ldots a+b+c = u$$

und

$$\text{b)} \ldots c-h_c = d$$

Ferner hat man nach den Erkl. 151 und 34 die Relation:

$$\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$$

oder

$$\text{c)} \ldots\ldots ab = \frac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}$$

Dann hat man noch nach Erkl. 342 die Relation:

$$\text{d)} \ldots c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cdot\cos^2\gamma$$

Man hat somit 4 Gleichungen mit den vier Unbekannten a, b, c und h_c; dieselben kann man in bezug auf c wie folgt auflösen:

Aus Gleichung a) erhält man:

$$\text{e)} \ldots a+b = u-c$$

oder

$$\text{f)} \ldots (a+b)^2 = (u-c)^2$$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$\text{g)} \ldots h_c = c-d$$

Setzt man diesen Wert für h_c in Gleichung c), so erhält man:

$$\text{h)} \ldots ab = \frac{c(c-d)}{\sin\gamma}$$

Substituiert man nunmehr die Werte für $(a+b)^2$ und ab aus den Gleichungen f) und h) in Gleichung d), so erhält man für c die Bestimmungsgleichung:

$$c^2 = (u-c)^2 - 4 \cdot \frac{c(c-d)}{\sin\gamma} \cdot \cos^2\gamma$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf c auf, so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\text{A)} \ldots c = \frac{d}{2} - u\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \sqrt{2u^2\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} + \left(\frac{2u\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} - d}{2}\right)^2}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Ist hiernach c berechnet, so kann man nach Gleichung g) die Höhe h_c, dann nach Gleichung c) das Produkt ab und nach Gleichung e) die Summe $a+b$ berechnen. Aus den für ab und $a+b$ gefundenen Werten kann man dann leicht die Seiten a und b berechnen. Die Winkel α und β findet man schliesslich aus a, b, c und γ mittels Anwendung der Sinusregel.

Aufgabe 575. Von einem Dreieck kennt man ausser den Winkeln $\alpha = 73^0\,44'\,23{,}3''$ und $\beta = 9^0\,31'\,38{,}2''$ die Summe $S = 194$ m der zwei Seiten a und b und der auf der dritten Seite c gefällten Höhe h_c. Man soll die Seiten dieses Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b+h_c = S = 194\,\text{m} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \end{cases}$$

Andeutung. Zur Berechnung der Seiten a und b verfahre man wie folgt:

Nach der Sinusregel besteht die Proportion:

$$\text{a)} \ldots a:b = \sin\alpha : \sin\beta$$

ferner besteht, siehe Figur 192, zwischen der Höhe h_c, der Seite b und dem Winkel α die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

welche man auch als die Proportion:

$$\text{b)} \ldots h_c : b = \sin\alpha : 1$$

schreiben kann. Aus diesen beiden Proportionen kann man nach der Erkl. 360 die laufende Proportion:

$$\text{c)} \ldots a:b:h_c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\alpha\sin\beta$$

herleiten. Bringt man nunmehr in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\text{d)} \ldots \frac{a+b+h_c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$$

und

$$\text{e)} \ldots \frac{a+b+h_c}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oder wenn man gemäss der Aufgabe:

$$a+b+h_c = S$$

Erkl. 360. Aus den in nebenstehender Andeutung aufgestellten Proportionen:

$$\text{a)} \ldots a:b = \sin\alpha : \sin\beta$$

und

$$\text{b)} \ldots h_c : b = \sin\alpha : 1$$

kann man wie folgt eine laufende Proportion bilden:

Nimmt man an, der Strecke a entspreche die Masszahl 1, so ergibt sich aus Proportion a), dass der Strecke b die Masszahl $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ entspricht.

In Rücksicht, dass also nach jener Annahme der Strecke b die Masszahl $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$ entspricht, ergibt sich aus der Proportion b), dass der Strecke h_c die Masszahl $\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} \cdot \sin\alpha$ oder die Masszahl $\sin\beta$ entsprechen muss. In Rücksicht jener Annahme besteht also die laufende Proportion:

$$\text{1)} \ldots \frac{a}{1} = \frac{b}{\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}} = \frac{h_c}{\sin\beta}$$

Dividiert man Glied für Glied dieser Gleichung durch $\sin\alpha$, so erhält man hieraus die laufende Proportion:

2) . . . . $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{h_c}{\sin\alpha\sin\beta}$

welche man nach der Erkl. 88 auch in der Form schreiben kann:

3) . . . . $a : b : h_c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\alpha\sin\beta$

setzt und jene Gleichungen bezw. nach a und b auflöst:

A) . . . $a = S \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

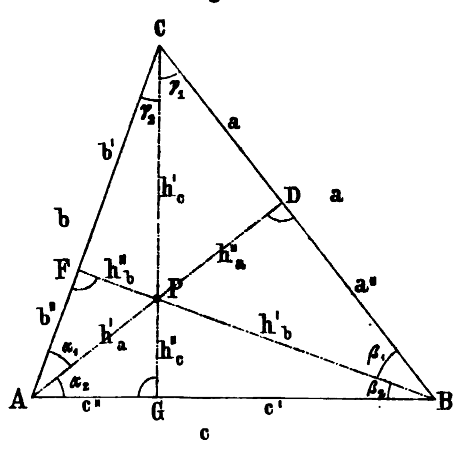
und

B) . . . $b = S \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\alpha\sin\beta}$

Hat man nach diesen Gleichungen a und b berechnet, so kann man die Seite c im weiteren mittels Anwendung der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 576. In einem Dreieck schneiden sich die drei Höhen so, dass die Summe der drei nach den Ecken des Dreiecks hin liegenden Abschnitte h'_a, h'_b und h'_c dieser Höhen zusammen $S = 24{,}5$ m messen; wie gross sind die drei Seiten dieses Dreiecks, wenn die Winkel α und β desselben bzw. $= 53^0\,7'\,48{,}4''$ und $= 67^0\,22'\,48{,}5''$ betragen?

Figur 194.



Erkl. 861. Aus den in nebenstehender Andeutung aufgestellten Proportionen h) bis k):

h) . . . $h'_a : h'_c = \sin\gamma_2 : \sin\alpha_1$

i) . . . $h'_a : h'_b = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2$

und

k) . . . $h'_b : h'_c = \sin\gamma_1 : \sin\beta_1$

kann man wie folgt eine laufende Proportion bilden:

Nimmt man an, der Strecke h'_a entspreche die Masszahl 1, so ergibt sich aus der Proportion h), dass der Strecke h'_c die Masszahl $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_2}$ entsprechen muss; ferner ergibt sich in Rücksicht jener Annahme aus der Proportion i), dass der Strecke h'_b die Masszahl $\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$ ent-

Gegeben: $\begin{cases} h'_a + h'_b + h'_c = S = 24{,}25 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 194, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so beachte man zunächst, dass mit α und β auch der dritte Winkel γ bekannt ist, indem:

a) . . . $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

ist, dass ferner auch, siehe Figur 194, die Winkel α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 und γ_2 als bekannt vorausgesetzt werden dürfen, indem zwischen den spitzen Winkeln α_2 und β des rechtwinkligen Dreiecks ADB die Relation:

b) . . . $\alpha_2 = R - \beta$

zwischen den spitzen Winkeln α_1 und γ des rechtwinkligen Dreiecks ADC die Relation:

c) . . . $\alpha_1 = R - \gamma$

zwischen den spitzen Winkeln β_2 und α des rechtwinkligen Dreiecks AFB die Relation:

d) . . . $\beta_2 = R - \alpha$

zwischen den spitzen Winkeln β_1 und γ des rechtwinkligen Dreiecks BFC die Relation:

e) . . . $\beta_1 = R - \gamma$

zwischen den spitzen Winkeln γ_2 und α des rechtwinkligen Dreiecks AGC die Relation:

f) . . . $\gamma_2 = R - \alpha$

und zwischen den spitzen Winkeln γ_1 und β des rechtwinkligen Dreiecks BGC die Relation:

g) . . . $\gamma_1 = R - \beta$

besteht.

Zur Berechnung der gesuchten Seiten a, b und c berechne man zunächst die Höhenabschnitte h'_a, h'_b und h'_c wie folgt:

Aus den Dreiecken APC, APB und BPC erhält man nach der Sinusregel bezw. die Proportionen:

h) . . . $h'_a : h'_c = \sin\gamma_2 : \sin\alpha_1$

i) . . . $h'_a : h'_b = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2$

und

k) . . . $h'_b : h'_c = \sin\gamma_1 : \sin\beta_1$

sprechen muss, und man hat in Rücksicht jener Annahme die laufende Proportion:

$$1) \ldots . \frac{h'_a}{1} = \frac{h'_b}{\frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}} = \frac{h'_c}{\frac{\sin\alpha_1}{\sin\gamma_2}}$$

Dividiert man Glied für Glied dieser Gleichung durch $\sin\beta_2$, so erhält man hieraus die laufende Proportion:

$$2) \ldots . \frac{h'_a}{\sin\beta_2} = \frac{h'_b}{\sin\alpha_2} = \frac{h'_c}{\frac{\sin\alpha_1 . \sin\beta_2}{\sin\gamma_2}}$$

welche man nach der Erkl. 88 auch in der Form schreiben kann:

$$3) \ldots h'_a : h'_b : h'_c = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2 : \frac{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_2}{\sin\gamma_2}$$

Berücksichtigt man noch, dass nach den in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichungen d) und f):

$$\beta_2 = \gamma_2$$

dass also auch:

$$\sin\beta_2 = \sin\gamma_2$$

ist, so erhält man hieraus:

$$4) \ldots h'_a : h'_b : h'_c = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1$$

aus welchen man nach der Erkl. 361 die laufende Proportion:

$$1) \ldots . h'_a : h'_b : h'_c = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2 : \sin\alpha_1$$

ableiten kann.

Bringt man nunmehr in bezug auf diese Proportionen den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$m) \ldots . \frac{h'_a + h'_b + h'_c}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2} = \frac{h'_a}{\sin\beta_2}$$

$$n) \ldots . \frac{h'_a + h'_b + h'_c}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2} = \frac{h'_b}{\sin\alpha_2}$$

und

$$o) \ldots . \frac{h'_a + h'_b + h'_c}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2} = \frac{h'_c}{\sin\alpha_1}$$

oder, wenn man gemäss der Aufgabe:

$$h'_a + h'_b + h'_c = S$$

setzt und jene Gleichungen bezw. nach h'_a, h'_b und h'_c auflöst:

$$A) \ldots h'_a = S \cdot \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2}$$

$$B) \ldots h'_b = S \cdot \frac{\sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2}$$

und

$$C) \ldots h'_c = S \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_1 + \sin\alpha_2 + \sin\beta_2}$$

nach welchen Gleichungen man die Höhenabschnitte h'_a, h'_b und h'_c berechnen kann. Sind diese Abschnitte berechnet, so kann man mittels derselben und den Winkeln α_1, α_2, β_1, β_2, γ_1 und γ_2 die Höhenabschnitte h''_a, h''_b und h''_c leicht bestimmen. Sind auch diese Höhenabschnitte berechnet, so kann man auch die Höhen h_a, h_b und h_c bestimmen und dann mittels den letzteren und den gegebenen Winkeln α, β und γ die gesuchten Seite a, b und c auf einfache Weise berechnen.

---

z) Aufgaben, in welchen Bezug auf den Flächeninhalt genommen ist.

Aufgabe 577. Der Inhalt F eines Dreiecks beträgt 715 qm, eine Seite a misst 53,4 m und der ihr anliegende Winkel γ beträgt 38° 47′ 10″; wie gross sind die beiden andern Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 715 \text{ qm} \\ a = 53{,}4 \text{ m} \\ \gamma = 38^0\, 47'\, 10'' \end{cases}$$

Andeutung. Mittels der in der Auflösung der Aufgabe 118 aufgestellten Inhaltsformel 133 berechne man aus dem gegebenen Inhalt F, der gegebenen Seite a und dem gegebenen Winkel γ, die Seite b; dann benutze man im weiteren die Sinusregel.

Aufgabe 578. Welchen Winkel müssen die zwei 124,8 m und 368 m langen Seiten a und b eines Dreiecks einschliessen, damit dessen Inhalt $F = 8687{,}45$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 8687{,}45 \text{ qm} \\ a = 124{,}8 \text{ m} \\ b = 368 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 577. Man beachte auch die Erkl. 271.

Aufgabe 579. Der Inhalt F eines Dreiecks beträgt 39480 qm, die Seite a desselben misst 329 m und der dieser Seite gegenüberliegende Winkel α beträgt $41^0\,6'\,43{,}5''$; wie gross sind die übrigen Seiten und Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 39480 \text{ qm} \\ a = 329 \text{ m} \\ \alpha = 41^0\,6'\,43{,}5'' \end{cases}$$

Andeutung. Aus den in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichungen 2) und 5) ergeben sich zur Berechnung der Seiten b und c die Beziehungen:

$$\text{a)} \ldots (b+c)^2 = a^2 + 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots (b-c)^2 = a^2 - 4bc\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man in diese Gleichungen für $b \cdot c$ den aus der Formel 161:

$$F = \frac{bc}{2}\sin\alpha \text{ (s. Erkl. 151 und 156)}$$

sich ergebenden Wert:

$$\text{c)} \ldots bc = \frac{2F}{\sin\alpha}$$

so erhält man bezw.:

$$(b+c)^2 = a^2 + \frac{8F}{\sin\alpha} \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$$

und

$$(b-c)^2 = a^2 - \frac{8F}{\sin\alpha} \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

setzt, dann reduziert, die Erkl. 120 und 121 berücksichtigt:

$$\text{A)} \ldots b+c = \sqrt{a^2 + 4F \cdot \text{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

und

$$\text{B)} \ldots b-c = \sqrt{a^2 - 4F \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

mittels welcher Gleichungen man leicht die Seiten b und c berechnen kann. Die gesuchten Winkel β und γ kann man alsdann im weiteren mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 580. Wie gross sind die drei Seiten eines Dreiecks, wenn die Winkel α und β bezw. $= 65^0\,18'\,12''$ und $58^0\,22'\,18''$ sind und wenn dessen Inhalt $F = 564$ qkm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 564 \text{ qkm} \\ \alpha = 65^0\,18'\,12'' \\ \beta = 58^0\,22'\,18'' \end{cases}$$

Andeutung. Bezeichnet man die drei gesuchten Seiten bezw. mit a, b und c, so bestehen nach der Erkl. 151 die Relationen:

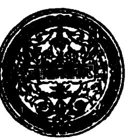
$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma = F$$

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{ac}{2}\sin\beta = F$$

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{bc}{2}\sin\alpha = F$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

289. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 288. — Seite 369—384. Mit 3 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 288. — Seite 369—384. Mit 3 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen Bezug auf den Flächeninhalt genommen ist, und Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen den Masszahlen der Seiten, auch der Höhen, Schwerlinien, winkelhalbierenden Transversalen und Seitenabschnitte gegeben sind.

Stuttgart 1886.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

ferner bestehen nach der **Sinusregel** die weiteren Relationen:

$$\text{d)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

und

$$\text{e)} \ldots \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

Diese Relationen ergeben sich auch aus den Gleichungen a), b) u. c)

Drückt man nunmehr mittels der Gleichung d) b in a, α und β aus, und setzt diesen für b sich ergebenden Wert:

$$b = \frac{a \sin\beta}{\sin\alpha}$$

in Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{a^2 \sin\beta}{2 \sin\alpha} \cdot \sin\gamma = F$$

oder:

$$\text{A)} \ldots a = \sqrt{\frac{2F \cdot \sin\alpha}{\sin\beta \sin\gamma}}$$

In ganz analoger Weise erhält man aus den Gleichungen a) bis e):

$$\text{B)} \ldots b = \sqrt{\frac{2F \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \sin\gamma}}$$

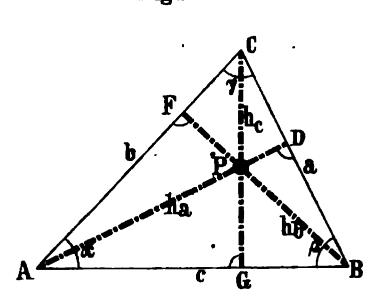
und

$$\text{C)} \ldots c = \sqrt{\frac{2F \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha \sin\beta}}$$

Der Winkel γ ist $= 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Aufgabe 581. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks ist $= 7,5$ qm, die Winkel α und β sind bezw. $= 42^0$ und 59^0; man soll die drei Höhen des Dreiecks berechnen.


Figur 195.



Gegeben: $\begin{cases} F = 7,5 \text{ qm} \\ \alpha = 42^0 \\ \beta = 59^0 \end{cases}$

Gesucht: h_a, h_b und h_c

Andeutung. Die gesuchte Höhe h_a, siehe Figur 195, kann man wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 151 besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{bc \sin\alpha}{2}$$

Ferner ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und ADB, in welche die Höhe h_a das Dreieck ABC zerlegt, die Relationen:

$$\text{b)} \ldots \sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

und

$$\text{c)} \ldots \sin\beta = \frac{h_a}{c}$$

Substituiert man die aus den Gleichungen b) und c) für b und c sich ergebenden Werte:

$$\text{d)} \ldots b = \frac{h_a}{\sin\gamma}$$

und

$$\text{e)} \ldots c = \frac{h_a}{\sin\beta}$$

in Gleichung a), so erhält man für h_a die Bestimmungsgleichung:

$$F = \frac{h^2_a \cdot \sin\alpha}{2 \sin\beta \sin\gamma}$$

und hieraus erhält man:

A) . . . $h_a = \sqrt{\frac{2F \sin\beta \sin\gamma}{\sin\alpha}}$

In analoger Weise erhält man für die Höhen h_b und h_c bezw.:

B) . . . $h_b = \sqrt{\frac{2F \sin\alpha \sin\gamma}{\sin\beta}}$

und

C) . . . $h_c = \sqrt{\frac{2F \sin\alpha \sin\beta}{\sin\gamma}}$

Der Winkel γ ist $= 180^0 - (\alpha + \beta)$.

Aufgabe 582. Das Verhältnis der zwei Seiten a und b eines Dreiecks ist $= 13:15$, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $59^0 29' 23,1''$; wie gross sind die Seiten und die übrigen Winkel dieses Dreiecks, wenn dessen Inhalt $F = 84$ qm beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} F = 84 \text{ qm} \\ a:b = 13:15 \\ \gamma = 59^0 29' 23,1'' \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $a:b = 13:15$

ferner besteht nach der Erkl. 151 die Relation:

b) . . . $F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$

Setzt man den aus Gleichung a) für b sich ergebenden Wert:

c) . . . $b = \frac{15}{13} a$

in Gleichung b), so erhält man für a die Bestimmungsgleichung:

$$F = \frac{15}{13} \cdot \frac{a^2}{2} \sin\gamma$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . $a = \sqrt{\frac{13}{15} \cdot \frac{2F}{\sin\gamma}}$

Setzt man ferner den aus Gleichung a) für a sich ergebenden Wert:

d) . . . $a = \frac{13}{15} b$

in Gleichung a), so erhält man für b die Bestimmungsgleichung:

$$F = \frac{13}{15} \cdot \frac{b^2}{2} \cdot \sin\gamma$$

und hieraus ergibt sich:

B) . . . $b = \sqrt{\frac{15}{13} \cdot \frac{2F}{\sin\gamma}}$

Hat man nach den Gleichungen A) und B) die Seiten a und b berechnet, so kennt man von dem zu berechnenden Dreieck zwei Seiten und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ und kann somit im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Die vorstehenden Gleichungen A) und B) kann man auch wie folgt herleiten:

Denkt man sich ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck, nämlich nach dem in der Erkl. 273 angeführten zweiten Aehnlichkeitssatz ein Dreieck, in welchem ein Winkel gleich dem gegebenen Winkel γ ist, und in welchem die Längen der diesen Winkel einschliessenden Seiten bezw. $= 13$ und $= 15$ irgend welchen Längeneinheiten sind, so hat man für den Inhalt F_1 dieses gedachten Dreiecks nach der Erkl. 151:

$$f) \ldots F_1 = \frac{13 \cdot 15}{2} \sin\gamma$$

Da nun nach der Erkl. 362 zwischen dem Inhalt F_1 und dem gegebenen Inhalt F des zu berechnenden Dreiecks die Relation:

$$g) \ldots F : F_1 = a^2 : 13^2$$

oder auch die Relation:

$$h) \ldots F : F_1 = b^2 : 15^2$$

besteht, so erhält man aus den Gleichungen g) und h), wenn man für F_1 den Wert aus Gleichung f) substituiert, bezw.:

$$i) \ldots F : \frac{13 \cdot 15}{2} \sin\gamma = a^2 : 13^2$$

und

$$k) \ldots F : \frac{13 \cdot 15}{2} \sin\gamma = b^2 : 15^2$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich nach gehöriger Reduktion ebenfalls die beiden vorstehenden Gleichungen A) und B).

Erkl. 362. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Inhalte ähnlicher Dreiecke verhalten sich wie die Quadrate zweier homologen Seiten.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Sind z. B. F und F_1 die Inhalte zweier ähnlichen Dreiecke, a und a_1 bezw. zwei homologe Seiten derselben, so besteht nach jenem Satz die Beziehung:

$$F : F_1 = a^2 : a_1^2$$

Aufgabe 583. Wie gross sind die Seiten a, b und c eines Dreiecks, wenn man weiss, dass dieselben in dem Verhältnis $37 : 13 : 40$ stehen, und dass der Inhalt F des Dreiecks $= 240$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a : b : c = 37 : 13 : 40 \\ F = 240 \text{ qm} \end{cases}$$

Andeutung. Denkt man sich ein dem zu berechnenden Dreieck ähnliches Dreieck, nämlich nach dem in der Erkl. 273 angeführten dritten Aehnlichkeitssatz ein Dreieck, in welchem die Längen der drei Seiten bezw. $= 37$, 13 und 40 irgend welchen Längeneinheiten sind, so hat man für den Inhalt F_1 dieses gedachten Dreiecks nach der in der Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 194 die Relation:

$$a) \ldots . F_1 = \sqrt{s(s-37)(s-13)(s-40)}$$

in welcher:

$$a_1) \ldots s = \frac{37 + 13 + 40}{2}$$

gesetzt werden muss.

Da nun nach der Erkl. 362 zwischen dem Inhalt F_1 jenes Dreiecks und dem gegebenen Inhalt F des zu berechnenden Dreiecks die Relation:

$$b) \ldots F : F_1 = a^2 : 37^2$$

auch die Relation:

$$c) \ldots F : F_1 = b^2 : 13^2$$

und auch die Relation:

d) . . . $F : F_1 = c^2 : 40^2$

besteht, so erhält man aus den Gleichungen b) bis d), wenn man in denselben für F_1 den Wert aus Gleichung a) substituiert und die somit erhaltenen Gleichungen bezw. nach a, b und c auflöst, die Gleichungen:

$$\text{A)} \ldots a = 37\sqrt{\frac{F}{\sqrt{s(s-37)(s-13)(s-40)}}}$$

$$\text{B)} \ldots b = 13\sqrt{\frac{F}{\sqrt{s(s-37)(s-13)(s-40)}}}$$

und

$$\text{C)} \ldots c = 40\sqrt{\frac{F}{\sqrt{s(s-37)(s-13)(s-40)}}}$$

in welchen man sich für:

$$s = \frac{37 + 13 + 40}{2}$$

gesetzt zu denken hat.

Hat man nach den Gleichungen A) bis C) die drei Seiten a, b und c berechnet, so kann man im weiteren die Winkel α, β und γ berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde; oder man kann die Winkel auf einfachere Weise mittels Benutzung des in der Erkl. 151 aufgestellten Satzes berechnen, da der Inhalt F bekannt ist.

Aufgabe 584. Von einem Dreieck kennt man den Flächeninhalt $F = 1800$ qdm, die Seite $a = 145$ dm und die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 24$ dm; man soll hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 1800 \text{ qdm} \\ a = 145 \text{ dm} \\ h_c = 24 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Nach der Erkl. 34 besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

mittels welcher man die Seite c berechnen kann. Da man alsdann von dem Dreieck die zwei Seiten a und c sowie den Flächeninhalt kennt, so kann man den von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel β mittels der Formel:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{a \cdot c}{2} \sin\beta \text{ (s. Erkl. 151)}$$

berechnen, wobei man die Erkl. 271 zu berücksichtigen hat, u. s. f.

Aufgabe 585. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks beträgt 8160 qm, der Winkel β desselben ist $= 5^0\,43'\,29{,}3''$ und die zur Seite c gehörige Höhe h_c misst 40 m; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 8160 \text{ qm} \\ \beta = 5^0\,43'\,29{,}3'' \\ h_c = 40 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus β und h_c berechne man zunächst die Seite a; dann berechne man die Seite c mittels der Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a \cdot c}{2} \sin\beta \text{ (s. Erkl. 151)}$$

indem man in derselben für a den vorhin berechneten Wert und für F und β die gegebenen Werte substituiert und jene Gleichung in bezug auf c auflöst. Die übrigen Stücke kann man dann leicht, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, berechnen.

Aufgabe 586. In einem Dreieck verhält sich die Seite c zu der ihr zugehörigen Höhe h_c wie 7 : 6; der Inhalt F des Dreiecks beträgt 84 qm und die Seite a desselben misst 13 m; man soll hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} c : h_c = 7 : 6 \\ F = 84 \text{ qm} \\ a = 13 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots c : h_c = 7 : 6$$

ferner besteht nach der Erkl. 34 die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{c \cdot h_c}{2} = F$$

Man hat somit zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten c und h_c und kann sonach aus denselben c und h_c berechnen. Hierauf kann man nach der Erkl. 151 den Winkel β aus a, c und F berechnen, u. s. f.

Aufgabe 587. Die zu den Seiten a und b gehörigen Höhen h_a und h_b messen bezw. = 8 m und = 9 m; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn dessen Inhalt $F = 45$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 45 \text{ qm} \\ h_a = 8 \text{ m} \\ h_b = 9 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Nach der Erkl. 34 bestehen zur Berechnung der Seiten a und b die Relationen:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots F = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

man erhält aus denselben:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{2F}{h_a}$$

und

$$\text{B)} \ldots b = \frac{2F}{h_b}$$

nach welchen Gleichungen man die Seiten a und b berechnen kann.

Ferner besteht zwischen dem Winkel γ, der Höhe h_a und der Seite b die Relation:

$$\sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

oder, wenn man den Wert für b aus Gleichung B) substituiert:

$$\text{C)} \ldots \sin\gamma = \frac{h_a \cdot h_b}{2F}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann, wobei die Erkl. 271 zu berücksichtigen ist. Da man nunmehr von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den

von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ kennt, so kann man die übrigen Stücke berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 588. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $= 53^0\,7'\,48{,}4''$, das Verhältnis der beiden Höhen h_a und h_b, welche zu den jenen Winkel γ einschliessenden Seiten a und b gehören, ist $= 14:15$; wie gross sind die übrigen Winkel und die drei Seiten des Dreiecks, wenn dessen Flächeninhalt $= 84$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{r}F = 84 \text{ qm}\\ h_a : h_b = 14:15\\ \gamma = 53^0\,7'\,48{,}4''\end{array}\right.$$

Andeutung. Die gesuchten Seiten a und b des Dreiecks kann man wie folgt berechnen:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $h_a : h_b = 14:15$

ferner besteht nach der Erkl. 295 die Relation:

b) . . . $h_a : h_b = b : a$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich zunächst die Beziehung:

c) . . . $b : a = 14:15$

Da ferner noch nach der Erkl. 151 die Relation:

d) . . . $F = \frac{a \cdot b}{2} \sin\gamma$

besteht, so hat man mit den Gleichungen c) und d) zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten a und b, aus welchen man die gesuchten Seiten a und b leicht berechnen kann. Sind hiernach a und b berechnet, so kennt man von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel γ, und man kann somit im weiteren die übrigen Stücke bestimmen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 589. Die zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b schneiden sich so, dass die nach den Ecken A und B hin liegenden Abschnitte h'_a und h'_b dieser Höhen im Verhältnis von 39:25 stehen. Wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn der Winkel $\beta = 67^0\,22'\,48{,}5''$ und der Flächeninhalt F des Dreiecks $= 84$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{r}h'_a : h'_b = 39:25\\ \beta = 67^0\,22'\,48{,}5''\\ F = 84 \text{ qm}\end{array}\right.$$

Andeutung. Man berechne zunächst die gesuchten Winkel des Dreiecks wie folgt:

Ist, siehe Figur 196, ABC das Dreieck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergibt sich aus dem Dreieck ABF nach der Sinusregel die Relation:

a) . . . $h'_a : h'_b = \sin\beta_2 : \sin\alpha_2$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$h'_a : h'_b = 39:25$$

ist, die Relation:

b) . . . $\sin\beta_2 : \sin\alpha_2 = 39:25$

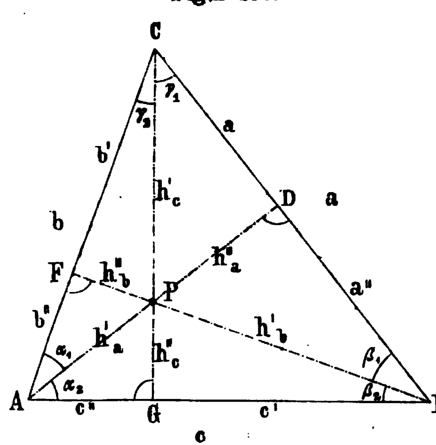
Berücksichtigt man ferner, dass:

$$\alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 90^0$$

bezw. dass:

c) . . . $\alpha_2 + \beta = 90^0$

ist, indem α_2 und β die spitzen Winkel des



Figur 196.

rechtwinkligen Dreiecks ADB sind, dass man also in der Gleichung b) für:

d) . . . $\alpha_2 = 90^0 - \beta$

setzen kann, so geht jene Gleichung b) über in:

$$\sin\beta_2 : \sin(90^0 - \beta) = 39 : 25$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 19:

A) . . . . $\sin\beta_2 = \frac{39}{25} \cdot \cos\beta$

nach welcher Gleichung man den Winkel β_2 berechnen kann. Ist hiernach dieser Winkel β_2 berechnet, so kann man leicht, da, siehe Figur 196:

B) . . . . $\beta_1 = \beta - \beta_2$

ist, den Winkel β_1 bestimmen, womit zugleich, da nach der Erkl. 357:

C) . . . . $\alpha_1 = \beta_1$

ist, auch der Winkel α_1 bestimmt ist; ferner kann man nach Gleichung d), nach welcher:

D) . . . . $\alpha_2 = 90^0 - \beta$

ist, den Winkel α_2 bestimmen und hiernach kann man schliesslich, in Rücksicht, dass:

E) . . . . $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

ist, den Winkel α berechnen; den dritten Winkel γ des Dreiecks findet man aus der Relation:

F) . . . . $\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$

Da man nunmehr von dem zu berechnenden Dreieck die drei Winkel und den Flächeninhalt F kennt, so kann man die gesuchten Seiten a, b und c mittels der in der Auflösung der Aufgabe 117 und der in den Erkl. 131 und 134 aufgestellten Formeln 95, 109 und 122 berechnen, indem man in diesen Formeln:

G) . . . . $F = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \sin\beta}{2 \sin\alpha}$

H) . . . . $F = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\beta}$

und

J) . . . . $F = \frac{c^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$

für F den gegebenen Wert und für α und β die vorhin berechneten Werte substituiert und diese Gleichungen G) bis J) in bezug auf a, b und c auflöst.

Aufgabe 590. Die Seite a eines Dreiecks ist $= 145$ dm, die Summe der beiden andern Seiten b und c ist $S = 175$ dm; wie gross sind diese beiden letzteren Seiten und die Winkel des Dreiecks, wenn der Flächeninhalt F des Dreiecks $= 1800$ qdm beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} F = 1800 \text{ qdm} \\ b + c = S = 175 \text{ dm} \\ a = 145 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Setzt man in der in Andeutung der Aufgabe 579 aufgestellten Gleichung A):

$$A) \ldots b+c=\sqrt{a^2+4F\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

für $b+c$ ($=S$), für a und F die gegebenen Werte und löst die somit erhaltene Gleichung nach $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ auf, so erhält man eine Gleichung, aus welcher man den Winkel α berechnen kann. Da man alsdann von dem Dreieck a, α und $b+c$ kennt, so kann man die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 591. Die Seite b eines Dreiecks ist um $d = 37$ m grösser als die Seite c desselben; die dritte Seite a misst 125 m und der Flächeninhalt F des Dreiecks beträgt 5940 qm; man soll hieraus die Seiten b und c und die drei Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 5940 \text{ qm} \\ b-c=d=37 \text{ m} \\ a = 125 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 590. Man benutze die in der Andeutung zur Aufgabe 579 aufgestellte Gleichung B):

$$b-c=\sqrt{a^2-4F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Aufgabe 592. Der Inhalt F eines Dreiecks beträgt 50 qm, die Summe der Seiten a und b ist $S = 30$ m und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 28^0\,37'\,35''$. Man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 50 \text{ qm} \\ a+b=S=30 \text{ m} \\ \gamma = 28^0\,37'\,35'' \end{cases}$

Andeutung. Zur Berechnung der Seiten a und b verfahre man wie folgt:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$a) \ldots a+b=S$$

Ferner besteht nach der Erkl. 151 die Relation:

$$F=\frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$$

oder die Relation:

$$b) \ldots ab=\frac{2F}{\sin\gamma}$$

und aus diesen beiden Gleichungen, welche die beiden Unbekannten a und b enthalten, kann man die letzteren unter anderem wie folgt berechnen:

Quadriert man Gleichung a) und multipliziert Gleichung b) mit 4, so erhält man bezw. die Gleichungen:

$$c) \ldots a^2+2ab+b^2=S^2$$

und

$$d) \ldots 4ab=\frac{8F}{\sin\gamma}$$

Subtrahiert man nunmehr die Gleichung d) von Gleichung c) und reduziert, so erhält man:

$$a^2-2ab+b^2=S^2-\frac{8F}{\sin\gamma}$$

oder:

$$(a-b)^2=S^2-\frac{8F}{\sin\gamma}$$

und hieraus erhält man:

$$e) \ldots a - b = \sqrt{S^2 - \frac{8F}{\sin\gamma}}$$

nämlich die Differenz jener Seiten a und b. Addiert man nunmehr die Gleichungen a) und e), so erhält man:

$$A) \ldots a = \frac{1}{2}\left(S + \sqrt{S^2 - \frac{8F}{\sin\gamma}}\right)$$

subtrahiert man hingegen Gleichung e) von Gleichung a), so erhält man:

$$B) \ldots b = \frac{1}{2}\left(S - \sqrt{S^2 - \frac{8F}{\sin\gamma}}\right)$$

und nach diesen beiden Gleichungen A) und B) kann man die Seiten a und b berechnen. Für die dritte Seite c hat man nach dem Projektionssatz:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

oder nach der Erkl. 342:

$$c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach Gleichung a) für:

$$(a+b)^2 = S^2$$

und nach Gleichung d) für:

$$4ab = \frac{8F}{\sin\gamma}$$

so geht dieselbe über in:

$$c^2 = S^2 - \frac{8F}{\sin\gamma}\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus erhält man, wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

setzt und reduziert:

$$C) \ldots c = \sqrt{S^2 - 4F \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

Aufgabe 593. Die Differenz der zwei Seiten a und b eines Dreiecks, von welchen a grösser als b ist, ist $d = 360$ dm, der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 96^0\, 57'\, 20{,}1''$ und der Inhalt F des Dreiecks beträgt 8160 qdm; man soll die Seiten und die übrigen Winkel des Dreiecks hieraus berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} F = 8160 \text{ qdm} \\ a - b = d = 360 \text{ dm} \\ \gamma = 96^0\, 57'\, 20{,}1'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 592.

Aufgabe 594. Die Summe der beiden Seiten b und c eines Dreiecks beträgt $S = 149$ m; die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist 20 m lang und der Flächeninhalt F des Dreiecks ist $= 1200$ qm; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} F = 1200 \text{ qm} \\ b + c = S = 149 \text{ m} \\ h_c = 20 \text{ m} \end{array} \right.$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$a) \ldots b + c = S$$

ferner besteht nach der Erkl. 34 die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{c \cdot h_c}{2} = F$$

Aus Gleichung b) kann man die Seite c berechnen, dann diesen Wert für c in Gleichung a) substituieren und aus der somit erhaltenen Gleichung die Seite b berechnen, u. s. f.

Aufgabe 595. Die Seite a eines Dreiecks ist um $d = 24$ dm grösser als die Seite b und die zur Seite a gehörige Höhe h_a misst 12,973 dm. Wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn dessen Flächeninhalt $F = 240$ qdm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 240 \text{ qdm} \\ a - b = d = 24 \text{ dm} \\ h_a = 12{,}973 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 594.

Aufgabe 596. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c ist 5 m lang, die Seite a ist um $d = 3$ m grösser als der dieser Seite a anliegende Abschnitt c' der Seite c; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn dessen Inhalt $F = 15$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 15 \text{ qm} \\ h_c = 5 \text{ m} \\ a - c' = d = 3 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a - c' = d$$

ferner besteht zwischen der Höhe h_c, der Seite a und dem Abschnitt c' die Relation:

$$\text{b)} \ldots a^2 = h^2_c + c'^2$$

Da diese beiden Gleichungen nur die zwei Unbekannten a und c' enthalten, so kann man aus denselben jedes dieser Stücke a und c' berechnen. Ist a berechnet, so kann man aus h_c und a den Winkel β und hierauf kann man aus a, β und dem Flächeninhalt F mittels der Formel:

$$F = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin\beta$$

die Seite c berechnen, u. s. f.

Aufgabe 597. Die zur Seite c eines Dreiecks gehörige Höhe h_c misst 20 dm, die Abschnitte c' und c'', in welche die Seite c durch diese Höhe zerlegt wird, und von welchen c' grösser als c'' ist, differieren um $d = 78$ dm; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn man noch weiss, dass dessen Flächeninhalt $F = 1200$ qdm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 1200 \text{ qdm} \\ c' - c'' = d = 78 \text{ dm} \\ h_c = 20 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots c' - c'' = d$$

ferner besteht nach der Erkl. 34 und in Rücksicht, dass:

$$c = c' + c''$$

ist, die Relation:

$$\frac{(c' + c'') \cdot h_c}{2} = F$$

oder

$$\text{b)} \ldots c' + c'' = \frac{2F}{h_c}$$

Mittels der beiden Gleichungen a) u. b) kann man jeden der Abschnitte c' und c'' berechnen. Hat man c' und c'' berechnet, so kann man

im weiteren an der Hand einer Figur aus c' und h_c, bezw. aus c'' und h_c die Seiten a und b und die Winkel β und α berechnen.

Aufgabe 598. Die zwei Seiten a und c eines Dreiecks messen zusammen $S = 130$ m und die zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_c messen zusammen $S_1 = 106{,}521$ m, der Flächeninhalt F des Dreiecks beträgt 1200 qm. Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 1200 \text{ qm} \\ a + c = S = 130 \text{ m} \\ h_a + h_c = S_1 = 106{,}521 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Man berechne, siehe Fig. 186, und die Andeutung zur Aufgabe 528 mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck CGH sich ergebenden Relation:

$$\text{A)} \ldots \sin\beta = \frac{h_a + h_c}{a + c}$$

indem man in derselben die für $h_a + h_c$ und $a + c$ gegebenen Werte substituiert, den Winkel β. Da man alsdann von dem zu berechnenden Dreieck $a + c$, β und F kennt, so kann man im weiteren die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 592 gesagt wurde.

Aufgabe 599. Von einem Dreieck kennt man den Umfang $u = 9{,}8$ m, die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 2{,}1$ m und den Inhalt $F = 4{,}2$ qm; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 4{,}2 \text{ qm} \\ a + b + c = u = 9{,}8 \text{ m} \\ h_c = 2{,}1 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Nach der Erkl. 34 besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

mittels welcher man, da F und h_c gegeben sind, die Seite c berechnen kann. Ist c hiernach berechnet, so kann man aus der gegebenen Beziehung:

$$\text{b)} \ldots a + b + c = u$$

leicht $a + b$ berechnen. Da man nunmehr von dem Dreieck $a + b$, c und h_c kennt, so kann man die übrigen gesuchten Stücke im weiteren berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 498 gesagt wurde.

Aufgabe 600. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 770$ m, der der Seite c gegenüberliegende Winkel γ ist $= 50^0\,6'\,54{,}8''$ und der Inhalt F des Dreiecks beträgt 27720 qm; wie gross sind die Seiten und die übrigen Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 27720 \text{ qm} \\ a + b + c = u = 770 \text{ m} \\ \gamma = 50^0\,6'\,54{,}8'' \end{cases}$$

Andeutung. Nach der in der Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 179:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

in welcher:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

bedeutet, besteht, wenn man in derselben gemäss der Aufgabe für:

$$s = \frac{u}{2}$$

setzt:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{\frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right)}{ab}}$$

oder

$$a) \ldots ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right)$$

Ferner besteht nach der Erkl. 151 die Relation:

$$F = \frac{ab}{2}\sin\gamma$$

oder

$$b) \ldots ab = \frac{2F}{\sin\gamma}$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man durch Substitution:

$$\frac{2F}{\sin\gamma} \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right)$$

oder, wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

setzt und reduziert:

$$F \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{u}{2}\left(\frac{u}{2} - c\right)$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{u}{2} - c = \frac{2F}{u}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

oder

$$A) \ldots c = \frac{u}{2} - \frac{2F}{u} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Ist c berechnet, so kann man aus der gegebenen Beziehung:

$$a + b + c = u$$

leicht $a + b$ bestimmen und da man alsdann von dem Dreieck $a + b$, c und γ kennt, so kann man im weiteren die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 601. In einem Dreieck ist die Summe der zwei Seiten b und c um $d = 30$ m grösser als die dritte Seite a, der der dritten Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $73^0\ 44'\ 23{,}3''$ und der Flächeninhalt F des Dreiecks ist $= 1800$ qm; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} F &= 1800 \text{ qm} \\ b + c - a &= d = 30 \text{ m} \\ \alpha &= 73^0\ 44'\ 23{,}3'' \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Aus der gegebenen Beziehung:

$$b + c - a = d$$

erhält man:

$$a) \ldots b + c = d + a$$

ferner ist nach der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 2):

$$b) \ldots b + c = \sqrt{a^2 + 4bc\cos^2\frac{\alpha}{2}}$$

und ferner ist nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{bc}{2}\sin\alpha$$

oder:

$$c) \ldots bc = \frac{2F}{\sin\alpha}$$

Setzt man den Wert für bc aus Gleichung c) in Gleichung b) und reduziert die somit erhaltene Gleichung, indem man für:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

setzt und die Erkl. 121 berücksichtigt, so erhält man:

$$\text{d)} \ldots b + c = \sqrt{a^2 + 4F\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

Aus den Gleichungen a) und d) ergibt sich nunmehr für a die Bestimmungsgleichung:

$$d + a = \sqrt{a^2 + 4F\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf a auf, so erhält man:

$$d^2 + 2ad + a^2 = a^2 + 4F\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

$$2ad = 4F\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - d^2$$

oder

$$\text{A)} \ldots a = \frac{2F}{d}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \frac{d}{2}$$

nach welcher Gleichung man a berechnen kann. Ist hiernach die Seite a berechnet, so kann man leicht nach Gleichung a) die Summe $b+c$ berechnen. Da man alsdann von dem Dreieck $b+c$, a und α kennt, so kann man im weiteren die übrigen geforderten Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

---

z_1) Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen den Masszahlen der Seiten, auch der Höhen, Schwerlinien, winkelhalbierenden Transversalen und Seitenabschnitte gegeben sind.

Aufgabe 602. Die zwei Winkel α und β eines Dreiecks sind bezw. $= 67^0\,22'\,48{,}5''$ und $= 18^0\,55'\,28{,}7''$ und die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man über den diesen Winkeln gegenüberliegenden Seiten a und b konstruiert denken kann, ist $S^2 = 1538$ qm; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= S^2 = 1538 \text{ qm} \\ \alpha &= 67^0\,22'\,48{,}5'' \\ \beta &= 18^0\,55'\,28{,}7'' \end{aligned}\right.$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 + b^2 = S^2$$

ferner hat man nach der Sinusregel:

$$\text{b)} \ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und aus diesen beiden Gleichungen, welche die zwei Unbekannten a und b enthalten, kann man die letzteren leicht berechnen; die dritte Seite c kann man dann mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 603. Die Seite c eines Dreiecks ist $= 14$ m, der derselben gegenüberliegende Winkel γ misst $59^0\,29'\,23{,}1''$ und die Summe

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{aligned} a^2 + b^2 &= S^2 = 394 \text{ qm} \\ c &= 14 \text{ m} \\ \gamma &= 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{aligned}\right.$$

der Inhalte der Quadrate über den beiden andern Seiten a und b ist $S^2 = 394$ qm; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Beziehung:

$$\text{a)} \ldots a^2 + b^2 = S^2$$

ferner hat man nach dem Projektionssatz die Beziehung:

$$\text{b)} \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Setzt man in Gleichung b) nach Gleichung a) für:

$$a^2 + b^2 = S^2$$

und löst die somit erhaltene Gleichung in bezug auf ab auf, so erhält man:

$$\text{c)} \ldots ab = \frac{S^2 - c^2}{2\cos\gamma}$$

Aus den Gleichungen a) und c), welche die beiden Unbekannten a und b enthalten, kann man dieselben wie folgt berechnen:

Addiert man einmal das Doppelte der Gleichung c) zur Gleichung a) und subtrahiert man ein andermal das Doppelte der Gleichung c) von Gleichung a), so erhält man bezw.:

$$a^2 + 2ab + b^2 = S^2 + \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}$$

und

$$a^2 - 2ab + b^2 = S^2 - \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}$$

oder

$$(a + b)^2 = S^2 + \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}$$

und

$$(a - b)^2 = S^2 - \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}$$

und aus diesen Gleichungen erhält man bezw.:

$$\text{d)} \ldots a + b = \sqrt{S^2 + \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}}$$

und

$$\text{f)} \ldots a - b = \pm\sqrt{S^2 - \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}}$$

Durch Addition, bezw. Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man bezw.:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{S^2 + \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}} \pm \sqrt{S^2 - \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}}\right]$$

und

$$\text{B)} \ldots b = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{S^2 + \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}} \mp \sqrt{S^2 - \frac{S^2 - c^2}{\cos\gamma}}\right]$$

Hat man nach diesen Gleichungen die Seiten a und b berechnet, so kann man, da die dritte Seite c und der Winkel γ gegeben ist, die gesuchten Winkel mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 604. Die über den beiden Seiten a und b eines Dreiecks konstruiert gedachten Quadrate, von welchen das Quadrat über a grösser als das über b ist, differieren ihrem Inhalt nach um $d^2 = 8000$ qm. Die dritte

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a^2 - b^2 = d^2 = 8000 \text{ qm} \\ c = 110 \text{ m} \\ \gamma = 132^\circ 40' 10'' \end{cases}$$

Andeutung. Aus der durch die Aufgabe gegebenen Beziehung:

Seite c misst 110 m und der derselben gegenüberliegende Winkel γ beträgt $132^0\,40'\,10''$. Man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

$$a^2 - b^2 = d^2$$

ergibt sich nach der Erkl. 37:

$$\text{a)} \ldots (a+b)\cdot(a-b) = d^2$$

Ferner hat man nach den in Antw. der Frage 21 aufgestellten Mollweideschen Formeln 89 und 90 die Beziehungen:

$$a+b = c\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

und

$$a-b = c\cdot\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

oder, wenn man in Rücksicht, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{180^0-\gamma}{2} = 90^0 - \frac{\gamma}{2}$$

ist, in denselben für:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \sin\frac{\gamma}{2}$$

bezw. für:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\left(90^0 - \frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\gamma}{2}$$

setzt:

$$\text{b)} \ldots a+b = c\cdot\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$\text{c)} \ldots a-b = c\cdot\frac{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Aus den drei Gleichungen a), b) und c), welche die drei Unbekannten a, b und $\frac{\alpha-\beta}{2}$ enthalten, kann man nunmehr leicht jede dieser Unbekannten bestimmen.

Aufgabe 605. Zwischen den auf Meter sich beziehenden Masszahlen der Seiten a und b eines Dreiecks besteht die Beziehung $a^2 - b^2 = d^2 = 50840$ qdm. Die dritte Seite c dieses Dreiecks ist $= 950$ dm und die Differenz der jenen Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel α und β, von welchen α grösser als β ist, ist $\delta = 28^0\,50'\,44''$; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a^2 - b^2 = d^2 = 50840 \text{ qdm} \\ c = 950 \text{ dm} \\ \alpha - \beta = \delta = 28^0\,50'\,44'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 604.

Aufgabe 606. Von den über den Seiten a und b eines Dreiecks konstruiert gedachten Quadraten ist das Quadrat über a um $d^2 = 100000$ qdm grösser als das Quadrat über b; der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 76^0\,40'\,30{,}8''$ und die Differenz

$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a^2 - b^2 = d^2 = 100000 \text{ qdm} \\ \gamma = 76^0\,40'\,30{,}8'' \\ \alpha - \beta = \delta = 32^0\,20'\,10{,}5'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 605.

der jenen Seiten gegenüberliegenden Winkel α und β beträgt $\delta = 32^0\, 20'\, 10{,}5''$; man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Aufgabe 607. Die beiden den Seiten a und b eines Dreiecks gegenüberliegenden Winkel α und β sind bezw. $= 73^0\, 44'\, 23{,}3''$ und $= 9^0\, 31'\, 38{,}2''$; die Differenz der Inhalte der über jenen Seiten konstruiert gedachten Quadrate ist $d^2 = 20400$ qm; wie gross müssen die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks sein?

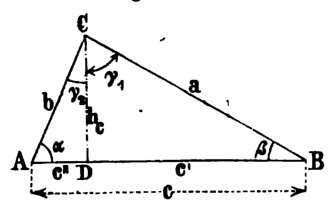
$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} a^2 - b^2 = d^2 = 20400 \text{ qm} \\ \alpha = 73^0\, 44'\, 23{,}3'' \\ \beta = 9^0\, 31'\, 38{,}2'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 602.

Aufgabe 608. Die Seite a eines Dreiecks ist 13 m lang, die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man über den beiden andern Seiten b und c konstruiert denken kann, ist $S^2 = 421$ qm und die zu der letzteren dieser Seiten (zur Seite c) gehörige Höhe h_c misst 12 m; wie gross sind die Winkel und die Seiten b und c dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} b^2 + c^2 = S^2 = 421 \text{ qm} \\ a = 13 \text{ m} \\ h_c = 12 \text{ m} \end{array} \right.$$

Figur 197.



Erkl. 368. Aus der nebenstehenden Gleichung:

f) . . . $c = \pm \sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c}$

erhält man c wie folgt:

$$c \mp \sqrt{a^2 - h^2_c} = \pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c}$$

$$(c \mp \sqrt{a^2 - h^2_c})^2 = (\pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c})^2$$

$$c^2 \mp 2c \sqrt{a^2 - h^2_c} + a^2 - h^2_c = S^2 - c^2 - h^2_c$$

$$2c^2 \mp 2c \sqrt{a^2 - h^2_c} = S^2 - a^2$$

$$c^2 \mp c \sqrt{a^2 - h^2_c} = \frac{S^2 - a^2}{2}$$

$$c^2 \mp c \sqrt{a^2 - h^2_c} + \left(\frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2}\right)^2 = \frac{S^2 - a^2}{2} + \left(\frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2}\right)^2$$

$$\left(c \mp \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2}\right)^2 = \frac{S^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 - h^2_c}{4}$$

$$c \mp \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2} = \pm \sqrt{\frac{2S^2 - a^2 - h^2_c}{4}}$$

$$c = \pm \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2S^2 - a^2 - h^2_c}$$

oder

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{2S^2 - a^2 - h^2_c}\right]$$

Andeutung. Die Seite c kann man wie folgt berechnen:

Gemäss der Aufgabe ist:

a) . . . $b^2 + c^2 = S^2$

ferner bestehen, siehe Figur 197, zwischen den Abschnitten c' und c'' der Seite c, den Seiten a und b und der Höhe h_c die Relationen:

b) . . . $c' = \pm \sqrt{a^2 - h^2_c}$

und

c) . . . $c'' = \pm \sqrt{b^2 - h^2_c}$

Setzt man den aus Gleichung a) für b^2 sich ergebenden Wert:

d) . . . $b^2 = S^2 - c^2$

in Gleichung c), so erhält man:

e) . . . $c'' = \pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c}$

Addiert man die Gleichungen b) und e), so erhält man ferner:

$$c' + c'' = \pm \sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c}$$

oder, da:

$$c' + c'' = c$$

ist, für c die Bestimmungsgleichung:

f) . . . $c = \pm \sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{S^2 - c^2 - h^2_c}$

Löst man diese Gleichung in bezug auf c auf und berücksichtigt man hinsichtlich der verschiedenen Vorzeichen die Erkl. 279, so erhält man nach der Erkl. 363 für c:

A) . $c = \frac{1}{2}\left[\sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{2S^2 - a^2 - h^2_c}\right]$

Hat man hiernach c berechnet, so kann man nach Gleichung d) die Seite b bestimmen. Den Winkel β kann man aus h_c und a, den Winkel α aus h_c und b berechnen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen und dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

Das vollständige

Inhaltsverzei

der bis jetzt erschiener

kann durch jede Buchhandlung bez

...trie.

...400. Mit 1 Figur.

...gaben, in welchen Beziehungen zwischen den ...inkelhalbierenden Transversalen und Seiten... ...eben sind.

...ttgart 1887.

Halbjährlich erscheinen Nach ...von Julius Maier.

...ensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

...llständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

ei.

$c \mp \sqrt{\ }$

$(c \mp \sqrt{a^2 -}$

$c^2 \mp 2c \sqrt{a^2 - }$

$2c^2 \mp 2c \sqrt{a^2 - h^2_c}$

$c^2 \mp c \sqrt{a^2 - h^2_c} = \frac{}{2}$

$c^2 \mp c \sqrt{a^2 - h^2_c} + \Big(\frac{\sqrt{a^2 -}}{2}$

$= \frac{S^2 - a^2}{2} + \Big(\frac{\sqrt{a}}{2}$

$$\left(c \mp \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2}\right)^2 = \frac{S^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 - h^2_c}{4}$$

$$c \mp \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2} = \pm \sqrt{\frac{2S^2 - a^2 - h^2_c}{4}}$$

m.
Den
Winkel

$$c = \pm \frac{\sqrt{a^2 - h^2_c}}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{2S^2 - a^2 - h^2_c}$$

oder

$$c = \frac{1}{2} \cdot \left[\sqrt{a^2 - h^2_c} \pm \sqrt{2S^2 - a^2 - h^2_c}\right]$$

294. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 289. — Seite 385—400. Mit 1 Figur.




Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 289. — Seite 385—400. Mit 1 Figur.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen den Masszahlen der Seiten, auch der Höhen, Schwerlinien, winkelhalbierenden Transversalen und Seitenabschnitte gegeben sind.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3–4 Hefte. —

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen und angewandten Mathematik** — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 609. Die Seite a eines Dreiecks ist $= 101$ m, der Inhalt des Quadrats über der grösseren der beiden andern Seiten, nämlich über der Seite c, ist um $d^2 = 13559$ qm grösser als der Inhalt des Quadrats über der dritten Seite b, und die zu jener Seite c gehörige Höhe h_c misst 20 m; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c^2 - b^2 = d^2 = 13559 \text{ qm} \\ a = 101 \text{ m} \\ h_c = 20 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 197, aus a und h_c den Winkel β mittels der Relation:

A) . . . $\sin\beta = \frac{h_c}{a}$

Dann berechne man mittels der nach dem Projektionssatz sich ergebenden Relation:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

indem man dieselbe auf die Form:

$$2ac\cos\beta = a^2 + c^2 - b^2$$

bringt, gemäss der Aufgabe:

a) . . . $c^2 - b^2 = d^2$

setzt und die somit erhaltene Gleichung nach c auflöst, wonach man:

B) . . . $c = \frac{a^2 + d^2}{2a\cos\beta}$

erhält, die Seite c. Nachdem c und β berechnet sind, hat die Berechnung der übrigen Winkel, bei welcher die für c und β berechneten Werte benutzt werden können, keine Schwierigkeit mehr.

Aufgabe 610. Man soll die Seiten und Winkel eines Dreiecks berechnen, dessen Inhalt $F = 84$ qm, dessen Seite $a = 14$ m ist, und dessen Seiten b und c solchen Längen entsprechen, dass die Summe der Inhalte der Quadrate über denselben $S^2 = 394$ qm beträgt.

Gegeben: $\begin{cases} b^2 + c^2 = S^2 = 394 \text{ qm} \\ a = 14 \text{ m} \\ F = 84 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $b^2 + c^2 = S^2$

ferner hat man nach dem Projektionssatz:

b) . . . $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$

und nach dem in der Erkl. 151 aufgestellten Satz:

c) . . . . $F = \frac{bc}{2}\sin\alpha$

Aus diesen drei Gleichungen, welche die drei Unbekannten b, c und α enthalten, kann man zunächst den Winkel α wie folgt bestimmen.

Setzt man in Gleichung b) nach Gleichung a) für:

$$b^2 + c^2 = S^2$$

und für $b \cdot c$ nach Gleichung c):

$$bc = \frac{2F}{\sin\alpha}$$

so erhält man:

$$a^2 = S^2 - \frac{4F}{\sin\alpha} \cdot \cos\alpha$$

$$a^2 = S^2 - 4F\operatorname{ctg}\alpha$$

mithin:

A) . . . $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{S^2 - a^2}{4F}$

Da man nunmehr von dem Dreieck b^2+c^2, a und α kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 603 gesagt wurde.

Aufgabe 611. Der Flächeninhalt F eines Dreiecks beträgt $= 1200$ qm, der Winkel α desselben ist $= 43^0\,36'\,10{,}1''$ und die Summe der Inhalte der Quadrate über den diesen Winkel einschliessenden Seiten b und c ist $S^2 = 15241$ qm; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b^2+c^2 = S^2 = 15241 \text{ qm} \\ \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \\ F = 1200 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 610.

Aufgabe 612. Die Seite a eines Dreiecks ist $= 101$ m, der Inhalt des Quadrats über der grösseren der beiden andern Seiten, nämlich über der Seite c, ist um $d^2 = 13559$ qm grösser als der Inhalt des Quadrats über der dritten Seite b; der Inhalt F des Dreiecks beträgt 1200 qm; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} c^2-b^2 = d^2 = 13559 \text{ qm} \\ a = 101 \text{ m} \\ F = 1200 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Aus der in der Aufgabe gegebenen Beziehung:

$$c^2-b^2 = d^2$$

erhält man nach der Erkl. 37:

$$\text{a)} \ldots (c+b)(c-b) = d^2$$

ferner hat man nach den in der Andeutung zur Aufgabe 579 aufgestellten Gleichungen A) und B) die weiteren Beziehungen:

$$\text{b)} \ldots c+b = \sqrt{a^2+4F\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

und

$$b-c = \sqrt{a^2-4F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder

$$\text{c)} \ldots c-b = -\sqrt{a^2-4F\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Multipliziert man die Gleichungen b) und c) miteinander und setzt in der somit erhaltenen neuen Gleichung nach Gleichung a) für $(c+b)\cdot(c-b) = d^2$, so erhält man eine goniometrische Gleichung, in welcher nur die Funktionen ctg und tg des unbekannten Winkels α vorkommen. Löst man diese Gleichung durch Benutzung entsprechender goniometrischer Formeln in bezug auf ctg α auf, so erhält man schliesslich:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{ctg}\alpha = \frac{16F^2+d^4-a^4}{8a^2F}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann. Da man alsdann von dem Dreieck a, F und α kennt, so kann man die übrigen Seiten berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 579 gesagt wurde.

Aufgabe 613. Die Seite a eines Dreiecks ist 13 m lang, die zu der grösseren der beiden andern Seiten b und c, nämlich die zu der Seite b gehörige Schwerlinie (Mittellinie) s_b misst 11,2361 m, und das Quadrat über dieser

Gegeben: $\begin{cases} b^2-c^2 = d^2 = 29 \text{ qm} \\ a = 13 \text{ m} \\ s_b = 11{,}2361 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Beziehung:

Seite b ist seinem Inhalt nach um $d^2 = 29$ qm grösser als der Inhalt des Quadrats über der dritten Seite c. Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks bestimmen.

a) . . . $b^2 - c^2 = d^2$

ferner besteht nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satz zwischen den Seiten a, b und c und der Schwerlinie s_b die Relation:

$$\text{b)} \ldots a^2 + c^2 = 2\left[s^2_b + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

Formt man die Gleichung b) wie folgt um:

$$a^2 + c^2 = 2s^2_b + \frac{b^2}{2}$$

$$2a^2 + 2c^2 = 4s^2_b + b^2$$

$$2a^2 + c^2 + c^2 = 4s^2_b + b^2$$

$$2a^2 + c^2 = 4s^2_b + b^2 - c^2$$

und setzt hierin nach Gleichung a) für:

$$b^2 - c^2 = d^2$$

so erhält man in bezug auf c die Bestimmungsgleichung:

$$2a^2 + c^2 = 4s^2_b + d^2$$

und hieraus erhält man:

$$\text{c)} \ldots c^2 = 4s^2_b + d^2 - 2a^2$$

oder

$$\text{A)} \ldots c = \sqrt{4s^2_b + d^2 - 2a^2}$$

Setzt man ferner den Wert für c^2 aus Gleichung c) in Gleichung a), so erhält man weiter:

$$b^2 = 4s^2_b + 2d^2 - 2a^2$$

oder

$$\text{B)} \ldots b = \sqrt{2(s^2_b + d^2 - a^2)}$$

Hat man nach den Gleichungen A) und B) die Seiten b und c berechnet, so kennt man von dem Dreieck die drei Seiten a, b und c und kann somit die Winkel berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 614. In einem Dreieck ist die Seite $a = 37$ dm lang; ferner beträgt die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man sich über den beiden andern Seiten b und c konstruiert denken kann, $S^2 = 1769$ qdm, und die zur Seite b gehörige Schwerlinie s_b misst 37,977 dm; man soll die Seiten b und c und die drei Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} b^2 + c^2 = S^2 = 1769 \text{ qdm} \\ a = 37 \text{ dm} \\ s_b = 37{,}977 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 613.

Aufgabe 615. Denkt man sich über den zwei Seiten a und c eines bestimmten Dreiecks Quadrate konstruiert, so erhält man zwei solche Quadrate, deren Inhalte zusammen $S^2 = 149785$ qdm betragen; wie gross müssen die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sein, wenn die nach den Seiten a und b desselben gezogenen Schwerlinien s_a und s_b bezw. 203,721 dm und 268,1832 dm messen?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a^2 + c^2 = S^2 = 149785 \text{ qdm} \\ s_a = 203{,}721 \text{ dm} \\ s_b = 268{,}1832 \text{ dm} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

a) . . . $a^2 + c^2 = S^2$

ferner hat man nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satz die weitere Relation:

$$a^2 + c^2 = 2\left[s^2_b + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$$

oder

$$b) \;\ldots\; a^2 + c^2 = 2s^2_b + \frac{b^2}{2}$$

Setzt man in Gleichung b) nach Gleichung a) für:

$$a^2 + c^2 = S^2$$

so erhält man für b die Bestimmungsgleichung:

$$S^2 = 2s^2_b + \frac{b^2}{2}$$

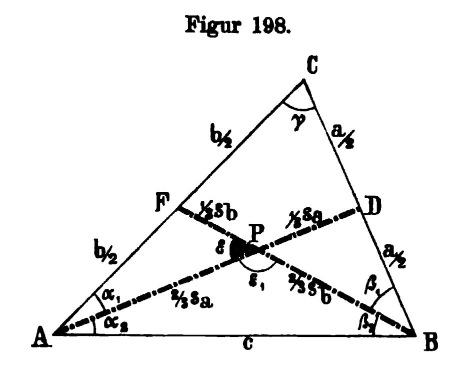
und hieraus erhält man für b:

$$A) \;\ldots\; b = \sqrt{2S^2 - 4s^2_b}$$

Da man nunmehr von dem Dreieck s_a, s_b und b kennt, so kann man im weiteren die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 427 gesagt wurde.

Aufgabe 616. Die über den Seiten a und b eines bestimmten Dreiecks konstruiert gedachten Quadrate haben solche Inhalte, dass deren Summe $S^2 = 21650$ qm beträgt. Die zu jenen Seiten gehörigen Schwerlinien s_a und s_b messen bezw. 79,4119 und 146,9906 m; wie gross müssen die Seiten und Winkel dieses Dreiecks sein?

Figur 198.



Gegeben: $\begin{cases} a^2 + b^2 = S^2 = 21650 \text{ qm} \\ s_a = 79{,}4119 \text{ m} \\ s_b = 146{,}9906 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$a) \;\ldots\; a^2 + b^2 = S^2$$

ferner bestehen, siehe Figur 198, nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satz, die Beziehungen:

$$b) \;\ldots\; b^2 + c^2 = 2 \cdot s^2_a + \frac{a^2}{2}$$

und

$$c) \;\ldots\; a^2 + c^2 = 2 \cdot s^2_b + \frac{b^2}{2}$$

Addiert man die Gleichungen b) und c), so erhält man:

$$a^2 + b^2 + 2c^2 = 2s^2_a + 2s^2_b + \frac{a^2 + b^2}{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach Gleichung a) für:

$$a^2 + b^2 = S^2$$

so erhält man für c die Bestimmungsgleichung:

$$S^2 + 2c^2 = 2s^2_a + 2s^2_b + \frac{S^2}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$2c^2 = 2s^2_a + 2s^2_b + \frac{S^2}{2} - S^2$$

$$2c^2 = 2s^2_a + 2s^2_b - \frac{S^2}{2}$$

$$c^2 = s^2_a + s^2_b - \frac{S^2}{4}$$

oder

$$A) \;\ldots\; c = \sqrt{s^2_a + s^2_b - \frac{S^2}{4}}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann.

Subtrahiert man ferner die Gleichung b) von c), so erhält man:

$$a^2 - b^2 = 2s^2_b - 2s^2_c + \frac{b^2 - a^2}{2}$$

und hieraus kann man $(a^2 - b^2)$ bestimmen, man erhält:

$$a^2 - b^2 - \frac{b^2 - a^2}{2} = 2s^2_b - 2s^2_a$$

$$2(a^2 - b^2) + (a^2 - b^2) = 4(s^2_b - s^2_a)$$

$$3(a^2 - b^2) = 4(s^2_b - s^2_a)$$

oder

d) . . . $a^2 - b^2 = \frac{4}{3}(s^2_b - s^2_a)$

Mittels dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung a) kann man leicht die Seiten a und b berechnen. Da man nunmehr die drei Seiten a, b und c des Dreiecks kennt, so kann man die gesuchten Winkel berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 617. Die den Winkel γ eines Dreiecks halbierende Transversale w_γ teilt die Gegenseite in die beiden Abschnitte c'_w und c''_w, von welchen der der Seite a anliegende Abschnitt $c'_w = 6,5$ dm und der der Seite b anliegende Abschnitt $c''_w = 7,5$ dm misst. Das Quadrat über der grösseren der beiden andern Seiten a und c, nämlich über der Seite a, ist seinem Inhalt nach um $d^2 = 20400$ qdm grösser als der Inhalt des Quadrats über der Seite b; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a^2 - b^2 = d^2 = 20400 \text{ qdm} \\ c'_w = 6,5 \text{ dm} \\ c''_w = 7,5 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Beziehung:

a) . . . $a^2 - b^2 = d^2$

ferner besteht nach der Erkl. 315 die Beziehung:

b) . . . $c'_w : c''_w = a : b$

Aus diesen beiden Gleichungen a) und b), welche die beiden Unbekannten a und b enthalten, kann man die letzteren berechnen. Sind a und b berechnet, so kennt man von dem Dreieck die drei Seiten a, b und c $(= c'_w + c''_w)$ und kann somit die Winkel dieses Dreiecks berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 618. Die Summe der Inhalte der Quadrate über den beiden Seiten a und b eines Dreiecks ist $S^2 = 2650$ qm, die Differenz jener Inhalte ist, in Rücksicht, dass das Quadrat über a grösser als das über b ist, $d^2 = 1400$ qm; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 68^0\,29'\,53''$ beträgt?

Gegeben: $\begin{cases} a^2 + b^2 = S^2 = 2650 \text{ qm} \\ a^2 - b^2 = d^2 = 1400 \text{ qm} \\ \alpha = 68^0\,29'\,53'' \end{cases}$

Andeutung. Aus den gegebenen Beziehungen:

a) . . . $a^2 + b^2 = S^2$

und

b) . . . $a^2 - b^2 = d^2$

kann man leicht die Seiten a und b bestimmen. Dann kennt man von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel α (siehe Auflösung der Aufgabe 120).

Aufgabe 619. Zwischen den auf die Längeneinheit „Meter" sich beziehenden Masszahlen der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks bestehen die Beziehungen:

$$b : c = 1 : 2$$
$$a^2 + b^2 = 4 \text{ qm}$$
$$a^2 - b^2 = 2 \text{ qm}$$

man soll hieraus die Winkel dieses Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 &= 4 \text{ qm} \\ a^2 - b^2 &= 2 \text{ qm} \\ b : c &= 1 : 2 \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Aus den durch die Aufgabe gegebenen Beziehungen kann man leicht jede der drei Seiten a, b und c des Dreiecks in die gegebenen Masszahlen ausdrücken. Da man alsdann von dem Dreieck die drei Seiten kennt, so kann man leicht die Winkel berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 620. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 130$ m; die Summe der Inhalte der Quadrate über diesen Seiten beträgt $S_1^2 = 11042$ qm und der von jenen Seiten eingeschlossene Winkel γ ist $= 124^0\, 58'\, 33{,}6''$; wie gross sind die Seiten und die nicht gegebenen Winkel dieses Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 &= S_1^2 = 11042 \text{ qm} \\ a + b &= S = 130 \text{ m} \\ \gamma &= 124^0\, 58'\, 33{,}6'' \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Aus den durch die Aufgabe gegebenen Beziehungen:

a) . . . $a^2 + b^2 = S_1^2$

und

b) . . . $a + b = S$

kann man jede der Seiten a und b berechnen. Da man alsdann von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den von beiden eingeschlossenen Winkel γ kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 621. Die Seite a eines Dreiecks ist um $d = 48$ m grösser als die Seite b und das über der Seite a konstruiert gedachte Quadrat hat einen Inhalt, welcher um $d_1^2 = 8161$ qm grösser ist als das über der Seite b konstruiert gedachte Quadrat. Wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn der der grösseren Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 79^0\, 36'\, 40''$ beträgt?

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} a^2 - b^2 &= d_1^2 = 8161 \text{ qm} \\ a - b &= d = 48 \text{ m} \\ \alpha &= 79^0\, 36'\, 40'' \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

a) . . . $a^2 - b^2 = d_1^2$

und

b) . . . $a - b = d$

Berücksichtigt man, dass sich nach der Erkl. 37 die Gleichung a) in der Form schreiben lässt:

c) . . . $(a + b)(a - b) = d_1^2$

so erhält man, wenn man die Gleichung c) durch Gleichung b) dividiert:

d) . . . $a + b = \dfrac{d_1^2}{d}$

Aus den Gleichungen b) und d) kann man nunmehr leicht die Seiten a und b berechnen. Da man alsdann von dem Dreieck die Seiten a und b und den der grösseren Seite a gegenüberliegenden Winkel α kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde.

Aufgabe 622. Die Summe der zwei Seiten a und b eines spitzwinkligen Dreiecks ist $S = 13$ m, die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man über diesen Seiten konstruiert denken kann, ist $S_1^2 = 89$ qm; wie

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{aligned} a^2 + b^2 &= S_1^2 = 89 \text{ qm} \\ a + b &= S = 13 \text{ m} \\ F &= 19 \text{ qm} \end{aligned} \right.$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

gross sind die Seiten und Winkel, wenn der Flächeninhalt F des Dreiecks = 19 qm beträgt?

$$\text{a)} \ldots a^2+b^2=S_1^2$$

und

$$\text{b)} \ldots a+b=S$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann man jede der Unbekannten a und b berechnen. Sind die Seiten a und b hiernach berechnet, so kann man mittels der aus der Erkl. 151 sich ergebenden Relation:

$$\text{c)} \ldots F=\frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$$

den Winkel γ berechnen. Da man alsdann von dem Dreieck die zwei Seiten a und b und den von beiden eingeschlossenen Winkel γ kennt, so kann man die übrigen Stücke berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 623. Die Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks ist $S = 442$ dm, die Summe der Inhalte der über diesen Seiten errichtet gedachten Quadrate beträgt $S_1^2 = 162{,}482$ qdm und die nach der Mitte der dritten Seite c gezogene Schwerlinie s_c misst 199,0603 dm; man soll hieraus die Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a^2+b^2=S_1^2=162{,}482 \text{ qdm} \\ a+b=S=442 \text{ dm} \\ s_c=199{,}0603 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

$$\text{a)} \ldots a^2+b^2=S_1^2$$

und

$$\text{b)} \ldots a+b=S$$

und aus diesen beiden Gleichungen kann man jede der Seiten a und b berechnen. Ferner besteht nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satz die Beziehung:

$$\text{c)} \ldots a^2+b^2=2s_c^2+\frac{c^2}{2}$$

Setzt man in derselben nach Gleichung a) für:

$$a^2+b^2=S_1^2$$

so erhält man:

$$\text{d)} \ldots S_1^2=2s_c^2+\frac{c^2}{2}$$

aus welcher Gleichung man leicht die dritte Seite c berechnen kann. Da man nunmehr von dem Dreieck die drei Seiten a, b und c kennt, so kann man im weiteren die Winkel des Dreiecks berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 624. Die Seite c eines Dreiecks misst 10 m und der derselben gegenüberliegende Winkel γ beträgt 30°; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn zwischen den drei Seiten die Beziehung:

$$a^2=c^2+3b^2$$

besteht?

Gegeben: $\begin{cases} \text{die Beziehung } a^2=c^2+3b^2 \\ c=10 \text{ m} \\ \gamma=30^0 \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2=c^2+3b^2$$

ferner hat man nach dem Projektionssatz die Relation:

$$\text{b)} \ldots a^2=b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich für b die Bestimmungsgleichung:

$$\text{c)} \ldots c^2 + 8b^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\gamma$$

woraus man die Seite b berechnen kann. Ist b berechnet, so kann man aus Gleichung a) leicht a berechnen und dann die gesuchten Winkel mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 625. Den Seiten a, b und c entsprechen solche auf ein und dieselbe Längeneinheit sich beziehende Masszahlen, dass zwischen denselben folgende Beziehungen bestehen:

$$c^2 + 4a^2 = 60$$
$$c^2 - 4a^2 = 8b - b^2$$
$$b^2 - 2a^2 = 2b$$

Man soll hieraus die Winkel des Dreiecks unter der Voraussetzung berechnen, dass bei den in der Auflösung vorkommenden Wurzeln nur deren positiven Werte Gültigkeit haben.

Gegeben: $\begin{cases} c^2 + 4a^2 = 60 \\ c^2 - 4a^2 = 8b - b^2 \\ b^2 - 2a^2 = 2b \end{cases}$

Andeutung. Man berechne aus den durch die Aufgabe gegebenen drei Gleichungen, in welchen die drei Unbekannten a, b und c vorkommen, zunächst diese Unbekannten; dann denke man sich ein Dreieck, dessen drei Seiten, bezw. den für a, b und c gefundenen Masszahlen entsprechen und berechne die Winkel dieses Dreiecks wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 626. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks ist $u = 42$ m, die Seite c ist um 14 m kleiner als die Summe der beiden andern Seiten a und b, und die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man sich über den drei Seiten konstruiert denken kann, beträgt 590 qm. Wie gross sind die Seiten und Winkel, und welches ist der Inhalt dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a + b + c = u = 42\text{ m} \\ c = a + b - 14\text{ m} \\ a^2 + b^2 + c^2 = 590\text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Aus den durch die Aufgabe direkt gegebenen drei Gleichungen, welche die Unbekannten a, b und c enthalten, kann man jede derselben berechnen. Dann kann man im weiteren die Winkel und den Inhalt berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 627. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks stehen in dem Verhältnis $13:15:14$, die Summe der Flächeninhalte der Quadrate, welche man über den drei Seiten konstruiert denken kann, ist $S^2 = 590$ qm. Man berechne hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a:b:c = 13:15:14 \\ a^2 + b^2 + c^2 = S^2 = 590\text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Aus der gegebenen laufenden Proportion:

$$a:b:c = 13:15:14$$

kann man unter anderem die Proportionen entnehmen:

$$\text{a)} \ldots a:b = 13:15$$

und

$$\text{b)} \ldots a:c = 13:14$$

und aus diesen Proportionen erhält man bezw.:

$$\text{c)} \ldots b = \frac{15}{13}a$$

und

$$\text{d)} \ldots c = \frac{14}{13}a$$

Setzt man diese Werte für b und c in die durch die Aufgabe gegebene Gleichung:

$$\text{e)} \ldots a^2 + b^2 + c^2 = S$$

so erhält man in bezug auf a eine Bestimmungsgleichung. Hat man nach derselben die Seite a berechnet, so kann man mittels der Gleichungen c) und d) leicht die Seiten b und c berechnen, dann im weiteren die Winkel bestimmen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 628. Zwischen den auf „Meter" sich beziehenden Masszahlen a, b und c der drei Seiten eines Dreiecks bestehen die Beziehungen:

$$b^2 + c^2 - a^2 = d^2 = 2100 \text{ qm}$$

und

$$b + c = S = 175 \text{ m}$$

Wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 73^0\, 44'\, 23{,}3''$ ist?

Gegeben: $\begin{cases} b^2 + c^2 - a^2 = d^2 = 2100 \text{ qm} \\ b + c = S = 175 \text{ m} \\ \alpha = 73^0\, 44'\, 23{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Nach dem Projektionssatz hat man die Relation:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

und hieraus ergibt sich:

$$2bc \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - a^2$$

oder, wenn man gemäss der Aufgabe für:

$$b^2 + c^2 - a^2 = d^2$$

setzt:

$$\text{a)} \ldots 2bc \cdot \cos\alpha = d^2$$

ferner hat man nach der Aufgabe die Relation:

$$\text{b)} \ldots b + c = S$$

und aus diesen beiden Gleichungen, welche die Unbekannten b und c enthalten, kann man leicht die Seiten b und c berechnen. Da man hiernach die Seiten b und c und den Winkel α kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 629. Zwischen den auf Dezimeter sich beziehenden Masszahlen a, b und c der Seiten eines Dreiecks besteht die Relation:

$$c^2 - a^2 - b^2 = d^2 = 3359 \text{ qdm}$$

Wie gross sind jene Seiten, wenn die den beiden ersteren gegenüberliegenden Winkel α und β bezw. $43^0\, 36'\, 10{,}1''$ und $11^0\, 25'\, 16{,}3''$ betragen?

Gegeben: $\begin{cases} c^2 - a^2 - b^2 = d^2 = 3359 \text{ qdm} \\ \alpha = 43^0\, 36'\, 10{,}1'' \\ \beta = 11^0\, 25'\, 16{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Nach dem Projektionssatz hat man die Relation:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

und hieraus erhält man:

$$c^2 - a^2 - b^2 = -2ab \cdot \cos\gamma$$

oder, wenn man gemäss der Aufgabe für:

$$c^2 - a^2 - b^2 = d^2$$

und in Rücksicht, dass $\gamma = 180 - (\alpha + \beta)$ ist, nach der Erkl. 94 für:

$$\cos\gamma = \cos[180^0 - (\alpha + \beta)] = -\cos(\alpha + \beta)$$

setzt:

$$d^2 = -2ab \cdot - \cos(\alpha + \beta)$$

$$d^2 = 2ab \cdot \cos(\alpha + \beta)$$

oder

$$\text{a)} \ldots\ldots ab = \frac{d^2}{2 \cdot \cos(\alpha + \beta)}$$

ferner hat man nach der Sinusregel:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und aus diesen beiden Gleichungen a) und b), welche die Unbekannten a und b enthalten, kann man leicht die Seiten a und b berechnen. Die dritte Seite c kann man hiernach, da sämtliche Winkel bekannt sind, mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 630. Denkt man sich über den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks Quadrate konstruiert, so besteht zwischen deren Inhalten die Beziehung, dass die Summe der Quadrate über den beiden ersten Seiten a und b um $d^2 = 9250$ qm grösser ist als das Quadrat über der dritten Seite c; die zu dieser dritten Seite c gehörige Höhe h_c ist 84 m lang und der derselben gegenüberliegende Winkel γ ist $= 74^0\,36'\,28{,}4''$; man soll aus diesen Angaben die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = d^2 = 9250 \text{ qm} \\ h_c = 84 \text{ m} \\ \gamma = 74^0\,36'\,28{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Nach dem Projektionssatz besteht die Relation:

a) . . . $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$

Ferner hat man nach den Erkl. 34 und 151 die Relationen:

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und

$$F = \frac{ab}{2} \sin\gamma$$

aus welchen sich die Beziehung:

b) . . . $ab \cdot \sin\gamma = c \cdot h_c$

ergibt.

Setzt man nunmehr in Gleichung a) für $a^2 + b^2$ den aus der gegebenen Beziehung:

c) . . . $a^2 + b^2 - c^2 = d^2$

sich ergebenden Wert:

d) . . . $a^2 + b^2 = d^2 + c^2$

und für ab den aus der Gleichung b) sich ergebenden Wert:

e) . . . $ab = \dfrac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}$

so erhält man in bezug auf c die Bestimmungsgleichung:

f) . . . $c^2 = d^2 + c^2 - 2 \cdot \dfrac{c \cdot h_c}{\sin\gamma}$

woraus man die Seite c leicht berechnen kann. Ist die Seite c hiernach berechnet, so kann man den für c gefundenen Wert in die Gleichungen d) und e) setzen, wodurch man zwei Gleichungen mit den Unbekannten a und b erhält, aus welchen man die Seiten a und b berechnen kann. Die Winkel α und β kann man schliesslich mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 631. Zwischen den auf Meter sich beziehenden Masszahlen a, b und c der Seiten eines Dreiecks besteht die Beziehung:

$$a^2 + b^2 - c^2 = d^2 = 4320 \text{ qm}$$

die zur Seite c gehörige Höhe h_c ist 60 m lang und der Flächeninhalt F des Dreiecks beträgt 2310 qm. Man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = d^2 = 4320 \text{ qm} \\ h_c = 60 \text{ m} \\ F = 2310 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 630.

Aufgabe 632. Die Seite a eines Dreiecks ist um $d = 120$ m grösser als die Seite b; das Rechteck, welches man sich aus diesen beiden Seiten gebildet denken kann, hat einen Inhalt $f = 3625$ qm und der der grösseren

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 120 \text{ m} \\ a \cdot b = f = 3625 \text{ qm} \\ \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \end{cases}$

Andeutung. Aus den durch die Aufgabe gegebenen Beziehungen:

Seite a gegenüberliegende Winkel α misst $73^0 44' 23,3''$; man soll die Seiten und die nicht gegebenen Winkel des Dreiecks berechnen.

$$a) \ldots a - b = d$$

und

$$b) \ldots a \cdot b = f$$

kann man leicht die Seiten a und b berechnen. Da man dann von dem Dreieck die Seiten a und b und den der grösseren Seite a gegenüberliegenden Winkel α kennt, so kann man die weiteren Stücke berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde.

Aufgabe 633. Der von den Seiten a und b eines Dreiecks eingeschlossene Winkel γ ist $= 61^0 55' 39,1''$; die Summe der Quadratinhalte über jenen Seiten ist $S^2 = 14689$ qdm und der Inhalt des Rechtecks, welches man aus jenen Seiten bilden kann, ist $f = 2040$ qdm; wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a^2 + b^2 = S^2 = 14689 \text{ qdm} \\ a \cdot b = f = 2040 \text{ qdm} \\ \gamma = 61^0 55' 39,1'' \end{cases}$$

Andeutung. Nach dem Projektionssatz besteht die Relation:

$$a) \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Setzt man in derselben gemäss der Aufgabe für:

$$b) \ldots a^2 + b^2 = S^2$$

und für:

$$c) \ldots ab = f$$

so erhält man:

$$A) \ldots c^2 = S^2 - 2f \cdot \cos\gamma$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Setzt man ferner in Gleichung a) für c^2 den soeben berechneten Wert, für b^2 den aus Gleichung b) sich ergebenden Wert:

$$b^2 = S^2 - a^2$$

und nach Gleichung c) für:

$$ab = f$$

so erhält man eine Bestimmungsgleichung für a, woraus a berechnet werden kann. Die Seite b kann man dann mittels einer der Gleichungen b) und c) berechnen und die Winkel schliesslich mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 634. Das Quadrat über der Seite a eines Dreiecks ist um $d^2 = 159120$ qm grösser als das Quadrat über der Seite b; das Rechteck, welches man aus diesen Seiten a und b gebildet denken kann, hat einen Inhalt $f = 16441$ qm und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $96^0 59' 20,1''$; man soll hieraus die Seiten und die beiden andern Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a^2 - b^2 = d^2 = 159120 \text{ qm} \\ a \cdot b = f = 16441 \text{ qm} \\ \gamma = 96^0 57' 20,1'' \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

$$a) \ldots a^2 - b^2 = d^2$$

und

$$b) \ldots ab = f$$

aus denselben kann man jede der Seiten a und b berechnen; dann kann man weiter verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 635. Das Rechteck, welches man sich aus den Seiten a und b eines Dreiecks gebildet denken kann, hat einen Inhalt

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a \cdot b = f = 3625 \text{ qdm} \\ \alpha = 73^0 44' 23,3'' \\ \beta = 9^0 31' 38,2'' \end{cases}$$

$f = 3625$ qdm; wie gross sind die Seiten dieses Dreiecks, wenn die jenen Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel α und β bezw. $= 73^0\ 44'\ 23{,}3''$ und $= 9^0\ 31'\ 38{,}2''$ betragen?

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots\ldots a \cdot b = f$$

ferner hat man nach der Sinusregel:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Aus diesen beiden Gleichungen, welche die beiden Unbekannten a und b enthalten, kann man leicht a und b berechnen. Die dritte Seite c kann man alsdann mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 636. Das Rechteck, gebildet aus den beiden Seiten a und b eines Dreiecks, hat einen Inhalt $f = 195$ qm, die dritte Seite c des Dreiecks misst 14 m und der derselben gegenüberliegende Winkel γ ist $= 59^0\,29'\,23{,}1''$; man soll das Dreieck trigonometrisch auflösen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a \cdot b = f = 195 \text{ qm} \\ c = 14 \text{ m} \\ \gamma = 59^0\,29'\,23{,}1'' \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a \cdot b = f$$

ferner bestehen nach den in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichungen 1) und 4) die Relationen:

$$\text{b)} \ldots c^2 = (a+b)^2 - 4ab \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\text{c)} \ldots c^2 = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

Löst man diese Gleichungen b) und c) in bezug auf $a+b$, bezw. in bezug auf $a-b$ auf und setzt in denselben nach Gleichung a) für:

$$ab = f$$

so erhält man:

$$\text{d)} \ldots a+b = c^2 + 4f\cos^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\text{e)} \ldots a-b = c^2 - 4f\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

aus welchen Gleichungen man leicht a und b berechnen kann. Da man nunmehr von dem Dreieck die drei Seiten und den Winkel γ kennt, so kann man im weiteren die gesuchten Winkel mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 637. Von einem Dreieck ist gegeben: der Winkel $\alpha = 70^0\ 42'\ 30''$, der Inhalt des Rechtecks, welches man aus den jenen Winkel einschliessenden Seiten b und c bilden kann, derselbe ist $f = 32929$ qm und der Umfang u des Dreiecks $= 592$ m. Man soll die Seiten a, b und c berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a+b+c = u = 592 \text{ m} \\ b \cdot c = f = 32929 \text{ qm} \\ \alpha = 70^0\,42'\,30'' \end{cases}$$

Andeutung. Die Seite a kann man wie folgt berechnen:

Nach dem Projektionssatz besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

Ferner ist gemäss der Aufgabe:

$$a+b+c = u$$

oder

$$b+c = u-a$$

$$(b+c)^2 = (u-a)^2$$

$$b^2 + 2bc + c^2 = u^2 - 2ua + a^2$$

mithin:

b) . . . $b^2 + c^2 = u^2 - 2u \cdot a + a^2 - 2bc$

Setzt man nunmehr in den Gleichungen a) und b) gemäss der Aufgabe für:

c) . . . $b \cdot c = f$

und substituiert man dann den aus Gleichung b) für $b^2 + c^2$ sich ergebenden Wert in Gleichung a), so erhält man in bezug auf a die Bestimmungsgleichung:

d) . . $a^2 = u^2 - 2u \cdot a + a^2 - 2f - 2f \cdot \cos\alpha$

nach welcher Gleichung man die Seite a berechnen kann. Ist a berechnet, so kann man leicht $b + c$ bestimmen und dann kann man aus den für $b + c$ und $b \cdot c$ bekannten Werten die Seiten b und c berechnen. Die Winkel β und γ findet man im weiteren mittels der Sinusregel.

Aufgabe 638. Zwischen den auf Meter sich beziehenden Masszahlen a, b und c der Seiten eines Dreiecks bestehen die Relationen:

$$a - b + c = d = 64 \text{ m}$$
$$b \cdot c = f = 520 \text{ qm}$$

Wie gross sind die drei Seiten und die Winkel des Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 67^0\,22'\,48{,}5''$ ist?

Gegeben: $\begin{cases} a - b + c = d = 64 \text{ m} \\ b \cdot c = f = 520 \text{ qm} \\ \alpha = 67^0\,22'\,48{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Nach der in der Erkl. 342 aufgestellten Gleichung 4) besteht die Relation:

$$a^2 = (b - c)^2 + 4bc \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$a^2 - (b - c)^2 = 4bc \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder nach der Erkl. 37:

$$(a + b - c)(a - b + c) = 4bc \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man nunmehr in dieser Gleichung gemäss der Aufgabe für:

a) . . . $a - b + c = d$

und für:

b) . . . $bc = f$

so erhält man die Gleichung:

$$(a + b - c) \cdot d = 4f \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

oder

$$\text{c)} \ldots a + b - c = \frac{4f \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{d}$$

Addiert man nunmehr die Gleichungen a) und c), so erhält man:

$$2a = \frac{4f \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{d} + d$$

oder

$$\text{A)} \ldots\ldots a = \frac{2f \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{d} + \frac{d}{2}$$

Ist nach dieser Gleichung die Seite a berechnet, so kann man aus Gleichung a) die Summe $b + c$ bestimmen und dann aus dem

hiernach für $b+c$ sich ergebenden und aus dem für $b \cdot c$ gegebenen Wert die Seiten b und c berechnen. Die Winkel β und γ kann man dann schliesslich mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 639. Zwischen den auf Dezimeter sich beziehenden Masszahlen a, b und c der Seiten eines Dreiecks bestehen die Beziehungen:

$$b+c-a=d=54 \text{ dm}$$

und

$$b \cdot c = f = 6324 \text{ qdm}$$

Der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $79^0\,36'\,40''$; man soll die drei Seiten und die beiden andern Winkel des Dreiecks hieraus berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b+c-a=d=54 \text{ dm} \\ b \cdot c = f = 6324 \text{ qdm} \\ \alpha = 79^0\,36'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 638.

Aufgabe 640. Zwischen den auf Meter sich beziehenden Masszahlen a, b und c eines Dreiecks bestehen die Relationen:

$$a^2+b^2+c^2=S^2=328946 \text{ qm}$$

und

$$b \cdot c = f = 16728 \text{ qm}$$

Wie gross sind die drei Seiten und Winkel des Dreiecks, wenn der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 77^0\,19'\,10{,}6''$ ist?

Gegeben: $\begin{cases} a^2+b^2+c^2=S^2=328946 \text{ qm} \\ b \cdot c = f = 16728 \text{ qm} \\ \alpha = 77^0\,19'\,10{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Nach dem Projektionssatz hat man die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 = b^2+c^2-2bc \cdot \cos\alpha$$

ferner ergibt sich aus der durch die Aufgabe gegebenen Beziehung:

$$a^2+b^2+c^2=S^2$$

für:

$$\text{b)} \ldots b^2+c^2=S^2-a^2$$

Setzt man nunmehr in Gleichung a) nach Gleichung b) für:

$$b^2+c^2=S^2-a^2$$

und gemäss der Aufgabe für:

$$\text{c)} \ldots b \cdot c = f$$

so erhält man in bezug auf a die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)} \ldots a^2 = S^2-a^2-2f \cdot \cos\alpha$$

nach welcher Gleichung man die Seite a berechnen kann. Ist a berechnet und man setzt den für a berechneten Wert in Gleichung b), so kann man aus den Gleichungen b) und c), welche die Unbekannten b und c enthalten, auch die Seiten b und c berechnen. Die Winkel β und γ kann man dann im weiteren mittels der Sinusregel bestimmen.

Aufgabe 641. Die Summe der drei Seiten a, b und c eines Dreiecks, oder dessen Umfang u ist $= 320$ m, die Summe der Inhalte der drei Rechtecke, welche man aus je zwei der Seiten a, b und c bilden kann, ist $S^2 = 29125$ qm und der Inhalt des Quadrats über der Seite c ist um 950 qm grösser als die Summe der Inhalte der Quadrate über den beiden andern Seiten a und b. Man berechne hieraus die Seiten, die Winkel und den Inhalt des Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c=u=320 \text{ m} \\ a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c = S^2 = 29125 \text{ qm} \\ c^2 = a^2+b^2+950 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Aus den drei durch die Aufgabe direkt gegebenen Gleichungen, welche die Unbekannten a, b und c enthalten, kann man jede derselben berechnen. Da man dann von dem Dreieck die drei Seiten kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 642. Die zwei Seiten a und b eines Dreiecks haben solche Längen, dass wenn man sich aus diesen Seiten ein Rechteck gebildet denkt, dasselbe einen Inhalt $f = 81$ qm hat, die dritte Seite c misst 9 m und die zu ihr gehörige Höhe $h_c = 7{,}79$ m; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a \cdot b = f = 81 \text{ qm} \\ c = 9 \text{ m} \\ h_c = 7{,}79 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a \cdot b = f$$

ferner besteht nach der Erkl. 34 die Relation:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und nach der Erkl. 151 die Relation:

$$\text{c)} \ldots F = \frac{a\,b}{2} \cdot \sin\gamma$$

Setzt man in Gleichung c) nach Gleichung a) für:

$$a\,b = f$$

und nach Gleichung b) für:

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

so erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{f}{2} \cdot \sin\gamma$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots \sin\gamma = \frac{c \cdot h_c}{f}$$

wonach der Winkel γ berechnet werden kann. Da man nunmehr von dem Dreieck c, h_c und γ kennt, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gesagt wurde.

Aufgabe 643. Das Verhältnis der Seite c eines Dreiecks zu der zugehörigen Höhe h_c ist $= 10:3$, das Rechteck, welches man sich aus den beiden andern Seiten a und b gebildet denken kann, hat $f = 481$ qm Inhalt, der Inhalt F des Dreiecks selbst beträgt 240 qm. Wie gross sind die Seiten und Winkel des Dreiecks?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a \cdot b = f = 481 \text{ qm} \\ c : h_c = 10:3 \\ F = 240 \text{ qm} \end{cases}$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots c : h_c = 10:3$$

ferner hat man nach der Erkl. 34 die Relation:

$$\text{b)} \ldots F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

und aus diesen beiden Gleichungen, welche die beiden Unbekannten c und h_c enthalten, kann man leicht jede dieser Unbekannten berechnen. Ferner besteht nach der Erkl. 151 die Relation:

$$\text{c)} \ldots F = \frac{a\,b}{2} \cdot \sin\gamma$$

Setzt man hierin gemäss der Aufgabe:

$$a\,b = f$$

so erhält man:

$$\text{d)} \ldots F = \frac{f}{2} \cdot \sin\gamma$$

aus welcher Gleichung man den unbekannten Winkel γ berechnen kann. Da man nunmehr

von dem Dreieck $a \cdot b$, c und γ kennt, so kann man die Seiten a und b und die andern Winkel berechnen wie in der Andeutung der Aufgabe 636 gesagt wurde.

Aufgabe 644. Der Winkel γ eines Dreiecks ist $= 124^0\,58'\,33{,}6''$, die zur Gegenseite c gehörige Schwerlinie s_c ist $= 43{,}8292$ m und das Rechteck, welches man sich aus den andern Seiten a und b gebildet denken kann, hat einen Inhalt f von 2929 qm; wie gross sind die Seiten und die beiden andern Winkel dieses Dreiecks?

Gegeben: $\begin{cases} a \cdot b = f = 2929 \text{ qm} \\ \gamma = 124^0\,58'\,33{,}6'' \\ s_c = 43{,}8292 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Satz besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 + b^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2}$$

ferner besteht nach dem Projektionssatz die Relation:

$$\text{b)} \ldots c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

Setzt man nunmehr in Gleichung b) den Wert für $a^2 + b^2$ aus Gleichung a), gemäss der Aufgabe für $ab = f$, so erhält man in bezug auf c die Bestimmungsgleichung:

$$\text{A)} \ldots c^2 = 2s^2_c + \frac{c^2}{2} - 2f \cdot \cos\gamma$$

mittels welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Da man numehr von dem Dreieck c, s_c und γ kennt, so kann man im weiteren die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 400 gesagt wurde.

Aufgabe 645. Die Seite c eines Dreiecks misst 408 dm, die zu derselben gehörige Schwerlinie s_c ist 199,0603 dm lang, und das Rechteck, welches man sich aus den beiden andern Seiten a und b gebildet denken kann, hat einen Inhalt $f = 16441$ qdm. Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a \cdot b = f = 16441 \text{ qdm} \\ c = 408 \text{ dm} \\ s_c = 199{,}0603 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 644: man berechne zuerst den Winkel γ.

Aufgabe 646. Zwischen den auf Meter sich beziehenden Masszahlen a, b und c der Seiten eines Dreiecks bestehen die Beziehungen:

$$a^2 + b^2 - c^2 = d^2 = 198 \text{ qm}$$

und

$$a \cdot b = f = 195 \text{ qm}$$

und die den Winkel γ halbierende Transversale w_γ ist 12,0934 m lang; man soll aus diesen Angaben die Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a^2 + b^2 - c^2 = d^2 = 198 \text{ qm} \\ a \cdot b = f = 195 \text{ qm} \\ w_\gamma = 12{,}0934 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach dem in der Erkl. 314 angeführten planimetrischen Satz besteht, siehe Figur 155, die Relation:

$$\text{a)} \ldots w^2_\gamma = a \cdot b - c'_w \cdot c''_w$$

setzt man in derselben gemäss der Aufgabe:

$$a \cdot b = f$$

so erhält man:

$$w^2_\gamma = f - c'_w \cdot c''_w$$

oder

$$\text{b)} \ldots c'_w \cdot c''_w = f - w^2_\gamma$$

Ferner bestehen nach der Erkl. 316 die Relationen:

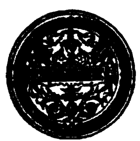
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



295. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 294. — Seite 401—416.
Mit 9 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 294. — Seite 401—416. Mit 9 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das schiefwinklige Dreieck; Fortsetzung. Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen zwei Dreiecken vorkommen. — Aufgaben über das Viereck, speziell Aufgaben über das Quadrat.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kloyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$c'_w = \frac{ac}{a+b}$$
und
$$c''_w = \frac{bc}{a+b}$$
aus welchen man durch Multiplikation die Gleichung:

$$\text{c)} \ldots c'_w \cdot c''_w = \frac{ab \cdot c^2}{(a+b)^2}$$

erhält. Setzt man in derselben für $c'_w \cdot c''_w$ den Wert aus Gleichung b) und gemäss der Aufgabe für

$$\text{d)} \ldots a \cdot b = f$$

so erhält man:

$$\text{e)} \ldots f - w^2_\gamma = \frac{f \cdot c^2}{(a+b)^2}$$

Um aus dieser Gleichung noch $(a+b)^2$ zu eliminieren, verfahre man wie folgt:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$a^2 + b^2 - c^2 = d^2$$

woraus sich:

$$\text{f)} \ldots a^2 + b^2 = d^2 + c^2$$

ergibt, addiert man nun zu dieser Gleichung das Doppelte der Gleichung d), nämlich:

$$2ab = 2f$$

so erhält man:

$$a^2 + 2ab + b^2 = d^2 + c^2 + 2f$$

oder

$$\text{g)} \ldots (a+b)^2 = d^2 + c^2 - 2f$$

Setzt man diesen Wert für $(a+b)^2$ in Gleichung e), so erhält man in bezug auf c die Bestimmungsgleichung:

$$\text{h)} \ldots f - w^2_\gamma = \frac{f \cdot c^2}{d^2 + c^2 - 2f}$$

aus welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Ist c berechnet, so kann man mittels der Gleichungen f) und d) die Seiten a und b berechnen und zwar am einfachsten dadurch, dass man (siehe Gleichung g) die Summe $a+b$ und die Differenz $a-b$ zunächst bestimmt. Sind auf diese Weise die Seiten berechnet, so kann man die Winkel berechnen wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 647. Denkt man sich über den zu den Seiten a und b eines Dreiecks gehörigen Höhen h_a und h_b Quadrate konstruiert, so ist der Inhalt des Quadrats über der Höhe h_a um $d = 20160$ qm grösser als der Inhalt des Quadrats über der Höhe h_b. Wie gross müssen die Seiten dieses Dreiecks sein, wenn die jenen Seiten a und b gegenüberliegenden Winkel α und β bezw. $9^0\,31'\,38{,}2''$ und $= 96^0\,43'\,58{,}5''$ sind?

Gegeben: $\begin{cases} h^2_a - h^2_b = d = 20160 \text{ qm} \\ \alpha = 9^0\,31'\,38{,}2'' \\ \beta = 96^0\,43'\,58{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \ldots h^2_a - h^2_b = d$$

ferner besteht nach der Erkl. 295 die Relation:

$$\text{b)} \ldots a : b = h_b : h_a$$

und nach der Sinusregel besteht weiter die Relation:

$$\text{c)} \ldots a : b = \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Aus den Gleichungen b) und c) ergibt sich:

$$\text{d)} \ldots\ldots \frac{h_b}{h_a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder

$$\text{e)} \ldots\ldots h_b = h_a \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Setzt man diesen Wert für h_b in Gleichung a), so erhält man in bezug auf h_a die Bestimmungsgleichung:

$$h^2_a - h^2_a \cdot \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = d$$

aus welcher sich:

$$h^2_a \left(1 - \frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\beta}\right) = d$$

$$h^2_a \cdot \frac{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}{\sin^2\beta} = d$$

$$h_a = \sqrt{\frac{d \cdot \sin^2\beta}{\sin^2\beta - \sin^2\alpha}}$$

oder

$$\text{A)} \ldots\ldots h_a = \sin\beta \sqrt{\frac{d}{(\sin\beta + \sin\alpha)(\sin\beta - \sin\alpha)}}$$

ergibt. Hat man nach dieser Gleichung die Höhe h_a berechnet, so kann man aus h_a und β die Seite c berechnen und im weiteren die übrigen Seiten mittels der Sinusregel bestimmen.

---

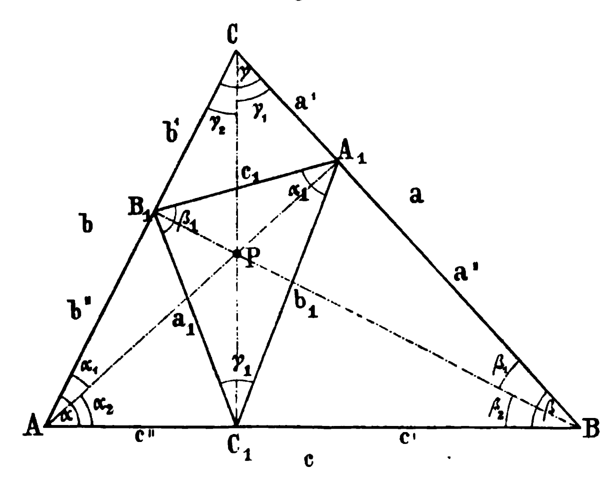
z_2) Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen zwei Dreiecken vorkommen.

Aufgabe 648. Die drei Seiten a, b und c sind bezw. = 8, 10 und 12 m lang; man soll die Seiten und den Inhalt eines andern Dreiecks berechnen, dessen Ecken mit den Fusspunkten der Höhen jenes Dreiecks zusammenfallen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 8\,\text{m} \\ b = 10\,\text{m} \\ c = 12\,\text{m} \end{cases}$

Gesucht: Die Seiten eines Dreiecks, dessen Ecken mit den Fusspunkten der Höhen jenes Dreiecks zusammenfallen.

Figur 199.



Andeutung. Ist, siehe Figur 199, ABC das Dreieck, dessen drei Seiten a, b und c gegeben sind und fällt man die drei Höhen AA_1, BB_1 und CC_1 dieses Dreiecks und verbindet die Fusspunkte A_1, B_1 und C_1 dieser drei Höhen der Reihe nach miteinander, so erhält man das Dreieck $A_1\, B_1\, C_1$, dessen drei Seiten a_1, b_1 und c_1 der Aufgabe gemäss berechnet werden sollen.

Zur Berechnung der Seite c_1 kann man wie folgt verfahren:

Aus dem Dreieck CA_1B_1 erhält man nach dem Projektionssatz:

$$\text{a)} \ldots c_1^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cdot \cos\gamma$$

Ferner ergibt sich nach dem Projektionssatz aus dem Dreieck ABC die Relation:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

und hieraus erhält man:

$$b) \ldots \cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

Weiter ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken AA_1C und BB_1C bezw. die Relationen:

$$\cos\gamma = \frac{a'}{b}$$

und

$$\cos\gamma = \frac{b'}{a}$$

aus welchen man:

$$a' = b\cdot\cos\gamma$$

und

$$b' = a\cdot\cos\gamma$$

oder in Rücksicht der Gleichung b):

$$c) \ldots a' = b\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

und

$$d) \ldots b' = a\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

erhält. Setzt man nunmehr die Werte für a', b' und $\cos\gamma$ aus den Gleichungen b) bis d) in Gleichung a), so erhält man für c_1 die Bestimmungsgleichung:

$$c_1^2 = b^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 + a^2\cdot\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2 - 2\cdot b\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot a\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

und hieraus erhält man:

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\cdot\left[b+a-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right]$$

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\cdot\left[b^2+a^2-(a^2+b^2-c^2)\right]$$

$$c_1^2 = \left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2\cdot c^2$$

mithin:

$$c_1 = \sqrt{\frac{c^2(a^2+b^2-c^2)^2}{(2ab)^2}}$$

oder

$$A) \ldots\ldots c_1 = \frac{c(a^2+b^2-c^2)}{2ab}$$

In analoger Weise erhält man:

$$B) \ldots\ldots b_1 = \frac{b(a^2-b^2+c^2)}{2ac}$$

und

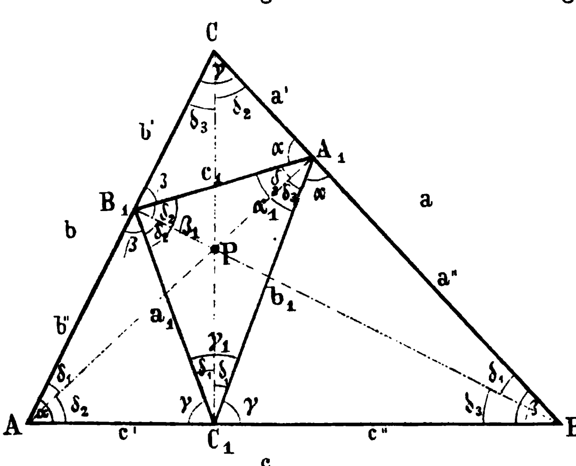
$$C) \ldots\ldots a_1 = \frac{a(-a^2+b^2+c^2)}{2bc}$$

und nach diesen drei Gleichungen kann man die gesuchten Seiten berechnen (s. Erkl. 364). Hat man hiernach die drei Seiten berechnet, so kann man im weiteren den Inhalt mittels der Formel 194 berechnen (siehe die Auflösung der Aufgabe 119).

Erkl. 364. Nimmt man zur Auflösung der Aufgabe 648 den Radius des dem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Kreises zu Hülfe, so gestalten sich die Auflösung und die durch dieselbe erhaltenen Resultate wesentlich einfacher. Siehe die späteren Abschnitte, welche über den Kreis handeln.

Aufgabe 649. Der Inhalt F eines Dreiecks ist $= 368,57$ qm, zwei Winkel α und β desselben messen bezw. $79^0 24' 36''$ und $61^0 7' 54''$; wie gross ist der Inhalt des Dreiecks, dessen Ecken mit den Fusspunkten der Höhen jenes ersten Dreiecks zusammenfallen?

Figur 200.



Erkl. 365. Da in der Figur 200 die Winkel PA_1C und PB_1C rechte Winkel sind, so müssen nach den Erkl. 201 und 89, deren Scheitel A_1 und B_1 in der Peripherie eines Kreises liegen, dessen Durchmesser $= PC$ ist. Denkt man sich diesen Kreis konstruiert, so sind die Winkel PA_1B_1 und PCB_1 als Peripheriewinkel jenes Kreises über einer und derselben Sehne B_1P einander gleich, es muss also hiernach:

a) . . . $\sphericalangle PA_1B_1 = \sphericalangle PCB_1 = \delta_3$

sein.

In analoger Weise kann man zeigen, dass:

b) . . . $\sphericalangle PA_1C_1 = \sphericalangle PBC_1 = \delta_3$

dass ferner:

c) . . . $\sphericalangle PC_1A_1 = \sphericalangle PBA_1 = \delta_1$

und

d) . . . $\sphericalangle PC_1B_1 = \sphericalangle PAB_1 = \delta_1$

und dass schliesslich:

f) . . . $\sphericalangle PB_1C_1 = \sphericalangle PAC_1 = \delta_2$

und

g) . . . $\sphericalangle PB_1A_1 = \sphericalangle PCA_1 = \delta_2$

sein muss.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AB_1B der Figur 200 ergibt sich ferner die Relation:

h) . . . $\delta_3 = R - \alpha$

und da:

$$\sphericalangle C_1A_1B = \sphericalangle AA_1B - \sphericalangle AA_1C_1$$

oder

$$\sphericalangle C_1A_1B = R - \delta_3$$

ist, so ist hiernach und in Rücksicht der Gleichung h):

$$\sphericalangle C_1A_1B = R - (R - \alpha)$$

oder

i) . . . $\sphericalangle C_1A_1B = \alpha$

Gegeben: $\begin{cases} F = 368{,}57 \text{ qm} \\ \alpha = 79^0 24' 36'' \\ \beta = 61^0 7' 54'' \end{cases}$

Gesucht: der Inhalt eines Dreiecks, dessen Ecken mit den Fusspunkten der Höhen jenes Dreiecks zusammenfallen.

Andeutung. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 577 gesagt wurde, kann man zunächst aus F, α und β die Seiten a, b und c des Hauptdreiecks ABC, siehe Figur 200, berechnen. Dann kann man aus dem für a, b und c gefundenen Wert wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 648 gesagt wurde, zwei der Seiten a_1, b_1 u. c_1 des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ berechnen und hierauf kann man den gesuchten Inhalt dieses Dreiecks mittels des in der Erkl. 151 aufgestellten Satzes berechnen, indem jeder der Winkel des Höhendreiecks wie folgt aus den gegebenen Winkeln des Hauptdreiecks leicht berechnet werden kann:

Wie sich aus den Gleichungen b) bis g) in der Andeutung zur Aufgabe 576 ergibt, bestehen zwischen den Teilwinkeln, in welche die drei Winkel α, β und γ des Hauptdreiecks durch die drei Höhen zerlegt werden, die Beziehungen, wie sie in der Figur 200 durch die Bezeichnungen δ_1, δ_2 und δ_3 gekennzeichnet sind.

Ferner bestehen nach der Erkl. 365 zwischen den Teilwinkeln, in welche die Winkel des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ durch die Höhen des Hauptdreiecks zerlegt werden und jenen Teilwinkel δ_1, δ_2 und δ_3 des Hauptdreiecks die Beziehungen, wie sie in der Figur 200 gekennzeichnet sind. Da sich nun aus dem rechtwinkligen Dreieck ACC_1 die Relation:

$$\delta_3 = R - \alpha$$

ergibt, so muss hiernach:

$$2 \cdot \delta_3 = 2R - 2\alpha$$

d. h. es muss:

A) . . . $\sphericalangle B_1A_1C_1$ oder $\alpha_1 = 2R - 2\alpha$

sein. In analoger Weise kann man zeigen, dass:

B) . . . $\sphericalangle C_1B_1A_1$ oder $\beta_1 = 2R - 2\beta$

und dass:

C) . . . $\sphericalangle A_1C_1B_1$ oder $\gamma_1 = 2R - 2\gamma$

sein muss. Es lassen sich also hiermit die Winkel des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ aus den Winkeln des Hauptdreiecks ABC leicht berechnen:

In gleicher Weise ergibt sich, dass:

k) . . . $\sphericalangle B_1 A_1 C = \alpha$
l) . . . $\sphericalangle A_1 B_1 C = \beta$
m) . . . $\sphericalangle C_1 B_1 A = \beta$
n) . . . $\sphericalangle A_1 C_1 B = \gamma$

und

o) . . . $\sphericalangle B_1 C_1 A = \gamma$

ist, wie in der Figur 200 angedeutet ist.

Erkl. 366. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Fällt man von den drei Eckpunkten eines Dreiecks Perpendikel auf die gegenüberliegenden Seiten, oder zieht man die drei Höhen des Dreiecks, so halbieren dieselben die Winkel des durch ihre Fusspunkte bestimmten Dreiecks.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Der Beweis der Richtigkeit dieses Satzes ist auch in der Erkl. 365 enthalten.

Aufgabe 650. Die drei Winkel α, β und γ eines Dreiecks ABC sind bezw. $= 53^0\, 7'\, 48{,}4''$, $67^0\, 22'\, 48{,}5''$ und $59^0\, 29'\, 23{,}1''$; die dem Winkel α gegenüberliegende Seite a_1 desjenigen Dreiecks, welches durch die Fusspunkte der Höhen jenes Dreiecks bestimmt ist, misst 20 m; man soll aus diesen Angaben die Seiten des Dreiecks ABC berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 53^0\, 7'\, 48{,}4'' \\ \beta = 67^0\, 22'\, 48{,}5'' \\ \gamma = 59^0\, 29'\, 23{,}1'' \\ a_1 = 20 \text{ m} \end{array} \right.$$

Andeutung. Ist, siehe Figur 200, ABC das Dreieck, dessen drei Winkel α, β und γ gleich den gegebenen sind und dessen drei Seiten berechnet werden sollen, so ist $A_1 B_1 C_1$ das Dreieck, dessen Ecken mit den Fusspunkten der Höhen jenes Dreiecks ABC zusammenfallen und dessen Seite a_1 gegeben ist.

Die gesuchten Seiten a, b und c jenes Dreiecks kann man wie folgt berechnen:

Aus den gegebenen Winkeln α, β und γ berechne man zunächst die Winkel α_1, β_1 und γ_1 des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ und zwar mittels der in der Andeutung der vorigen Aufgabe aufgestellten Gleichungen A) bis C):

a) . . . $\alpha_1 = 2R - 2\alpha$
b) . . . $\beta_1 = 2R - 2\beta$

und

c) . . . $\gamma_1 = 2R - 2\gamma$

Da man nunmehr von dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ die drei Winkel und gemäss der Aufgabe die Seite a_1 kennt, so berechne man mittels der Sinusregel die Seiten b_1 und c_1 dieser Dreiecke; man erhält bezw.:

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\sin(2R - 2\beta)}{\sin(2R - 2\alpha)}$$

oder

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$$

mithin

d) . . . $b_1 = a_1 \cdot \dfrac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha}$

und

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{\sin(2R - 2\gamma)}{\sin(2R - 2\alpha)}$$

oder

$$\frac{c_1}{a_1} = \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$$

mithin

$$\text{e)} \ldots c_1 = a_1 \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha}$$

Da man hiernach von jedem der Dreiecke AB_1C_1, BA_1C_1 und CA_1B_1 eine Seite, nämlich a_1 bezw. b_1 und c_1 und die beiden dieser Seite anliegenden Winkel kennt, s. Figur 200 und die Erkl. 365, so kann man im weiteren aus diesen Dreiecken mittels der Sinusregel die Seitenabschnitte a', a'', b', b'', c' und c'' berechnen.

Man erhält z. B. aus dem Dreieck A_1B_1C:

$$\frac{a'}{c_1} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung e):

$$a' = a_1 \cdot \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

oder nach der Erkl. 52:

$$a' = a_1 \cdot \frac{2\sin\gamma \cdot \cos\gamma \cdot \sin\beta}{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \sin\gamma}$$

mithin

$$\text{f)} \ldots a' = a_1 \cdot \frac{\sin\beta \cos\gamma}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

und aus dem Dreieck BA_1C_1:

$$\frac{a''}{b_1} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung d):

$$a'' = a_1 \cdot \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}$$

oder nach der Erkl. 52:

$$a'' = a_1 \cdot \frac{2\sin\beta \cos\beta \cdot \sin\gamma}{2\sin\alpha \cos\alpha \cdot \sin\beta}$$

mithin

$$\text{g)} \ldots a'' = a_1 \cdot \frac{\cos\beta \sin\gamma}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

Hat man auf diese Weise die Seitenabschnitte a', a'', b', b'', c' und c'' berechnet, so kann man leicht die gesuchten Seiten a, b und c berechnen. Für die Seite a z. B. hat man:

$$a = a' + a''$$

oder in Rücksicht der Gleichungen f) und g):

$$a = a_1 \frac{\sin\beta \cos\gamma}{\sin\alpha \cos\alpha} + a_1 \cdot \frac{\cos\beta \sin\gamma}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

$$a = a_1 \cdot \frac{\sin\beta \cos\gamma + \cos\beta \sin\gamma}{\sin\alpha \cos\alpha}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 95 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

Erkl. 367. Aus der in nebenstehender Andeutung entwickelten Gleichung A) ergibt sich, dass zwischen der Seite a eines Dreiecks, dem derselben gegenüberliegenden Winkel α und derjenigen Seite a_1 des zu jenem Dreieck gehörigen Höhendreiecks, welche jener Seite a gegenüberliegt, siehe Figur 200, die Beziehung besteht:

$$1) \ldots a_1 = a \cdot \cos\alpha$$

Analog wie in jener Andeutung gezeigt ist, kann man darthun, dass zwischen den übrigen Seiten b und c, den Winkeln β und γ des Dreiecks ABC, siehe Figur 200 und den Seiten b_1 und c_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die analogen Beziehungen bestehen:

$$2) \ldots b_1 = b \cdot \cos\beta$$

und

$$3) \ldots c_1 = c \cdot \cos\gamma$$

$$a = a_1 \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

und berücksichtigt, dass:

$$\beta+\gamma = 2R - \alpha$$

dass also:

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin(2R-\alpha)$$

bezw., dass nach der Erkl. 66:

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$a = a_1 \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$$

oder

A) . . . $a = \frac{a_1}{\cos\alpha}$ (s. Erkl. 367)

Aufgabe 651. Zwei der Winkel eines Dreiecks ABC sind $\alpha = 73^0\,44'\,23{,}3''$ und $\beta = 9^0\,31'\,38{,}2''$ und der Flächeninhalt des Dreiecks $A_1B_1C_1$, welches durch die Fusspunkte der Höhen jenes Dreiecks bestimmt ist, beträgt $F_1 = 1000$ qm, man soll hieraus die Seiten des Dreiecks ABC berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 73^0\,44'\,23{,}3'' \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \\ F_1 = 1000 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst (siehe Figur 200) die Winkel α_1, β_1 und γ_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$ analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 650 gesagt wurde; dann berechne man mittels der in der Auflösung der Aufgabe 117 aufgestellten Formel 95. (bezw. mittels der Formeln 109 und 122, siehe die Erkl. 131 und 134) aus dem gegebenen Flächeninhalt F_1 und den nunmehr bekannten Winkeln α_1, β_1 und γ_1, die Seiten a_1, b_1 und c_1 des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$ und benutze dann im weiteren zur Berechnung der gesuchten Seiten a, b und c die in der Erkl. 367 aufgestellten Gleichungen:

$$a_1 = a\cdot\cos\alpha$$
$$b_1 = b\cdot\cos\beta$$
und $$c_1 = c\cdot\cos\gamma$$

Aufgabe 652. Die Winkel α und β des durch die Figur 200 dargestellten Dreiecks ABC sind bezw. $= 43^0\,36'\,10{,}1''$ und $= 11^0\,25'\,16{,}3''$ und die Schwerlinie s_{c_1} des Höhendreiecks $A_1B_1C_1$, welche zur Seite c_1 dieses Dreiecks gehört, ist 12,4 m lang; wie gross sind die Seiten des Dreiecks ABC:

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 43^0\,36'\,10{,}1'' \\ \beta = 11^0\,25'\,16{,}3'' \\ s_{c_1} = 12{,}4 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man berechne zuerst, siehe Figur 200, die Winkel α_1, β_1 und γ_1 des Dreiecks $A_1B_1C_1$, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 650 gesagt wurde; dann berechne man aus der gegebenen Schwerlinie s_{c_1} und den nunmehr bekannten Winkeln des Dreiecks $A_1B_1C_1$ die Seiten a_1, b_1 und c_1 dieses Dreiecks wie in der Andeutung zur Aufgabe 401 gesagt wurde und benutze schliesslich zur Berechnung der gesuchten Seite a, b und c die in der Erkl. 367 aufgestellten Relationen:

$$a_1 = a\cdot\cos\alpha$$
$$b_1 = b\cdot\cos\beta$$
und $$c_1 = c\cdot\cos\gamma$$

Aufgabe 653. Von einem Dreieck ABC kennt man die Seiten a, b und c und die Winkel α, β und γ. In dieses Dreieck ist ein zweites Dreieck $A_1 B_1 C_1$ konstruiert, dessen Seiten bezw. $= a\cos\alpha$, $b.\cos\beta$ und $c\cdot\cos\gamma$ sind; man soll die Winkel des letzteren aus den Winkeln des ersteren berechnen.

$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a_1 = a\cdot\cos\alpha \\ b_1 = b\cdot\cos\beta \\ c_1 = c\cdot\cos\gamma \end{cases}$$

Andeutung. Bezeichnet man die Seiten des Dreiecks $A_1 B_1 C_1$, welches in das Dreieck ABC, dessen Seite a, b und c und dessen Winkel α, β und γ sind, so konstruiert ist, dass die Seiten jenes Dreiecks $A_1 B_1 C_1$ bezw. $= b\cdot\cos\alpha$, $= b\cdot\cos\beta$ und $= c\cdot\cos\gamma$ sind, der Reihe nach mit a_1, b_1 und c_1 und die diesen Seiten gegenüberliegenden und gesuchten Winkel bezw. mit α_1, β_1 und γ_1 (siehe Figur 200), so ergibt sich aus dem Dreieck $A_1 B_1 C_1$ nach der Sinusregel die Relation:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{a_1}{b_1}$$

Setzt man hierin für a_1 und b_1 die gemäss der Aufgabe gegebenen Werte, so erhält man:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{a\cdot\cos\alpha}{b\cdot\cos\beta}$$

Ferner ergibt sich nach der Sinusregel aus dem Dreieck ABC die Relation:

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

Aus den Gleichungen b) und c) erhält man:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\beta\cos\beta}$$

oder

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\beta\cos\beta}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 52 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\text{d)} \ldots\ldots \frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, dass:

$$\text{e)} \ldots\ldots \sin\alpha_1 = \sin 2\alpha$$

und dass:

$$\text{f)} \ldots\ldots \sin\beta_1 = \sin 2\beta$$

sein muss. Da aber nach der Erkl. 66 die Sinus zweier Winkel einander gleich sind, wenn diese Winkel selbst zueinander Supplementwinkel sind, so ergibt sich hieraus, dass (unter anderm siehe Erkl. 180):

$$\text{A)} \ldots \alpha_1 = 2R - 2\alpha$$

und dass:

$$\text{B)} \ldots \beta_1 = 2R - 2\beta$$

sein muss.

Aufgabe 654. Von einem Dreieck ist die Seite $a = 10$ m, die zugehörige Höhe $h_a = 8$ m und der der Seite a gegenüberliegende Winkel $\alpha = 32^0$ gegeben. Wie gross sind die Schenkel eines über derselben Seite a als Grundlinie konstruierten gleichschenkligen Dreiecks, das mit jenem Dreieck gleichen Umfang hat?

Gegeben: $\begin{cases} a = 10 \text{ m} \\ h_a = 8 \text{ m} \\ \alpha = 32^0 \end{cases}$

Gesucht: Die Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks, das mit dem gegebenen Dreieck die Seite a gemein und gleichen Umfang hat.

Andeutung. Man berechne zunächst, wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gesagt ist, die Seiten b und c des gegebenen Dreiecks, dann beachte man, dass, wenn man einen der gesuchten Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks mit x bezeichnet, gemäss der Aufgabe zwischen diesen Schenkeln und den Seiten a, b und c die Relation:

$$2x + a = a + b + c$$

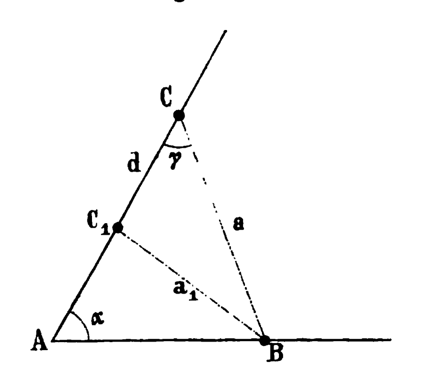
bezw. die Relation:

$$x = \frac{b+c}{2}$$

besteht, dass man also hiernach leicht einen der gesuchten Schenkel x berechnen kann.

Aufgabe 655. Auf zwei unter einem Winkel von $\alpha = 60^0$ sich schneidenden Geraden liegen die $a = 35$ dm von einander entfernten Punkte B und C. Wird der Punkt C um $d = 22$ dm nach dem Schnittpunkt A der Geraden hin verschoben, so beträgt die nunmehrige Entfernung der Punkte B und C nur noch $a_1 = 24$ dm. Welche Entfernungen haben die Punkte B und C von dem Schnittpunkt A?

Figur 201.



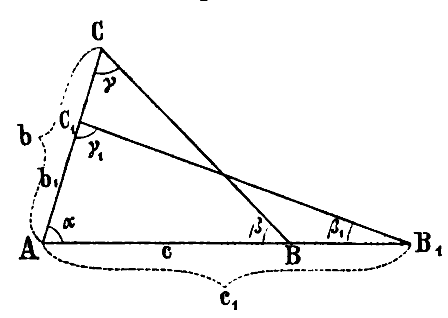
Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 60^0 \\ a = 35 \text{ dm} \\ d = 22 \text{ dm} \\ a_1 = 24 \text{ dm} \end{array} \right\}$ (s. Figur 201)

Andeutung. In dem Dreieck BCC_1, siehe Figur 201, kennt man die drei Seiten a, a_1 und d. Wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt, kann man aus diesen drei Seiten den Winkel γ berechnen. Ist γ berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite a und die Winkel α und γ, und kann somit mittels der Sinusregel die Seiten AB und AC berechnen, womit die gesuchten Entfernungen bestimmt sind.

Aufgabe 656. Zwei Dreiecke haben einen gleichen Winkel, man soll mittels trigonometrischer Sätze das Verhältnis der beiden Flächeninhalte dieser Dreiecke bestimmen.

Auflösung. Haben, siehe Figur 202, die beiden Dreiecke ABC und AB_1C_1 den Winkel α gemeinschaftlich, so hat man nach

Figur 202.



Erkl. 868. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Haben zwei Dreiecke einen Winkel gleich, so verhalten sich deren Inhalte wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Nach diesem Satz ergibt sich aus der Fig. 202 die Relation:

$$\frac{\triangle ABC}{\triangle AB_1C_1} = \frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1}$$

Die nebenstehende Auflösung enthält einen trigonometrischen Beweis dieses planimetrischen Lehrsatzes.

der Erkl. 151 für den Inhalt F des Dreiecks ABC die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin\alpha$$

ferner hat man für den Inhalt F_1 des Dreiecks AB_1C_1 die Relation:

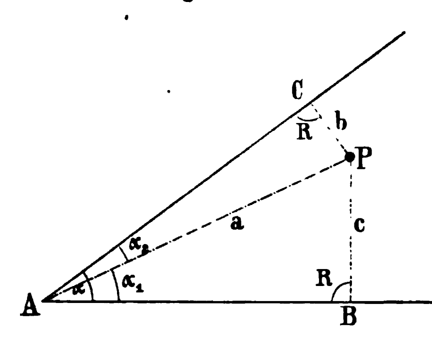
$$\text{b)} \ldots F_1 = \frac{b_1 c_1}{2} \cdot \sin\alpha$$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b), so erhält man nach gehöriger Reduktion für das gesuchte Verhältnis der Flächeninhalte F und F_1:

$$\text{A)} \ldots\ldots \frac{F}{F_1} = \frac{b \cdot c}{b_1 \cdot c_1} \text{ (siehe Erkl. 868)}$$

Aufgabe 657. Zwischen den Schenkeln eines Winkels $\alpha = 60^0$ ist ein Punkt P von solcher Lage zu finden, dass seine Entfernung vom Scheitel gleich der Strecke $a =$ 30 dm und dass die Summe seiner Entfernungen b und c von den Schenkeln $s =$ 10 m ist?

Figur 203.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{c} \alpha = 60^0 \\ a = 30\,\text{m} \\ b + c = s = 10\,\text{m} \end{array}\right\}$ (s. Figur 203)

Andeutung. Soll, siehe Figur 203, der Punkt P seiner Lage nach bestimmt sein, so muss, da die Entfernung $AP = a$ bekannt ist, noch die Lage dieser Strecke AP zu einem der beiden Winkelschenkel AB und AC bestimmt werden, d. h. es muss einer der beiden Winkel α_1 und α_2 berechnet werden.

Den Winkel α_1 z. B. kann man wie folgt berechnen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABP ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha_1 = \frac{c}{a}$$

oder

$$\text{a)} \ldots\ldots c = a \cdot \sin\alpha_1$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACP die Relation:

$$\sin\alpha_2 = \frac{b}{a}$$

oder

$$\text{b)} \ldots\ldots b = a \cdot \sin\alpha_2$$

Addiert man die Gleichungen a) und b), so erhält man:

$$b + c = a\sin\alpha_1 + a\sin\alpha_2$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$b + c = s$$

ist, und da:

$$\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

ist:

$$s = a \sin \alpha_1 + a \sin(\alpha - \alpha_1)$$

nämlich eine Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel α_1 vorkommt. Reduziert man diese Gleichung und bringt in bezug auf $\sin(\alpha - \alpha_1)$ die in der Erkl. 232 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{s}{a} = \sin \alpha_1 + \sin \alpha \cos \alpha_1 - \cos \alpha \sin \alpha_1$$

oder

$$\sin \alpha_1 (1 - \cos \alpha) + \cos \alpha_1 \cdot \sin \alpha = \frac{s}{a}$$

Setzt man nach der Erkl. 301:

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

und nach der Erkl. 52:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$$

und dividiert die ganze Gleichung durch $2 \sin \frac{\alpha}{2}$, so erhält man:

$$\sin \alpha_1 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} + \cos \alpha_1 \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2a \sin \frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 225 den Ausdruck auf der linken Seite dieser Gleichung $= \cos\left(\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}\right)$ so erhält man schliesslich:

$$\text{A)} \quad \cos\left(\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{s}{2a \sin \frac{\alpha}{2}}$$

und nach dieser Gleichung kann man den Winkel $\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}$ berechnen und dann auf leichte Weise den Winkel α_1 bestimmen, indem man zu dem für $\alpha_1 - \frac{\alpha}{2}$ gefundenen Wert $\frac{\alpha}{2}$ addiert.

Aufgabe 657a. Man soll zwischen den Schenkeln eines Winkels α von 36^0 einen Punkt P seiner Lage nach so bestimmen, dass er von dem einen Winkelschenkel eine Entfernung $a = 10$ m, von dem andern Winkelschenkel eine Entfernung $b = 3{,}4$ m hat.

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 36^0 \\ a = 10 \text{ m} \\ b = 3{,}4 \text{ m} \end{array} \right\}$ (siehe Figur 203)

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 657.

Anmerkung 15. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung rechtwinkliger, gleichschenkliger und schiefwinkliger Dreiecke gefordert wird, sind noch in den folgenden Abschnitten enthalten.

10) Aufgaben über das Viereck
(auch tetragonometrische Aufgaben).

Anmerkung 16. Da die Vierecke, je nach ihren besonderen Eigenschaften und je nachdem sie infolge ihrer besonderen Eigenschaften, abgesehen von konstanten Winkelwerten als R, $\frac{1}{2}R$ etc., durch 1, 2, 3, 4 oder 5 Bestimmungsstücke ihrer Gestalt nach bestimmt sind, in folgende Gruppen eingeteilt werden können, nämlich:

a) in Quadrate . . . . (sind bestimmt durch ein Bestimmungsstück)
b) in Rechtecke . . . . .
c) in Rhomben oder Rauten . . . (sind bestimmt durch zwei Bestimmungsstücke)
d) in Rhomboiden oder Rautlinge .
e) in gerade Trapeze oder Antiparallelogramme . . . .
f) in Deltoide . . . .
g) in Kreisvierecke . . . . (sind bestimmt durch drei Bestimmungsstücke)
h) in allgemeine Trapeze . . . .
i) in Sehnen- und Tangentenvierecke (sind bestimmt durch vier Bestimmungsstücke
und k) in allgemeine Vierecke oder Trapezoide (sind bestimmt durch fünf Bestimmungsstücke),

und da die Berechnung einer Figur an und für sich im allgemeinen um so einfacher ist, je weniger Bestimmungsstücke zur Bestimmung derselben erforderlich sind, so sind die in diesem Abschnitt enthaltenen Aufgaben über das Viereck, entsprechend jener Einteilung der Vierecke, nämlich je nachdem sich diese Aufgaben auf Quadrate, Rechtecke etc. beziehen, in besonderen Abteilungen zusammengestellt, d. h. sie sind so geordnet, dass die Aufgaben, welche sich auf das Quadrat beziehen, vorn und die Aufgaben, welche sich auf das Trapezoid oder das allgemeine Viereck beziehen, zuletzt zu stehen kommen. Bemerkt sei hier, dass vom rein wissenschaftlichen Standpunkt aus es richtiger wäre, die Berechnung des allgemeinen Vierecks zuerst vorzunehmen, indem die anderen Vierecke nur spezielle Formen des allgemeinen Vierecks sind (ähnlich wie das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck spezielle Formen des schiefwinkligen Dreiecks sind) und sich deshalb die Berechnung der speziellen Formen des Vierecks der Berechnung des allgemeinen Vierecks anzuschliessen hätte, allein vom pädagogischen Standpunkt aus muss zunächst darauf Rücksicht genommen werden, dass der Lernende vom leichteren zum schwereren geführt wird, und aus diesem Grund ist jene Einteilung erfolgt.

Anmerkung 17. Die Berechnung eines Vierecks erfolgt im allgemeinen dadurch, dass man dasselbe durch Diagonalen in solche Dreiecke zerlegt, oder dass man auch durch anderweite Hülfslinien solche Dreiecke herstellt, welche durch die gegebenen Stücke unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind, und dass man dann mittels der aus diesen Dreiecken sich ergebenden trig. Beziehungen die gesuchten Stücke des Vierecks zu berechnen sucht: ist diese Methode der Berechnung eines Vierecks nicht möglich, so ist die betreffende Aufgabe, welche die Berechnung jenes Vierecks verlangt, eine sog. tetragonometrische Aufgabe, zu deren Auflösung besondere Methoden erforderlich sind, wie solche zum Teil in diesem Abschnitt enthalten sind.

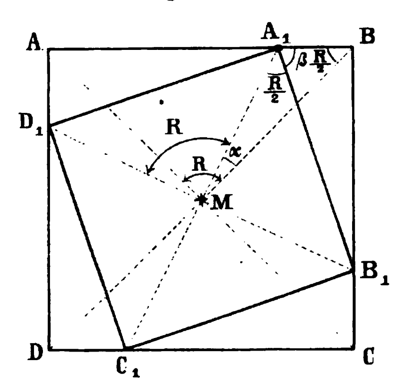
a) Aufgaben über das rechtwinklig-gleichseitige Parallelogramm oder das Quadrat.

Anmerkung 18. Da, wie sich aus den nachstehenden Erklärungen 372 und 374 ergibt, jedes Quadrat durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke oder durch seine beiden Diagonalen in vier kongruente, rechtwinklig-gleichschenklige Dreiecke zerlegt wird, und da, wie auch in der Anmerkung 17 erwähnt, die Berechnung eines Quadrats im allgemeinen dadurch erfolgt, dass man dasselbe durch seine Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so ergibt sich hieraus, dass sich die Berechnung eines Quadrats an und für sich, direkt an die Berechnung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks, also direkt an den Abschnitt 4) dieses Lehrbuchs anschliessen kann. Da nun, wie in der Anmerkung 6 (Seite 44) erwähnt, die Berechnung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks in das Gebiet der Planimetrie gehört, indem sämtliche Winkel desselben konstante Werte haben ($= R$ und $= \frac{1}{2}R$ sind), und somit auch die Berechnung des Quadrats an und für sich, in das Gebiet der Planimetrie gehört, so sind aus letzterem Grund in diesem Abschnitt solche Aufgaben, welche sich lediglich auf die Berechnung des Quadrats an und für sich beziehen,

nicht aufgenommen, und es sind nur einige solche Aufgaben vorgeführt, welche sich auf das Quadrat in Verbindung mit einem anderen Quadrat oder einem Dreieck beziehen, um zu zeigen, wie man bei der Auflösung solcher Aufgaben zu verfahren hat und um gleichzeitig hierbei dem Studierenden die Sätze über das Quadrat in das Gedächtnis zurückzurufen.

Aufgabe 658. In einer Seite eines Quadrats ist ein Punkt so gewählt, dass er diese Seite im Verhältnis 1 : 3 teilt. In dieses Quadrat ist ein zweites Quadrat so konstruiert, dass einer seiner Eckpunkte mit jenem Punkt zusammenfällt und dass seine anderen drei Eckpunkte auf die Seiten jenes Quadrats zu liegen kommen. Man soll die Winkel berechnen, welche die Diagonalen beider Quadrate miteinander bilden.

Figur 204.



Erkl. 369. Ein Quadrat wird im allgemeinen wie folgt definiert:

„Ein Quadrat ist ein Parallelogramm (siehe Erkl. 370 und 371), in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einander gleich sind und einen rechten Winkel miteinander bilden."

In bezug auf die allgemeinen Eigenschaften eines Quadrats siehe die Erkl. 372 und 374.

Erkl. 370. Ein Parallelogramm wird im allgemeinen wie folgt definiert:

„Ein Parallelogramm oder ein sog. Rhomboid oder Rautling ist ein Viereck, in welchem je zwei gegenüberstehende Seiten zueinander parallel sind."

In bezug auf die allgemeinen Eigenschaften eines Parallelogramms siehe die Erkl. 371.

Erkl. 371. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Parallelogramm sind je zwei gegenüberliegende Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich, und die Diagonalen halbieren sich gegenseitig."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Gegeben: eine Beziehung zwischen zwei Quadraten.

Andeutung. Ist, siehe Figur 204, $ABCD$ das gegebene Quadrat (siehe die Erkl. 369) und ist A_1 der gegebene Punkt, welcher die Seite AB so teilt, dass gemäss der Aufgabe:

$$\overline{A_1B} : \overline{A_1A} = 1 : 3$$

ist, so muss hiernach, wenn man die Seite AB dieses Quadrats mit a bezeichnet nach der Erkl. 375:

$$\text{a)} \ldots\ldots \overline{A_1B} = \frac{1}{4}a$$

und

$$\text{b)} \ldots\ldots \overline{A_1A} = \frac{3}{4}a$$

sein.

Zieht man durch den Schnittpunkt M der Diagonalen des Quadrats $ABCD$ und jenen Punkt A_1 die Transversale A_1C_1 und errichtet man in M auf A_1C_1 die Senkrechte B_1D_1, so erhält man mit den Schnittpunkten C_1, B_1 und D_1 die drei weiteren Eckpunkte des in der Aufgabe erwähnten zweiten Quadrats, was sich leicht aus den in der Erkl. 376 und 374 angeführten planimetrischen Sätzen ergibt.

Den gesuchten Winkel α, welchen z. B. die Diagonale BD des Quadrats $ABCD$ mit der Diagonale A_1C_1 des Quadrats $A_1B_1C_1D_1$ bildet, kann man nunmehr aus dem Dreieck MA_1B wie folgt berechnen:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck A_1BB_1 ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{BB_1}}{\overline{A_1B}}$$

oder, da nach vorstehender Gleichung a):

$$\overline{A_1B} = \frac{1}{4}a$$

und da ferner nach der Erkl. 377:

$$\overline{BB_1} = \overline{AA_1}$$

oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung b):

$$\overline{BB_1} = \frac{3}{4}a$$

ist:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{3}{4}a : \frac{1}{4}a$$

oder

$$1) \ldots\ldots \operatorname{tg}\beta = 3$$

mittels welcher Relation man zunächst den

Erkl. 372. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Quadrat sind die sämtlichen Seiten und die sämtlichen Winkel bezw. einander gleich, und zwar ist jeder der letzteren gleich einem rechten Winkel (siehe Erkl. 373).“

Erkl. 373. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Viereck ist die Summe der vier Winkel stets $= 4R$.“

Erkl. 374. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Quadrat sind die Diagonalen gleich lang, halbieren sich gegenseitig, stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel, durch welche sie gehen.“

Erkl. 375. Nach dem in der Erkl. 224 angeführten Summensatz aus der Proportionslehre erhält man aus der Proportion:

a) .... $\overline{A_1B} : \overline{A_1A} = 1 : 3$

$$\frac{\overline{A_1B} + \overline{A_1A}}{1+3} = \frac{\overline{A_1B}}{1} \text{ oder } = \frac{\overline{A_1A}}{3}$$

oder, wenn man:

$$\overline{A_1B} + \overline{A_1A} = a$$

setzt und reduziert:

$$\frac{a}{4} = \frac{\overline{A_1B}}{1} \text{ oder } = \frac{\overline{A_1A}}{3}$$

und hieraus erhält man:

1) .... $\overline{A_1B} = \frac{1}{4}a$

und

2) .... $\overline{A_1A} = \frac{3}{4}a$

Erkl. 376. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man durch den Schnittpunkt der beiden Diagonalen eines beliebigen Parallelogramms eine Transversale, so sind die beiden Abschnitte derselben, welche zwischen dem Schnittpunkt und den Seiten des || grs liegen, einander gleich.“

Diesem Lehrsatz entsprechend ist in der Figur 204:

$$\overline{MA_1} = \overline{MC_1}$$

und

$$\overline{MD_1} = \overline{MB_1}$$

Erkl. 377. Da in der Figur 204 die Dreiecke MBB_1 und MAA_1 kongruent sind, indem:

$$\overline{MB} = \overline{MA}$$

$$\overline{MB_1} = \overline{MA_1}$$

und $\sphericalangle MBB_1 = \sphericalangle MAA_1 = \frac{1}{2}R$

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

a) .... $\overline{BB_1} = \overline{AA_1}$

sein muss.

Winkel β berechnen kann. Da nun in dem Dreieck MA_1B

$$\sphericalangle MA_1B = \sphericalangle MA_1B_1 + \sphericalangle B_1A_1B$$

oder

2) .. $\sphericalangle MA_1B = \frac{1}{2}R + \beta$

ist, und da ferner:

$$\sphericalangle MBA_1 = \frac{1}{2}R$$

ist, so kann man schliesslich den gesuchten Winkel α mittels der aus dem Dreieck MA_1B sich ergebenden Relation:

$$\alpha = 2R - \left[\frac{1}{2}R + \beta + \frac{1}{2}R\right]$$

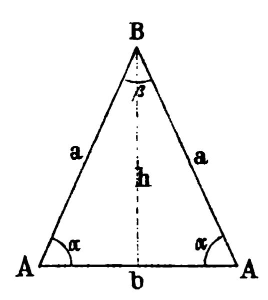
bezw. mittels der Relation:

A) ... $\alpha = R - \beta$

berechnen.

Aufgabe 659. Ein Quadrat, dessen Seite $s = 15$ m misst, ist gleich einem gleichschenkligen Dreieck, in welchem die Summe der Basis und der Höhe doppelt so gross als ein Schenkel desselben ist. Wie gross sind die Seiten, Winkel und der Inhalt des Dreiecks?

Figur 205.



Erkl. 378. Bezeichnet man den Inhalt eines Quadrats mit F, die Masszahl einer Seite desselben mit s, so besteht die Relation:

$F = s^2$ Flächeneinheiten

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Gegeben: eine Beziehung zwischen einem Quadrat und einem gleichschenkligen Dreieck.

Andeutung. Nach der Erkl. 378 hat man für den Inhalt F des gedachten Quadrats:

a) . . . . $F = s^2$

Bezeichnet man ferner die Basis des gedachten gleichschenkligen Dreiecks mit b, die zugehörige Höhe mit h und den Inhalt desselben ebenfalls mit F, da dieses Dreieck gemäss der Aufgabe gleich jenem Quadrat sein soll, so besteht die weitere Relation:

b) . . . . $F = \frac{b \cdot h}{2}$

Bezeichnet man ferner einen Schenkel des gleichschenkligen Dreiecks mit a, so besteht gemäss der Aufgabe die Relation:

c) . . . . $b + h = 2 \cdot a$

und schliesslich besteht, siehe Figur 205, nach dem pythagoreischen Lehrsatz zwischen h, $\frac{b}{2}$ und a die Relation:

d) . . . . $a^2 = h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

Aus den vier Gleichungen a) bis d), welche die vier Unbekannten F, b, h und a enthalten, kann man leicht die Seiten a und b des gleichschenkligen Dreiecks berechnen, dann kann man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 60 gezeigt wurde, die gesuchten Winkel dieses Dreiecks bestimmen.

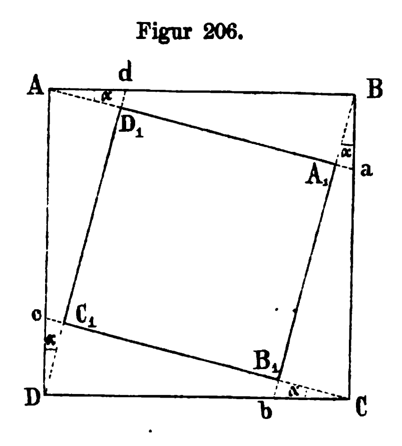
Aufgabe 660. Zieht man, wie die Fig. 206 zeigt, von jeder Ecke eines Quadrats eine Transversale so, dass jede derselben mit einer anliegenden Seite den Winkel $\alpha = 8^0\,5'$ bildet, so schliessen diese vier Transversalen ein kleineres Quadrat ein. Man soll das Verhältnis der Flächeninhalte beider Quadrate bestimmen.

Andeutung. Zunächst wäre zu beweisen, dass, siehe Figur 206, das durch die Transversalen Aa, Bb, Cc und Dd gebildete Viereck $A_1B_1C_1D_1$ überhaupt ein Quadrat ist. Dies kann man wie folgt:

Da z. B. die Winkel CBb und DCc einander gleich sind, indem jeder derselben nach Konstruktion $= \alpha$ ist, und da ferner die zwei Schenkel BC und DC dieser beiden Winkel senkrecht zu einander stehen, so müssen nach dem in der Erkl. 293 angeführten planimetrischen Satz auch die beiden anderen Schenkel Bb und Cc dieser Winkel senkrecht zu einander stehen, d. h. es muss $\sphericalangle A_1B_1C_1 = R$ sein; in gleicher Weise kann man darthun, dass die übrigen Winkel bei A_1, D_1 und C_1 je $= R$ sein müssen.

Da sich ferner aus der Kongruenz der Dreiecke BCb, CDc, DAd, ABa ergibt,

Figur 206.



dass die Transversalen Bb, Cc, Dd und Aa und die Abschnitte Cb, Dc, Ad und Ba einander gleich sein müssen, und da die rechtwinkligen Dreieckchen BA_1a, CB_1b, DC_1c und AD_1d hiernach kongruent sind, so kann man hiermit leicht darthun, dass die Seiten A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1 und D_1A_1 des Vierecks $A_1B_1C_1D_1$ einander gleich sein müssen, dass somit nach der Erkl. 369 dieses Viereck ein Quadrat sein muss. Da man nun im weiteren, z. B. in dem rechtwinkligen Dreieck BCb die Transversale Bb, desgl. den Abschnitt Cb, in die Seite s des Quadrats $ABCD$ und in jenen Winkel α ausdrücken kann, und da man dann aus dem rechtwinkligen Dreieck CB_1b die Abschnitte CB_1 und B_1b bestimmen kann, so kann man hiernach leicht auch die Seite A_1B_1 des inneren Quadrats in die Seite s des äusseren Quadrats und in den Winkel α ausdrücken. Mittels Benutzung der in der Erkl. 378 aufgestellten Inhaltsformel kann man dann leicht das Verhältnis der Inhalte beider Quadrate durch den gegebenen Winkel α ausdrücken.

Anmerkung 19. Weitere Aufgaben über das Quadrat in Verbindung mit anderen Figuren sind noch in nachstehenden Abschnitten enthalten.

---

b) Aufgaben über das rechtwinklig-ungleichseitige Parallelogramm oder das Rechteck.

Anmerkung 20. Da, wie sich aus den nachstehenden Erkl. 380 und 382 ergibt, jedes Rechteck durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke, oder durch seine beiden Diagonalen in 2 Paar kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt wird, und da, wie auch in der Anmerkung 17 erwähnt, die Berechnung eines Rechtecks im allgemeinen dadurch erfolgt, dass man dasselbe durch seine Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so ergibt sich hieraus, dass sich die Berechnung eines Rechtecks an und für sich, direkt an die Berechnung des rechtwinkligen, bezw. des gleichschenkligen Dreiecks, also direkt an die Abschnitte 2) bezw. 3) dieses Lehrbuchs anschliessen kann.

Aufgabe 661. Die Seiten a und b eines Rechtecks sind bezw. 4532 dm und 2840 dm lang; wie gross sind die Winkel, welche jene Seiten mit einer Diagonale des Rechtecks bilden?

Gegeben: $\begin{cases} a = 4532 \text{ dm} \\ b = 2840 \text{ dm} \end{cases}$

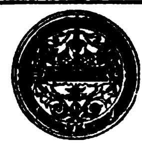
Figur 207.

Andeutung. Ist, siehe Figur 207 und die Erkl. 379 und 380, $ABCD$ das Rechteck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht die Diagonale BD, so bildet diese Diagonale mit jeder Seite a den Winkel α, indem die Winkel BDC und DBA als Wechselwinkel an den Parallelen DC und AB einander gleich sind, ferner bildet diese Diagonale mit jeder Seite b den Winkel β, indem die Winkel DBC und BDA als Wechselwinkel an den Parallelen BC und AD einander gleich sind. Zieht man ferner die andere Diagonale AC, so bildet diese Diagonale wieder mit jeder Seite a den Winkel α und mit jeder Seite b den Winkel β, wie in

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

296. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 295. — Seite 417—432. Mit 16 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 295. — Seite 417—432. Mit 16 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

— Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte. —

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

☛ Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266 kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser,** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung thunlichst berücksichtigt.**

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 379. Ein Rechteck wird im allgemeinen wie folgt definiert:

„Ein Rechteck ist ein Parallelogramm, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einen rechten Winkel bilden."

In bezug auf die allgemeinen Eigenschaften eines Rechtecks siehe die Erkl. 380 und 382.

Erkl. 380. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Rechteck sind je zwei gegenüberliegende Seiten einander gleich, und jeder der vier Winkel desselben ist ein rechter Winkel."

der Figur 207 angedeutet ist, indem z. B. das rechtwinklige Dreieck BCD kongruent dem rechtwinkligen Dreieck ADC ist, woraus sich ergibt, dass $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BDC$ also $= \alpha$ ist. Die Aufgabe reduziert sich somit darauf, je einen der Winkel α und β zu berechnen, die in der Figur verzeichnet sind; und dies kann man in einfacher Weise wie folgt:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD ergeben sich die Relationen:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

und

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}$$

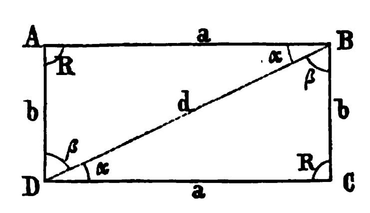
nach welchen Gleichungen man in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte die Winkel α und β berechnen kann. Zur Kontrolle muss die Bedingungsgleichung erfüllt sein, dass:

$$\alpha + \beta = 90^0$$

ist.

Aufgabe 662. Eine Diagonale eines Rechtecks ist $d = 280$ m und einer der Winkel, welche dieselbe mit den Rechtecksseiten bildet, ist $\alpha = 22^0\,10'\,40''$; man soll hieraus die Seiten und den Inhalt des Rechtecks berechnen.

Figur 208.



Erkl. 381. Bezeichnet man den Inhalt eines Rechtecks mit F und die auf ein und dieselbe Längeneinheit sich beziehenden Masszahlen zweier aneinanderstossender Seiten desselben bezw. mit a und b, so besteht die Relation:

$$F = a \cdot b \text{ Flächeneinheiten}$$

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Gegeben: $\begin{cases} d = 280 \text{ m} \\ \alpha = 22^0\,10'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 661. Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD der Figur 208 erhält man:

$$\sin\alpha = \frac{b}{d}$$

oder

$$\text{A)} \ldots b = d \cdot \sin\alpha$$

und

$$\cos\alpha = \frac{a}{d}$$

oder

$$\text{B)} \ldots a = d \cdot \cos\alpha$$

nach welchen beiden Gleichungen man die Seiten a und b berechnen kann.

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts hat man nach der Erkl. 381 die Relation:

$$F = a \cdot b$$

oder in Rücksicht der Gleichungen A) u. B):

$$F = d \cdot \cos\alpha \cdot d \cdot \sin\alpha$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 52 für:

$$2 \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \sin 2\alpha$$

also für:

$$\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\text{C)} \ldots F = \frac{d^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 663. Die 20 m lange Diagonale d eines Rechtecks teilt jeden der Winkel, durch welchen sie geht, in zwei Teile, welche sich verhalten wie 3 : 5; wie gross sind die Seiten des Rechtecks?

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} d = 20 \text{ m} \\ \alpha : \beta = 3 : 5 \end{array} \right.$

Andeutung. Ist, siehe Figur 208 und die Erkl. 382, $ABCD$ das Rechteck, dessen Diagonale BD den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so beachte man, dass gemäss der Aufgabe die Relation:

a) . . . $\alpha : \beta = 3 : 5$

besteht, und dass nach der Erkl. 379:

b) . . . $\alpha + \beta = 90^0$

ist. Aus diesen beiden Gleichungen kann man jeden der Winkel α und β berechnen, und dann kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD mittels dieser Winkel α und β und der gegebenen Diagonale d nach einfachen trigonometrischen Sätzen die gesuchten Seiten a und b des Rechtecks berechnen.

Erkl. 382. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Rechteck sind die Diagonalen einander gleich und halbieren sich."

Aufgabe 664. Die zwei Diagonalen eines Rechtecks schneiden einander unter einem Winkel δ von $142^0 46'$; die diesem Winkel gegenüberliegende Seite a misst 120,5 m; wie gross ist die andere Seite?

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} a = 120{,}5 \text{ m} \\ \delta = 142^0 46' \end{array} \right\}$ (s. Figur 209.)

Andeutung. Die Winkel, unter welchen sich die Diagonalen eines Rechtecks schneiden, sind, siehe Figur 209, δ und δ_1, indem je zwei der Winkel um den Schnittpunkt M, als Scheitelwinkel einander gleich sind. Da nun nach der Erkl. 382 die Diagonalen eines Rechtecks gleich lang sind und sich gegenseitig halbieren, so ist das Dreieck DCM der Figur 209 ein gleichschenkliges Dreieck und von diesem Dreieck ist gemäss der Aufgabe der Scheitelwinkel δ gegeben; man kann somit jeden der Basiswinkel α dieses Dreiecks mittels der Relation:

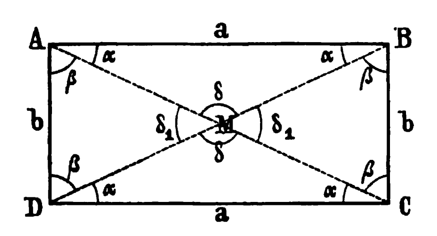
$$2\alpha = 180^0 - \delta$$

bezw. aus der Gleichung:

a) . . . $\alpha = 90^0 - \frac{\delta}{2}$

berechnen.

Figur 209.



Zur Berechnung der gesuchten Seite b kann man nunmehr die aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD sich ergebende Relation:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a}$$

benutzen. Aus derselben erhält man:

$$b = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder auch in Rücksicht der Gleichung a):

$$b = a \cdot \operatorname{tg}\left(90^0 - \frac{\delta}{2}\right)$$

oder nach der Erkl. 19:

A) . . . $b = a \cdot \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Seite b direkt aus dem gegebenen Winkel δ und der gegebenen Seite a berechnen kann.

Aufgabe 665. Eine der Diagonalen eines Rechtecks misst $d = 36{,}404$ m und bildet mit der andern Diagonale einen Winkel $\delta_1 = 26^0\,12'\,7''$; wie gross ist der Inhalt dieses Rechtecks?

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} d = 36{,}404 \text{ m} \\ \delta_1 = 26^0\,12'\,7'' \end{array} \right\}$ (s. Figur 209)

Andeutung. Ist, siehe Figur 209, $ABCD$ das Rechteck, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so ergibt sich aus dem gleichschenkligen Dreieck AMD für jeden der Basiswinkel β die Relation:

$$\beta = \frac{180^0 - \delta_1}{2}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \beta = 90^0 - \frac{\delta_1}{2}$$

Da man hiernach von dem rechtwinkligen Dreieck ABD den Winkel β und gemäss der Aufgabe die Hypotenuse d kennt, so erhält man für den Inhalt f dieses Dreiecks nach der Auflösung der Aufgabe 5:

$$\text{b)} \ldots f = \frac{d^2}{4} \cdot \sin 2\beta$$

Hiernach erhält man in Rücksicht, dass die Diagonale BD das Rechteck in die zwei kongruenten Dreiecke ABD und BCD zerlegt, und in Rücksicht der Gleichung a), für den gesuchten Inhalt F des Rechtecks:

$$F = 2 \cdot \frac{d^2}{4} \cdot \sin 2\left(90^0 - \frac{\delta_1}{2}\right)$$

oder

$$F = \frac{d^2}{2} \cdot \sin(180^0 - \delta_1)$$

oder nach der Erkl. 66:

$$\text{A)} \ldots F = \frac{d^2}{2} \sin \delta_1$$

Aufgabe 666. Der Inhalt des Quadrats über der längeren Seite a eines Rechtecks ist gleich dem doppelten Inhalt des Quadrats über der kürzeren Seite b des Rechtecks; unter welchem Winkel schneiden sich die Diagonalen dieses Rechtecks?

Figur 210.

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} \text{Zwischen den zwei Seiten } a \text{ und } b \text{ eines Rechtecks die Beziehung:} \\ a^2 = 2b^2 \end{array} \right.$

Andeutung. Ist, siehe Figur 210, $ABCD$ das Rechteck, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht sich zur Berechnung des gesuchten Winkels δ, welchen die Diagonalen desselben miteinander bilden, durch M die zu BC Parallele FG, so wird durch diese Linie das gleichschenklige Dreiecks MCD, dessen Scheitelwinkel δ der gesuchte Winkel ist, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt. Da nun z. B. in dem rechtwinkligen Dreieck DGM:

$$\overline{DG} = \frac{a}{2}$$

$$\text{und} \quad \overline{MG} = \frac{b}{2} \text{ (s. Erkl. 376)}$$

ist, so ergibt sich aus diesem Dreieck die Relation:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$$

oder

$$a) \ldots \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{a}{b}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass gemäss der Aufgabe:

$$a^2 = 2b^2$$

ist, dass also:

$$b) \ldots a = b\sqrt{2}$$

gesetzt werden kann, so geht in Rücksicht dessen die Gleichung a) über in:

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \frac{b\sqrt{2}}{b}$$

oder in:

$$A) \ldots \operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \sqrt{2}$$

und mittels dieser Gleichung kann man den gesuchten Winkel δ berechnen.

Anmerkung 21. In vorstehendem sind nur einige wenige Aufgaben über das Rechteck vorgeführt, nur um zu zeigen, wie die Berechnung des Rechtecks auf die Berechnung des rechtwinkligen und des gleichschenkligen Dreiecks zurückgeführt werden kann. Aufgaben über das Rechteck, analog denen, wie sie teilweise über das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck in den Abschnitten 7) und 9) enthalten sind, und deren Auflösungen diesen soeben erwähnten Aufgaben ganz analog sind, lassen sich in grosser Zahl bilden, werden aber dem Studierenden, der die in jenen Abschnitten enthaltenen Aufgaben zum grössten Teil durchgearbeitet hat, nichts nennenswertes Neues mehr bieten. Weitere Aufgaben über das Rechteck in Verbindung mit andern Figuren sind noch in den folgenden Abschnitten enthalten.

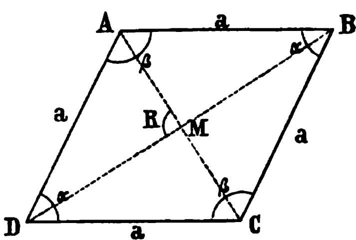
---

c) Aufgaben über das schiefwinklig-gleichschenklige Parallelogramm oder das Rhombus oder die Raute.

Anmerkung 22. Da, wie sich aus den nachstehenden Erkl. 384 und 386 ergibt, ein jedes Rhombus durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente gleichschenklige Dreiecke, und durch seine beiden Diagonalen in vier kongruente rechtwinklige Dreiecke zerlegt wird und da, wie in nachstehendem gezeigt, die Berechnung eines Rhombus im allgemeinen dadurch erfolgt, dass man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so folgt hieraus, dass sich die Berechnung eines Rhombus oder einer Raute an und für sich, direkt an die Berechnung des gleichschenkligen oder des rechtwinkligen Dreiecks, also direkt an die Abschnitte 2) und 3) dieses Lehrbuchs anschliessen kann.

Aufgabe 667. Die Seite a einer Raute misst 68,47 m, ein Winkel α derselben ist $= 56^0 25' 30''$; wie gross ist der Inhalt?

Figur 211.



Gegeben: $\begin{cases} a = 68{,}47 \text{ m} \\ \alpha = 56^0 25' 30'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 211 und die Erkl. 383 und 384, $ABCD$ das Rhombus, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht die Diagonale AC, so wird hierdurch das Rhombus in die zwei kongruenten gleichschenkligen Dreiecke ACD und ACB zerlegt, wie sich leicht mittels dem in der Erkl. 384 angeführten planimetrischen Satz nachweisen lässt. Von jedem dieser gleichschenkligen Dreiecke kennt man den Schenkel a und den Scheitelwinkel α; für den gesuchten Flächeninhalt F des Rhombus hat man somit nach der in der Antwort der Aufgabe 64 aufgestellten Formel 60 die Beziehung:

Erkl. 883. Ein Rhombus oder eine Raute wird im allgemeinen wie folgt definiert:

„Ein Rhombus, auch Raute genannt, ist ein Parallelogramm, in welchem zwei aneinanderstossende Seiten einander gleich sind.“

In bezug auf die allgemeinen Eigenschaften eines Rhombus siehe die Erkl. 384—386.

Erkl. 884. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Rhombus sind sämtliche Seiten und je zwei gegenüberliegende Winkel bezw. einander gleich.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

$$F = 2 \cdot \frac{a^2}{2} \sin\alpha$$

oder

A) . . . . $F = a^2 \cdot \sin\alpha$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt aus der Seite a und dem Winkel α des Rhombus berechnen kann.

Aufgabe 668. Der Inhalt F einer Raute beträgt 140,6 qm, ein Winkel α misst 125° 17′ 14″; wie gross ist eine Seite derselben?

Gegeben: $\begin{cases} F = 140{,}6 \text{ qm} \\ \alpha = 125^0\, 17'\, 14'' \end{cases}$

Andeutung. Bezeichnet man die gesuchte Seite der Raute mit a, so hat man nach der in der Andeutung der vorigen Aufgabe 667 aufgestellten Gleichung A) für a die Bestimmungsgleichung:

$$F = a^2 \cdot \sin\alpha$$

Diese Gleichung in bezug auf a aufgelöst, gibt:

A) . . . $a = \sqrt{\frac{F}{\sin\alpha}}$

und nach dieser Gleichung kann man die gesuchte Seite a berechnen, wenn man für F den gegebenen Zahlenwert und, da der gegebene Winkel α gemäss der Aufgabe ein stumpfer Winkel ist, nach den Erkl. 65 und 66:

$$\sin\alpha = \sin(180^0 - 125^0\, 17'\, 14'')$$

setzt.

Aufgabe 669. Der Inhalt F einer Raute ist $= 3101$ qcm und der Umfang derselben beträgt $u = 310$ cm; man soll die Winkel derselben berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} u = 310 \text{ cm} \\ F = 3101 \text{ qcm} \end{cases}$

Andeutung. Da nach der Erkl. 384 die sämtlichen Seiten einer Raute einander gleich sind, so besteht zwischen einer Seite a und dem Umfang u einer Raute, die Relation:

$$4 \cdot a = u$$

und hieraus erhält man:

a) . . . . $a = \frac{u}{4}$

Da man hiernach die Seite a berechnen kann, so kann man im weiteren die gesuchten Winkel der Raute aus dem gegebenen Flächeninhalt F und jener Seite a mittels der in der Andeutung zur Aufgabe 667 aufgestellten Gleichung A):

b) . . . $F = a^2 \cdot \sin\alpha$

berechnen; man erhält nämlich hieraus:

$$\sin\alpha = \frac{F}{a^2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$\sin\alpha = \frac{F}{\left(\frac{u}{4}\right)^2}$$

mithin:

A) . . . $\sin\alpha = \frac{16F}{u^2}$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für F und u gegebenen Zahlenwerte den Winkel α der Raute berechnen kann, wobei man zu berücksichtigen hat, dass dem Winkel α nach der Erkl. 271 zwei solche Werte entsprechen, welche sich zu 180° ergänzen. Jeder dieser Winkel gehört nach der Erkl. 385 der gegebenen Raute an.

Erkl. 385. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem $\parallel$gr sind je zwei der Winkel, welche an einer und derselben Seite liegen, Supplementwinkel, d. h. sie ergänzen sich zu 180°."

Nach diesem Satz ist z. B. in der Figur 211:

$$\alpha + \beta = 180^0$$

Dies ergibt sich auch daraus, dass α und β innere Gegenwinkel an Parallelen sind.

Aufgabe 670. Die Diagonalen einer Raute sind $d = 2{,}845$ dm und $d_1 = 7{,}002$ dm; man soll die Winkel der Raute berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} d = 2{,}845 \text{ dm} \\ d_1 = 7{,}002 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 212 und die Erkl. 386, $ABCD$ die Raute, deren Diagonalen die gegebenen Längen d und d_1 haben, so ergibt sich z. B. aus dem rechtwinkligen Dreieck AMD, siehe die Erkl. 386, die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{2} : \frac{d}{2}$$

oder

A) . . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{d}$

nach welcher Gleichung man $\frac{\alpha}{2}$ bezw. den gesuchten Winkel α berechnen kann. Den Winkel β der Raute kann man dann nach der Erkl. 385 mittels der Relation:

B) . . . . $\alpha + \beta = 180^0$

berechnen.

Figur 212.

Erkl. 386. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Rhombus (oder in jeder Raute) halbieren sich die Diagonalen, stehen senkrecht aufeinander und halbieren die Winkel, durch welche sie gehen."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 671. Die zwei Diagonalen d und d_1 einer Raute verhalten sich zu einander wie $3:8$; wie gross sind die Winkel derselben?

Gegeben: $d : d_1 = 3 : 8$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe. Nach der Auflösung der vorigen Aufgabe besteht die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{d}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$d : d_1 = 3 : 8$$

ist:

A) . . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{3}$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

Aufgabe 672. Die Summe der zwei Diagonalen d und d_1 einer Raute beträgt $S =$ 383 m, ein Winkel α misst $27^0\,22'\,16''$; wie gross ist eine Seite und welches ist der Inhalt dieser Raute?

Figur 213.

A a B a R M a D a C

Erkl. 387. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\cdot\sin(45^0+\alpha)$$

(Siehe Formel 108 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} d+d_1 = S = 383\text{ m} \\ \alpha = 27^0\,22'\,16'' \end{array}\right.$

Andeutung. Ist, siehe Figur 213, $ABCD$ die Raute, welche den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergeben sich z. B. aus dem rechtwinkligen Dreieck AMD die Relationen:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{d_1}{2} : a$$

und

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{d}{2} : a$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots d_1 = 2a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots d = 2a\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\text{c)} \ldots d+d_1 = 2a\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

oder, wenn man gemäss der Aufgabe:

$$\text{d)} \ldots d+d_1 = S$$

und nach der Erkl. 387:

$$\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{2}\cdot\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)$$

setzt:

$$S = 2a\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{S}{2\sqrt{2}\cdot\sin\left(45^0+\frac{\alpha}{2}\right)}$$

nach welcher Gleichung man die Seite a berechnen kann.*) Ist a hiernach berechnet, so kann man den gesuchten Inhalt F mittels der in der Andeutung zur Aufgabe 667 aufgestellten Gleichung A):

$$\text{B)} \ldots F = a^2\cdot\sin\alpha$$

berechnen.

*) Da man von jedem der vier rechtwinkligen Dreiecke, in welche die Raute durch die Diagonalen zerlegt wird, die Summe der beiden Katheten, dieselbe ist nämlich gleich der halben Summe der beiden Diagonalen d und d_1, und einen Winkel, nämlich $\frac{\alpha}{2}$ kennt, so kann man auch aus einem dieser rechtwinkligen Dreiecke die Seite a berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 206 gesagt wurde.

Aufgabe 673. Die Seiten a und b eines Recktecks sind bezw. 5,643 m und 2,081 m lang. Man soll die Winkel der Raute berechnen, welche man erhält, wenn man die Mitten der Seiten jenes Rechtecks der Reihe nach miteinander verbindet.

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} a = 5{,}643 \text{ m} \\ b = 2{,}081 \text{ m} \end{array} \right.$ (siehe Figur 214)
Gesucht: 2α und 2β

Andeutung. Ist, siehe Figur 214, $ABCD$ das gegebene Rechteck, so sind nach der Erkl. 388 die Mitten dieser Seiten die Ecken der Raute $A_1B_1C_1D_1$, deren Winkel gemäss der Aufgabe berechnet werden sollen und wie folgt berechnet werden können:

Zieht man durch den Schnittpunkt M der Diagonalen des gegebenen Rechtecks die zu den Seiten a und b Parallelen A_1C_1 und B_1D_1, so werden durch diese Linien die Seiten a und b halbiert; diese Linien müssen also mit den Diagonalen der Raute $A_1B_1C_1D_1$ zusammenfallen. Da nun nach der Erkl. 309 z. B. die Seite A_1D_1 der Raute, **parallel** der Diagonale BD ist und da nach der Erkl. 386 die Diagonalen einer Raute die Winkel derselben halbieren, so muss:

$\sphericalangle D_1A_1C_1 = \sphericalangle C_1A_1B_1 = \sphericalangle DBC$ oder $= \beta$

d. h. es muss der eine der gesuchten Winkel der Raute, nämlich:

$$\text{a)} \ldots \sphericalangle D_1A_1B_1 = 2\beta$$

sein; aus demselben Grund muss:

$\sphericalangle A_1D_1B_1 = \sphericalangle B_1D_1C_1 = \sphericalangle BDC$ oder $= \alpha$

d. h. es muss der andere der gesuchten Winkel der Raute, nämlich:

$$\text{b)} \ldots \sphericalangle A_1D_1C_1 = 2\alpha$$

sein, wie in der Figur 214 angedeutet ist. Da sich nun aus dem rechtwinkligen Dreieck BCD die Relation:

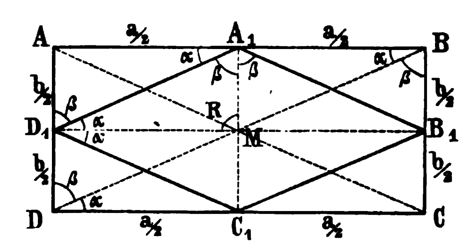
$$\text{c)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{a}$$

auch die Relation:

$$\text{d)} \ldots \operatorname{tg}\beta = \frac{a}{b}$$

ergibt, so kann man nach diesen Gleichungen c) und d) die Winkel α und β, dann nach den Gleichungen a) und b) die gesuchten Winkel 2α und 2β der Raute berechnen.

Figur 214.



Erkl. 388. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Mitten der Seiten eines Rechtecks bilden die Ecken einer Raute."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Aufgabe 674. Einer Raute mit der Seite $a = 45{,}31$ m und dem Winkel $\alpha = 127^0\,25'$ ist ein Rechteck mit dem Inhalt $F = 30{,}46$ qm einbeschrieben. Wie gross sind die Seiten des letzteren?

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} a = 45{,}31 \text{ m} \\ \alpha = 127^0\,25' \\ F \text{ des Rechtecks} \\ \quad A_1B_1C_1D_1 = 30{,}46 \text{ qm} \end{array} \right.$ (siehe Figur 215)

Andeutung. Ist, siehe Figur 215, $ABCD$ die gegebene Raute, so erhält man alle möglichen in diese Raute konstruierbaren Rechtecke, indem man in beliebigen aber **gleichen** Abständen von dem Schnittpunkt M der Diagonalen je zwei Parallelen zu der einen oder der andern jener Diagonalen zieht, was sich leicht mittels des in der Erkl. 386 angeführ-

ten planimetrischen Satzes beweisen lässt. Ist nun $A_1 B_1 C_1 D_1$ ein solches Rechteck, dessen Inhalt zugleich den gegebenen Inhalt F hat, und bezeichnet man die eine der gesuchten Seiten dieses Rechtecks, z. B. die Seite $A_1 B_1$ mit x, und die andere Seite $A_1 D_1$ mit y, so hat man nach der Erkl. 381 zunächst die Relation:

$$x \cdot y = F$$

oder

a) . . . . $x = \frac{F}{y}$

Zur Berechnung der gesuchten Seite y beachte man, dass sich aus den ähnlichen Dreiecken AMB und AGA_1 die Proportion:

b) . . . $\overline{AM} : \overline{MB} = \overline{AG} : \overline{GA_1}$

ergibt, und dass man hieraus, in Rücksicht, dass:

Figur 215.

c) . . . $\overline{AM} = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

d) . . . $\overline{MB} = a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

} diese Relationen ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AMB, dessen Hypotenuse $= a$ ist.

$$\overline{AG} = \overline{AM} - \overline{GM}$$

$$= a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \overline{A_1 H} \text{ [s. Gleich. c)]}$$

$$= a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{\overline{A_1 B_1}}{2}$$

$$= a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{x}{2}$$

also

e) . . $\overline{AG} = a \cdot \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{F}{2y}$ [s. Gleich. a)]

und

$$\overline{GA_1} = \frac{\overline{A_1 D_1}}{2}$$

also

f) . . $\overline{GA_1} = \frac{y}{2}$

gesetzt werden kann, für y die Bestimmungsgleichung:

$$a \sin\frac{\alpha}{2} : a \cos\frac{\alpha}{2} = \left[a \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{F}{2y}\right] : \frac{y}{2}$$

oder

g) . . . . $\frac{y}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = a \sin\frac{\alpha}{2} - \frac{F}{2y}$

erhält, mittels welcher Gleichung man die gesuchte Seite y berechnen kann, indem man dieselbe nach y auflöst und die für a, α und F gegebenen Zahlenwerte substituiert.

Ist hiernach y berechnet, so kann man nach Gleichung a) die andere gesuchte Seite x berechnen. Man wird bei der Ausrechnung für jede der Seiten zwei Werte erhalten welche der Aufgabe genügen.

Anmerkung 28. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung der Raute direkt oder indirekt gefordert wird, sind noch in den folgenden Abschnitten enthalten.

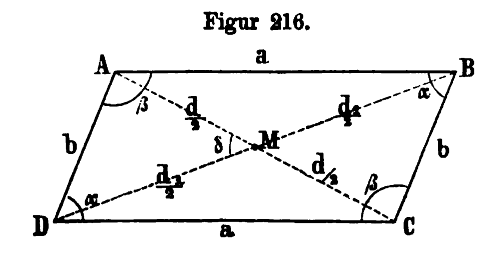
---

d) Aufgaben über das schiefwinklig-ungleichseitige Parallelogramm oder das Rhomboid oder Rautling.

Anmerkung 24. Da, wie sich aus den Erkl. 389 und 390 ergibt, ein jedes Rhomboid durch jede seiner Diagonalen in zwei kongruente schiefwinklige Dreiecke, oder durch seine beiden Diagonalen in zwei Paar kongruente schiefwinklige Dreiecke zerlegt wird, und da, wie in nachstehendem gezeigt, die Berechnung eines Rhomboids im allgemeinen dadurch erfolgt, dass man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, so folgt hieraus, dass sich die Berechnung eines Rhomboids an und für sich direkt an die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks anschliessen kann.

Aufgabe 675. Zwei aneinanderstossende Seiten a und b eines gewöhnlichen Parallelogramms, eines sog. Rhomboids sind bezw 61 dm und 32,5 dm lang und der von denselben eingeschlossene Winkel α beträgt $51^0\,16'\,42''$, Man soll die Diagonalen, den Winkel, welchen dieselben miteinander bilden und den Inhalt des ▱grs berechnen.

Figur 216.



Gegeben: $\begin{cases} a = 61 \text{ dm} \\ b = 32{,}5 \text{ dm} \\ \alpha = 51^0\,16'\,42'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 216 und die Erkl. 370 und 371, $ABCD$ das Parallelogramm, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht die Diagonale AC, so wird das ▱gr in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, von welchen man je die zwei Seiten a und b und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel α kennt. Nach dem Projektionssatz, siehe die Auflösung der Aufgabe 118, ergibt sich hiernach z. B. aus dem Dreieck ACD die Relation:

A) . . . . $\overline{AC}$ oder $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Diagonale d berechnen kann. Zieht man die andere Diagonale BD, so erhält man z. B. aus dem Dreieck ABD in ganz analoger Weise:

$$\overline{BD} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta}$$

oder, da:

$$\alpha + \beta = 180^0$$

also

$$\beta = 180^0 - \alpha$$

mithin

$$\cos\beta = \cos(180^0 - \alpha)$$

oder hiernach und nach der Erkl. 94:

$$\cos\beta = -\cos\alpha$$

ist:

B) . . . $\overline{BD}$ oder $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos\alpha}$

nach welcher Gleichung man die gesuchte zweite Diagonale d_1 berechnen kann.

Hat man hiernach die Diagonalen d und d_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck AMD die drei Seiten:

$$\overline{AD} = b$$

$$\overline{AM} = \frac{d}{2}$$

und $$\overline{DM} = \frac{d_1}{2}$$

und man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt ist, den gesuchten Winkel δ berechnen, welchen die Diagonalen des ▱grs miteinander bilden.

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F beachte man, dass nach der Erkl. 151 der Inhalt eines jeden der Dreiecke ACD und $ABC = \frac{a \cdot b}{2} \sin\alpha$ ist, dass also die Relation:

$$F = 2 \cdot \frac{a \cdot b}{2} \cdot \sin\alpha$$

oder die Relation:

C) . . . . . $F = ab \cdot \sin\alpha$

besteht, nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 676. Eine Seite eines Parallelogramms ist $a = 15{,}4$ m, ein Winkel desselben $\alpha = 28^0\,31'\,15''$ und der Flächeninhalt des Parallelogramms ist $F = 742{,}12$ qm; man soll die andere Seite berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 15{,}4 \text{ m} \\ F = 742{,}12 \text{ qm} \\ \alpha = 28^0\,31'\,15'' \end{cases}$

Andeutung. Aus der in der Andeutung zur vorigen Aufg. 675 aufgestellten Flächeninhaltsformel:

$$F = ab \cdot \sin\alpha$$

ergibt sich für die unbekannte Seite b die Relation:

A) . . . . $b = \frac{F}{a \sin\alpha}$

nach welcher Gleichung man die Seite b berechnen kann.

Aufgabe 677. Die zwei aneinanderstossenden Seiten a und b eines ‖grs sind bezw. $= 703$ m und $= 511$ m und der Flächeninhalt desselben ist $F = 348897$ qm. Man soll die Winkel und die Diagonalen des Rhomboids berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 703 \text{ m} \\ b = 511 \text{ m} \\ F = 348897 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der vorigen Aufgabe 676. Aus der in der Andeutung zur Aufgabe 675 aufgestellten Inhaltsformel:

$$F = ab \cdot \sin\alpha$$

erhält man:

A) . . . $\sin\alpha = \frac{F}{ab}$

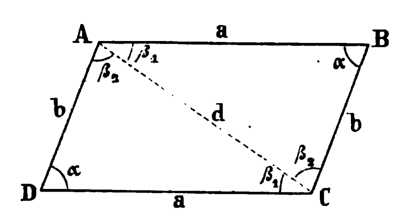
nach welcher Gleichung man, in Rücksicht, der für a, b und F gegebenen Zahlenwerte den Winkel α berechnen kann. Nach der Erkl. 271 ergeben sich für α zwei Werte welche sich zu 180^0 ergänzen, und welche die beiden Winkel des ‖grs sind. Die gesuchten Diagonalen kann man alsdann berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 675 gesagt wurde.

Aufgabe 678. Eine der Seiten eines Rhomboids ist $a = 16{,}552$ m, einer der ihr anliegenden Winkel ist $\alpha = 53^0\,20'\,10''$ und der Winkel, welchen sie an ihrem andern Eckpunkt mit der durch denselben gehenden Diagonale bildet, ist $\beta_1 = 12^0\,15'\,40''$. Man soll die andere Seite und die Diagonalen berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 16{,}552 \text{ m} \\ \alpha = 53^0\,20'\,10'' \\ \beta_1 = 12^0\,15'\,40'' \end{cases}$

Andeutung. Von dem Dreieck ACD, siehe Figur 217, kennt man gemäss der Aufgabe eine Seite, die Seite a, und die beiden ihr anliegenden Winkel α und β_1; wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, kann man somit aus diesem Dreieck die gesuchte Seite b und die gesuchte Diagonale d be-

Figur 217.



rechnen. Hat man hiernach die Seite b berechnet, so kann man mittels der Seiten a und b und dem Winkel BCD, welcher $= 180^0 - \alpha$ ist, die gedachte zweite Diagonale BD aus dem gedachten Dreieck BCD berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, da man von dem gedachten Dreieck BCD zwei Seiten a und b und den von denselben eingeschlossenen Winkel $(180^0 - \alpha)$ kennt.

Aufgabe 679. Eine der Diagonalen eines Rhomboids, dessen Flächeninhalt $F = 609$ qdm beträgt, ist $d = 34{,}089$ dm und eine der Seiten ist $a = 24{,}3$ dm; wie gross sind die übrigen Stücke dieses Rhomboids?

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} F = 609 \text{ qdm} \\ d = 34{,}089 \text{ dm} \\ a = 24{,}3 \text{ dm} \end{array}\right.$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 217, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ACD den Inhalt, derselbe ist nämlich nach der Erkl. 389 gleich dem halben Inhalt des ∥grs, also $= \frac{F}{2}$, und die Seiten AC $(= d)$ und CD $(= a)$. Nach der Erkl. 151 besteht somit die Relation:

$$\frac{a \cdot d}{2} \cdot \sin\beta_1 = \frac{F}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \; \ldots \; \sin\beta_1 = \frac{F}{a \cdot d}$$

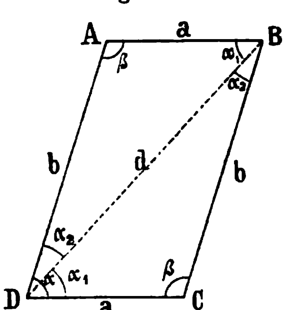
nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für F, a und d gegebenen Zahlenwerte den Winkel β_1 berechnen kann (für β_1 wird man nach der Erkl. 271 zwei Werte erhalten). Hat man hiernach β_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACD zwei Seiten und den von beiden eingeschlossenen Winkel und man kann somit die übrigen Stücke berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Erkl. 389. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Jede Diagonale eines Parallelogramms teilt dasselbe in zwei kongruente (also auch inhaltsgleiche) Dreiecke."

Aufgabe 680. Eine der Diagonalen eines ∥grs ist $d = 12{,}82$ dm und die beiden Winkel, welche diese Diagonale mit den Seiten des ∥grs bildet, sind $\alpha_1 = 33^0\,40'\,10''$ und $\alpha_2 = 31^0\,20'\,50''$. Man soll hieraus die Seiten des ∥grs berechnen.

Figur 218.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} d = 12{,}82 \text{ dm} \\ \alpha_1 = 33^0\,40'\,10'' \\ \alpha_2 = 31^0\,20'\,50'' \end{array}\right.$

Andeutung. Ist, siehe Figur 218, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe enspricht, und beachtet man, dass:

$$\left.\begin{array}{l} \sphericalangle DBA = \sphericalangle BDC \; (= \alpha_1) \\ \text{und dass:} \\ \sphericalangle DBC = \sphericalangle BDA \; (= \alpha_2) \end{array}\right\} \text{als innere Wechselwinkel an Parallelen}$$

ist, so kennt man hiernach und gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ABD die Seite BD $(= d)$ und die dieser Seite anliegenden Winkel α_1 und α_2; die Seiten dieses Dreiecks kann man somit berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 681. In einem Parallelogramm ist die Seite $a = 100$ dm und die Winkel, welche diese Seite mit den beiden Diagonalen bildet, sind $\alpha_1 = 10^0\ 12'\ 42''$ und $\beta_1 = 13^0\ 20'\ 8''$; wie gross ist die andere Seite?

Figur 219.

Gegeben: $\begin{cases} a = 100 \text{ dm} \\ \alpha_1 = 10^0\,12'\,42'' \\ \beta_1 = 13^0\,20'\,8'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Figur 219, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck DCM die Seite a und die beiden anliegenden Winkel α_1 und β_1, man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 116 gezeigt, mittels der Sinusregel die Seite MC bezw. die Diagonale $\overline{AC} = 2 \cdot \overline{MC}$ berechnen; man erhält nämlich in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle DMC = 180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)$$

ist, nach der Sinusregel aus dem Dreieck DCM:

$$\frac{d}{2} : a = \sin\alpha_1 : \sin[180^0 - (\alpha_1 + \beta_1)]$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\frac{d}{2} = \frac{a \cdot \sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$$

oder für die ganze Diagonale d des ∥grs:

$$\text{a)} \ldots d = 2a \cdot \frac{\sin\alpha_1}{\sin(\alpha_1 + \beta_1)}$$

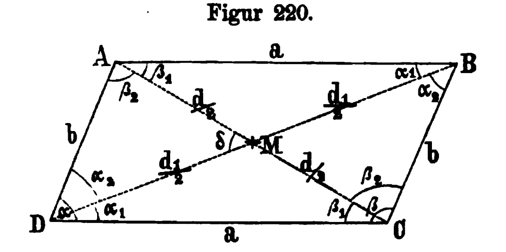
hat man hiernach die Diagonale d berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACD zwei Seiten, a und d, und den von beiden eingeschlossenen Winkel β_1; für die gesuchte Seite b erhält man somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, nach dem Projektionssatz:

$$\text{d)} \ldots b = \sqrt{d^2 + a^2 - 2ad \cdot \cos\beta_1}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für d vorhin berechneten Wertes und der für a und β_1 gegebenen Werte die gesuchte Seite b berechnen kann.

Aufgabe 682. Die Diagonalen d und d_1 eines Rhomboids sind bezw. $= 14{,}6$ m und $= 11{,}9$ m lang und schneiden sich unter einem Winkel von $42^0\,30'$; man soll hieraus die Seiten und den Inhalt des Rhomboids berechnen.

Figur 220.

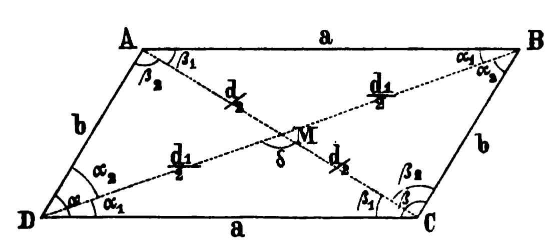


Gegeben: $\begin{cases} d = 14{,}6 \text{ m} \\ d_1 = 11{,}9 \text{ m} \\ \delta = 42^0\,30' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 220, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck AMD die Seite $AM\left(= \frac{d}{2}\right)$, die Seite $DM\left(= \frac{d_1}{2}\right)$ und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel δ; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die nicht bekannten Stücke b, α_2 und β_2 dieses Dreiecks berechnen; dann kann man in Rücksicht der für α_2 und b berechneten Werte aus dem Dreieck BCD in derselben Weise die Seite a und den Winkel β berechnen.

Aufgabe 683. Eine Seite eines $\|$grs ist $a = 50$ m, eine Diagonale desselben ist $d = 90$ m und der Winkel, welchen die beiden Diagonalen miteinander bilden, ist $\delta = 130^0\,30'\,20''$; wie gross ist die andere Seite und die andere Diagonale des $\|$grs?

Figur 221.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 50\text{ m} \\ d = 90\text{ m} \\ \delta = 130^0\,30'\,20'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 221, $ABCD$ das $\|$gr, welches den gegebenen Bedingungen entspricht, so kennt man von dem Dreieck MCD die Seite MC, dieselbe ist $= \frac{d}{2}$, die Seite AC ($= a$) und den Winkel DMC ($= \delta$), also, in Rücksicht, dass gemäss der in der Aufgabe für a und d gegebenen Zahlenwerte a grösser als $\frac{d}{2}$ ist, zwei Seiten und den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel. Wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt, kann man somit zunächst die nicht bekannten Stücke $\frac{d_1}{2}$, α_1 und β_1 dieses Dreiecks berechnen. Dann kann man aus dem Dreieck AMD mittels des für $\frac{d_1}{2}$ berechneten Werts, des für $\frac{d}{2}$ gegebenen Werts und in Rücksicht dass $\sphericalangle AMD = (180^0 - \delta)$ ist, die Seite b berechnen.

Aufgabe 684. Eine Seite eines Rhomboids, dessen Inhalt $F = 40000$ qm beträgt, ist $a = 240$ m und der Winkel, welchen eine der dieser Seite a anliegenden Seiten mit der durch den Schnittpunkt dieser beiden Seiten gehenden Diagonale bildet, ist $\alpha_2 = 52^0\,30'\,8{,}6''$; wie gross sind die Winkel und wie gross ist die nicht gegebene Seite des $\|$grs?

Figur 222.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 40000\text{ qm} \\ a = 240\text{ m} \\ \alpha_2 = 52^0\,30'\,8{,}6'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 222, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ABD dessen Inhalt, derselbe ist nach der Erkl. 389 $= \frac{F}{2}$, die Seite $\overline{AB} = a$ und den derselben gegenüberliegenden Winkel α_2. Setzt man daher in der in der Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 198:

$$F = \frac{b \cdot \sin\alpha}{2} \sqrt{a^2 - (b\sin\alpha)^2} + \frac{b^2 \sin 2\alpha}{4}$$

$$F = \frac{F}{2} \text{ und } \alpha = \alpha_2$$

so erhält man in bezug auf die Seite b des Dreiecks ABD, d. i. die gesuchte Seite des $\|$grs, die Bestimmungsgleichung:

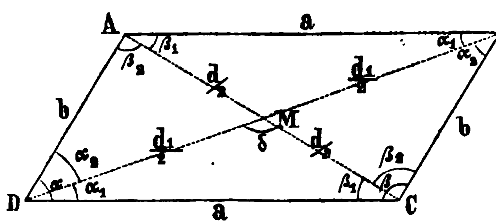
$$\text{A)} \;.\;.\; \frac{F}{2} = \frac{b \cdot \sin\alpha_2}{2} \sqrt{a^2 - (b\sin\alpha_2)^2} + \frac{b^2 \sin 2\alpha_2}{4}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf b auf, so kann man nach der somit erhaltenen Gleichung, indem man in derselben die für F, a und α_2 gegebenen Zahlenwerte substituiert, die gesuchte Seite b berechnen. Ist b berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABD

die Seiten a und b und den Winkel α_2 und man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 685. Die zwei Diagonalen eines Rhomboids mit $F = 25000$ qm Flächeninhalt, sind $d = 650$ m und $d_1 = 70$ m lang; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses ‖grs?

Figur 223.



Erkl. 390. Bezeichnet man den Inhalt eines ‖grs mit F, so ist nach der Erkl. 389 der Inhalt eines jeden der Dreiecke, in welche eine Diagonale das ‖gr zerlegt $= \frac{F}{2}$, ferner ist nach der Erkl. 391 der Inhalt eines jeden der vier Dreiecke, in welche jenes ‖gr durch die beiden Diagonalen zerlegt wird $= \frac{F}{4}$.

Erkl. 391. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Dreiecke mit gleichen Grundlinien und gleichen Höhen sind inhaltsgleich."

Nimmt man, siehe Figur 223, die gleichen Seiten AM und CM als die Grundlinien der Dreiecke AMD und CMD an, so ist die von der gemeinschaftlichen Spitze D beider Dreiecke auf AC gefällte Senkrechte, sowohl die Höhe von dem einen als auch die Höhe von dem andern jener Dreiecke; da hiernach beide Dreiecke gleiche Grundlinien und gleiche Höhen haben, so sind sie nach jenem Satz inhaltsgleich.

Gegeben: $\begin{cases} d = 650 \text{ m} \\ d_1 = 70 \text{ m} \\ F = 25000 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 223, $ABCD$ das ‖gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man z. B. von dem Dreieck MCD die Seite $MC \left(= \frac{d}{2}\right)$, die Seite $DM \left(= \frac{d_1}{2}\right)$ und den Inhalt, derselbe ist nach der Erkl. 390 $= \frac{1}{4}$ des Inhalts des ‖grs, also gemäss der Aufgabe $= \frac{F}{4}$. Hiernach und nach der Erkl. 151 besteht also die Relation:

$$\frac{d}{2} \cdot \frac{d_1}{2} \cdot \frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \; \ldots \; \sin\delta = \frac{2F}{d \cdot d_1}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel δ berechnen kann, wobei man zu berücksichtigen hat, dass man nach der Erkl. 271 für δ zwei Werte erhält. Ist hiernach δ berechnet, so kann man mittels der für δ gefundenen Werte aus den Dreiecken MCD und AMD leicht die Seiten a und b und die Winkel α_1, β_1, α_2 und β_2 berechnen.

Aufgabe 686. Die beiden Diagonalen d und d_1, von welchen $d_1 = 320$ m lang ist, schliessen einen Winkel $\delta = 101^0\,41'\,22{,}5''$ ein und der Flächeninhalt F des ‖grs ist $= 15005$ qm; wie gross sind die Seiten und die Winkel dieses ‖grs?

Gegeben: $\begin{cases} d_1 = 320 \text{ m} \\ \delta = 101^0\,41'\,22{,}5'' \\ F = 15005 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 223, $ABCD$ das ‖gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe z. B. von dem Dreieck MCD die Seite $MD \left(= \frac{d_1}{2}\right)$, den Winkel δ und auch den Inhalt dieses Dreiecks, derselbe ist nämlich nach der Erkl. 390 $= \frac{1}{4}$ des gegebenen Inhalts des ‖grs, also $= \frac{F}{4}$

Nach der Erkl. 151 besteht somit in bezug auf jenes Dreieck MCD die Relation:

$$\frac{d_1}{2} \cdot \frac{d}{2} \cdot \frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$$

aus welcher Gleichung sich:

$$\text{A)} \ldots d = \frac{2F}{d_1 \cdot \sin\delta}$$

ergibt. In Rücksicht der für F, δ und d_1 gegebenen Zahlenwerte kann man somit nach dieser Gleichung die Diagonale d des ∥grs berechnen. Ist hiernach d berechnet, so kennt man von dem Dreieck MCD die Seiten $MD\left(=\frac{d_1}{2}\right)$ und $MC\left(=\frac{d}{2}\right)$ und den von beiden Seiten eingeschlossenen Winkel δ und man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite a und die Winkel α_1 und β_1 berechnen; aus dem Dreieck BCD kann man alsdann in derselben Weise die Seite b und die Winkel α_2 und β berechnen.

Aufgabe 687. In einem ∥gr sind die Diagonalen $d = 24$ m und $d_1 = 18$ m, und die längere Seite $a = 16$ m; wie gross sind die Winkel und wie gross ist die andere Seite des ∥grs?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} d = 24 \text{ m} \\ d_1 = 18 \text{ m} \\ a = 16 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 223, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ACD die Seite AC $(=d)$, die Seite CD $(=a)$ und die zur Seite AC gehörige Schwerlinie $DM\left(=\frac{d_1}{2}\right)$. Zur Berechnung der Seite b hat man somit nach den Erkl. 299 und 300:

$$a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{2}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf b auf, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots b = \sqrt{\frac{d_1^2 + d^2}{2} - a^2}$$

nach welcher Gleichung man man in Rücksicht der für a, d_1 und d gegebenen Zahlenwerte die Seite b berechnen kann. Ist hiernach die Seite b berechnet, so kann man aus dem Dreieck ACD den Winkel α mittels des Projektionssatzes berechnen.

Aufgabe 688. Die zwei aneinanderstossenden Seiten a und b eines Rhomboids messen bezw. 98 m und 202 m, der Winkel, welchen die Diagonalen bilden, ist $\delta = 38^0\,42'\,11{,}2''$; wie gross sind die Winkel und welches ist der Inhalt des ∥grs?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 98 \text{ m} \\ b = 202 \text{ m} \\ \delta = 38^0\,42'\,11{,}2'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 224, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man zieht durch den Schnittpunkt M der Diagonalen dieses ∥grs zu den Seiten b die Parallele GH, so halbiert die-

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

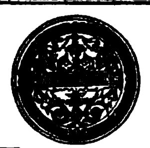
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

297. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 296. — Seite 433—448.
Mit 13 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 296. — Seite 433—448. Mit 13 Figuren.

Inhalt:

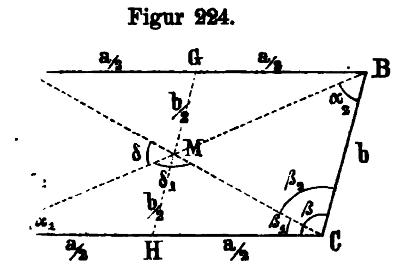
Aufgaben über das Viereck, Fortsetzung, und zwar Aufgaben über das schiefwinklig-ungleichseitige Parallelogramm, das Rhomboid, und über das gerade Trapez, das Antiparallelogramm.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Die Verlagshandlung.

Figur 224.



selbe die Seiten a. Berücksichtigt man nunmehr, dass man von dem Dreieck DMC die Seite a, den Winkel DMC, derselbe ist $= 180^0 - \delta$, und die nach der Seite DC gezogene Schwerlinie MH kennt, dieselbe ist nach der Erkl. 376 $= \frac{b}{2}$, so kann man, wie in der Andeutung zur Aufgabe 400 gesagt wurde, aus diesen bekannten Stücken jenes Dreiecks, die unbekannten Winkel α_1 und β_1 desselben berechnen. Hat man hiernach z. B. α_1 berechnet, so kann man mittels der Sinusregel aus dem Dreieck BCD den Winkel α_2 berechnen, und dann die gesuchten Winkel α und β des $\|$grs mittels der Relationen:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

und

$$\beta = 180^0 - \alpha$$

bestimmen. Den gesuchten Inhalt F kann man im weiteren mittels der in der Andeutung zur Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C):

$$F = a\,b \cdot \sin\alpha$$

berechnen.

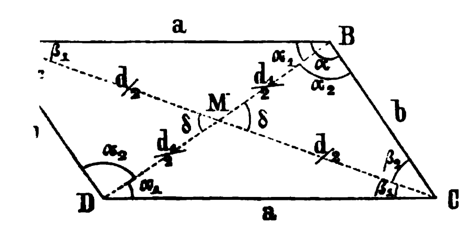
---

gabe 689. Von einem Rhomboid kennt e Seite $a = 66$ m, den Winkel $\alpha =$ ' 33,4'' und den Winkel $\delta = 44^0\,50'$ welchen die beiden Diagonalen bilden; ss ist die andere Seite, der andere und der Inhalt des Rhomboids?

Gegeben: $\begin{cases} a = 66 \text{ m} \\ \alpha = 110^0\,22'\,33{,}4'' \\ \delta = 44^0\,50'\,26{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 225, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man, gemäss der Aufgabe, von dem Dreieck ABC, die Seite $AB\ (= a)$, den Winkel $ABC\ (= \alpha)$ und den Winkel δ, welchen die zur Seite AC gehörige Schwer- oder Mittellinie BM mit dieser Seite AC bildet. Zur Berechnung der gesuchten Seite b dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Seite des $\|$grs kann man wie folgt verfahren:

Figur 225.



Aus den Dreiecken AMB und CMB ergeben sich nach der Sinusregel bezw. die Relationen:

$$\frac{d}{2} : \frac{d_1}{2} = \sin\alpha_1 : \sin\beta_1$$

und

$$\frac{d}{2} : \frac{d_1}{2} = \sin\alpha_2 : \sin\beta_2$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die goniometrische Gleichung:

$$\frac{\sin\alpha_1}{\sin\beta_1} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

oder

$$\text{a)} \;.\,.\; \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

mittels welcher man zunächst die Dreieckswinkel β_1 und β_2 folgendermassen berechnen kann:

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 217:

$$\delta = \alpha_1 + \beta_1$$

mithin:

$$\alpha_1 = \delta - \beta_1$$

und dass in dem Dreieck BCM:

$$\alpha_2 = 2R - (\delta + \beta_2)$$

ist, so erhält man, wenn man diese Werte für α_1 und α_2 in Gleichung a) substituiert:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin[2R - (\delta + \beta_2)]} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\text{b)} \ldots \frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1) + \sin(\delta + \beta_2)}{\sin(\delta - \beta_1) - \sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{\sin\beta_1 - \sin\beta_2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben einmal:

$$\text{für } \alpha = \delta - \beta_1$$

$$\text{und für } \beta = \delta + \beta_2$$

ein andermal:

$$\text{für } \alpha = \beta_1$$

$$\text{und für } \beta = \beta_2$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 + \delta + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 - \delta - \beta_2}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

Setzt man nunmehr:

$$\text{A)} \ldots \beta_1 + \beta_2 = \beta$$

und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 32:

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{f)} \ldots \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

Bringt man noch die in der Erkl. 892 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man schliesslich:

$$\text{B)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktion Tangens des unbekannten Winkels $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ vorkommt, indem δ gegeben und

$$\text{g)} \ldots \beta = 180^0 - \alpha$$

Erkl. 892. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

(Siehe Formel 46 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

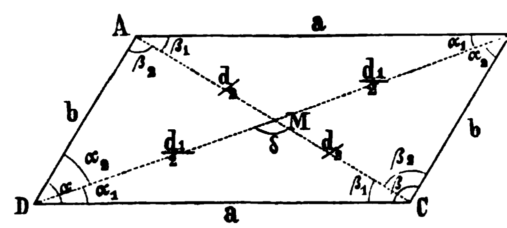
ist, also leicht aus dem gegebenen Winkel α bestimmt werden kann. Löst man die Gleichung B) in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ auf, so erhält man eine Gleichung, nach welcher man $\beta_1-\beta_2$ berechnen kann. Aus dem für $\beta_1-\beta_2$ sonach berechneten und aus dem nach den Gleichungen A) und g) für $\beta_1+\beta_2$ bekannten Wert kann man dann die Winkel β_1 und β_2 berechnen, und dann kann man mittels dieser Winkel aus dem Dreieck ABC die gesuchte Seite b nach der Sinusregel berechnen. Den Inhalt kann man schliesslich mittels der in Andeutung der Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C):

$$F = ab\cdot\sin\alpha$$

berechnen.

Aufgabe 690. In einem $\|$gr, dessen Flächeninhalt $F = 26998$ qdm beträgt, misst die eine Seite $a = 75$ dm und der Winkel δ, welchen die Diagonalen miteinander bilden $= 153^0\,10'\,7{,}5''$; man soll hieraus die Winkel, die andere Seite und die Diagonalen des $\|$grs berechnen.

Figur 226.



Gegeben: $\begin{cases} F = 26998 \text{ qdm} \\ \alpha = 75 \text{ dm} \\ \delta = 153^0\,10'\,7{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 226, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ACD den Inhalt, derselbe ist $= \frac{F}{2}$ (siehe Erkl. 389), die Seite $DC\,(=a)$ und den Winkel δ, welchen die zur Seite AC gehörige Schwerlinie DM mit dieser Seite bildet, bezw. man kennt von dem Dreieck DMC die Seite $DC\,(=a)$, den Winkel $DMC\,(=\delta)$ und den Inhalt F, derselbe ist $= \frac{F}{4}$ (siehe Erkl. 390); aus diesem Dreieck kann man die Winkel α_1 und β_1 wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 151 und nach dem vorhin gesagten ergibt sich aus dem Dreieck DMC die Relation:

a) .... $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$

ferner bestehen nach der Sinusregel die Relationen:

b) .... $\frac{d_1}{2}:\frac{d}{2} = \sin\beta_1:\sin\alpha_1$

und

c) .... $\frac{d_1}{2}:a = \sin\beta_1:\sin\delta$

und schliesslich besteht in dem Dreieck DMC die Beziehung:

d) .... $\alpha_1+\beta_1+\delta = 2R$

man hat somit 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten d_1, d, α_1 und β_1; die Winkel α_1 und β_1 kann man zunächst aus diesen Gleichungen folgendermassen berechnen:

Durch Multiplikation der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{F\sin\beta_1}{4\cdot\sin\alpha_1\cdot\frac{\sin\delta}{2}}$$

Erkl. 893. Die in nebenstehender Andeutung entwickelte Gleichung i):

a) . . . . $\frac{2a^2 \sin(\alpha_1 + \delta)}{\sin\delta} = \frac{F}{\sin\alpha_1}$

kann man wie folgt umformen:

$$\sin(\alpha_1 + \delta)\cdot\sin\alpha_1 = \frac{F\sin\delta}{2a^2}$$

$$(\sin\alpha_1\cos\delta + \cos\alpha_1\sin\delta)\sin\alpha_1 = \frac{F\sin\delta}{2a^2}$$

(siehe Erkl. 95)

$$\sin^2\alpha_1\cdot\cos\delta + \sin\alpha_1\cos\alpha_1\sin\delta = \frac{F\sin\delta}{2a^2}$$

$$2\sin^2\alpha_1\cdot\cos\delta + 2\sin\alpha_1\cos\alpha_1\cdot\sin\delta = \frac{F\sin\delta}{a^2}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 102:

$$2\sin^2\alpha_1 = 1 - \cos 2\alpha_1$$

und nach der Erkl. 52:

$$2\sin\alpha_1\cos\alpha_1 = \sin 2\alpha_1$$

so erhält man:

$$(1 - \cos 2\alpha_1)\cos\delta + \sin 2\alpha_1\sin\delta = \frac{F\sin\delta}{a^2}$$

$$\cos\delta - \cos 2\alpha_1\cdot\cos\delta + \sin 2\alpha_1\sin\delta = \frac{F\sin\delta}{a^2}$$

$$\cos 2\alpha_1\cdot\cos\delta - \sin 2\alpha_1\cdot\sin\delta = \cos\delta - \frac{F\sin\delta}{a^2}$$

Bringt man nunmehr die in der Erkl. 394 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben

$$\alpha = 2\alpha_1$$

$$\text{und } \beta = \delta$$

setzt, so erhält man schliesslich:

b) . . . $\cos(2\alpha_1 + \delta) = \cos\delta - \frac{F\sin\delta}{a^2}$

Erkl. 894. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

(Siehe Formel 48 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

oder

e) . . . $d_1 = \sqrt{\frac{2F\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\cdot\sin\delta}}$

Ferner erhält man aus Gleichung c):

f) . . . $d_1 = \frac{2\cdot a\sin\beta_1}{\sin\delta}$

und aus den Gleichungen e) und f) ergibt sich die goniometrische Gleichung:

$$\frac{2a\sin\beta_1}{\sin\delta} = \sqrt{\frac{2F\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\delta}}$$

oder

$$\frac{4a^2\sin^2\beta_1}{\sin^2\delta} = \frac{2F\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\sin\delta}$$

g) . . $\frac{2a^2\sin\beta_1}{\sin\delta} = \frac{F}{\sin\alpha_1}$

Setzt man nunmehr nach Gleichung d):

h) . . . $\beta_1 = 2R - (\alpha_1 + \delta)$

also

$$\sin\beta_1 = \sin[2R - (\alpha_1 + \delta)]$$

oder hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\sin\beta_1 = \sin(\alpha_1 + \delta)$$

so erhält man:

i) . . . . $\frac{2a^2\sin(\alpha_1 + \delta)}{\sin\delta} = \frac{F}{\sin\alpha_1}$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel α_1 vorkommt, und aus welcher man nach der Erkl. 393 die Gleichung:

A) . . . $\cos(2\alpha_1 + \delta) = \cos\delta - \frac{F\sin\delta}{a^2}$

ableiten kann. Nach dieser Gleichung kann man in Rücksicht der für a, F und δ gegebenen Zahlenwerte den Winkel $2\alpha_1 + \delta$ berechnen; dann kann man leicht, da δ bekannt ist, aus dem hiernach berechneten Wert den Winkel α_1 und hierauf nach Gleichung h) den Winkel β_1 bestimmen.

Sind hiernach die Winkel α_1 und β_1 berechnet, so kann man nach Gleichung f) die Diagonale d_1 berechnen u. s. f.

Aufgabe 691. Die Diagonalen eines Rhomboids sind $d = 162,4$ m und $d_1 = 95,8$ m und ein Winkel des ∥grs misst $\alpha = 68^0\,12'\,34,7''$; man soll hieraus die Seiten und den Inhalt berechnen.

Figur 227.

Gegeben: $\begin{cases} d = 162,4 \text{ m} \\ d_1 = 95,8 \text{ m} \\ \alpha = 68^0\,12'\,34,7'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 227, $ABCD$ das ∥gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ACD die Seite AC $(= d)$, die zu dieser Seite gehörige Schwerlinie DM $\left(= \frac{d_1}{2}\right)$ und den dieser Seite gegenüberliegenden Winkel α: man kann somit ganz analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 400 gesagt wurde, die nicht bekannten Stücke dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 692. In einem $\|$ gr ist eine Seite $a = 90{,}5$ m lang, eine Diagonale ist $d = 175$ m lang, und der Winkel, welchen die andere Diagonale d_1 mit einer der der Seite a anliegenden Seiten b bildet, ist $\alpha_2 = 57^0\ 0' 40{,}4''$. Man soll die nicht gegebenen Stücke dieses $\|$ grs hieraus berechnen.

Figur 228.

Gegeben: $\begin{cases} a = 90{,}5 \text{ m} \\ d = 175 \text{ m} \\ \alpha_2 = 57^0\, 0'\, 40{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 228, $ABCD$ das $\|$ gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ACD die Seite CD ($= a$), die Seite AC ($= d$) und den Winkel α_2, welchen die zur Seite AC gehörige Schwerlinie DM mit der dritten Seite AD bildet; dieses Dreieck kann man sonach unter anderem wie folgt trigonometrisch berechnen:

Nach dem in den Erkl. 299 und 300 angeführten planimetrischen Satz besteht in jenem Dreieck die Relation:

$$\text{a)} \ldots a^2 + b^2 = 2 \cdot \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \frac{d^2}{2}$$

ferner ergeben sich nach der Sinusregel aus dem Dreieck BCD die Relationen:

$$\text{b)} \ldots\ \frac{b}{a} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

und

$$\frac{d_1}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha_2}$$

oder in Rücksicht, dass

$$\beta = 2R - \alpha$$

oder

$$\beta = 2R - (\alpha_1 + \alpha_2)$$

und dass nach der Erkl. 66:

$$\sin[2R - (\alpha_1 + \alpha_2)] = \sin(\alpha_1 + \alpha_2)]$$

ist:

$$\text{c)} \ldots\ \frac{d_1}{a} = \frac{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_2}$$

Setzt man nunmehr den aus Gleichung b) für b sich ergebenden Wert:

$$\text{d)} \ldots\ b = \frac{a \cdot \sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}$$

und den aus Gleichung c) für d_1 sich ergebenden Wert:

$$\text{e)} \ldots\ d_1 = \frac{a \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{\sin\alpha_2}$$

in Gleichung a), so erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\text{f)}\ .\ a^2 + \frac{a^2 \sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2} = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \cdot \sin\alpha_2}\right)^2 + \frac{d^2}{2}$$

in welcher nur noch der unbekannte Winkel α_1 vorkommt. Formt man diese Gleichung um, so erhält man nach der Erkl. 395:

$$\text{A)}\ \cos(\psi + 2\alpha_1) = \frac{2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1}{\cos 2\alpha_2 - 2} \cdot \cos\psi$$

in welcher Gleichung ψ ein Winkel bedeutet, der nach der Erkl. 395 der Gleichung:

$$\text{A}_1 \ldots \operatorname{tg}\psi = \frac{\sin 2\alpha_2}{\cos 2\alpha_2 - 2}$$

Erkl. 395. Die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung f):

$$a^2 + \frac{a^2 \sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2} = 2 \cdot \left(\frac{a \cdot \sin(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \cdot \sin\alpha_2}\right)^2 + \frac{d^2}{2}$$

kann man wie folgt umformen:

$$a^2 + \frac{a^2 \sin^2\alpha_1}{\sin^2\alpha_2} = \frac{a^2 \cdot \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2)}{2 \cdot \sin^2\alpha_2} + \frac{d^2}{2}$$

$$\sin^2\alpha_2 + 2a^2\sin^2\alpha_1 = a^2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) + d^2 \cdot \sin^2\alpha_2$$

$$\sin^2\alpha_1 - a^2\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) = d^2 \cdot \sin^2\alpha_2 - 2a^2\sin^2\alpha_2$$

$$2\sin^2\alpha_1 - \sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{d^2}{a^2}\sin^2\alpha_2 - 2\sin^2\alpha_2$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 301:

$$2\sin^2\alpha_1 = 1 - \cos 2\alpha_1$$

und nach der Erkl. 396:

$$\sin^2(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{1 - \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2)}{2}$$

so erhält man:

$$s\,2\alpha_1 - \frac{1 - \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2)}{2} = \left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right)\sin^2\alpha_2$$

oder

$$\cos 2\alpha_1 - 1 + \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) = 2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right)$$

$$_1 + 2\alpha_2) - 2 \cdot \cos 2\alpha_1 = 2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1$$

Bringt man jetzt in bezug auf das erste Glied dieser Gleichung die in der Erkl. 394 aufgestellte Formel in Anwendung, indem man in derselben $\alpha = 2\alpha_1$ und $\beta = 2\alpha_2$ setzt, so erhält man weiter:

$$\cos 2\alpha_1 \cos 2\alpha_2 - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 - 2\cos 2\alpha_1 = 2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1$$

oder

$$\cos 2\alpha_1 (\cos 2\alpha_2 - 2) - \sin 2\alpha_1 \sin 2\alpha_2 = 2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1$$

$$\cos 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 \cdot \frac{\sin 2\alpha_2}{\cos 2\alpha_2 - 2} = \left[2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1\right] : (\cos 2\alpha_2 - 2)$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 140:

$$1) \ldots \quad \frac{\sin 2\alpha_2}{\cos 2\alpha_2 - 2} = \operatorname{tg}\psi$$

und berechnet in Rücksicht des für α_2 gegebenen Zahlenwerts den Winkel ψ, so erhält man, wenn man für den Ausdruck rechts noch der Kürze halber den Buchstaben m setzt:

$$\cos 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 \operatorname{tg}\psi = m$$

oder

$$\cos 2\alpha_1 - \sin 2\alpha_1 \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = m$$

$$\cos\psi \cdot \cos 2\alpha_1 - \sin\psi \sin 2\alpha_1 = m \cdot \cos\psi$$

oder, wenn man in bezug auf den Ausdruck links die in der Erkl. 394 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt und in derselben

$$\alpha = \psi$$
$$\beta = 2\alpha_1$$

setzt:

$$\cos(\psi + 2\alpha_1) = m \cdot \cos\psi$$

oder, für m seinen allgemeinen Wert substituiert:

$$2) \ldots \cos(\psi + 2\alpha_1) = \frac{2\sin^2\alpha_2\left(\frac{d^2}{a^2} - 2\right) - 1}{\cos^2\alpha_2 - 2} \cdot \cos\psi$$

Erkl. 396. Eine goniometrische Formel heisst:

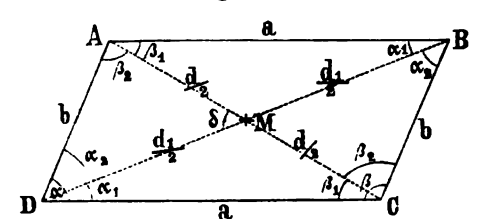
$$\sin^2(\alpha + \beta) = \frac{1 - \cos 2(\alpha + \beta)}{2}$$

(Siehe Formel 142 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

genügen muss. Nach der Gleichung A_1) kann man in Rücksicht des für α_2 gegebenen Zahlenwerts den Winkel ψ berechnen, dann kann man in Rücksicht dieses berechneten Wertes und der für a, d und α_2 gegebenen Werte aus Gleichung A) den Winkel $\psi + 2\alpha_1$ berechnen und schliesslich kann man aus den für ψ und $\psi + 2\alpha_1$ berechneten Werten den Winkel α_1 bestimmen. Ist hiernach einmal α berechnet, so kennt man von dem $\|$gr die Seite a, die Diagonale d und den Winkel $\alpha (= \alpha_1 + \alpha_2)$ und es hat die Berechnung der übrigen Stücke hiernach keine Schwierigkeiten mehr.

Aufgabe 693. Der Flächeninhalt F eines Parallelogramms ist 100 qm, die Diagonalen d und α_1 desselben schneiden sich unter dem Winkel $\delta = 36^0$ und verhalten sich wie $3:2$; man soll die Seiten und Winkel des Parallelogramms berechnen.

Figur 229.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 100\,\text{qm} \\ \delta = 36^0 \\ d : d_1 = 3 : 2 \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 229, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck AMD den Winkel δ und das Verhältnis der diesen Winkel einschliessenden Seiten $AM\left(= \frac{d}{2}\right)$ und $DM\left(= \frac{d_1}{2}\right)$, indem gemäss der Aufgabe:

$$d : d_1 = 3 : 2$$

also auch

$$a) \ldots \quad \frac{d}{2} : \frac{d_1}{2} = 3 : 2$$

ist. Die Winkel α_2 und β_2 dieses Dreiecks kann man hiernach wie folgt berechnen:

Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{d}{2} : \frac{d_1}{2} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$\text{b)} \ldots \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta_2} = \frac{3}{2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin\alpha_2 + \sin\beta_2}{\sin\alpha_2 - \sin\beta_2} = \frac{3+2}{3-2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 268:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\beta_2}{2}} = \frac{5}{1}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\beta_2}{2} = \frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha_2+\beta_2}{2}$$

oder, wenn man hierin:

$$\text{c)} \ldots \alpha_2 + \beta_2 = 2R - \delta$$

setzt:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha_2-\beta_2}{2} = \frac{1}{5}\cdot\operatorname{tg}\left(R - \frac{\delta}{2}\right)$$

nach welcher Gleichung man $\alpha_2 - \beta_2$ berechnen kann. Hat man hiernach $\alpha_2 - \beta_2$ berechnet, so kann man aus diesem für $\alpha_2 - \beta_2$ gefundenen und aus dem nach Gleichung c) für $\alpha_2 + \beta_2$ bekannten Wert, leicht die Winkel α_2 und β_2 berechnen. Ist hiernach der Winkel α_2 berechnet, so kann man aus diesem Wert und dem bekannten Inhalt des Dreiecks AMD, derselbe ist nach der Erkl. 390 $= \frac{F}{4}$, mittels der in der Auflösung der Aufgabe 117 aufgestellten Formel 95:

$$F = \frac{a^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}{2\sin\alpha}$$

indem man in derselben:

$$F = \frac{F}{4}$$
$$a = b$$
$$\alpha = \delta$$

und $\beta = \alpha_2$

setzt, also mittels der Gleichung:

$$\frac{F}{4} = \frac{b^2\cdot\sin(\delta+\alpha_2)\cdot\sin\alpha_2}{2\sin\delta}$$

die Seite b berechnen; man erhält hieraus nämlich:

$$\text{B)} \ldots b = \sqrt{\frac{F\sin\delta}{2\sin(\delta+\alpha_2)\cdot\sin\alpha_2}}$$

nach welcher Gleichung man die Seite b berechnen kann u. s. f.

mithin:

$$\alpha_1 = \delta - \beta_1$$

und dass in dem Dreieck BCM:

$$\alpha_2 = 2R - (\delta + \beta_2)$$

ist, so erhält man, wenn man diese Werte für α_1 und α_2 in Gleichung a) substituiert:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin[2R - (\delta + \beta_2)]} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\text{b)} \ldots \quad \frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1) + \sin(\delta + \beta_2)}{\sin(\delta - \beta_1) - \sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{\sin\beta_1 - \sin\beta_2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben einmal:

$$\text{für } \alpha = \delta - \beta_1$$
$$\text{und für } \beta = \delta + \beta_2$$

ein andermal:

$$\text{für } \alpha = \beta_1$$
$$\text{und für } \beta = \beta_2$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 + \delta + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 - \delta - \beta_2}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \quad \frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

Setzt man nunmehr:

$$\text{A)} \ldots \quad \beta_1 + \beta_2 = \beta$$

und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 321

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{f)} \ldots \quad \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

Bringt man noch die in der Erkl. 392 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man schliesslich:

$$\text{B)} \ldots \quad \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktion Tangens des unbekannten Winkels $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ vorkommt, indem δ gegeben und

$$\text{g)} \ldots \quad \beta = 180^0 - \alpha$$

Erkl. 392. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

(Siehe Formel 46 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

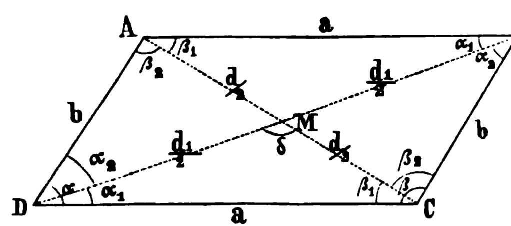
ist, also leicht aus dem gegebenen Winkel α bestimmt werden kann. Löst man die Gleichung B) in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ auf, so erhält man eine Gleichung, nach welcher man $\beta_1-\beta_2$ berechnen kann. Aus dem für $\beta_1-\beta_2$ sonach berechneten und aus dem nach den Gleichungen A) und g) für $\beta_1+\beta_2$ bekannten Wert kann man dann die Winkel β_1 und β_2 berechnen, und dann kann man mittels dieser Winkel aus dem Dreieck ABC die gesuchte Seite b nach der Sinusregel berechnen. Den Inhalt kann man schliesslich mittels der in Andeutung der Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C):

$$F = ab\cdot\sin\alpha$$

berechnen.

Aufgabe 690. In einem $\|$gr, dessen Flächeninhalt $F = 26998$ qdm beträgt, misst die eine Seite $a = 75$ dm und der Winkel δ, welchen die Diagonalen miteinander bilden $= 153^0\,10'\,7{,}5''$; man soll hieraus die Winkel, die andere Seite und die Diagonalen des $\|$grs berechnen.

Figur 226.



$$\text{Gegeben:}\begin{cases} F = 26998\text{ qdm}\\ a = 75\text{ dm}\\ \delta = 153^0\,10'\,7{,}5''\end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 226, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ACD den Inhalt, derselbe ist $=\frac{F}{2}$ (siehe Erkl. 389), die Seite $DC\,(=a)$ und den Winkel δ, welchen die zur Seite AC gehörige Schwerlinie DM mit dieser Seite bildet, bezw. man kennt von dem Dreieck DMC die Seite $DC\,(=a)$, den Winkel $DMC\,(=\delta)$ und den Inhalt F, derselbe ist $=\frac{F}{4}$ (siehe Erkl. 390); aus diesem Dreieck kann man die Winkel α_1 und β_1 wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 151 und nach dem vorhin gesagten ergibt sich aus dem Dreieck DMC die Relation:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{d_1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$$

ferner bestehen nach der Sinusregel die Relationen:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{d_1}{2}:\frac{d}{2} = \sin\beta_1:\sin\alpha_1$$

und

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{d_1}{2}:a = \sin\beta_1:\sin\delta$$

und schliesslich besteht in dem Dreieck DMC die Beziehung:

$$\text{d)} \ldots\ldots \alpha_1+\beta_1+\delta = 2R$$

man hat somit 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten d_1, d, α_1 und β_1; die Winkel α_1 und β_1 kann man zunächst aus diesen Gleichungen folgendermassen berechnen:

Durch Multiplikation der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{F\sin\beta_1}{4\cdot\sin\alpha_1\cdot\frac{\sin\delta}{2}}$$

mithin:

$$\alpha_1 = \delta - \beta_1$$

und dass in dem Dreieck BCM:

$$\alpha_2 = 2R - (\delta + \beta_2)$$

ist, so erhält man, wenn man diese Werte für α_1 und α_2 in Gleichung a) substituiert:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin[2R - (\delta + \beta_2)]} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\text{b)} \ldots \frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1) + \sin(\delta + \beta_2)}{\sin(\delta - \beta_1) - \sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{\sin\beta_1 - \sin\beta_2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben einmal:

$$\text{für } \alpha = \delta - \beta_1$$
$$\text{und für } \beta = \delta + \beta_2$$

ein andermal:

$$\text{für } \alpha = \beta_1$$
$$\text{und für } \beta = \beta_2$$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 + \delta + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 - \delta - \beta_2}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{c)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

Setzt man nunmehr:

$$\text{A)} \ldots \beta_1 + \beta_2 = \beta$$

und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 32!

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{f)} \ldots \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

Bringt man noch die in der Erkl. 392 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man schliesslich:

$$\text{B)} \ldots \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktion Tangens des unbekannten Winkels $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ vorkommt, indem δ gegeben und

$$\text{g)} \ldots \beta = 180^0 - \alpha$$

Erkl. 392. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

(Siehe Formel 46 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

ist, also leicht aus dem gegebenen Winkel α bestimmt werden kann. Löst man die Gleichung B) in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ auf, so erhält man eine Gleichung, nach welcher man $\beta_1-\beta_2$ berechnen kann. Aus dem für $\beta_1-\beta_2$ sonach berechneten und aus dem nach den Gleichungen A) und g) für $\beta_1+\beta_2$ bekannten Wert kann man dann die Winkel β_1 und β_2 berechnen, und dann kann man mittels dieser Winkel aus dem Dreieck ABC die gesuchte Seite b nach der Sinusregel berechnen. Den Inhalt kann man schliesslich mittels der in Andeutung der Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C):

$$F = ab\cdot\sin\alpha$$

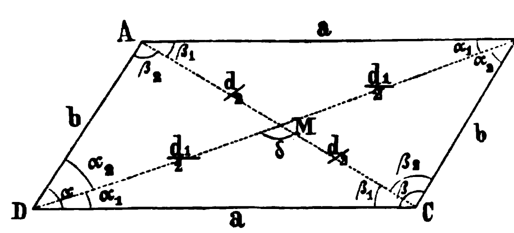
berechnen.

Aufgabe 690. In einem $\|$gr, dessen Flächeninhalt $F = 26998$ qdm beträgt, misst die eine Seite $a = 75$ dm und der Winkel δ, welchen die Diagonalen miteinander bilden $= 153^0\,10'\,7{,}5''$; man soll hieraus die Winkel, die andere Seite und die Diagonalen des $\|$grs berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 26998 \text{ qdm} \\ \alpha = 75 \text{ dm} \\ \delta = 153^0\,10'\,7{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 226, $ABCD$ das $\|$gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ACD den Inhalt, derselbe ist $=\frac{F}{2}$ (siehe Erkl. 389), die Seite $DC\,(=a)$ und den Winkel δ, welchen die zur Seite AC gehörige Schwerlinie DM mit dieser Seite bildet, bezw. man kennt von dem Dreieck DMC die Seite $DC\,(=a)$, den Winkel $DMC\,(=\delta)$ und den Inhalt F, derselbe ist $=\frac{F}{4}$ (siehe Erkl. 390); aus diesem Dreieck kann man die Winkel α_1 und β_1 wie folgt berechnen:

Figur 226.



Nach der Erkl. 151 und nach dem vorhin gesagten ergibt sich aus dem Dreieck DMC die Relation:

a) . . . . $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$

ferner bestehen nach der Sinusregel die Relationen:

b) . . . . $\frac{d_1}{2}:\frac{d}{2} = \sin\beta_1:\sin\alpha_1$

und

c) . . . . $\frac{d_1}{2}:a = \sin\beta_1:\sin\delta$

und schliesslich besteht in dem Dreieck DMC die Beziehung:

d) . . . . $\alpha_1+\beta_1+\delta = 2R$

man hat somit 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten d_1, d, α_1 und β_1; die Winkel α_1 und β_1 kann man zunächst aus diesen Gleichungen folgendermassen berechnen:

Durch Multiplikation der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{F\sin\beta_1}{4\cdot\sin\alpha_1\cdot\frac{\sin\delta}{2}}$$

mithin:

$$\alpha_1 = \delta - \beta_1$$

und dass in dem Dreieck BCM:

$$\alpha_2 = 2R - (\delta + \beta_2)$$

ist, so erhält man, wenn man diese Werte für α_1 und α_2 in Gleichung a) substituiert:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin[2R - (\delta + \beta_2)]} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$\text{b)} \;\ldots\; \frac{\sin(\delta - \beta_1)}{\sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin(\delta - \beta_1) + \sin(\delta + \beta_2)}{\sin(\delta - \beta_1) - \sin(\delta + \beta_2)} = \frac{\sin\beta_1 + \sin\beta_2}{\sin\beta_1 - \sin\beta_2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben einmal:

für $\alpha = \delta - \beta_1$

und für $\beta = \delta + \beta_2$

ein andermal:

für $\alpha = \beta_1$

und für $\beta = \beta_2$

setzt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 + \delta + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta - \beta_1 - \delta - \beta_2}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{c)} \;\ldots\; \frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right)} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

Setzt man nunmehr:

$$\text{A)} \;\ldots\; \beta_1 + \beta_2 = \beta$$

und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 321

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}\right) = -\operatorname{tg}\frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right)}{-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}$$

oder

$$\text{f)} \;\ldots\; \operatorname{tg}\left(\delta - \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

Bringt man noch die in der Erkl. 392 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man schliesslich:

$$\text{B)} \;\ldots\; \frac{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}}{1 + \operatorname{tg}\delta \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta_1 - \beta_2}{2} = -\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktion Tangens des unbekannten Winkels $\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}$ vorkommt, indem δ gegeben und

$$\text{g)} \;\ldots\; \beta = 180^0 - \alpha$$

Erkl. 392. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$$

(Siehe Formel 46 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

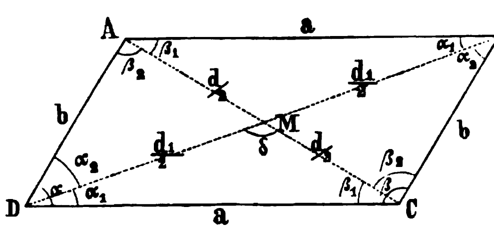
ist, also leicht aus dem gegebenen Winkel α bestimmt werden kann. Löst man die Gleichung B) in bezug auf $\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\beta_2}{2}$ auf, so erhält man eine Gleichung, nach welcher man $\beta_1-\beta_2$ berechnen kann. Aus dem für $\beta_1-\beta_2$ sonach berechneten und aus dem nach den Gleichungen A) und g) für $\beta_1+\beta_2$ bekannten Wert kann man dann die Winkel β_1 und β_2 berechnen, und dann kann man mittels dieser Winkel aus dem Dreieck ABC die gesuchte Seite b nach der Sinusregel berechnen. Den Inhalt kann man schliesslich mittels der in Andeutung der Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C):

$$F = ab \cdot \sin\alpha$$

berechnen.

Aufgabe 690. In einem ‖gr, dessen Flächeninhalt $F = 26998$ qdm beträgt, misst die eine Seite $a = 75$ dm und der Winkel δ, welchen die Diagonalen miteinander bilden $= 153^0\,10'\,7{,}5''$; man soll hieraus die Winkel, die andere Seite und die Diagonalen des ‖grs berechnen.

Figur 226.



Gegeben: $\begin{cases} F = 26998 \text{ qdm} \\ a = 75 \text{ dm} \\ \delta = 153^0\,10'\,7{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 226, $ABCD$ das ‖gr, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ACD den Inhalt, derselbe ist $= \frac{F}{2}$ (siehe Erkl. 389), die Seite $DC\,(=a)$ und den Winkel δ, welchen die zur Seite AC gehörige Schwerlinie DM mit dieser Seite bildet, bezw. man kennt von dem Dreieck DMC die Seite $DC\,(=a)$, den Winkel $DMC\,(=\delta)$ und den Inhalt F, derselbe ist $= \frac{F}{4}$ (siehe Erkl. 390); aus diesem Dreieck kann man die Winkel α_1 und β_1 wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 151 und nach dem vorhin gesagten ergibt sich aus dem Dreieck DMC die Relation:

a) . . . . $\frac{d_1}{2}\cdot\frac{d}{2}\cdot\frac{\sin\delta}{2} = \frac{F}{4}$

ferner bestehen nach der Sinusregel die Relationen:

b) . . . . $\frac{d_1}{2} : \frac{d}{2} = \sin\beta_1 : \sin\alpha_1$

und

c) . . . . $\frac{d_1}{2} : a = \sin\beta_1 : \sin\delta$

und schliesslich besteht in dem Dreieck DMC die Beziehung:

d) . . . . $\alpha_1 + \beta_1 + \delta = 2R$

man hat somit 4 Gleichungen mit den 4 Unbekannten d_1, d, α_1 und β_1; die Winkel α_1 und β_1 kann man zunächst aus diesen Gleichungen folgendermassen berechnen:

Durch Multiplikation der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$\frac{d_1^2}{4} = \frac{F\sin\beta_1}{4\cdot\sin\alpha_1\cdot\frac{\sin\delta}{2}}$$

Erkl. 403. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem gleichschenkligen Trapez sind die Diagonalen einander gleich.“

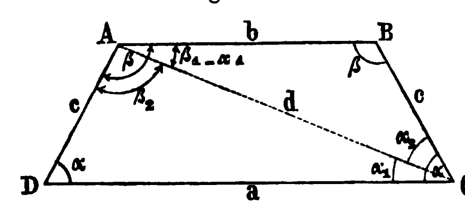
(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 404. Bezeichnet man den Inhalt eines Trapezes mit F, die in ein und dieselbe Masseinheit ausgedrückten Längen der beiden parallelen Seiten, die Grundlinien bezw. mit a und b und die entsprechende Masszahl der Höhe des Trapezes mit h, so besteht die Relation:

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h \text{ Flächeneinheiten}$$

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Figur 236.



mithin:

$$\text{C}_1) \ldots F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Flächeninhalt F direkt aus den gegebenen Stücken a, b und α berechnen kann.

b) Man kann auch zuerst einen Winkel, welchen eine Diagonale mit einer Seite des Antiparallelogramms bildet, wie folgt berechnen.

Aus den Dreiecken ACD und ABC der Figur 236 erhält man nach der Sinusregel bezw. die Relationen:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{a}{d} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha}$$

und

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{b}{d} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}$$

Dividiert man Gleichung a) durch Gleichung b), so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta_2 \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\alpha_2}$$

oder, da α und β Supplementwinkel sind, also nach der Erkl. 66:

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$\begin{aligned} \beta_2 &= \beta - \beta_1 \\ &= \beta - \alpha_1 \\ &= (2R - \alpha) - \alpha_1 \\ &= 2R - \alpha - \alpha_1 \\ &= 2R - (\alpha + \alpha_1) \end{aligned}$$

ist, dass man also:

$$\sin\beta_2 = \sin[2R - (\alpha + \alpha_1)]$$

oder nach der Erkl. 66:

$$\sin\beta_2 = \sin(\alpha + \alpha_1)$$

setzen kann, so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin(\alpha + \alpha_1)}{\sin\alpha_2}$$

oder, wenn man den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung bringt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\sin(\alpha + \alpha_1) + \sin\alpha_2}{\sin(\alpha + \alpha_1) - \sin\alpha_2}$$

und die in der Erkl. 368 erwähnte goniometrische Formel benutzt, indem man in derselben:

$$\alpha = \alpha + \alpha_1$$
$$\text{und } \beta = \alpha_2$$

setzt:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \alpha_1 + \alpha_2}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha + \alpha_1 - \alpha_2}{2}}$$

oder, da $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ ist:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{2\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_1-\alpha_2}{2}}$$

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha_1}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{D)} \ldots \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a-b}{a+b} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α_1 aus den gegebenen Stücken a, b und α berechnen kann.

Ist hiernach der Winkel α_1 berechnet, so kann man aus einem der Dreiecke ACD und ABC, da aus α_1 und α auch leicht die Winkel α_2, β_1 und β_2 bestimmt werden können, mittels der Sinusregel die Diagonale d und die Seite c berechnen und schliesslich kann man den gesuchten Inhalt F berechnen, wie vorstehend unter a) gesagt wurde.

Aufgabe 701. Der Flächeninhalt eines gleichschenkligen Trapezes ist $F = 3{,}5$ qdm, die beiden parallelen Seiten desselben sind $a = 4{,}6$ und $b = 4{,}1$ dm. Wie gross sind die Winkel dieses Trapezes?

Gegeben: $\begin{cases} F = 3{,}59 \text{ dm} \\ a = 4{,}6 \text{ dm} \\ b = 4{,}1 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Man löse die in der Andeutung zur Aufgabe 700 aufgestellte Inhaltsformel:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

in bezug auf $\operatorname{tg}\alpha$ auf, setze in die somit erhaltene Gleichung:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{4F}{a^2 - b^2}$$

die für a, b und F gegebenen Zahlenwerte und berechne hiernach den einen Winkel α des Trapezes; den andern Winkel β findet man alsdann mittels der Relation:

$$\text{B)} \ldots \beta = 180^0 - \alpha$$

Aufgabe 702. Man berechne den Flächeninhalt eines geraden Trapezes, in welchem die grössere Grundlinie $a = 250$ m, eine der anstossenden Seiten $c = 75$ m und der von den Seiten a und c eingeschlossene Winkel $\alpha = 55^0\,40'\,20''$ gegeben ist.

Gegeben: $\begin{cases} a = 250 \text{ m} \\ c = 75 \text{ m} \\ \alpha = 55^0\,40'\,20'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 235, $ABCD$ das gegebene gerade Trapez, so besteht nach der Erkl. 404 die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Ferner ergeben sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BHC die Relationen:

$$\cos\alpha = \frac{a-b}{2} : c$$

und

$$\sin\alpha = h : c$$

Aus der ersten dieser Relationen erhält man:

$$2c \cdot \cos\alpha = a - b$$

oder

$$\text{b)} \ldots b = a - 2c \cdot \cos\alpha$$

und aus der zweiten jener Relationen erhält man:

$$\text{c)} \ldots h = c \cdot \sin\alpha$$

Substituiert man die Werte für b und h aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a), so erhält man:

$$F = \frac{a + a - 2c \cdot \cos\alpha}{2} \cdot c \cdot \sin\alpha$$

oder

$$\text{A)} \ldots\ldots F = (a - c \cdot \cos\alpha) \cdot c \sin\alpha$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 703. Man soll aus dem Flächeninhalt $F = 1200$ qm eines geraden Trapezes, dem Winkel $\alpha = 70^0\,40'\,32''$ und der grösseren Grundlinie $a = 60{,}5$ m die nicht gegebenen Seiten des Trapezes berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} F = 1200 \text{ qm} \\ \alpha = 70^0\,40'\,32'' \\ a = 60{,}5 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man stelle analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 700 gesagt, eine Relation zwischen F, a, α und b auf; man wird, wie in jener Andeutung gezeigt, die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

erhalten, aus welcher man die nicht bekannte Seite b berechnen kann; oder: man stelle, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 702 gesagt, eine Relation zwischen F, a, α und c auf; man wird, wie in jener Andeutung gezeigt, die Relation:

$$\text{b)} \ldots F = (a - c \cdot \cos\alpha) \cdot c \sin\alpha$$

erhalten, aus welcher man die nicht bekannte Seite c berechnen kann, u. s. f.

Aufgabe 704. Die beiden parallelen Seiten eines Antiparallelogramms sind bezw. $a = 85{,}52$ m und $b = 17{,}9$ m; eine der nicht parallelen Seiten ist $c = 22{,}3$ m. Man soll hieraus die Winkel und den Inhalt des Antiparallelogramms berechnen.

. . .

Gegeben: $\begin{cases} a = 85{,}52 \text{ m} \\ b = 17{,}9 \text{ m} \\ c = 22{,}3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man verfahre, wie in der Andeutung zur Aufgabe 700 unter a) gesagt ist. Wie dort gezeigt, erhält man für den gesuchten Winkel α:

$$\text{A)} \ldots \cos\alpha = \frac{a - b}{2c}$$

und für den gesuchten Inhalt F:

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot \sqrt{c^2 - \left(\frac{a - b}{2}\right)^2}$$

oder

$$F = \frac{a + b}{2} \cdot \sqrt{\frac{(2c)^2 - (a - b)^2}{2^2}}$$

mithin

$$\text{A)} \ldots F = \frac{a + b}{4} \sqrt{(2c + a - b)(2c - a + b)}$$

und nach diesen beiden Gleichungen A) und B) kann man in Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte α und F berechnen.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

298. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 297. — Seite 449—464.
Mit 13 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 297. — Seite 449—464. Mit 13 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das Antiparallelogramm, Fortsetzung. — Aufgaben über das doppelt-gleichschenklige Trapez oder das Deltoid.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266 kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst Angabe und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

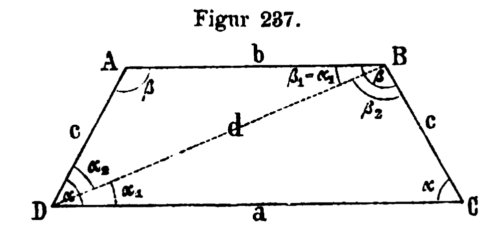
Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 705. Die Diagonale eines gleichschenkligen Trapezes ist $d = 22$ m, der grössere der Winkel, welche diese Diagonale mit den nicht parallelen Seiten bildet, ist $\beta_2 = 62^0\,49'\,13{,}5''$. Wie gross sind die parallelen Seiten und die Winkel dieses Trapezes, wenn eine der nicht parallelen Seiten $c = 10{,}8$ m misst?

Figur 237.



Gegeben: $\begin{cases} d = 22\text{ m} \\ \beta_2 = 62^0\,49'\,13{,}5'' \\ c = 10{,}8\text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 237, $ABCD$ das gleichschenklige Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck BCD die Seiten d und c und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel β_2; wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man somit aus diesem Dreieck die Seite a und den Winkel α berechnen. Da man ferner von dem Dreieck ABD die beiden Seiten d und c, von welchen gemäss der Aufgabe $d > c$ ist, und den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite d gegenüberliegenden Winkel β kennt, indem derselbe $= 2R - \alpha$ ist, so kann man aus diesem Dreieck, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt, die Seite b berechnen.

Aufgabe 706. Zwei aneinanderstossende Seiten eines Antiparallelogramms messen $a = 250{,}8$ und $c = 156{,}6$ dm und eine der Diagonalen ist $d = 201{,}5$ dm lang. Man soll die nicht gegebene Seite und die Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 250{,}8\text{ dm} \\ c = 165{,}6\text{ dm} \\ d = 201{,}5\text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Fig. 237, $ABCD$ das Antiparallelogramm dar, in welchem die drei Stücke a, c und d gleich den gegebenen sind, so kennt man von dem Dreieck BCD die drei Seiten; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, den Winkel α dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach α berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABD die Seiten d und c, von welchen, nach den in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerten d grösser als c ist, und den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite d gegenüberliegenden Winkel β, derselbe ist $= 2R - \alpha$; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die gesuchte Seite b berechnen.

Aufgabe 707. In einem Antiparallelogramm ist die kleinere der Grundlinien $b = 205{,}36$ dm, eine Diagonale $d = 340$ dm und ein Winkel $\beta = 105^0\,30'\,26{,}4''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und den Inhalt dieses Antiparallelogramms berechnen.

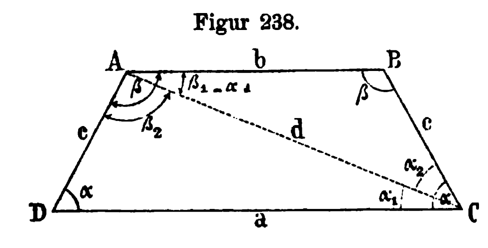
Gegeben: $\begin{cases} b = 205{,}36\text{ dm} \\ d = 340\text{ dm} \\ \beta = 105^0\,30'\,26{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 238, $ABCD$ das Antiparallelogramm, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ABC die zwei Seiten b und d und den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite d gegenüberliegenden Winkel β; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Seite c dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach c berechnet, so kennt man von dem anderen Dreieck ACD die berechnete Seite c, die Seite AC $(= d)$ und den Winkel α, derselbe ist nämlich $= 2R - \beta$; man kann so

mit, wie in den Auflösungen der Aufgaben 119 und 120 gezeigt wurde, die Seite a dieses Dreiecks berechnen. Den gesuchten Inhalt F kann man dann im weiteren mittels einer der in den Andeutungen zu den Aufgaben 700 und 702 aufgestellten Inhaltsformeln berechnen.

Aufgabe 708. Eine der Diagonalen eines gleichschenkligen Trapezes ist $d = 50$ dm lang und die Winkel, welche diese Diagonale an ihren Endpunkten mit den nicht parallelen Seiten bildet, sind bezw. $\alpha_2 = 28^0\,30'\,22{,}6''$ und $\beta_2 = 69^0\,0'\,30''$; man soll hieraus die Seiten und den Inhalt des Trapezes berechnen.

Figur 238.



Gegeben: $\begin{cases} d = 50 \text{ dm} \\ \alpha_2 = 28^0\,30'\,22{,}6'' \\ \beta_2 = 69^0\,0'\,30'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 238, $ABCD$ das gerade Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so kennt man von dem Dreieck ACD die Seite d, den Winkel β_2 und den Winkel α, indem d und β_2 gemäss der Aufgabe direkt gegeben sind und indem sich der Winkel α aus den gegebenen Winkeln α_2 und β_2 wie folgt berechnen lässt:

Da nach der Erkl. 402:

a) . . . $\alpha + \beta = 2R$

und da, siehe Fig. 238:

b) . . . $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

und

c) . . . $\beta = \beta_1 + \beta_2$

ist, so ist auch:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_1 + \beta_2 = 2R$$

oder, in Rücksicht, dass die Winkel α_1 und β_1 als innere Wechselwinkel an Parallelen einander gleich sind, dass also:

$$\beta_1 = \alpha_1$$

gesetzt werden kann:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \beta_2 = 2R$$

und hieraus erhält man:

$$2\alpha_1 = 2R - (\alpha_2 + \beta_2)$$

oder

d) . . . $\alpha_1 = R - \dfrac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$

Aus den Gleichungen b) und d) erhält man also:

$$\alpha = R - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} + \alpha_2$$

oder

e) . . . $\alpha = R - \dfrac{\beta_2 - \alpha_2}{2}$

wonach der Winkel α aus den gegebenen Winkeln α_2 und β_2 leicht bestimmt werden kann.

Wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, kann man somit die Seiten a und c des Dreiecks ACD berechnen. In ganz derselben Weise kann man die Seite b des Dreiecks ABC berechnen. Sind hiernach die Seiten a und b berechnet, so kann man den Inhalt unter anderem mittels der in der Andeutung zur Aufgabe 700 aufgestellten Formel

$$F = \frac{a^2 - b^2}{4} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

berechnen. Man kann auch den Inhalt F berechnen, indem man mittels der in der

Auflösung der Aufgabe 117 aufgestellten Formel 95, nach welcher man für den Inhalt f_1 des Dreiecks ACD:

$$f_1 = \frac{d^2 \cdot \sin(\alpha + \beta_2) \cdot \sin\beta_2}{2 \sin\alpha}$$

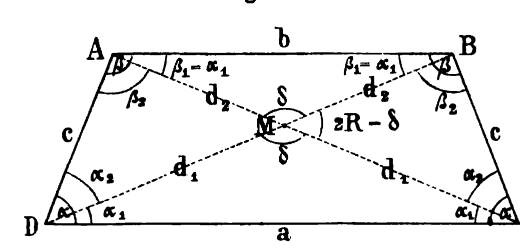
und für den Inhalt f_2 des Dreiecks ABC:

$$f_2 = \frac{d^2 \cdot \sin(\beta + \alpha_2) \cdot \sin\alpha_2}{2 \sin\beta}$$

erhält, die Inhalte f_1 und f_2 dieser Dreiecke berechnet und diese Inhalte addiert.

Aufgabe 709. In einem Antiparallelogramm beträgt der von den Diagonalen eingeschlossene Winkel $\delta = 122^0\,40'\,30''$ und die Abschnitte der Diagonalen sind $d_1 = 18$ m und $d_2 = 10$ m. Man soll die Seiten, die Winkel und den Inhalt berechnen.

Figur 239.



Erkl. 405. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die beiden Diagonalen eines **geraden** oder **gleichschenkligen** Trapezes, eines sog. Antiparallelogramms, zerlegen das Trapez in zwei ähnliche gleichschenklige Dreiecke und in zwei kongruente Dreiecke."

In dem durch die Figur 239 dargestellten geraden Trapez sind die beiden Dreiecke ABM und DCM gleichschenklig, da die in der Figur durch die gleichen Buchstaben α_1 und β_1 bezeichneten Winkel bezw. einander gleich sind, was sich aus der Kongruenz der Dreiecke ACD und BCD, bezw. der Dreiecke ABD und CBA ergibt; ferner sind diese Dreiecke auch ähnlich, da die Winkel α_1 gleich den Winkeln β_1 sind.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} d_1 = 18\,\text{m} \\ d_2 = 10\,\text{m} \\ \delta = 122^0\,40'\,30'' \end{array}\right\}$ (siehe Fig. 239)

Andeutung. Ist, siehe Fig. 239, $ABCD$ das gegebene Antiparallelogramm, so kennt man gemäss der Aufgabe von jedem der **gleichschenkligen** Dreiecke ABM und DCM (siehe Erkl. 405) die Schenkel d_2 bezw. d_1 und den Scheitelwinkel δ; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 65 gezeigt, die Grundlinien b und a dieser Dreiecke berechnen. Da man ferner von jedem der kongruenten Dreiecke AMD und BMC die zwei Seiten d_1 und d_2 und den von denselben eingeschlossenen Winkel kennt, derselbe ist $= 2R - \delta$, so kann man aus einem dieser Dreiecke, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, die gesuchte Seite c berechnen.

Was nun den gesuchten Inhalt F anbetrifft, so beachte man, dass:

$$F = \triangle MAB + \triangle MBC + \triangle MCD + \triangle MDA$$

ist, dass sich also hiernach und nach der Erkl: 151 die Relation ergibt:

$$F = \frac{d_2 \cdot d_2}{2} \cdot \sin\delta + \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(2R - \delta) + \frac{d_1 \cdot d_1}{2} \cdot \sin\delta + \frac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin(2R - \delta)$$

Reduziert man diese Gleichung und berücksichtigt man, dass:

$$\sin(2R - \delta) = \sin\delta$$

ist, so erhält man:

$$F = \frac{\sin\delta}{2} \cdot [d_2^2 + d_1 \cdot d_2 + d_1^2 + d_1 d_2]$$

oder

$$F = \frac{\sin\delta}{2} \cdot (d_1^2 + 2 \cdot d_1 d_2 + d_2^2)$$

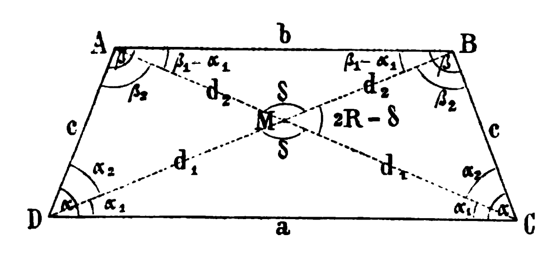
mithin:

A) . . . $F = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)^2 \sin\delta$

mittels welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 710. Die beiden Grundlinien a und b eines Antiparallelogramms sind bezw. 3,66 m und 1,25 m lang, eine Diagonale misst $d = 2{,}84$ m; wie gross sind die nicht parallelen Seiten, die Winkel, und welches ist der Inhalt?

Figur 240.



Gegeben: $\begin{cases} a = 3{,}66 \text{ m} \\ b = 1{,}25 \text{ m} \\ d = 2{,}84 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Fig. 240, $ABCD$ das Antiparallelogramm dar, dessen Grundlinien a und b gleich den gegebenen sind und dessen Diagonale AC oder BD gleich der gegebenen Diagonale d ist, so ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MAB und MCD (siehe Erkl. 405) die Proportion:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{d_1}{d_2} = \frac{a}{b}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{d_1 + d_2}{a + b} = \frac{d_1}{a}$$

und

$$\frac{d_1 + d_2}{a + b} = \frac{d_2}{b}$$

und aus diesen beiden Proportionen ergebe sich in Rücksicht, dass:

$$d_1 + d_2 = d$$

ist, die Gleichungen:

$$\text{b)} \ldots d_1 = \frac{d}{a + b} \cdot a$$

und

$$\text{c)} \ldots d_2 = \frac{d}{a + b} \cdot b$$

nach welchen man zunächst die Abschnitte d_1 und d_2 der Diagonalen berechnen kann. Sind hiernach die Abschnitte d_1 und d_2 berechnet, so kennt man von jedem der Dreiecke MAB und MCD die drei Seiten, und man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt ist, aus einem dieser Dreiecke den Winkel α_1 berechnen. Ist hiernach der Winkel α_1 berechnet, so kennt man von jedem der Dreiecke ABC und BCD zwei Seiten b und d, bezw. a und d und den von denselben eingeschlossenen Winkel α_1 und man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt ist, aus einem dieser Dreiecke die gesuchte Seite c berechnen. Da man ferner mit α_1 auch den Winkel δ kennt, indem:

$$\delta = 2R - 2\alpha_1$$

ist, und da die Abschnitte d_1 und d_2 der Diagonalen bereits berechnet wurden, so kann man den gesuchten Flächeninhalt nach der in der Andeutung zur Aufgabe 709 aufgestellten Formel:

$$F = \frac{1}{2}(d_1 + d_2)^2 \sin \delta$$

oder in Rücksicht, dass:

$$d_1 + d_2 = d$$

ist, nach der Formel:

A) .... $F = \frac{1}{2} d^2 \cdot \sin\delta$

berechnen.

Aufgabe 711. Die beiden Grundlinien a und b eines gleichschenkligen Trapezes sind bezw. 644,5 m und 420,8 m lang und der Winkel, welchen die Grundlinie a mit einer der Diagonalen einschliesst, ist $\alpha_1 = 80^0\ 52'\ 30{,}6''$. Man soll die Winkel und die nicht gegebene Seite dieses Trapezes berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 644{,}5 \text{ m} \\ b = 420{,}8 \text{ m} \\ \alpha_1 = 80^0\ 52'\ 30{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 240, $ABCD$ das gerade Trapez, dessen Grundlinien a und b gleich den gegebenen sind und dessen Diagonale AC mit der Grundlinie a den gegebenen Winkel α_1 bildet, und man zieht die zweite Diagonale BD, so erhält man nach der Erkl. 504 die zwei gleichschenkligen und ähnlichen Dreiecke MAB und MCD. Da man von diesen Dreiecken bezw. die Grundlinien a und b und die Basiswinkel α_1 kennt, indem $\beta_1 = \alpha_1$ ist, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 64 gezeigt wurde, aus jenen Stücken die Abschnitte d_1 und d_2 einer Diagonale des Trapezes und somit auch diese Diagonale d selbst berechnen. Ist hiernach die Diagonale d berechnet, so kennt man z. B. von dem Dreieck ACD die Seiten a und d und den von denselben eingeschlossenen Winkel α_1; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, hieraus die gesuchte Seite c und den Winkel α berechnen.

Aufgabe 712. Die parallelen Seiten a und b eines Antiparallelogramms sind bezw. $= 24{,}08$ und 9,39 m lang, und der Winkel α_2 zwischen einer der Diagonalen und einer der nicht parallelen Seiten ist $6^0\ 14'\ 30{,}2''$. Man soll hieraus die Winkel und die nicht parallelen Seiten berechnen.

Figur 241.

Gegeben: $\begin{cases} a = 24{,}08 \text{ m} \\ b = 9{,}39 \text{ m} \\ \alpha_2 = 6^0\ 14'\ 30{,}2'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 241, $ABCD$ das Antiparallelogramm, in welchem die Grundlinien a und b gleich den gegebenen sind, und in welchem die Diagonale d mit der Seite c den gegebenen Winkel α_2 bildet, so erhält man nach der Sinusregel aus den Dreiecken BCD und ABD bezw. die Relationen:

a) .... $\frac{a}{d} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha}$

und

b) .... $\frac{b}{d} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b), so erhält man:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta_2 \cdot \sin\beta}{\sin\alpha \cdot \sin\alpha_2}$$

oder, in Rücksicht, dass α und β Supplementwinkel sind, dass also:

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

ist:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$$

oder

A) . . . $\sin\beta_2 = \frac{a}{b} \cdot \sin\alpha_2$

nach welcher Gleichung man den Winkel β_2 berechnen kann.

Da ferner in dem Dreieck BCD:

$$\alpha + \alpha_1 + \beta_2 = 2R$$

und da:

$$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$$

mithin auch:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_1 + \beta_2 = 2R$$

ist, so ergibt sich hieraus:

B) . . . $\alpha_1 = R - \frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$ ·

nach welcher Gleichung man den Winkel α_1 berechnen kann. Hat man nach den Gleichungen A) und B) die Winkel β_2 und α_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck BCD die Seite a und die beiden Winkel α_1 und β_2; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seite · berechnen. Den Winkel α findet man mittels der Gleichung:

C) . . . . $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$

Aufgabe 713. In einem geraden Trapez ist die grössere Grundlinie $a = 25$ m, die Höhe h beträgt 8 m und eine der nicht parallelen Seiten ist $c = 9{,}2$ m. Man berechne die andere Grundlinie, die Diagonale, den Inhalt und die Winkel dieses Trapezes.

Gegeben: $\begin{cases} a = 25 \text{ m} \\ c = 9{,}2 \text{ m} \\ h = 8 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Fig. 242, $ABCD$ das gerade Trapez dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht $BG \parallel AD$, so erhält man das gleichschenklige Dreieck BCG, dessen Basis

$\overline{CG} = \overline{DC} - \overline{DG}$ oder $= \overline{DC} - \overline{AB}$ od. $= a - b$

ist. Zwischen der Höhe h, der halben Grundlinie $a - b$ und dem Schenkel c besteht nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Relation:

$$\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = c^2 - h^2$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{a-b}{2} = \sqrt{c^2 - h^2}$$

oder

A) . . . $b = a - 2\sqrt{c^2 - h^2}$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a, c und h gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Seite b berechnen kann.

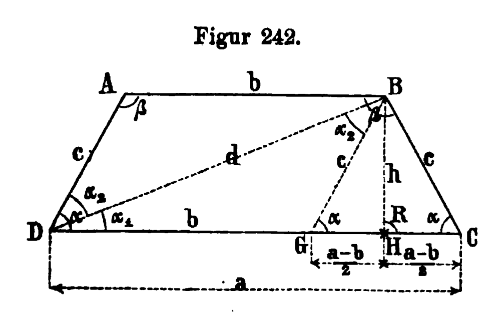
Den Winkel α kann man nach der aus dem rechtwinkligen Dreieck BCH sich ergebenden Relation:

B) . . . . $\sin\alpha = \frac{h}{c}$

berechnen.

Zieht man ferner die Diagonale BD, so kennt man von dem hierdurch entstandenen

Figur 242.



Dreieck BCD die Seiten a und c und den von denselben eingeschlossenen Winkel α; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt ist, aus diesem Dreieck die gesuchte Diagonale d berechnen.

Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F beachte man, dass nach der Erkl. 404 die Relation besteht:

$$F = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Setzt man in derselben den Wert für b aus Gleichung A), so erhält man die Gleichung:

$$F = \frac{a + a - 2\sqrt{c^2 - h^2}}{2} \cdot h$$

oder

C) . . . . $F = (a - \sqrt{c^2 - h^2}) \cdot h$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken a, c und h berechnen kann.

Aufgabe 714. Die Höhe eines Antiparallelogramms ist $h = 168{,}4$ m, der Flächeninhalt desselben beträgt $F = 88245$ qm und eine der nicht parallelen Seiten ist $c = 218{,}9$ m; wie gross sind die Winkel und die nicht gegebenen Seiten des Antiparallelogramms.

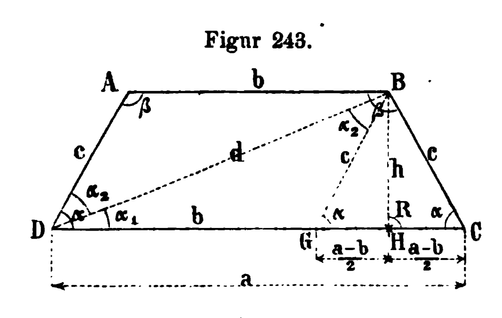
Gegeben: $\begin{cases} F = 88245 \text{ qm} \\ h = 168{,}4 \text{ m} \\ c = 218{,}9 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Man benutze zur Berechnung der Grundlinie a die in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 713 aufgestellte Gleichung C):

$$F = (a - \sqrt{c^2 - h^2}) \cdot h$$

Aufgabe 715. Die Höhe eines Antiparallelogramms ist $h = 20{,}4$ dm, die kleinere der Grundlinien ist $b = 36{,}85$ dm und der Winkel, welchen eine der Diagonalen mit einer der nicht parallelen Seiten bildet, ist $\alpha_2 = 7^0\, 18'\, 10{,}4''$; man berechne hieraus die nicht bekannten Seiten und die Winkel des Antiparallelogramms.

Figur 243.



Gegeben: $\begin{cases} h = 20{,}4 \text{ dm} \\ b = 36{,}85 \text{ dm} \\ \alpha_2 = 7^0\, 18'\, 10{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Fig. 243, $ABCD$ das Antiparallelogramm dar, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man zieht $BG \parallel AD$, so erhält man das $\parallel$ gr $ABGD$ und das gleichschenklige Dreieck BCG. Das $\parallel$ gr $ABGD$ wird durch die Diagonale BD in zwei kongruente Dreiecke zerlegt, von jedem dieser Dreiecke kennt man eine Seite, den gegenüberliegenden Winkel und die zu dieser Seite gehörige Höhe, so ist z. B. in dem Dreieck BGD die Seite $DG = b$, der derselben gegenüberliegende Winkel $DBG = \sphericalangle BDA$ oder $= \alpha_2$ und die zu jener Seite DG gehörige Höhe BH ist $= h$; man kann somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gesagt, aus diesen Stücken die Seiten c und d und die Winkel α_1 und β berechnen u. s. f.

Aufgabe 716. Von den beiden Grundlinien eines Antiparallelogramms ist die Grundlinie a um $D = 1{,}65$ m grösser als die Grundlinie b. ein Winkel desselben ist $\alpha = 74^0\,36'\,9{,}3''$ und eine Diagonale misst $d = 20{,}2$ m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten, und welches ist der Inhalt des Antiparallelogramms?

Figur 244.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = D = 1{,}65\text{ m} \\ \alpha = 74^0\,36'\,9{,}3'' \\ d = 20{,}2\text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Fig. 244, $ABCD$ das Antiparallelogramm dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so ergeben sich nach der Sinusregel aus den Dreiecken BCD und ABD bezw. die Relationen:

$$\text{a)} \ldots . \frac{a}{d} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha}$$

und

$$\text{b)} \ldots . \frac{b}{d} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin\beta}$$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b) und reduziert man gleichzeitig, indem man auch berücksichtigt, dass α und β Supplementwinkel sind, dass also $\sin\alpha = \sin\beta$ ist, so erhält man die Proportion:

$$\text{c)} \ldots . \frac{a}{b} = \frac{\sin\beta_2}{\sin\alpha_2}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a-b}{a} = \frac{\sin\beta_2 - \sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\text{d)} \ldots . a - b = D$$

ist:

$$\text{e)} \ldots . \frac{D}{a} = \frac{\sin\beta_2 - \sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

Um hieraus die unbekannte Seite a zunächst zu eliminieren, substituiere man für a den aus Gleichung a) sich ergebenden Wert:

$$\text{f)} \ldots . a = \frac{d\cdot\sin\beta_2}{\sin\alpha}$$

Man erhält hiernach:

$$\frac{D\cdot\sin\alpha}{d\cdot\sin\beta_2} = \frac{\sin\beta_2 - \sin\alpha_2}{\sin\beta_2}$$

oder, wenn man reduziert und nach der Erkl. 116 für:

$$\sin\beta_2 - \sin\alpha_2 = 2\cdot\sin\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_2+\alpha_2}{2}$$

setzt:

$$\text{g)} \ldots \frac{D}{d}\cdot\sin\alpha = 2\sin\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}\cdot\cos\frac{\beta_2-\alpha_2}{2}$$

Berücksichtigt man ferner, dass in dem Dreieck BCD die Relation besteht:

$$\alpha + \alpha_1 + \beta_2 = 2R$$

und dass:

$$\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$$

ist, dass sich also aus diesen Gleichungen die Beziehung:

$$\alpha + \alpha - \alpha_2 + \beta_2 = 2R$$

ergibt, wonach:

$$\beta_2 - \alpha_2 = 2R - 2\alpha$$

oder

$$\text{h)} \; \ldots \; \frac{\beta_2 - \alpha_2}{2} = R - \alpha$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung g):

$$\frac{D}{d} \cdot \sin\alpha = 2 \cdot \sin(R - \alpha) \cdot \cos\frac{\beta_2 + \alpha_2}{2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\cos\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \frac{D}{2d} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin(R - \alpha)}$$

oder nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \frac{D}{2d} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

mithin:

$$\text{A)} \; \ldots \; \cos\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2} = \frac{D}{2d} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

nach welcher Gleichung man $\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$ berechnen kann. Ist hiernach $\frac{\alpha_2 + \beta_2}{2}$ berechnet, so kann man mittels dieses berechneten Werts und mittels des nach Gleichung h) für $\frac{\beta_2 - \alpha_2}{2}$ bekannten Werts die Winkel α_2 und β_2 berechnen. Sind einmal diese Winkel berechnet, so bietet die Berechnung der gesuchten Seiten a, b und c aus der Diagonale d und den Winkeln α, β, α_2 und β_2 keine Schwierigkeiten mehr.

Aufgabe 717. Die Summe der beiden parallelen Seiten a und b eines Antiparallelogramms ist $S = 60{,}88$ m, ein Winkel desselben ist $\alpha = 98^0\,60'\,20{,}6''$ und eine Diagonale misst $d = 33{,}4$ m. Man soll die Seiten und Winkel berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a + b = S = 60{,}88 \text{ m} \\ \alpha = 98^0\,60'\,20{,}6'' \\ d = 33{,}4 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 716.

Aufgabe 718. Die beiden parallelen Seiten a und b eines gleichschenkligen Trapezes differieren um $D = 9{,}8$ m; die Höhe h desselben misst 27,5 m und eine Diagonale ist $d = 68{,}34$ m lang; wie gross sind die Seiten, die Winkel und der Inhalt dieses Trapezes?

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - b = D = 9{,}8 \text{ m} \\ h = 27{,}5 \text{ m} \\ d = 68{,}34 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 243, $ABCD$ das Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man zieht $BG \parallel AD$, so erhält man das gleichschenklige Dreieck BCG, dessen Basis $CG = a - b$ und dessen Höhe $BH = h$ ist. Aus dem rechtwinkligen Dreieck BCH ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h}{\frac{a - b}{2}}$$

oder:

$$\text{A)} \; \ldots \; \sin\alpha = \frac{2h}{a - b}$$

und nach dieser Gleichung kann man zunächst den Winkel α berechnen. Ist hiernach α berechnet, so kennt man von dem Trapez $a - b$, d und α und man kann somit weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 716 gesagt wurde.

Aufgabe 719. Die beiden Grundlinien a und b eines Antiparallelogramms, von welchen $a > b$ ist, differieren um $D = 8{,}44$ m; die Summe der Inhalte der Quadrate, welche man sich über jenen Grundlinien konstruiert denken kann, ist $S^2 = 136{,}664$ qm und eine der nicht parallelen Seiten c ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen den beiden Grundlinien a und b. Man soll den Inhalt und die Diagonalen berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = D = 8{,}44 \text{ m} \\ a^2 + b^2 = S^2 = 136{,}664 \text{ qm} \\ a : c = c : b \end{cases}$

Andeutung. Aus den durch die Aufgabe direkt gegebenen drei Gleichungen:

a) . . . $a - b = D$

b) . . . $a^2 + b^2 = S^2$

und

c) . . . $a : c = c : b$

welche die drei Unbekannten a, b und c enthalten, kann man jede dieser Unbekannten berechnen. Hat man hiernach die Seiten a, b und c des Antiparallelogramms berechnet, so kann man im weitern verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 704 gesagt wurde.

Aufgabe 720. Der Flächeninhalt eines Antiparallelogramms ist $F = 40{,}6$ qm, die Summe der Inhalte der Quadrate über den beiden parallelen Seiten a und b ist $S^2 = 66$ qm, und der Flächeninhalt des Dreiecks, welches den Unterschied der beiden parallelen Seiten zur Basis und die Höhe des Trapezes zur Höhe hat, ist $f = 4{,}8$ qm. Man berechne die Seiten und Winkel des Trapezes.

Gegeben: $\begin{cases} F = 40{,}6 \text{ qm} \\ a^2 + b^2 = S^2 = 66 \text{ qm} \\ \frac{a - b}{2} \cdot h = f = 4{,}8 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 243, $ABCD$ das Antiparallelogramm dar, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, so bestehen gemäss der Aufgabe und in Rücksicht der Erkl. 404 und 34 die Relationen:

a) . . . . $\frac{a + b}{2} \cdot h = F$

b) . . . . $a^2 + b^2 = S^2$

und

c) . . . . $\frac{a - b}{2} \cdot h = f$

welche die drei Unbekannten a, b und h enthalten, und aus welchen man jede dieser Unbekannten berechnen kann. Sind hiernach diese Grössen a, b und h berechnet, so kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck BHC mittels der für h und $\frac{a - b}{2}$ gefundenen Werte den Winkel α und die Seite c berechnen.

Anmerkung 27. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung von Trapezen gefordert wird, sind noch in späteren Abschnitten enthalten.

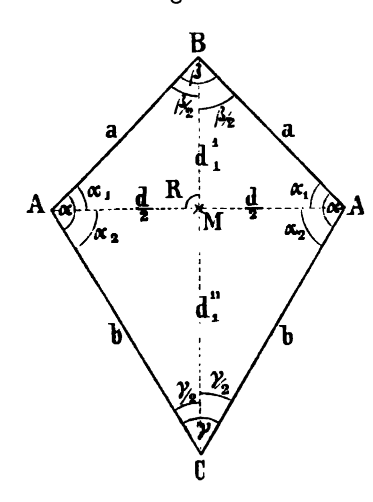
f) Aufgaben über das doppelt-gleichschenklige Viereck oder das Deltoid.

Anmerkung 28. Da, wie in den Andeutungen zu nachstehenden Aufgaben gezeigt wird, die Berechnung eines doppelt-gleichschenkligen Vierecks, eines sog. Deltoids (siehe Erkl. 406) dadurch erfolgen kann, dass man dasselbe durch seine Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und da nach den Erkl. 407—410 die Diagonale, welche die Endpunkte zweier gleichen Seiten verbindet, das Deltoid in zwei gleichschenklige Dreiecke, die Diagonale, welche die Endpunkte zweier ungleichen Seiten des Deltoids verbindet, dasselbe in zwei kongruente schiefwinklige Dreiecke zerlegt, und da ferner die beiden Diagonalen das Deltoid in vier rechtwinklige Dreiecke zerlegen, so ergibt sich hieraus, dass sich die Berechnung eines Deltoids an die Berechnung des rechtwinkligen, des gleichschenkligen und auch an die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks anschliesst.

Aufgabe 721. Die Hälfte derjenigen Diagonale d eines Deltoids, welche durch die andere Diagonale d_1 halbiert wird, misst zusammen mit einer Seite a des Deltoids $S =$ 1008 m, der Winkel, welchen diese Seite a mit der ihr gleichen Seite a bildet, ist $\beta = 74^0\, 23'\, 10{,}1''$ und die andere Diagonale d_1 ist 2450 m lang. Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten, Winkel, sowie den Inhalt des Deltoids berechnen.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} \frac{d}{2} + a = S = 1008\,\text{m} \\ \beta = 74^0\, 23'\, 10{,}1'' \\ d_1 = 2450\,\text{m} \end{array}\right.$

Figur 245.



Erkl. 406. Ein Deltoid kann man wie folgt definieren:

„Ein Deltoid ist ein doppelt-gleichschenkliges Viereck, d. i. ein solches Viereck, in welchem zwei aneinander stossende Seiten gleich und auch die beiden andern Seiten einander gleich sind.“

Ueber die Eigenschaften eines Deltoids siehe die Erkl. 407 bis 410.

Erkl. 407. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Jedes Deltoid wird durch die Diagonale, welche diejenigen Ecken des Deltoids verbindet, in welchen je zwei ungleiche Seiten zusammenstossen, in zwei gleichschenklige Dreiecke zerlegt.“

Nach diesem Satz sind die Dreiecke ABA und ACA in der Fig. 245 gleichschenklige Dreiecke.

Andeutung. Ist, siehe Fig. 245, $ABAC$ das Deltoid, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck ABM, siehe die Erkl. 407—410, gemäss der Aufgabe die Summe der Kathete $AM \left(= \frac{d}{2}\right)$ und der Hypotenuse $AB\,(= a)$, und den Winkel $ABM \left(= \frac{\beta}{2}\right)$; wie in der Andeutung zur Aufgabe 211 gesagt, kann man somit aus diesem Dreieck die Seite a berechnen. Man erhält nämlich aus dem rechtwinkligen Dreieck ABM die Relation:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \frac{d}{2} : a$$

und wenn man hierin gemäss der Aufgabe

$$\frac{d}{2} + a = S$$

also

$$\text{b)} \ldots \frac{d}{2} = S - a$$

setzt:

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{S-a}{a}$$

oder:

$$a \sin\frac{\beta}{2} = S - a$$

$$a + a\sin\frac{\beta}{2} = S$$

$$a\left(1 + \sin\frac{\beta}{2}\right) = S$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots\ldots a = \frac{S}{1 + \sin\frac{\beta}{2}}$$

nach welcher Gleichung die Seite a des Deltoids berechnet werden kann. Hat man

Erkl. 408. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Deltoid sind die beiden Winkel, welche von zwei ungleichen Seiten eingeschlossen werden, einander gleich.“

Nach diesem Satz sind die Winkel BAC in der Figur 245 einander gleich, wie in dieser Figur durch den Buchstaben α angedeutet ist.

Erkl. 409. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Jedes Deltoid wird durch die Diagonale, welche diejenigen Ecken verbindet, in welchen je zwei gleiche Seiten zusammenstossen, in zwei kongruente schiefwinklige Dreiecke zerlegt.

Nach diesem Satz sind die Dreiecke ABC in der Figur 245 kongruente schiefwinklige Dreiecke.

Erkl. 410. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Diagonale eines Deltoids, welche diejenigen Ecken verbindet, in welchen je zwei gleiche Seiten zusammenstossen, steht senkrecht auf der andern Diagonale, halbiert letztere und halbiert die Winkel, durch welche sie geht; sie zerlegt somit jedes der gleichschenkligen Dreiecke, in welche das Deltoid durch die andere Diagonale geteilt wird, in zwei kongruente rechtwinklige Dreiecke.“

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

hiernach die Seite a berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die beiden Seiten AB $(= a)$ und BC $(= d_1)$ und den von beiden eingeschlossenen Winkel $\frac{\beta}{2}$; man kann somit wie in der Auflösung der Aufgabe 11.. gezeigt wurde, aus diesem Dreieck die gesuchte Seite b und den gesuchten Winkel $\frac{\gamma}{2}$ berechnen, und schliesslich kann man den Winkel α mittels der Relation:

$$\alpha + \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} = 2R$$

nach welcher:

$$\alpha = 2R - \frac{\beta + \gamma}{2}$$

ist, berechnen.

Aufgabe 722. Eine Seite eines Deltoids ist $a = 40{,}5$ m, die Verbindungslinie der Mitte dieser Seite mit der Mitte der ihr gleichen Seite ist $f = 32{,}4$ m und die Verbindungslinie der Mitte jener Seite a mit der Mitte der ihr anstossenden ungleichen Seite ist $g = 64{,}2$ m; wie gross sind die Seiten und die Winkel, und welches ist der Inhalt dieses Deltoids?

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 40{,}5 \text{ m} \\ f = 32{,}4 \text{ m} \\ g = 64{,}2 \text{ m} \end{array}\right\}$ (siehe Figur 246)

Andeutung. Ist, siehe Fig. 246, $ABAC$ das Deltoid, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und beachtet man, dass die Verbindungslinie f der Mitten der beiden gleichen Seiten a nach dem in der Erkl. 30.. angeführten planimetrischen Satz gleich der halben Diagonale AA ist, dass also:

$$\text{a)} \;.\;.\;.\;.\; \frac{d}{2} = f$$

ist, und dass aus demselben Grund die Verbindungslinie g der Mitten der beiden ungleichen Seiten a und c gleich der halben Diagonale BC $(= d_1)$ ist, dass also:

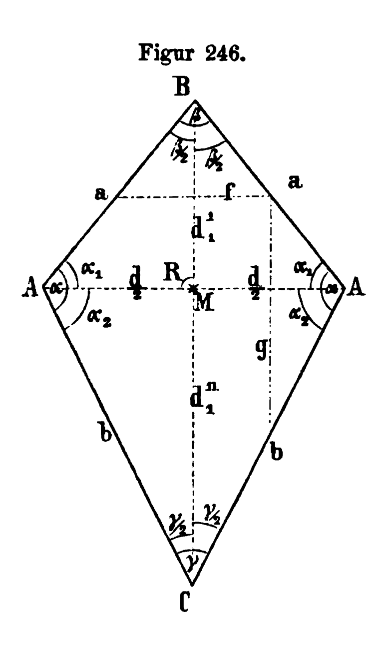
$$\frac{d_1}{2} = g$$

oder

$$\text{b)} \;.\;.\;.\;.\;.\; d_1 = 2g$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass man von dem Deltoid die Seite a und die Diagonalen

Figur 246.



und d_1 bezw. deren Hälften $\frac{d}{2}$ und $\frac{d_1}{2}$ kennt. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABM kann man somit auf leichte Weise die Winkel $\frac{\beta}{2}$ und α_1 sowie den Abschnitt $BM = d_1'$ der Diagonale d_1 berechnen; dann kann man, da die ganze Diagonale d_1 nach Gleichung b) bekannt ist, den Abschnitt $CM = d_1''$ derselben berechnen und schliesslich kann man aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC die Seite b und die Winkel α_2 und γ_2 berechnen. Was den gesuchten Inhalt F des Deltoids anbetrifft, so beachte man, dass:

$$F = \triangle ABA + \triangle ACA$$

oder

$$F = \frac{d \cdot d_1'}{2} + \frac{d \cdot d_1''}{2}$$

$$F = \frac{d}{2}(d_1' + d_1'')$$

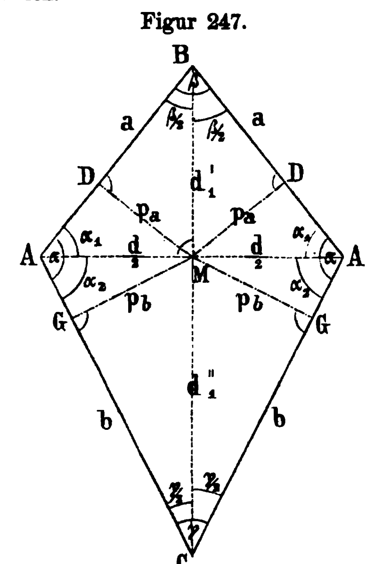
mithin:

$$\text{A)} \quad \ldots \quad F = \frac{d \cdot d_1}{2}$$

ist, nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 723. Von einem Deltoid kennt man die Seite $a = 26{,}432$ dm und die von dem Durchschnittspunkt M der beiden Diagonalen auf die Seiten gefällten Perpendikel $p_a = 12{,}2$ dm und $p_b = 14{,}42$ dm; man soll hieraus die Seiten und Winkel des Deltoids berechnen.

Figur 247.

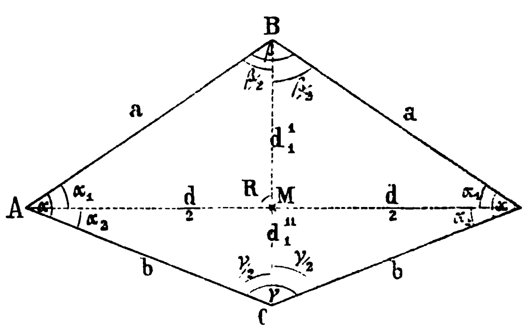


Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 26{,}432 \text{ dm} \\ p_a = 12{,}2 \text{ dm} \\ p_b = 14{,}42 \text{ dm} \end{array}\right\}$ (siehe Figur 247)

Andeutung. Stellt, siehe Figur 247, $ABAC$ das Deltoid dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck ABM gemäss der Aufgabe die Hypotenuse AB ($= a$) und die zu derselben gehörige Höhe MD ($= p_a$); man kann somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 181 gesagt wurde, die Kathete $\frac{d}{2}$, sowie die Winkel α_1 und $\frac{\beta}{2}$ dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach $\frac{d}{2}$ berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck AMC die Kathete $AM\left(= \frac{d}{2}\right)$ und die zur Hypotenuse AC gehörige Höhe MG ($= p_b$), und man kann somit wie in der Andeutung zur Aufgabe 184 gesagt wurde, die Hypotenuse b und die Winkel α_2 und $\frac{\gamma}{2}$ dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 724. In einem Deltoid schliessen die beiden grössten Seiten a einen Winkel β von $124^0\,10'\,30{,}2''$ ein; die Seite a ist um $D = 15$ dm grösser als die Hälfte derjenigen Diagonale d, welche die Endpunkte der gleichen Seiten a verbindet, und die Seite b ist um $D_1 = 11{,}5$ dm grösser als die Hälfte jener Diagonale d; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und die Winkel dieses Deltoids?

Figur 248.



$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{aligned} \beta &= 124^0\,10'\,30{,}2'' \\ a - \frac{d}{2} &= D = 15 \text{ dm} \\ b - \frac{d}{2} &= D_1 = 11{,}5 \text{ dm} \end{aligned}\right.$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 248, $ABA'C$ das Deltoid, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem rechtwinkligen Dreieck ABM den Winkel $\frac{\beta}{2}$ und die Differenz der Hypotenuse AB $(= a)$ und der Kathete AM $\left(= \frac{d}{2}\right)$, man kann somit, analog, wie in der Andeutung zur Aufgabe 212 gesagt, aus jenen Stücken die Hypotenuse AB $(= a)$ und die Katheten BM $(= d_1')$ und $AM = \frac{d}{2}$ dieses Dreiecks berechnen.

Ist hiernach $\frac{d}{2}$ berechnet, so kann man mittels der in der Aufgabe gegebenen Relation:

$$b - \frac{d}{2} = D_1$$

leicht die Seite b berechnen und kann dann im weitern aus b und $\frac{d}{2}$ die Winkel $\frac{\gamma}{2}$ und α_2 des rechtwinkligen Dreiecks AMC bestimmen.

Aufgabe 725. Die Summe der beiden Diagonalen d und d_1 eines Deltoids ist $S = 240$ m, der Winkel, welchen die zwei gleichen Seiten a einschliessen, ist $\beta = 104^0\,26'\,12{,}6''$ und eine der beiden andern gleichen Seiten b ist ebenfalls $= 240$ m. Man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Deltoids berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{aligned} d + d_1 &= S = 240 \text{ m} \\ \beta &= 104^0\,26'\,12{,}6'' \\ b &= 240 \text{ m} \end{aligned}\right.$$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$\text{a)} \;\ldots\; d + d_1 = S$$

oder in Rücksicht, dass, siehe Figur 248, die Diagonale d_1 durch die Diagonale d in die zwei Abschnitte d_1' und d_1'' zerlegt wird, die Relation:

$$\text{b)} \;\ldots\; d + d_1' + d_1'' = S$$

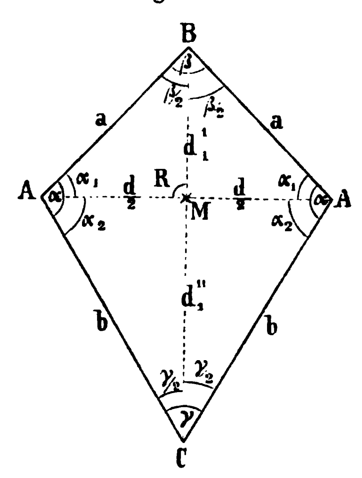
Setzt man hierin nach den aus den rechtwinkligen Dreiecken ABM und AMC sich ergebenden Relationen:

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = d_1' : \frac{d}{2}$$

und

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = d_1'' : \frac{d}{2}$$

Figur 249.



c) . . . für: $d_1' = \frac{d}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\beta}{2}$

und

d) . . . für: $d_1'' = \frac{d}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\gamma}{2}$

so erhält man die Gleichung:

e) . . . $d + \frac{d}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\beta}{2} + \frac{d}{2} \cdot \text{ctg}\frac{\gamma}{2} = S$

Setzt man ferner in dieser Gleichung nach der aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC sich ergebenden Relation:

f) . . . $\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{d}{2} : b$

für:

g) . . . . $\frac{d}{2} = b \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

so geht jene Gleichung e) über in:

h) . . . $2b\sin\frac{\gamma}{2} + b\sin\frac{\gamma}{2}\text{ctg}\frac{\beta}{2} + b\sin\frac{\gamma}{2}\text{ctg}\frac{\gamma}{2} = S$

Erkl. 411. Die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung h):

$$2b\sin\frac{\gamma}{2} + b\sin\frac{\gamma}{2}\text{ctg}\frac{\beta}{2} + b\sin\frac{\gamma}{2}\text{ctg}\frac{\gamma}{2} = S$$

kann man wie folgt umformen:

$$2\sin\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\gamma}{2}\text{ctg}\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{S}{b}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}\left(2 + \text{ctg}\frac{\beta}{2}\right) + \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{b}$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 140:

a) . . . $2 + \text{ctg}\frac{\beta}{2} = \text{tg}\,\psi$

so erhält man die Gleichung:

$$\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \text{tg}\,\psi + \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{b}$$

$$\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\psi}{\cos\psi} + \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{S}{b}$$

oder:

$$\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\psi + \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\psi = \frac{S}{b}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf den Ausdruck links noch die in der Erkl. 225 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben $\alpha = \frac{\gamma}{2}$ und $\beta = \psi$ setzt, so erhält man schliesslich die Gleichung:

b) . . . $\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right) = \frac{S}{b}$

in welcher der Winkel ψ ein solcher Winkel ist, welcher der vorstehenden Gleichung a) genügen muss.

und man hat eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel $\frac{\gamma}{2}$ vorkommt. Formt man diese Gleichung um, so erhält man nach der Erkl. 411:

A) . . . . $\cos\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right) = \frac{S}{b}$

in welcher Gleichung der Winkel ψ ein solcher Winkel sein muss, welcher der in der Erkl. 411 aufgestellten Gleichung a):

A₁) . . . $\text{tg}\,\psi = 2 + \text{ctg}\frac{\beta}{2}$

genügen muss. Nach Gleichung A_1) kann man in Rücksicht des für β gegebenen Zahlenwerts den Hülfswinkel ψ berechnen, dann kann man nach Gleichung A) den Winkel $\left(\frac{\gamma}{2} - \psi\right)$ berechnen und hiernach leicht den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ selbst bestimmen.

Ist hiernach der Winkel $\frac{\gamma}{2}$ berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite b und die beiden Winkel $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ und man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seite a dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Seite des Deltoids, berechnen.

Aufgabe 726. Das Verhältnis der beiden Diagonalen d und d_1 eines Deltoids ist $= 2:5$; der Winkel, welchen die gleichen Seiten a bilden, ist $\beta = 40^0\,26'\,10{,}6''$ und eine der Seiten a misst 14,8 dm; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Deltoids berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} d : d_1 = 2 : 5 \\ \beta = 40^0\,26'\,10{,}6'' \\ a = 14{,}8 \text{ dm} \end{array} \right.$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 249, $ABAC$ das Deltoid vor, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man in Rücksicht, dass die Diagonale d_1 senkrecht auf der Diagonale d steht und letztere halbiert, von dem Dreieck ABC die Seite $AB\,(= a)$, den Winkel $ABC \left(= \frac{\beta}{2}\right)$ und das Verhältnis der zur Seite $BC\,(= d_1)$ gehörigen Höhe $AM \left(= \frac{d}{2}\right)$ zu dieser Seite d_1, indem gemäss der Aufgabe:

$$d : d_1 = 2 : 5$$

also:

$$\frac{d}{2} : d_1 = \frac{2}{2} : 5$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \quad \frac{d}{2} : d_1 = 1 : 5$$

ist. Die Seite b und die Winkel α und γ dieses Dreiecks ABC kann man hiernach wie folgt berechnen:

Aus den rechtwinkligen Dreiecken BMA und AMC ergeben sich bezw. die Relationen:

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha) \ldots & d_1' = a \cdot \cos\frac{\beta}{2} \\ \text{und} & \\ \beta) \ldots & d_1'' = b \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \end{array}\right\} \text{(siehe Erkl. 50)}$$

Da nun:

$$\gamma) \ldots \quad d_1 = d_1' + d_1'' \text{ ist,}$$

so erhält man hiernach:

$$\text{b)} \ldots \quad d_1 = a \cdot \cos\frac{\beta}{2} + b \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck ABM die Relation:

$$\text{c)} \ldots \quad \frac{d}{2} = a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

Setzt man die Werte für $\frac{d}{2}$ und d_1 aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a), so erhält man:

$$\text{d)} \ldots \quad \frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{a \cos\frac{\beta}{2} + b \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{5}$$

nämlich eine Gleichung, in welcher noch der unbekannte Winkel γ und die unbekannte Seite b vorkommen. Berücksichtigt man ferner, dass sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC die Relation:

Erkl. 412. Die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

$$\frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{a \cos\frac{\beta}{2} + \frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{5}$$

kann man wie folgt umformen:

$$\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{5}$$

$$5 \sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

$$5 \sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{5 \sin\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \quad \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 5 - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

304. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 298. — Seite 465—480. Mit 14 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 298. — Seite 465—480. Mit 14 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem** Gesamtgebiete **der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten Mathematik** — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale** lebendige Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$\delta) \ldots b = \frac{d}{2} : \sin\frac{\gamma}{2} \text{ (siehe Erkl. 42)}$$

ergibt, und dass in Rücksicht der Gleichung c) hiernach:

$$e) \ldots b = \frac{a \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

ist, so erhält man aus Gleichung d), wenn man in derselben für b den Wert aus Gleichung e) substituiert:

$$\frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{a \cos\frac{\beta}{2} + \frac{a \sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}} = \frac{1}{5}$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel γ vorkommt. Formt man diese Gleichung um, wie in der Erkl. 412 gezeigt, so erhält man:

$$A) \ldots \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = 5 - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Winkel γ berechnen kann. Ist hiernach γ berechnet, so kann man nach Gleichung e) die gesuchte Seite b berechnen.

Aufgabe 727. Die Seite a eines Deltoids misst 369,5 m, das Verhältnis der beiden Diagonalen d und d_1 ist $= 7:4$ und der Inhalt F beträgt 139986 qm; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 369{,}5 \text{ m} \\ d : d_1 = 7:4 \\ F = 139986 \text{ qm} \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe besteht zwischen den Diagonalen d und d_1 die Relation:

$$a) \ldots d : d_1 = 7:4$$

Ferner besteht nach der in Andeutung zur Aufgabe 722 aufgestellten Gleichung A) zwischen dem gegebenen Inhalt F und jenen Diagonalen die Relation:

$$b) \ldots \frac{d \cdot d_1}{2} = F$$

und aus diesen beiden Gleichungen a) und b), welche die Unbekannten d und d_1 enthalten, kann man zunächst diese unbekannten Diagonalen berechnen. Sind hiernach d und d_1 berechnet, so kann man, siehe Figur 249, aus $\frac{d}{2}$ und a den Winkel $\frac{\beta}{2}$ und die Seite d_1' des rechtwinkligen Dreiecks ABM berechnen, dann kann man mittels der Relation:

$$c) \ldots d_1'' = d_1 - d_1'$$

den Abschnitt d_1'' der Diagonale d_1 berechnen, und schliesslich kann man aus d_1'' und $\frac{d}{2}$ die Seite b und den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ des rechtwinkligen Dreiecks AMC bestimmen.

Anmerkung 29. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung von Deltoiden direkt oder indirekt gefordert wird, sind noch in späteren Abschnitten enthalten.

g) Aufgaben über das Kreisviereck.

Anmerkung 80. Da man unter einem Kreisviereck ein solches Viereck versteht, welches die Eigenschaft hat, dass man sowohl um als auch in dasselbe einen Kreis beschreiben kann, und hiernach das Kreisviereck stets in Verbindung mit zwei Kreisen gedacht werden muss, von welchen der eine durch die Ecken des Vierecks geht, der andere aber die vier Seiten desselben berührt, so sind Aufgaben über das Kreisviereck an dieser Stelle dieses Lehrbuchs nicht aufgenommen. Solche Aufgaben finden sich in den spätern Abschnitten, welche über den Kreis in Verbindung mit dem Viereck handeln.

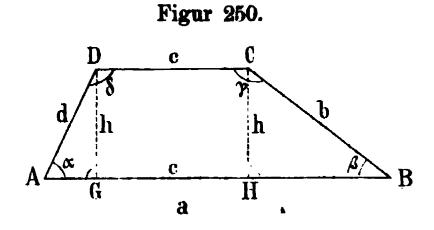
---

h) Aufgaben über das allgemeine Trapez.

Anmerkung 81. Da, wie in den Andeutungen zu nachstehenden Aufgaben gezeigt wird, die Berechnung eines allgemeinen Trapezes (siehe Erkl. 399) dadurch erfolgt, dass man dasselbe mittels Hülfslinien, welche parallel zu einer der nicht parallelen Seiten oder parallel zu einer der Diagonalen sind, in ein schiefwinkliges Dreieck und ein Parallelogramm zerlegt, oder dass man dasselbe mittels einer Diagonale oder mittels zwei Diagonalen in zwei bezw. in vier schiefwinklige Dreiecke zerlegt, oder dass man durch Verlängerung der nicht parallelen Seiten bis zu ihrem Durchschnitt zwei ähnliche schiefwinklige Dreiecke herstellt, so ergibt sich hieraus, dass sich die Berechnung eines Trapezes, abgesehen von einigen Fällen, in welchen man die Berechnung auch dadurch vornehmen kann, dass man das Trapez mittels zweier von den Eckpunkten einer der Grundlinien auf die andere Grundlinie gefällten Perpendikel (Höhen) in zwei rechtwinklige Dreiecke und in ein Rechteck zerlegt (siehe die Figur 250 und die Aufgaben 728 und 729) an die Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks anschliesst.

Aufgabe 728. Die nicht parallelen Seiten b und d eines Trapezes sind bezw. $= 289$ und $= 257$ m, die grössere der beiden parallelen Seiten ist $a = 428$ m und der derselben anliegende Winkel α beträgt $82^0\,50'\,50{,}4''$; man soll den Inhalt dieses Trapezes berechnen.

Figur 250.



Gegeben: $\begin{cases} b = 289 \text{ m} \\ d = 257 \text{ m} \\ a = 428 \text{ m} \\ \alpha = 82^0\,50'\,50{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Zur Berechnung des gesuchten Inhalts F kann man die in der Erkl. 404 aufgestellte Formel:

a) . . . $F = \frac{a+c}{2} \cdot h$

benutzen. Da man von den in dieser Formel vorkommenden Bestimmungsstücken a, c und h gemäss der Aufgabe nur a kennt, so muss man zunächst die nicht gegebenen Stücke c und h berechnen; dies kann man wie folgt:

Stellt, siehe Figur 250 und die Erkl. 399 und 400, $ABCD$ das gegebene Trapez dar. und man fällt die Perpendikel DG und CH. so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ADG und HCB und das Rechteck $DCHG$. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADG ergeben sich die Relationen:

b) . . . $h = d \cdot \sin\alpha$ (siehe Erkl. 50)

und

α) . . . $\overline{AG} = d \cdot \cos\alpha$ (siehe Erkl. 51)

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck HCB die Relation:

$$\overline{BH} = \sqrt{b^2 - h^2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung b):

β) . . . $\overline{BH} = \sqrt{b^2 - d^2 \sin^2\alpha}$

Da sich nun aus der Figur ergibt, dass

$$c = a - \overline{AG} - \overline{BH}$$

oder, dass in Rücksicht der Gleichungen α) und β):

c) ... $c = a - d\cos\alpha - \sqrt{b^2 - d^2\sin^2\alpha}$

ist, so erhält man aus den Gleichungen a) bis c) für den gesuchten Inhalt F:

$$F = \frac{a + a - d\cos\alpha - \sqrt{b^2 - d^2\sin^2\alpha}}{2} \cdot d\sin\alpha$$

oder

A) ... $F = \frac{d}{2}\sin\alpha\left(2a - d\cos\alpha - \sqrt{b^2 - d^2\sin\alpha}\right)$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt des Trapezes berechnen kann.

Aufgabe 729. Die eine der Grundlinien eines Trapezes ist $c = 36{,}8$ dm, eine der nicht parallelen Seiten ist $d = 80{,}4$ dm und die der andern Grundlinie anliegenden Winkel α und β sind bezw. $= 48^0\ 36'\ 10''$ und $44^0\ 50'\ 30''$; wie gross sind die beiden andern Seiten und welches ist der Inhalt dieses Trapezes?

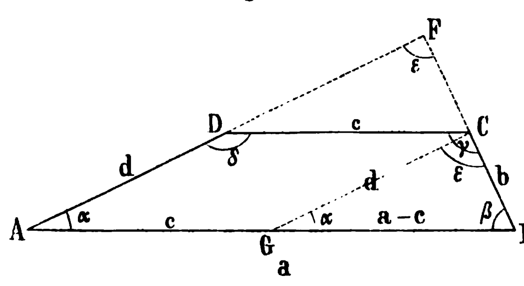
Gegeben: $\begin{cases} c = 36{,}8 \text{ dm} \\ d = 80{,}4 \text{ dm} \\ \alpha = 48^0\ 36'\ 10'' \\ \beta = 44^0\ 50'\ 30'' \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 728. Man fälle, siehe Figur 250, die Perpendikel DG und CH; drücke $\overline{DG}$ ($= h$) und den Abschnitt $\overline{AG}$ in d und α aus, berechne dann aus $\overline{CH}$ ($= h$) und β die Seite b und den Abschnitt BH; bestimme hierauf die Seite a aus $\overline{AG}$, $\overline{GH}$ ($= c$) und $\overline{BH}$ und benutze schliesslich zur Berechnung des Inhalts F die Relation:

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

Aufgabe 730. Die beiden nicht parallelen Seiten b und d eines Trapezes sind bezw. 6,31 dm und 11,84 m lang und stossen in ihren Verlängerungen unter einem Winkel $\varepsilon = 90^0$ zusammen. Man soll die Winkel des Trapezes berechnen.

Figur 251.



Gegeben: $\begin{cases} b = 6{,}31 \text{ dm} \\ d = 11{,}84 \text{ dm} \end{cases}$ (siehe Figur 251)

Andeutung. Stellt, siehe Figur 251, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, und man zieht $CG \parallel AD$, so erhält man, da $\sphericalangle AFB$ gemäss der Aufgabe $= R$ ist und da $CG \parallel AF$ gezogen wird, das bei C rechtwinklige Dreieck GCB, dessen Katheten CB ($= b$) und CG ($= d$) gegeben sind; mittels der aus diesem rechtwinkligen Dreieck sich ergebenden Relationen:

A) ... $\operatorname{tg}\alpha = \frac{b}{d}$

und

B) ... $\operatorname{tg}\beta = \frac{d}{b}$

kann man leicht die Winkel α und β bestimmen.

Sind die Winkel α und β hiernach berechnet, so erhält man die Winkel δ und γ nach der Erkl. 413 aus den Gleichungen:

C) ... $\delta = 2R - \alpha$

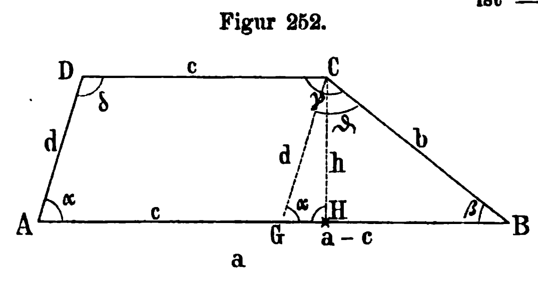
und D) ... $\gamma = 2R - \beta$

Erkl. 413. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Trapez beträgt die Summe je zweier an einer der nicht parallelen Seiten liegenden Winkel $2R$ ($= 180^0$)."

Aufgabe 731. Die beiden Grundlinien eines Trapezes sind $a = 140$ m und $c = 65$ m; die beiden der Grundlinie a anliegenden Winkel α und β sind bezw. $= 54^0\,46'\,10''$ und $27^0\,23'\,30''$; man soll hieraus die beiden andern Seiten, die andern Winkel und den Inhalt des Trapezes berechnen.

Figur 252.



Gegeben: $\begin{cases} a = 140 \text{ m} \\ c = 65 \text{ m} \\ \alpha = 54^0\,46'\,10'' \\ \beta = 27^0\,23'\,30'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 252, $ABCD$ das Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe genügt, und man zieht $CG \parallel AD$, so erhält man das schiefwinklige Dreieck CBG und das $\parallel$gr $ADCB$. Von dem Dreieck CBG kennt man die Seite BG, dieselbe ist $= \overline{AB} - \overline{AG}$ oder $= \overline{AB} - \overline{DC}$, oder $= a - c$, den Winkel $CBG = \beta$ und den Winkel CGB, derselbe ist $= \sphericalangle DAB$ oder $= \alpha$. Da man hiernach von diesem Dreieck die Seite $a - c$ und die derselben anliegenden Winkel α und β kennt, so kann man, analog wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, hieraus die gesuchten Seiten b und d berechnen; man erhält nämlich aus jenem Dreieck nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass $\vartheta = 2R - (\alpha + \beta)$ ist:

$$\frac{b}{a-c} = \frac{\sin\alpha}{\sin[2R - (\alpha+\beta)]}$$

oder

$$\text{A)} \; \ldots \; b = (a-c)\cdot\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \text{ (s. die Erkl. 66)}$$

und

$$\frac{d}{a-c} = \frac{\sin\beta}{\sin[2R - (\alpha+\beta)]}$$

oder

$$\text{B)} \; \ldots \; d = (a-c)\cdot\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$$

und nach diesen Gleichungen A) und B) kann man in Rücksicht der für a, c, α und β gegebenen Zahlenwerte die gesuchten Seiten b und d berechnen.

Die gesuchten Winkel δ und γ kann man nach der Erkl. 413 auf einfache Weise mittels der Relationen:

$$\text{C)} \; \ldots \; \delta = 2R - \alpha$$

und

$$\text{D)} \; \ldots \; \gamma = 2R - \beta$$

berechnen.

Den gesuchten Inhalt F des Trapezes kann man wie folgt berechnen:

Nach der in der Erkl. 404 angeführten planimetrischen Formel besteht, siehe Fig. 252, die Relation:

$$\text{a)} \; \ldots \; F = \frac{a+c}{2}\cdot h$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck CHB die Relation:

$$\text{b)} \; \ldots \; h = b\cdot\sin\beta \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

oder, wenn man für b den Wert aus Gleichung A) substituiert:

$$c) \ldots h = (a - c) \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Aus den Gleichungen a) und c) folgt nunmehr:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot (a - c) \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

oder

$$E) \ldots F = \frac{(a+c)(a-c) \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha + \beta)}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 732. Man soll aus dem Flächeninhalt $F = 302{,}4$ qm eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten $b = 15{,}3$ m und $d = 37{,}7$ m und aus dem von der kleinern dieser beiden Seiten und der grössern Grundlinie eingeschlossenen Winkel $\beta = 20^0 58' 58{,}6''$ die nicht gegebenen Stücke des Trapezes berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} F = 302{,}4 \text{ qm} \\ b = 15{,}3 \text{ m} \\ d = 37{,}7 \text{ m} \\ \beta = 20^0 58' 58{,}6'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Zwischen dem gegebenen Flächeninhalt F, den beiden unbekannten Grundlinien a und c und der unbekannten Höhe h besteht nach der Erkl. 404 die Relation:

$$a) \ldots F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Fällt man, siehe Figur 252, in dem Trapez $ABCD$, welches das gegebene Trapez vorstellt, die Höhe $CH (= h)$, so ergibt sich aus dem hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreieck CBH für diese Höhe die Relation:

$$b) \ldots h = b \cdot \sin\beta \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

Substituiert man diesen Wert für h in Gleichung a) und löst diese Gleichung in bezug auf $a + c$ auf, so erhält man:

$$c) \ldots a + c = \frac{2F}{b \sin\beta}$$

nämlich eine Gleichung, mittels welcher man die Summe der parallelen Seiten a und c berechnen kann. Die Differenz dieser Seiten kann man wie folgt bestimmen:

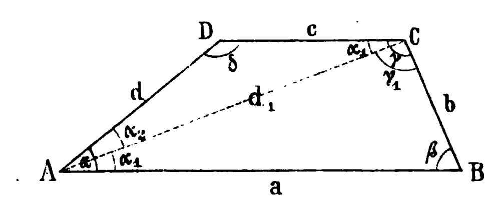
Zieht man $CG \parallel AD$, so erhält man das Dreieck CBG, von welchem die beiden Seiten $\overline{CG} (= d)$, $\overline{CB} (= b)$ und der der grössern dieser Seiten, nämlich, in Rücksicht der in der Aufgabe für b und d gegebenen Zahlenwerte, der der Seite d gegenüberliegende Winkel β bekannt sind; man kann somit aus diesen Stücken, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Winkel α und ϑ und die Seite $BG (= a - c)$, nämlich die Differenz der Seiten a und c des Trapezes berechnen. Für diese Differenz erhält man nach der in der Aufgabe 120 aufgestellten Formel 197:

$$d) \ldots a - c = \sqrt{d^2 - (b \sin\beta)^2} + b \cos\beta$$

Aus den Gleichungen c) und d) kann man schliesslich leicht die Seiten a und c berechnen u. s. f.

Aufgabe 733. Die eine der Grundlinien eines Trapezes ist $a = 16{,}76$ m, die Winkel α und β, welche sie mit den anstossenden Seiten bildet, sind bezw. $= 12^0\,48'\,44{,}2''$ und $36^0\,52'\,11{,}6''$ und der Winkel, welchen sie mit einer der beiden Diagonalen bildet, ist $\alpha_1 = 3^0\,11'\,31{,}6''$, man soll hieraus die drei andern Seiten des Trapezes berechnen.

Figur 253.

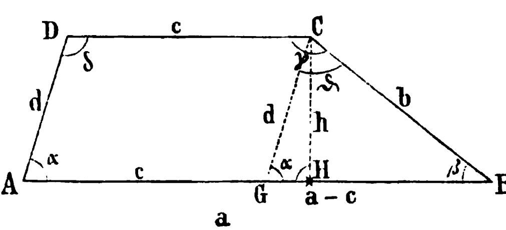


$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 16{,}76 \text{ m} \\ \alpha = 12^0\,48'\,44{,}2'' \\ \beta = 36^0\,52'\,11{,}6'' \\ \alpha_1 = 3^0\,11'\,31{,}6'' \end{cases}$$

Andeutung. Ist, s. Fig. 253, $ABCD$ das Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so kennt man von dem Dreieck ACB die Seite a und die derselben anliegenden Winkel α_1 und β: man kann also, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seiten b und d_1 dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach d_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck ADC die Seite $AC\ (= d_1)$, den Winkel α_1 und den Winkel $\delta\ (= 2R - \alpha)$; man kann also hieraus, ebenfalls wie in jener Auflösung gezeigt wurde, die Seiten c und d berechnen.

Aufgabe 734. Die beiden Grundlinien a und c eines Trapezes sind bezw. 120 und 60 m lang, eine der beiden andern Seiten ist $b = 58$ m und der Winkel, welchen die Seite b mit der Seite c bildet, ist $\gamma = 160^0\,40'\,22''$; wie gross ist die vierte Seite des Trapezes und welches ist der Inhalt desselben?

Figur 254.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 120^0 \\ c = 60 \text{ m} \\ b = 58 \text{ m} \\ \gamma = 160^0\,40'\,22'' \end{cases}$$

Andeutung. Man kennt von dem Dreieck CBG, siehe Figur 254, die Seite $CB\ (= b)$, die Seite $BG\ (= a - c)$ und den Winkel β, derselbe ist $= 2R - \gamma$: man kann also aus diesem Dreieck, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die gesuchte Seite $CG\ (= d)$ berechnen. Den gesuchten Inhalt F findet man mittels der in der Erkl. 404 aufgestellten Formel:

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

indem man in derselben für h den aus dem rechtwinkligen Dreieck CBH sich ergebenden Wert:

$$h = b \cdot \sin\beta \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

substituiert; man erhält hiernach:

$$\text{A)} \ldots F = \frac{a + c}{2} \cdot b \sin\beta$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a, c, b und $\beta\ (= 2R - \gamma)$ gegebenen Zahlenwerte den Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 735. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind bezw. $a = 10$ m und $c = 7$ m, der eine der der Seite a anliegenden Winkel ist $\alpha = 37^0\,15'$ und der Inhalt beträgt $F = 71$ qm; man soll hieraus die Seiten und Winkel berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} F = 71 \text{ qm} \\ a = 10 \text{ m} \\ c = 7 \text{ m} \\ \alpha = 37^0\,15' \end{array}\right.$$

Andeutung. Da nach der Erkl. 404 die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

und da gemäss der Aufgabe a, c und F gegeben sind, so kann man aus dieser Gleichung zunächst die Höhe h berechnen. Dann kann man aus h und α (siehe Figur 254) die Seite d berechnen, und hiernach kann man aus d, α und $a - c$, die Seite b und den Winkel β des Dreiecks CBG, siehe Fig. 254, berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 736. Man soll aus der kleinern Grundlinie $c = 110{,}5$ m eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten $b = 162{,}4$ m und $d = 90{,}85$ m, und aus der Differenz ϑ der zwei Gegenwinkel γ und α, welche $46^0\,40'\,10{,}2''$ beträgt, den Flächeninhalt des Trapezes berechnen.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{r} c = 110{,}5 \text{ m} \\ b = 162{,}4 \text{ m} \\ d = 90{,}85 \text{ m} \\ \gamma - \alpha = \vartheta = 46^0\,40'\,10{,}2'' \end{array}\right.$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 254, $ABCD$ das Trapez dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht $CG \parallel AD$, so erhält man das Dreieck CBG, von welchem die Seiten CB $(= b)$ und CG $(= d)$, sowie der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel bekannt ist, indem derselbe gleich der gegebenen Differenz $\gamma - \alpha$ oder $= \vartheta$ ist, was sich aus folgendem ergibt:

Gemäss der Aufgabe ist:

$$\gamma - \alpha = \vartheta$$

und nach der Erkl. 413 ist:

$$\gamma = 2R - \beta$$

hieraus ergibt sich, dass:

$$2R - \beta - \alpha = \vartheta$$

oder dass

$$\text{a)} \ldots \alpha + \beta = 2R - \vartheta$$

ist. Da ferner in dem Dreieck CBG:

$$\sphericalangle GCB = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist, so erhält man hieraus und in Rücksicht der Gleichung a):

$$\sphericalangle GCB = 2R - (2R - \vartheta)$$

oder

$$\text{b)} \ldots \sphericalangle GCB = \vartheta$$

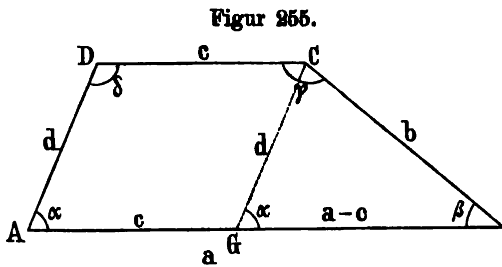
Wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt ist, kann man somit die Seite GB $(= a - c)$, die Winkel α und β und somit auch leicht die Höhe h des Dreiecks CBG berechnen. Ist hiernach h und $a - c$ berechnet, so kann man leicht, da c gegeben ist, die Seite a berechnen; dann kann man zur Berechnung des gesuchten Inhalts F die in der Erkl. 404 angeführte Formel:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

in Anwendung bringen.

Aufgabe 737. Man soll aus dem Flächeninhalt $F = 8,772$ qm eines Trapezes, den beiden nicht parallelen Seiten $b = 2,89$ m und $d = 2,57$ m und aus der Summe $\sigma = 159^0\,4'\,48,7''$ der zwei Gegenwinkel β und δ, von welchen der grössere Winkel δ der kleinern schrägen Seite d anliegt, die Grundlinien berechnen.

Figur 255.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} F = 8,772 \text{ qm} \\ b = 2,89 \text{ m} \\ d = 2,57 \text{ m} \\ \beta + \delta = \sigma = 159^0\,4'\,48,7'' \end{array}\right.$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel des Trapezes wie folgt:

Stellt, siehe Figur 255, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, und zieht man $CG \parallel AD$, so erhält man das Dreieck CBG; aus demselben ergibt sich nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

oder in Rücksicht, dass nach der Erkl. 413 die Winkel α und δ Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 66 $\sin\alpha = \sin\delta$ gesetzt werden kann:

$$\frac{b}{d} = \frac{\sin\delta}{\sin\beta}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{b+d}{b-d} = \frac{\sin\delta + \sin\beta}{\sin\delta - \sin\beta}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 286:

$$\frac{b+d}{b-d} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\delta+\beta}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\delta-\beta}{2}}$$

Da nun gemäss der Aufgabe $\delta + \beta$ gegeben ist, so kann man nach der aus dieser Gleichung sich ergebenden Relation:

$$\text{A)} \;\ldots\; \operatorname{tg}\frac{\delta-\beta}{2} = \frac{b-d}{b+d} \cdot \operatorname{tg}\frac{\delta+\beta}{2}$$

die Winkeldifferenz $\delta - \beta$ berechnen. Aus dem hiernach für $\delta - \beta$ berechneten und aus dem für $\delta + \beta$ gegebenen Wert kann man alsdann leicht die einzelnen Winkel δ und β, somit auch die Winkel α und γ des Trapezes berechnen. Sind einmal hiernach die Winkel berechnet, so kann man zur Berechnung der gesuchten Seiten a und c im weitern verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 732 gesagt wurde.

Aufgabe 738. Der Flächeninhalt eines Trapezes ist $F = 930,25$ qdm, die kleinere der Grundlinien ist $c = 27,5$ dm, die Höhe h beträgt 22,6 m und der Winkel, welchen die grössere der Grundlinien mit einer der Diagonalen bildet ist $\alpha_1 = 33^0\,50'\,56,8''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Trapezes berechnen.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} F = 930,25 \text{ qdm} \\ c = 27,5 \text{ dm} \\ h = 22,6 \text{ dm} \\ \alpha_1 = 33^0\,50'\,56,8'' \end{array}\right.$

Andeutung. Zwischen den beiden parallelen Seiten a und c, der Höhe h und dem Inhalt F besteht nach der Erkl. 404 die Relation:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe c, h und F gegeben sind:

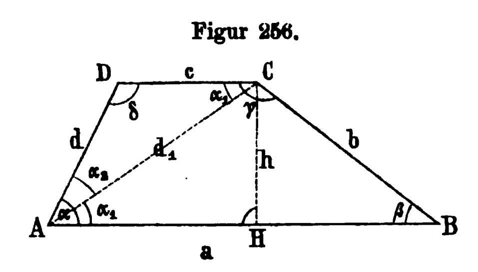
A) . . . $a = \frac{2F}{h} - c$

nach welcher Gleichung man die der Seite c parallele Seite a berechnen kann. Ferner kann man die Diagonale d_1 aus h und α_1 berechnen. Man erhält nämlich, siehe Fig. 256, aus dem rechtwinkligen Dreieck ACH:

B) . . . . $d_1 = \frac{h}{\sin \alpha_1}$ (siehe Erkl. 42)

Aus d_1, a und α_1 kann man dann die Seite b und den Winkel β des Dreiecks ACB berechnen, und aus d_1, c und α_1 kann man die Seite d und den Winkel δ des Dreiecks ADC berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Figur 256.



Aufgabe 739. Die parallelen Seiten a und c eines Trapezes messen bezw. 42,8 m und 26 m, und die beiden andern Seiten b und d messen bezw. 28,9 m und 25,7 m; wie gross sind die vier Winkel und die Diagonalen, und welches ist der Inhalt des Trapezes?

Gegeben: $\begin{cases} a = 42{,}8 \text{ m} \\ b = 28{,}9 \text{ m} \\ c = 26 \text{ m} \\ d = 25{,}7 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 257, $ABCD$ das Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht z. B. $DG \parallel CB$, so erhält man das schiefwinklige Dreieck ADG und das $\parallel$gr $DCBG$. Von dem Dreieck ADG kennt man die drei Seiten, indem nämlich:

$\overline{AD} = d$

$\overline{DG} = \overline{CB} = b$

und

$\overline{AG} = \overline{AB} - \overline{GB}$ oder $= \overline{AB} - \overline{DC}$

also $= a - c$

ist; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, aus diesen drei bekannten Seiten die Winkel α und β jenes Dreiecks berechnen; man erhält z. B. mittels Anwendung des Projektionssatzes aus dem Dreieck ADG die Relationen:

$$b^2 = d^2 + (a-c)^2 - 2d(a-c)\cos\alpha$$

und

$$d^2 = b^2 + (a-c)^2 - 2b(a-c)\cos\beta$$

aus welchen sich bezw.:

A) . . . $\cos\alpha = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}$

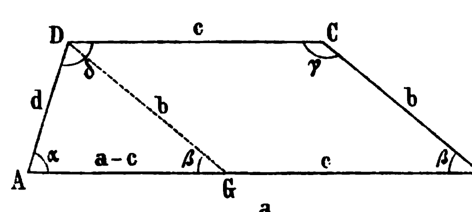
und

B) . . . $\cos\beta = \frac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2b(a-c)}$

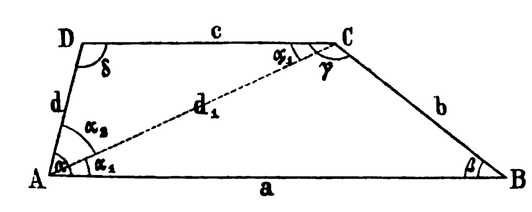
ergibt.

Sind hiernach die Winkel α und β berechnet, so kann man nach der

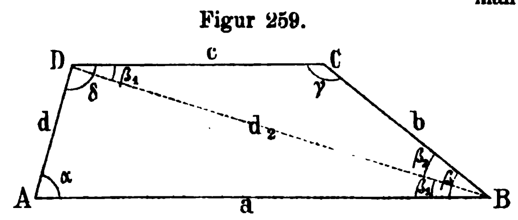
Figur 257.



Figur 258.



Figur 259.



Erkl. 413 leicht auch die Winkel δ und γ bestimmen, und aus den Dreiecken CBA und DBA der Figuren 258 und 259, von welchen man nunmehr je zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel kennt, die gesuchten Diagonalen d_1 und d_2 berechnen; man kann jedoch auch diese Diagonalen d_1 und d_2 unabhängig von den bereits berechneten Winkeln α und β wie folgt direkt aus den gegebenen vier Seiten bestimmen:

Aus dem Dreieck ADC der Fig. 258 erhält man nach dem Projektionssatz für die Diagonale d_1 die Relation:

$$d_1^2 = d^2 + c^2 - 2dc \cdot \cos\delta$$

oder, da nach der Erkl. 413:

$$\delta = 2R - \alpha$$

mithin:

$$\cos\delta = \cos(2R - \alpha)$$

ist, also hiernach und nach der Erkl. 94:

$$\cos\delta = -\cos\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$\alpha) \ldots d_1^2 = d^2 + c^2 + 2dc \cdot \cos\alpha$$

Für dieselbe Diagonale d_1 erhält man aus dem andern Dreieck CBA der Figur 258 direkt die weitere Relation:

$$\alpha_1) \ldots d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$$

Ferner erhält man aus dem Dreieck DBA der Figur 259 nach dem Projektionssatz für die Diagonale d_2 die Relation:

$$\beta) \ldots d_2^2 = d^2 + a^2 - 2da \cdot \cos\alpha$$

Für dieselbe Diagonale d_2 erhält man aus dem andern Dreieck DCB der Figur 259 die Relation:

$$d_2^2 = c^2 + b^2 - 2cb \cdot \cos\gamma$$

oder, da nach der Erkl. 413:

$$\gamma = 2R - \beta$$

mithin:

$$\cos\gamma = \cos(2R - \beta)$$

ist, also hiernach und nach der Erkl. 94:

$$\cos\gamma = -\cos\beta$$

gesetzt werden kann:

$$\beta_1) \ldots d_2^2 = c^2 + b^2 + 2cb \cos\beta$$

Multipliziert man nunmehr die Gleichung α) mit a und die Gleichung β) mit c und addiert die somit erhaltenen neuen Gleichungen, so fallen die Glieder mit $\cos\alpha$ weg und man erhält nach der Erkl. 414 die Relation:

$$\text{a)} \ldots a \cdot d_1^2 + c \cdot d_2^2 = (a + c)(d^2 + ac)$$

Multipliziert man ferner die Gleichung α_1) mit c und die Gleichung β_1) mit a und addiert die somit erhaltenen neuen Gleichungen, so fallen die Glieder mit $\cos\beta$ weg und man erhält nach der Erkl. 415 die Relation:

$$\text{b)} \ldots c \cdot d_1^2 + a \cdot d_2^2 = (a + c)(b^2 + ac)$$

Erkl. 414. Multipliziert man die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

$$\alpha) \ldots d_1^2 = d^2 + c^2 + 2dc \cdot \cos\alpha$$

mit a und die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

$$\beta) \ldots d_2^2 = d^2 + a^2 - 2da \cdot \cos\alpha$$

mit c, so erhält man bezw. die Gleichungen:

$$a \cdot d_1^2 = ad^2 + ac^2 + 2adc \cdot \cos\alpha$$

und

$$c \cdot d_2^2 = cd^2 + ca^2 - 2adc \cdot \cos\alpha$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$a \cdot d_1^2 + c \cdot d_2^2 = a \cdot d^2 + c \cdot d^2 + a \cdot c^2 + c \cdot a^2$$

oder

$$a \cdot d_1^2 + c \cdot d_2^2 = d^2(a + c) + ac(a + c)$$

mithin:

$$a \cdot d_1^2 + c \cdot d_2^2 = (a + c)(d^2 + ac)$$

Erkl. 415. Multipliziert man die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

$$\alpha_1) \ldots d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$$

mit c und die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

$$\beta_1) \ldots d_2^2 = c^2 + b^2 + 2cb \cdot \cos\beta$$

mit a, so erhält man bezw. die Gleichungen:

$$c \cdot d_1^2 = ca^2 + cb^2 - 2cab \cos\beta$$

und

$$a \cdot d_2^2 = ac^2 + ab^2 + 2cab \cos\beta$$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man:

$$c \cdot d_1^2 + a \cdot d_2^2 = c \cdot a^2 + a \cdot c^2 + c \cdot b^2 + a \cdot b^2$$

oder

$$c \cdot d_1^2 + a \cdot d_2^2 = ac(a + c) + b^2(a + c)$$

mithin:

$$c \cdot d_1^2 + a \cdot d_2^2 = (a + c)(b^2 + ac)$$

Erkl. 416. Die in nebenstehender Andeutung entwickelten Gleichungen:

c) . . . $d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$

und

d) . . . $d_1^2 - d_2^2 = \frac{a+c}{a-c}(d^2 - b^2)$

kann man oft mit Vorteil bei der Berechnung eines Trapezes benutzen.

Durch die erste dieser Gleichungen wird der planimetrische Lehrsatz ausgedrückt:

„In jedem Trapez ist die Summe der Quadrate über den beiden Diagonalen gleich der Summe der Quadrate über den beiden nicht parallelen Seiten, vermehrt um das doppelte Rechteck aus den beiden parallelen Seiten."

Formt man die zweite jener Gleichungen wie folgt um:

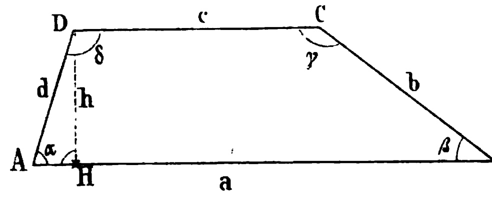
$$\frac{d_1^2 - d_2^2}{d^2 - b^2} = \frac{a+c}{a-c}$$

so ergibt sich hieraus der weitere planimetrische Lehrsatz:

„Die Differenz der Quadrate der Diagonalen eines Trapezes verhält sich zur Differenz der Quadrate der beiden nicht parallelen Seiten, wie die Summe der beiden parallelen Seiten zu ihrer Differenz."

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)


Figur 260.



Addiert man nunmehr die Gleichungen a) und b), so erhält man ferner:

$$a\cdot d_1^2 + c\cdot d_1^2 + c\cdot d_2^2 + a\cdot d_2^2 = (a+c)(d^2+ac) + (a+c)(b^2+ac)$$

oder

$$d_1^2(a+c) + d_2^2(a+c) = (a+c)(d^2+ac+b^2+ac)$$

$$(a+c)(d_1^2+d_2^2) = (a+c)(d^2+b^2+2ac)$$

mithin:

c) . . $d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$ (s. Erkl. 416)

Subtrahiert man hingegen die Gleichung b) von Gleichung a), so erhält man weiter:

$$a\cdot d_1^2 - c\cdot d_1^2 + c\cdot d_2^2 - a\cdot d_2^2 = (a+c)(d^2+ac) - (a+c)(b^2+ac)$$

oder

$$d_1^2(a-c) - d_2^2(a-c) = (a+c)(d^2+ac-b^2-ac)$$

$$(a-c)(d_1^2 - d_2^2) = (a+c)(d^2-b^2)$$

mithin:

d) . . . $d_1^2 - d_2^2 = \frac{a+c}{a-c}(d^2 - b^2)$ (siehe die Erkl. 416)

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man schliesslich durch Addition derselben;

$$2d_1^2 = b^2 + d^2 + 2ac + \frac{a+c}{a-c}(d^2-b^2)$$

oder

$$2d_1^2 = \frac{(b^2+d^2+2ac)(a-c) + (a+c)(d^2-b^2)}{a-c}$$

$$2d_1^2 = \frac{ab^2+ad^2+2a^2c-b^2c-cd^2-2ac^2+ad^2+cd^2-ab^2-b^2c}{a-c}$$

$$d_1^2 = \frac{2ad^2 - 2ac^2 + 2a^2c - 2b^2c}{2(a-c)}$$

$$d_1^2 = \frac{2a(d^2-c^2) + 2c(a^2-b^2)}{2(a-c)}$$

mithin:

C) . $d_1 = \sqrt{\frac{a(d^2-c^2) + c(a^2-b^2)}{a-c}}$

Ferner erhält man aus den Gleichungen c) und d) durch Subtraktion der Gleichung d) von Gleichung c):

$$2d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac - \frac{a+c}{a-c}(d^2-b^2)$$

oder

$$2d_2^2 = \frac{(b^2+d^2+2ac)(a-c) - (a+c)(d^2-b^2)}{a-c}$$

$$2d_2^2 = \frac{ab^2+ad^2+2a^2c-b^2c-cd^2-2ac^2-(ad^2+cd^2-ab^2-b^2c)}{a-c}$$

$$d_2^2 = \frac{2ab^2 - 2ac^2 + 2a^2c - 2cd^2}{2(a-c)}$$

$$d_2^2 = \frac{2a(b^2-c^2) + 2c(a^2-d^2)}{2(a-c)}$$

mithin:

D) . . . . $d_2 = \sqrt{\frac{a(b^2-c^2) + c(a^2-d^2)}{a-c}}$

Nach den Gleichungen C) und D) kann man die gesuchten Diagonalen d_1 und d_2

direkt aus den vier gegebenen Seiten des Trapezes berechnen.

Den gesuchten Inhalt F des Trapezes kann man schliesslich aus den parallelen Seiten a und c und den vorstehend berechneten Winkeln α und β berechnen, wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe gezeigt wurde: man kann aber auch hierbei wie folgt verfahren:

Nach der Erkl. 404 besteht die Relation:

$$\text{f)} \ldots F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck DHA der Figur 260:

$$\text{g)} \ldots . h = d \cdot \sin\alpha \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst:

$$\text{h)} \ldots . F = \frac{a+c}{2} \cdot d \sin\alpha$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 417:

$$\text{i)} \ldots . \sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$

und hierin für $\cos\alpha$ den Wert aus Gleichung A) und formt die somit erhaltene Gleichung entsprechend um, so erhält man schliesslich, wie in der Erkl. 418 gezeigt ist:

$$\text{E)} \ldots F = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \cdot \sqrt{[(b+d)+(a-c)] \cdot [(b+d)-(a-c)] \cdot [(a-c)+(b-d)] \cdot [(a-c)-(b-d)]}$$

und mittels dieser Gleichung kann man den gesuchten Inhalt F direkt aus den vier Seiten des Trapezes berechnen.

Erkl. 417. Nach der Erkl. 142 besteht die goniometrische Formel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

und hieraus ergibt sich:

$$\sin^2\alpha = 1^2 - \cos^2\alpha$$

oder nach der Erkl. 37:

$$\sin^2\alpha = (1+\cos)(1-\cos\alpha)$$

oder

$$\sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$

Erkl. 418. Setzt man in nebenstehender Gleichung i):

$$\sin\alpha = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$$

nach nebenstehender Gleichung A) für:

$$\cos\alpha = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}$$

so erhält man:

$$\sin\alpha = \sqrt{\left(1 + \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}\right)\left(1 - \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d(a-c)}\right)}$$

oder

$$\sin\alpha = \sqrt{\frac{[2d(a-c) + (a-c)^2 + d^2 - b^2][2d(a-c) - (a-c)^2 - d^2 + b^2]}{4d^2(a-c)^2}}$$

$$\sin\alpha = \frac{1}{2d(a-c)} \cdot \sqrt{[2ad - 2cd + a^2 - 2ac + c^2 + d^2 - b^2] \cdot [2ad - 2cd - a^2 + 2ac - c^2 - d^2 + b^2]}$$

mithin:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha = \frac{1}{2d(a-c)} \cdot \sqrt{[(a-c+d)^2 - b^2] \cdot [b^2 - (a-c-d)^2]}$$

Setzt man diesen Wert für $\sin\alpha$ in die in nebenstehender Andeutung entwickelte Gleichung h), so erhält man:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot d \cdot \frac{1}{2d(a-c)} \sqrt{[(a-c+d)^2 - b^2][b^2 - (a-c-d)^2]}$$

oder

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(a-c+d)+b] \cdot [(a-c+d)-b] \cdot [b+(a-c-d)] \cdot [b-(a-c-d)]}$$

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(a-c)+(b+d)] \cdot [(a-c)-(b-d)] \cdot [(b-d)+(a-c)] \cdot [(b+d)-(a-c)]}$$

mithin:

$$F = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{a-c} \sqrt{[(b+d)+(a-c)] \cdot [(b+d)-(a-c)] \cdot [(a-c)+(b-d)] \cdot [(a-c)-(b-d)]}$$

Aufgabe 740. In einem Trapez sind die nicht parallelen Seiten $b = 4$ und $d = 2$ m lang und die beiden Diagonalen messen $d_1 = 12$ m und $d_2 = 8$ m; man soll die beiden Grundlinien dieses Trapezes berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b = 4 \text{ m} \\ d = 2 \text{ m} \\ d_1 = 12 \text{ m} \\ d_2 = 8 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach den in der Erkl. 416 aufgestellten Sätzen bestehen zwischen den vier Seiten a, b, c und d, von welchen a und c die parallelen Seiten bezeichnen, und den beiden Diagonalen d_1 und d_2 die Relationen:

$$\text{a)} \ldots\ d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

und

$$\text{b)} \ldots\ \frac{a+c}{a-c} = \frac{d_1^2 - d_2^2}{d^2 - b^2}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man die Relation:

$$\text{c)} \ldots\ a \cdot c = \frac{(d_1^2 + d_2^2) - (b^2 + d^2)}{2}$$

Bringt man in bezug auf die zweite jener Gleichungen, welche eine Proportion darstellt, den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{(a+c)+(a-c)}{(a+c)-(a-c)} = \frac{(d_1^2 - d_2^2) + (d^2 - b^2)}{(d_1^2 - d_2^2) - (d^2 - b^2)}$$

oder

$$\text{d)} \ldots .\ \frac{a}{c} = \frac{(d_1^2 - d_2^2) + (d^2 - b^2)}{(d_1^2 - d_2^2) - (d^2 - b^2)}$$

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man durch Multiplikation derselben:

$$\text{A)} \ldots\ a = \sqrt{\frac{[(d_1^2 + d_2^2) - (d^2 + b^2)] \cdot [(d_1^2 - d_2^2) + (d^2 - b^2)]}{2\,[(d_1^2 - d_2^2) - (d^2 - b^2)]}}$$

Durch Division der Gleichung c) durch Gleichung d) erhält man ferner:

$$\text{B)} \ldots\ c = \sqrt{\frac{[(d_1^2 + d_2^2) - (d^2 + b^2)] \cdot [(d_1^2 - d_2^2) - (d^2 - b^2)]}{2 \cdot [(d_1^2 - d_2^2) + (d^2 - b^2)]}}$$

In Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte kann man mittels dieser Gleichungen die gesuchten Grundlinien a und c direkt aus den gegebenen Stücken berechnen.

Aufgabe 741. Die beiden parallelen Seiten a und c eines Trapezes messen bezw. 13,5 m und 6,9 m und die beiden Diagonalen d_1 und d_2 sind bezw. 12,8 und 14,3 m lang; man soll die nicht parallelen Seiten des Trapezes berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 13{,}5 \text{ m} \\ c = 6{,}9 \text{ m} \\ d_1 = 12{,}8 \text{ m} \\ d_2 = 14{,}3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 740.

Nach der Erkl. 416 bestehen nämlich zwischen den beiden Diagonalen d_1 und d_2, den parallelen Seiten a und c und den beiden nicht parallelen Seiten b und d die Relationen:

$$d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$$

und

$$\frac{d_1^2 - d_2^2}{d^2 - b^2} = \frac{a+c}{a-c}$$

Aus der ersten dieser Gleichungen ergibt sich:

a) . . . $b^2 + d^2 = (d_1^2 + d_2^2) - 2ac$

und aus der zweiten jener Gleichungen ergibt sich:

b) . . . $d^2 - b^2 = \frac{a-c}{a+c}(d_1^2 - d_2^2)$

Durch Addition der Gleichungen a) und b) erhält man:

$$2d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2ac + \frac{a-c}{a+c}(d_1^2 - d_2^2)$$

oder

$$2d^2 = \frac{(d_1^2 + d_2^2 - 2ac)(a+c) + (a-c)(d_1^2 - d_2^2)}{a+c}$$

$$2d^2 = \frac{ad_1^2 + ad_2^2 + cd_1^2 + cd_2^2 - 2ac(a+c) + ad_1^2 - cd_1^2 - ad_2^2 + cd_2^2}{a+c}$$

$$2d^2 = \frac{2ad_1^2 + 2cd_2^2 - 2ac(a+c)}{a+c}$$

mithin:

A) . . . $d = \sqrt{\frac{ad_1^2 + cd_2^2 - ac(a+c)}{a+c}}$

In analoger Weise erhält man durch Subtraktion der Gleichung b) von Gleichung a):

B) . . . $b = \sqrt{\frac{cd_1^2 + ad_2^2 - ac(a+c)}{a+c}}$

Nach den Gleichungen A) und B) kann man die gesuchten Seiten b und d direkt aus den gegebenen Stücken berechnen.

Aufgabe 742. Die kleinste der beiden parallelen Seiten eines Trapezes ist $a =$ 360,5 dm lang, die derselben anliegenden Winkel α und β sind bezw. $= 72^0\,30'\,44''$ und $= 116^0\,0'\,38''$ und die Höhe h des Trapezes misst 110 dm; man soll hieraus den Inhalt des Trapezes berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 360{,}5 \text{ dm} \\ \alpha = 72^0\,30'\,44'' \\ \beta = 116^0\,0^0\,38'' \\ h = 110^0 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 261, $ABCD$ das Trapez dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht z. B. BG parallel AD, so erhält man das Parallelogramm $ADGB$ und das schiefwinklige Dreieck BGC; bezeichnet man den Inhalt des erstern mit f_1 und den Inhalt des letztern mit f_2, so besteht für den gesuchten Inhalt F des Trapezes die Relation:

a) . . . $F = f_1 + f_2$

Betrachtet man die gegebene Seite AB ($= a$) als Grundlinie des $\|$grs $ADGB$, so

Figur 261.

Erkl. 419. Bezeichnet man den Inhalt eines Parallelogramms mit F, die Masszahl einer Seite desselben (als Grundlinie gedacht) mit a und die, auf dieselbe Längeneinheit sich beziehende Masszahl der zu dieser Seite gehörigen Höhe mit h, so besteht die Relation:

$$F = a \cdot h \text{ Flächeneinheiten}$$

(Siehe Kleyers Lehrbücher der Planimetrie.)

Erkl. 420. Da in der Figur 261 das Viereck $ADGB$ ein ▱gr ist, so ist nach der Erkl. 384:

$$\sphericalangle BGD = \alpha$$

und

$$\sphericalangle ABG = \delta$$

Nach der Erkl. 413 ist ferner in dem Trapez $ABCD$:

$$\gamma = 2R - \beta$$

und

$$\delta = 2R - \alpha$$

In dem Dreieck BGC ist schliesslich:

$$\sphericalangle BGC = 2R - \alpha$$

und

$$\sphericalangle GBC = \beta - \delta \text{ oder } = \beta - (2R - \alpha) \text{ oder } = \alpha + \beta - 2R$$

Erkl. 421. Zu den in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichungen c), A) und A_1) ist zu bemerken, dass die darin vorkommende Funktion:

$$\sin(\alpha + \beta - 2R)$$

in Rücksicht, dass nach den in der Aufgabe 742 gegebenen Zahlenwerten die Winkelsumme $\alpha + \beta$ grösser als $2R$ ist, nicht weiter reduziert wurde. Diese Funktion könnte man nämlich wie folgt noch reduzieren:

Man könnte:

$$\sin(\alpha + \beta - 2R) = \sin(-[2R - (\alpha + \beta)])$$

also nach der Erkl. 127:

$$\sin(\alpha + \beta - 2R) = -\sin[2R - (\alpha + \beta)]$$

und hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\text{a)} \ldots \sin(\alpha + \beta - 2R) = -\sin(\alpha + \beta)$$

setzen. Man würde alsdann an Stelle der Gleichung c):

ist die gegebene Höhe BH $(= h)$ des Trapezes die zu dieser Grundlinie AB gehörige Höhe jenes ▱grs und man hat nach der Erkl. 419 für den Inhalt f_1 des ▱grs:

$$\text{b)} \ldots f_1 = a \cdot h$$

Betrachtet man ferner die Seite GC $(= c - a)$ des Dreiecks BGC als Grundlinie dieses Dreiecks, so ist die gegebene Höhe BH $(= h)$ des Trapezes die zu dieser Grundlinie GC gehörige Höhe jenes Dreiecks und man hat für den Inhalt f_2 dieses Dreiecks die Relation:

$$f_2 = \frac{(c-a) \cdot h}{2}$$

aus welcher die unbekannte Grundlinie $(c - a)$ jenes Dreiecks wie folgt eliminiert werden kann.

Nach der Sinusregel erhält man aus dem Dreieck BGC:

$$\frac{c-a}{d} = \frac{\sin(\beta - \delta)}{\sin \gamma}$$

und hiernach und nach den Erkl. 420 und 66 erhält man:

$$c - a = d \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - 2R)}{\sin \beta}$$

ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck BHG:

$$d = \frac{h}{\sin \alpha} \text{ (s. Erkl. 42)}$$

und aus diesen beiden Gleichungen folgt:

$$c - a = h \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - 2R)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Man hat also (siehe Erkl. 421), für den Inhalt f_2 jenes Dreiecks:

$$\text{c)} \ldots f_2 = \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - 2R)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

Aus den Gleichungen a) bis c) erhält man für den gesuchten Flächeninhalt F:

$$F = a \cdot h + \frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - 2R)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

oder

$$\text{A)} \ldots F = h\left[a + \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta - 2R)}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}\right]$$

(siehe die Erkl. 421)

Man kann auch den Inhalt F wie folgt berechnen:

Fällt man, siehe Figur 263, die Perpendikel DH und CH_1, so erhält man aus den hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecken DHA und CH_1B die Relationen:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{AH}{h}$$

$$1) \ldots f_2 = -\frac{h^2}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

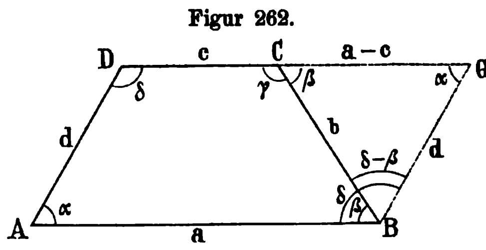
und an Stelle der Gleichung A) bezw. der Gleichung A_1):

$$2) \ldots F = \left[a - \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha \sin\beta}\right] \cdot h$$

erhalten.

Diese Gleichungen beziehen sich auf ein Trapez, in welchem, wie in der Figur 262 angedeutet, die Summe der beiden Winkel α und β kleiner als $2R$ ist, zu dessen Inhaltsbestimmung man also von dem Inhalt f_1 des Parallelogramms $ADGB$ den Inhalt f_1 des Dreiecks BCG subtrahieren muss [siehe die nebenstehende Gleichung a), die Erkl. 422 und vergleiche die Figuren 261 und 262].

Figur 262.



Erkl. 422. Ist die Summe der Winkel, welche an einer der Grundlinien eines Trapezes anliegen, grösser als $2R$, wie z. B. in der Figur 261 die Winkelsumme $\alpha+\beta$, so fällt jede der durch die Endpunkte jener Grundlinie mit einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes gezogenen Parallelen (wie BG in der Figur 261) innerhalb des Trapezes; ist hingegen jene Winkelsumme kleiner als $2R$, wie z. B. in der Figur 262 die Winkelsumme $\alpha+\beta$, so fällt jede der durch die Endpunkte jener Grundlinie mit einer der nicht parallelen Seiten des Trapezes gezogenen Parallelen (wie BG in der Figur 262), ausserhalb des Trapezes.

Erkl. 423. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

(Siehe Formel 153 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

oder

$$\alpha) \ldots\ldots \overline{AH} = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$$

und

$$\operatorname{ctg}(2R-\beta) = \frac{\overline{BH_1}}{h}$$

oder

$$\beta) \ldots\ldots \overline{BH_1} = h \cdot \operatorname{ctg}(2R-\beta)$$

Da sich nun aus der Figur 263 ergibt, dass die nicht gegebene parallele Seite:

$$\overline{DC} = \overline{HH_1} \text{ oder } = \overline{AB} + \overline{BH_1} - \overline{AH}$$

ist, so erhält man in Rücksicht, dass $\overline{AB} = a$ ist und in Rücksicht der vorstehenden Gleichungen α) und β) für diese Seite $\overline{DC} (= c)$:

$$c = a + h \cdot \operatorname{ctg}(2R-\beta) - h \operatorname{ctg}\alpha$$

oder

$$\gamma) \ldots c = a + h[\operatorname{ctg}(2R-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha]$$

Da man nunmehr von dem Trapez die beiden parallelen Seiten a und c und die Höhe h kennt, so hat man nach der Erkl. 404:

$$F = \frac{a+c}{2} \cdot h$$

oder, in Rücksicht jener Gleichung γ):

$$F = \frac{a + a + h[\operatorname{ctg}(2R-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha]}{2} \cdot h$$

Reduziert man noch diese Gleichung und bringt man in bezug auf $\operatorname{ctg}(2R-\beta) - \operatorname{ctg}\alpha$ die in der Erkl. 423 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben:

$$\alpha = 2R - \beta$$

und

$$\beta = \alpha$$

setzt, so erhält man schliesslich:

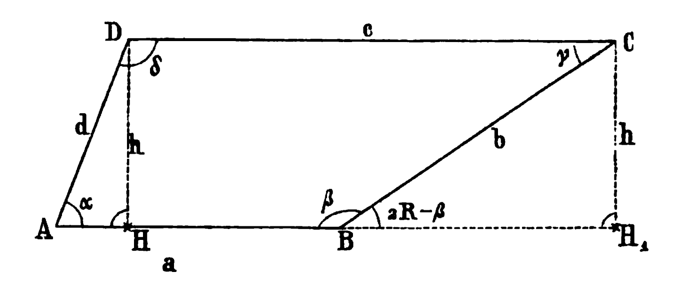
$$F = \frac{2a + h \cdot \frac{\sin[\alpha-(2R-\beta)]}{\sin(2R-\beta)\sin\alpha}}{2} \cdot h$$

oder

$$A_1) \ldots F = \left[a + \frac{h}{2} \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta-2R)}{\sin\alpha \sin\beta}\right] \cdot h$$

nämlich dieselbe Gleichung als die vorstehende Gleichung A).

Figur 263.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

305. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 304. — Seite 481—496
Mit 29 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 304. — Seite 481—496. Mit 29 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. Die Verlagshandlung.

Aufgabe 743. Von einem Trapez kennt man die Grundlinie $a = 324$ m, die anstossende Seite $d = 67$ m, sowie die der Grundlinie a anliegenden Winkel $\alpha = 42^0\ 30'\ 23''$ und $\beta = 56^0\ 11'\ 21''$; man soll hieraus den Inhalt des Trapezes berechnen.

Figur 264.

Gegeben: $\begin{cases} a = 324 \text{ m} \\ d = 67 \text{ m} \\ \alpha = 42^0\ 30'\ 23'' \\ \beta = 56^0\ 11'\ 21'' \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 264, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, und man zieht z. B. $BG \parallel AD$, so erhält man das Parallelogramm $ADGB$ und das Dreieck BCG; bezeichnet man den Inhalt jenes $\parallel$grs $ADGB$ mit f_1, den Inhalt des Dreiecks BCG mit f_2, so hat man hiernach für den gesuchten Inhalt F des Trapezes die Relation:

a) . . . $F = f_1 - f_2$ (siehe die Erkl. 421 u. 422)

Nach der in der Andeutung zur Aufgabe 675 aufgestellten Gleichung C) hat man für den Inhalt f_1 des $\parallel$grs $ADGB$:

b) . . . $f_1 = ad \cdot \sin\alpha$

Da man ferner von dem Dreieck BCG die Seite BG ($= d$) und die Winkel α und β kennt, so hat man nach der in der Auflösung der Aufgabe 117 aufgestellten Formel 95 für den Inhalt f_2 dieses Dreiecks:

c) . . . $f_2 = \dfrac{d^2 \cdot \sin(\alpha + \beta) \sin\alpha}{2 \sin\beta}$

Aus den Gleichungen a) bis c) ergibt sich nunmehr:

$$F = ad \sin\alpha - \frac{d^2 \sin(\alpha + \beta) \sin\alpha}{2 \sin\beta}$$

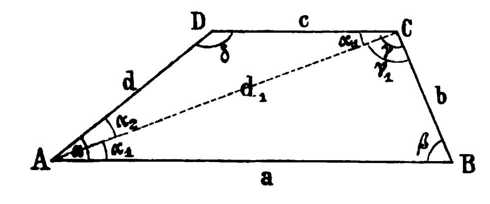
oder

A) . . . . $F = d \sin\alpha \left[a - \dfrac{d}{2} \cdot \dfrac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}\right]$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 744. Die grössere der Grundlinien eines Trapezes ist $a = 2{,}58$ m, eine der beiden andern Seiten ist $b = 2{,}24$ m, die Summe der beiden übrigen Seiten c und d ist $S = 3{,}66$ m und die Diagonale, welche zwei Endpunkte der Seiten c und d verbindet, ist $d_1 = 2{,}04$ m; wie gross sind die Winkel und die nicht gegebenen Seiten?

Figur 265.

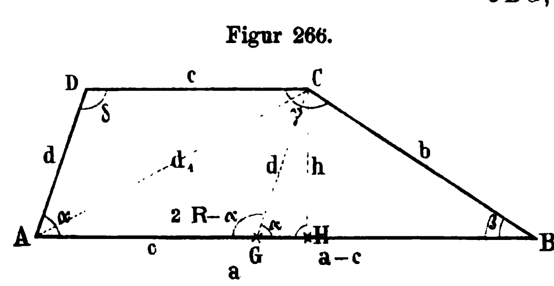


Gegeben: $\begin{cases} a = 2{,}58 \text{ m} \\ b = 2{,}24 \text{ m} \\ c + d = S = 3{,}66 \text{ m} \\ d_1 = 2{,}04 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus den gegebenen drei Seiten a, b und d_1 des Dreiecks ACB, siehe Figur 265, berechne man, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, die Winkel α_1 und β dieses Dreiecks. Ist hiernach der Winkel α_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck ADC die Seite AC ($= d_1$), den Winkel ACD ($= \alpha_1$) und gemäss der Aufgabe die Summe S der Seiten AD ($= d$) und DC ($= c$); man kann somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde, die Seiten c und d, sowie die Winkel δ und α_2 dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 745. Die Differenz der beiden parallelen Seiten a und c, von welchen $a > c$ ist, beträgt $D = 12,5$ m, eine der beiden andern Seiten ist $b = 14,8$ m; die Diagonale, welche einen Endpunkt der Seite b mit einem Endpunkt der Seite a verbindet, ist $d_1 = 17,6$ m lang und die Höhe h misst 10,6 m. Man soll hieraus die Winkel und die nicht gegebenen Seiten berechnen.

Figur 266.



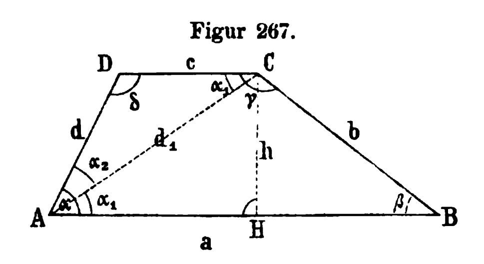
$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a - c = D = 12,5 \text{ m} \\ b = 14,8 \text{ m} \\ d_1 = 17,6 \text{ m} \\ h = 10,6 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 266, $ABCD$ das Trapez, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, und man zieht $CG \parallel AD$, so erhält man das schiefwinklige Dreieck CBG, von welchem die Seite $\overline{BG}$ ($= a - c$), die zu derselben gehörige Höhe CH ($= h$) und die Seite CB ($= b$) gegeben sind; man kann somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 346 gesagt ist, mittels jener gegebenen Stücke die Seite d und die Winkel α und β dieses Dreiecks berechnen. Sind hiernach diese Stücke berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACG die Seite AC ($= d_1$), die Seite d und den jener Seite gegenüberliegenden Winkel AGC ($= 2R - \alpha$) und man kann somit im weitern die Seite AG ($= c$) berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde. Die gesuchte Seite a findet man schliesslich mittels der gegebenen Beziehung:

$$a - c = D$$

Aufgabe 746. Die grössere der beiden parallelen Seiten a und c eines Trapezes, nämlich die Seite a misst 10 m, eine der anliegenden beiden andern Seiten, z. B. die Seite b ist 6 m lang; die Diagonale d_1, welche die beiden Endpunkte der Seiten a und b verbindet, ist 8 m lang und die Summe der beiden übrigen Seiten c und d ist $S = 12$ m. Wie gross ist der Flächeninhalt des Trapezes?

Figur 267.



$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 10 \text{ m} \\ b = 6 \text{ m} \\ d_1 = 8 \text{ m} \\ c + d = S = 12 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Nach der Erkl. 404 kann man den gesuchten Inhalt F mittels der Relation:

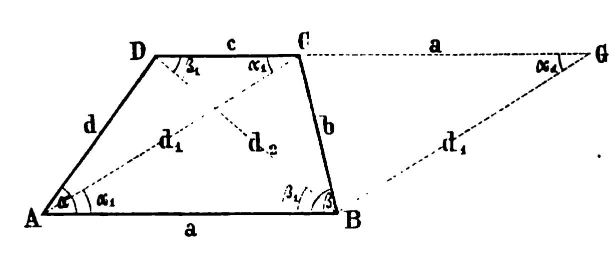
$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

berechnen. Da aber c und h nicht gegeben sind, so muss man zunächst diese Stücke bestimmen und dies kann man wie folgt:

Stellt, siehe Figur 267, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, so kennt man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck CBA die drei Seiten; man kann somit, wie in der Aufgabe 119 gezeigt wurde, aus diesen drei Seiten die Winkel α_1 und β jenes Dreiecks berechnen. Sind hiernach α_1 und β berechnet, so kann man aus b und β die Höhe h berechnen, und da man gemäss der Aufgabe von dem Dreieck ADC die Summe $(c + d)$ der Seiten AD und DC, die Seite d_1 kennt und den Winkel α_1 bereits berechnet hat, so kann man aus diesen Stücken, wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde, die Seiten c und d dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 747. Die Summe der beiden Grundlinien a und c eines Trapezes ist $S =$ 25,42 m, eine der beiden andern Seiten ist $b = 5{,}04$ m und die Diagonalen d_1 und d_2 messen bezw. 16,48 m und 11,91 m; man soll hieraus die vierte Seite und die Winkel berechnen.

Figur 268.

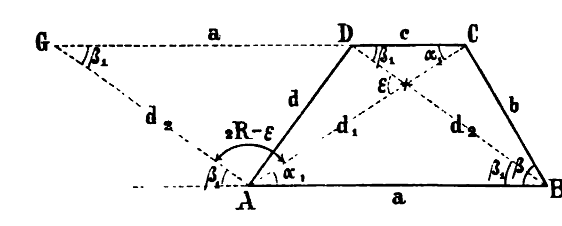


Gegeben: $\begin{cases} a + c = S = 25{,}42 \text{ m} \\ b = 5{,}04 \text{ m} \\ d_1 = 16{,}48 \text{ m} \\ d_2 = 11{,}91 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 268, $ABCD$ das gegebene Trapez, und man zieht z. B. zu der Diagonale d_1 die Parallele BG und verlängert DC, so erhält man das Dreieck DGB. Von diesem Dreieck kennt man die drei Seiten $DG\ (= a + c)$, $GB\ (= d_1)$ und $DB\ (= d_2)$; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt, aus diesen drei Seiten die Winkel α_1 und β_1 dieses Dreiecks bestimmen. Ist hiernach β_1 berechnet, so kennt man von dem Dreieck BDC die zwei Seiten $BC\ (= b)$, $BD\ (= d_2)$ und den der kleinern dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel β_1, man kann also somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt, die Seite c dieses Dreiecks berechnen, u. s. f.

Aufgabe 748. Die beiden Grundlinien a und c eines Trapezes sind bezw. 240 dm und 86 dm lang und der spitze Winkel ε, welchen die beiden Diagonalen bilden, ist $47^0\,14'\,8{,}4''$; wie gross sind die Winkel und die beiden andern Seiten dieses Trapezes, wenn eine der Diagonalen $d_1 = 218{,}5$ dm misst?

Figur 269.



Gegeben: $\begin{cases} a = 240 \text{ dm} \\ c = 86 \text{ dm} \\ \varepsilon = 47^0\,14'\,8{,}4'' \\ d_1 = 218{,}5 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 269, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, und man zieht parallel zu der nicht gegebenen Diagonale $BD\ (= d_2)$, die Linie AG und verlängert DC, so erhält man das ▱gr $GDBA$ und das schiefwinklige Dreieck GCA, von letzterem kennt man die Seite GC, dieselbe ist $= a + c$, die Seite $AC\ (= d_1)$ und den Winkel GAC, indem:

a) . . . $\sphericalangle GAC = 2R - (\alpha_1 + \beta_1)$

und

b) . . . $\varepsilon = \alpha_1 + \beta_1$

ist, wie sich leicht aus der Figur ergibt, und hiernach die Relation besteht:

c) . . . $\sphericalangle GAC = 2R - \varepsilon$

Nach der Sinusregel erhält man aus dem Dreieck GCA:

$$\frac{a + c}{\sin(2R - \varepsilon)} = \frac{d_1}{\sin\beta_1}$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . $\sin\beta_1 = \frac{d_1}{a + c} \cdot \sin\varepsilon$ (siehe Erkl. 66)

mittels welcher Gleichung man den Winkel β_1 berechnen kann. Ist hiernach β_1 berechnet,

so kann man nach Gleichung b) den Winkel α_1 berechnen, indem sich aus jener Gleichung:

B) . . . $\alpha_1 = \varepsilon - \beta_1$

ergibt.

Ist hiernach α_1 berechnet, so kennt man von jedem der Dreiecke ADC und ACB zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel. Die dritten Seiten d und b dieser Dreiecke, d. s. die gesuchten Seiten des Trapezes, kann man somit leicht nach den aus jenen Dreiecken mittels Anwendung des Projektionssatzes sich ergebenden Relationen:

C) . . . $d = \sqrt{d_1^2 + c^2 - 2 \cdot d_1 c \cdot \cos\alpha_1}$

und

D) . . . $b = \sqrt{d_1^2 + a^2 - 2 a d_1 \cdot \cos\alpha_1}$

berechnen.

Aufgabe 749. Die beiden parallelen Seiten eines Trapezes sind $a = 50{,}8$ m und $c = 15{,}04$ m; der Winkel zwischen der grössern dieser Seiten und einer der Diagonalen ist $\alpha_1 = 46^0\,3'\,21{,}5''$ und der spitze Winkel, welchen die beiden Diagonalen bilden, ist $\varepsilon = 64^0\,10'\,8{,}3''$; man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel berechnen.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} a = 50{,}8 \text{ m} \\ c = 15{,}04 \text{ m} \\ \alpha_1 = 46^0\,3'\,21{,}5'' \\ \varepsilon = 64^0\,10'\,8{,}3'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 748. Man berechne, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, aus der Seite GC ($= a + c$), dem Winkel α_1 und dem Winkel β_1 ($= \varepsilon - \alpha_1$) des Dreiecks AGC der Figur 269, zunächst die Seiten d_1 und d_2, d. s. die Diagonalen des Trapezes. Dann berechne man aus den Seiten a und d_1 und dem Winkel α_1 des Dreiecks ACB die Seite b und den Winkel β, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde; desgleichen berechne man aus c, d_1 und α_1 die Seite d und den Winkel δ des Dreiecks ADC.

Aufgabe 750. Die beiden Diagonalen d_1 und d_2 eines Trapezes messen zusammen $S = 280{,}4$ dm und bilden miteinander den Winkel $\varepsilon = 30^0\,22'\,12{,}7''$. Die Diagonale d_1 bildet ferner mit der Grundlinie a, welche 96,8 dm misst, einen Winkel $\alpha_1 = 17^0\,11'\,20{,}2''$; man soll hieraus die nicht bekannten Seiten und Winkel berechnen.

Figur 270.

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 = S = 280{,}4 \text{ dm} \\ \varepsilon = 30^0\,22'\,12{,}7 \\ a = 96{,}8 \text{ dm} \\ \alpha_1 = 17^0\,11'\,20{,}2'' \end{array} \right.$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 270, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, so ergibt sich aus dieser Figur leicht, dass:

$$\varepsilon = \alpha_1 + \beta_1$$

ist, dass man also den Winkel β_1 aus der Relation:

A) . . . $\beta_1 = \varepsilon - \alpha_1$

berechnen kann. Ferner ergibt sich aus dem Dreieck ADC nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AD}} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha_1}$$

oder

$$\text{a)} \ldots \frac{d_1}{d} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha_1}$$

In analoger Weise ergibt sich aus dem Dreieck ADB die Relation:

$$\text{b)} \ldots \frac{d_2}{d} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta_1}$$

Dividiert man die Gleichung a) durch Gleichung b), so erhält man die Proportion:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin\delta\cdot\sin\beta_1}{\sin\alpha_1\cdot\sin\alpha}$$

oder, da nach der Erkl. 413 α und δ Supplementwinkel sind, da also nach der Erkl. 66:

$$\sin\delta = \sin\alpha$$

ist:

$$\text{c)} \ldots \frac{d_1}{d_2} = \frac{\sin\beta_1}{\sin\alpha_1}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man weiter:

$$\frac{d_1+d_2}{d_1-d_2} = \frac{\sin\beta_1+\sin\alpha_1}{\sin\beta_1-\sin\alpha_1}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\text{d)} \ldots d_1+d_2 = S$$

ist, und da man nach der Erkl. 268 für den Quotienten rechts $\operatorname{tg}\frac{\beta_1+\alpha_1}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}$ setzen kann:

$$\frac{S}{d_1-d_2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1+\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{e)} \ldots d_1-d_2 = S\cdot\frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_1-\alpha_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_1+\alpha_1}{2}}$$

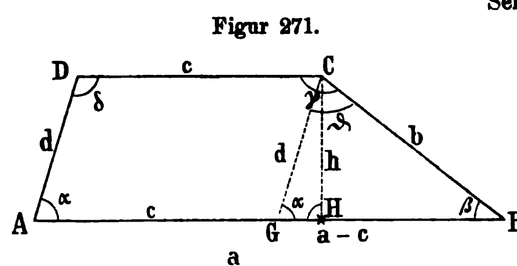
Mittels der Gleichungen d) und e) kann man nunmehr leicht jede der Diagonalen d_1 und d_2 berechnen. Sind hiernach d_1 und d_2 berechnet, so kann man aus den Dreiecken ACB und ABD, bezw. die Seiten b und d und die Winkel β und α berechnen; dann kann man im weiteren aus dem Dreieck BDC die Seite c berechnen.

Aufgabe 751. Von den beiden parallelen Seiten a und c eines Trapezes ist a um $D = 5{,}28$ m grösser als c; die beiden nicht parallelen Seiten b und d, von welchen $b > d$ ist, differieren um $D_1 = 2{,}84$ m, die Differenz der beiden der Seite a anliegenden Winkel α und β beträgt $26^0\,0'\,10{,}8''$ und die Diagonale d_1, welche durch den grössern dieser Winkel, durch α geht, ist 14,98 m lang. Man berechne die nicht gegebenen Seiten und Winkel.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a-c = D = 5{,}28\text{ m} \\ b-d = D_1 = 2{,}84\text{ m} \\ \alpha-\beta = 26^0\,0'\,10{,}8'' \\ d_1 = 14{,}98\text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 271, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, und man zieht $CG \parallel AD$, so erhält man das Dreieck

Figur 271.



GCA; von diesem Dreieck kennt man die Seite GB, dieselbe ist $a - c = D$, die Differenz der Seiten GC und CB, dieselbe ist $b - d = D_1$, und die Differenz der Winkel α und β; man kann somit, wie in der Andeutung zur Aufgabe 490 gesagt wurde, aus diesen gegebenen Stücken die Seiten b und d, sowie die Winkel α und β dieses Dreiecks, bezw. jenes Trapezes berechnen. Berechnet man dann aus b und β die Höhe $CH (= h)$ des Trapezes, so kann man bei der Berechnung der übrigen Stücke im weitern verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 742 gesagt wurde.

Aufgabe 752. In einem Trapez ist die Seite a um $D = 222$ m grösser als die zu ihr parallele Seite c, ferner ist die dritte Seite b um $D_1 = 72$ m grösser als die vierte Seite d, und die Differenz der zwei gegenüberliegenden Winkel α und γ ist $\vartheta = 70^0\ 42'\ 30''$; wie gross sind die Seiten und Winkel dieses Trapezes, dessen Inhalt $F = 54460$ qm beträgt?

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{l} a - c = D = 222 \text{ m} \\ b - d = D_1 = 72 \text{ m} \\ \gamma - \alpha = \vartheta = 70^0\ 42'\ 30'' \\ \quad F = 54460 \text{ qm} \end{array} \right.$$

Andeutung. Zieht man in dem Trapez $ABCD$, siehe Figur 271, welches das gegebene Trapez vorstellen soll, $CG \parallel AD$, so erhält man das Dreieck CBG.

Da man von diesem Dreieck die Seite GB (dieselbe ist $= a - c$, also gemäss der Aufgabe $= D$), den derselben gegenüberliegenden Winkel ϑ (derselbe ist, wie in der Andeutung zur Aufgabe 736 gezeigt wurde $= \gamma - \alpha$) und die Differenz der Seiten CB und CG (dieselbe ist $= b - d$, also gemäss der Aufgabe $= D_1$) kennt, so kann man mittels dieser gegebenen Stücke, wie in der Andeutung zur Aufgabe 487 gesagt wurde, die Seiten b und d, sowie die Winkel α und β dieses Dreiecks berechnen.

Zur Berechnung der parallelen Seiten a und c benutze man die in der Aufgabe gegebene Beziehung:

$$a - c = D$$

und, in Rücksicht, dass der Inhalt F des Trapezes gegeben ist, und dass die Höhe h des Trapezes leicht in die bereits berechneten Stücke b und β oder in d und α ausgedrückt werden kann, die aus der in der Erkl. 404 aufgestellten Formel:

$$F = \frac{a + c}{2} \cdot h$$

sich ergebende Beziehung:

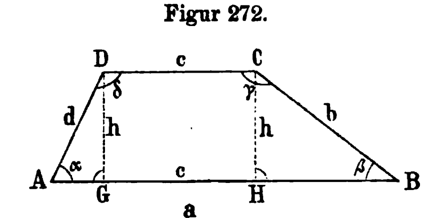
$$a + c = \frac{2F}{h}$$

Aufgabe 753. Der Umfang eines Trapezes ist $u = 10{,}04$ m, die Höhe h desselben ist $= 1{,}41$ m und die beiden gegenüberliegenden Winkel α und γ sind bezw. $= 24^0$

$$\text{Gegeben:} \left\{ \begin{array}{r} a + b + c + d = u = 10{,}04 \text{ m} \\ h = 1{,}41 \text{ m} \\ \alpha = 24^0\ 32'\ 16{,}6'' \\ \gamma = 122^0\ 14'\ 10{,}5'' \end{array} \right.$$

32′ 16,6″ und 122° 14′ 10,5″. Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten dieses Trapezes berechnen.

Figur 272.



Erkl. 424. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

(Siehe Formel 158 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Andeutung. Stellt, siehe Figur 272, $ABCD$ das gegebene Trapez dar, so hat man zur Berechnung der Winkel β und δ desselben nach der Erkl. 413 bezw. die Relation:

A) . . . $\beta = 180^0 - \gamma$

und

B) . . . $\delta = 180^0 - \alpha$

Die gesuchten Seiten kann man wie folgt berechnen:

Fällt man die Perpendikel DG und CH, so entstehen die rechtwinkligen Dreiecke ADG und HCB, aus denselben erhält man bezw.:

C) . . . $d = \frac{h}{\sin\alpha}$

und (siehe die Erkl. 42)

D) . . . $b = \frac{h}{\sin\beta}$

nach welchen Gleichungen man die Seiten b und d berechnen kann. Ferner erhält man aus diesen Dreiecken:

a) . . . $\overline{AG} = h \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

und (s. Erkl. 43)

b) . . . $\overline{BH} = h \cdot \operatorname{ctg}\beta$

Da nun:

$$\overline{AG} + \overline{GH} + \overline{HB} = a$$

oder

$$\overline{AG} + c + \overline{HB} = a$$

also

$$\overline{AG} + \overline{HB} = a - c$$

ist, so erhält man hieraus und in Rücksicht der Gleichungen a) und b):

$$a - c = h\operatorname{ctg}\alpha + h\operatorname{ctg}\beta$$

oder

$$a - c = h(\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 424:

E) . . . . $a - c = h \cdot \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$

nach welcher Gleichung man die **Differenz** der Seiten a und c berechnen kann. Da noch gemäss der Aufgabe die Relation besteht:

$$a + b + c + d = u$$

und sich hieraus:

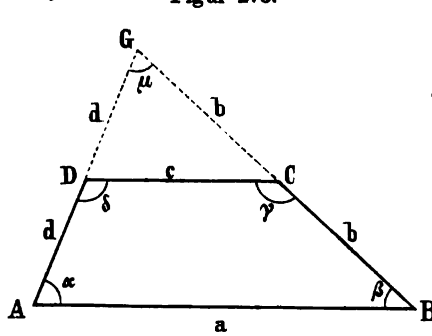
F) . . . . $a + c = u - (b + d)$

ergibt, und man nach dieser Gleichung in Rücksicht der mittels der Gleichungen C) und D) für b und d berechneten Werte die Summe der Seiten a und c berechnen kann, so ist es im weiteren leicht, aus den Gleichungen E) und F) die gesuchten Seiten a und c zu bestimmen.

Aufgabe 754. In einem Paralleltrapez kennt man die längere Parallelseite $a = 8$ m und die daranliegenden Winkel $\alpha = 73^0 18' 2,75''$ und $\beta = 63^0 26' 5,82''$. Die Verlängerungen der nicht parallelen Seiten b und d sind bis zu ihrem Durchschnittspunkt bezw. gleich diesen nicht parallelen Seiten; man soll aus diesen Angaben den Inhalt des Paralleltrapezes berechnen.

Gegeben: $a = 8$ m, $\alpha = 73^0 18' 2,75''$, $\beta = 63^0 26' 5,82''$, eine Beziehung zwischen den nicht parallelen Seiten b und d und deren Verlängerungen.

Figur 273.



Andeutung. Stellt, siehe Fig. 273, $ABCD$ das Trapez dar, welches die Bedingungen der Aufgabe erfüllt, so ergibt sich aus der Figur für den gesuchten Inhalt F des Trapezes, wenn man den Inhalt des Dreiecks AGB mit f_1 und den Inhalt des Dreiecks DGC mit f_2 bezeichnet, die Relation:

a) . . . $F = f_1 - f_2$

Da nun nach der Erkl. 151 für den Inhalt f_1 des Dreiecks AGB die Relation:

b) . . . $f_1 = \frac{2d \cdot 2b}{2} \cdot \sin\mu$

und für den Inhalt f_2 des Dreiecks DGC die analoge Relation:

c) . . . $f_2 = \frac{d \cdot b}{2} \cdot \sin\mu$

besteht, so erhält man aus den Gleichungen a) bis c):

$$F = \frac{4d \cdot b}{2} \cdot \sin\mu - \frac{d \cdot b}{2} \cdot \sin\mu$$

oder

d) . . . $F = \frac{3}{2} d \cdot b \cdot \sin\mu$

Aus dem Dreieck AGB ergeben sich ferner nach der Sinusregel die Relationen:

$$\frac{2d}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\mu}$$

und

$$\frac{2b}{a} = \frac{\sin\alpha}{\sin\mu}$$

und aus denselben erhält man:

e) . . . $d = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\mu}$

und

f) . . . $b = \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\mu}$

Setzt man die Werte für d und b aus den Gleichungen e) und f) in Gleichung d), so geht dieselbe über in:

$$F = \frac{3}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\mu} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\mu} \cdot \sin\mu$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht, dass μ und $\alpha + \beta$ Supplementwinkel sind, dass man also nach der Erkl. 66:

$$\sin\mu = \sin(\alpha + \beta)$$

setzen kann:

A) . . $F = \frac{3}{8} a^2 \cdot \frac{\sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken a, α und β berechnen kann.

Anmerkung 82. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung von Trapezen direkt oder indirekt gefordert wird, sind noch in späteren Abschnitten enthalten.

i) Aufgaben über das Sehnenviereck und das Tangentenviereck.

Anmerkung 83. Da man unter einem Sehnenviereck ein solches Viereck versteht, welches die Eigenschaft hat, dass man um dasselbe einen Kreis beschreiben kann, dass also dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind; und da man ferner unter einem Tangentenviereck ein solches Viereck versteht, welches die Eigenschaft hat, dass man in dasselbe einen Kreis beschreiben kann, dass also dessen Seiten Tangenten eines Kreises sind, und da man sich hiernach sowohl das Sehnenviereck als auch das Tangentenviereck stets in Verbindung mit einem Kreis zu denken hat, so sind Aufgaben über das Sehnenviereck und über das Tangentenviereck an dieser Stelle dieses Lehrbuchs nicht aufgenommen. Solche Aufgaben findet man in den entsprechenden späteren Abschnitten, welche über den Kreis in Verbindung mit dem Viereck handeln.

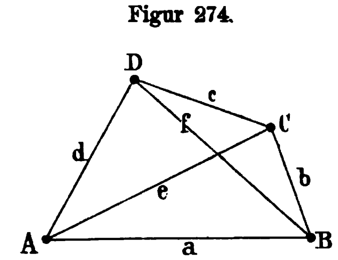
---

k) Aufgaben über das allgemeine Viereck oder das Trapezoid.

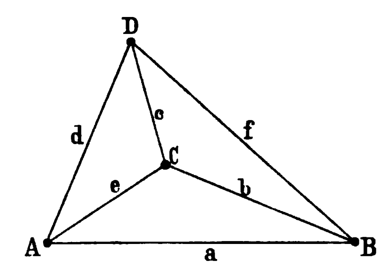
Anmerkung 84. Unter einem ebenen Viereck im weitesten Sinn oder unter einem ebenen „vollständigen Viereck" versteht man das System aller geraden Verbindungslinien, welches man erhält, wenn man vier gegebene, in ein und derselben Ebene, aber nicht in gerader Linie liegende Punkte, zu je zweien verbindet.

Sind z. B., siehe die Figur 274 oder die Figur 275, die vier Punkte A, B, C und D gegeben, und man verbindet A mit B, C und D, ebenso B mit C und D, und C mit D, so repräsentiert das System aller der Verbindungslinien AB, AC, AD, BC, BD und CD, aus welchen jede jener Figuren besteht, ein sogenanntes „vollständiges Viereck". Die vier gegebenen Punkte A, B, C und D heissen die Ecken oder die Spitzen des durch das System jener sechs Verbindungslinien dargestellten vollständigen Vierecks.

Figur 274.



Figur 275.



Anmerkung 85. Unter einem ebenen Viereck im engeren Sinn oder unter einem ebenen „einfachen Viereck" versteht man das System aller geraden Verbindungslinien, welches man erhält, wenn man vier gegebene, in ein und derselben Ebene, aber nicht in gerader Linie liegende Punkte, in irgend einer zu wählenden Aufeinanderfolge, so durch Gerade stetig verbindet, dass die hierdurch entstehende gebrochene Linie vom letzten der vier Punkte wieder zu dem als ersten gewählten Punkt, dem Anfangspunkt dieser stetig fortlaufenden gebrochenen Linie, zurückkehrt.

Sind z. B., siehe die Figuren 274^{a} bis 274^{c} oder die Figuren 275^{a} bis 275^{c}, die vier Punkte A, B, C und D gegeben, so kann man dieselben durch eine stetig fortlaufende und wieder, zu dem als Anfangspunkt gewählten Punkt zurückkehrende gebrochene Linie verbinden, und zwar:

a) in der Aufeinanderfolge: A, B, C, D und A, wie die Figuren 274^{a} und 275^{a} zeigen,

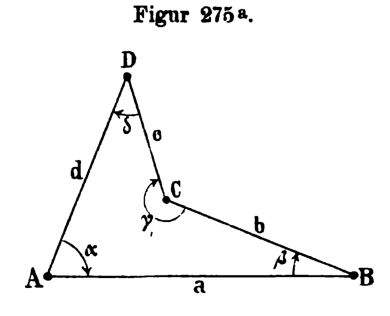
b) in der Aufeinanderfolge: A, C, B, D und A, wie die Figuren 274^{b} und 275^{b} zeigen,

oder

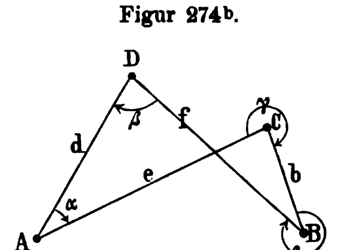
c) in der Aufeinanderfolge: A, B, D, C und A, wie die Figuren 274^{c} und 275^{c} zeigen.

Bei jeder anders gewählten Aufeinanderfolge der vier gegebenen Punkte und entsprechender Verbindung derselben, wird man Figuren erhalten, welche unter jenen Figuren bereits enthalten sind.

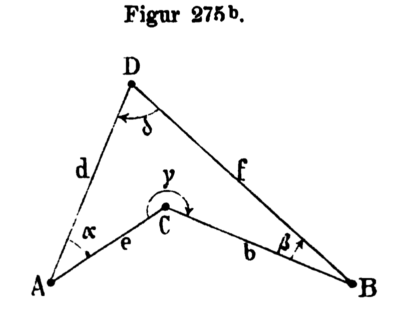
Figur 274a.



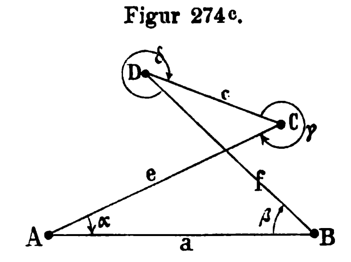
Figur 275a.



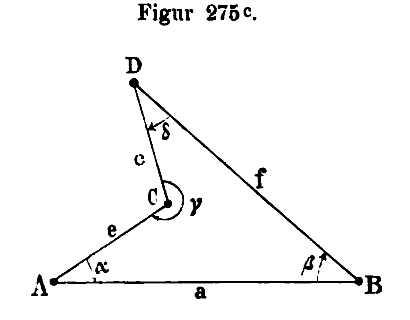
Figur 274b.



Figur 275b.



Figur 274c.



Figur 275c.

Die durch die Figuren 274^b und 274^c dargestellten einfachen Vierecke sind sogenannte Vierecke mit Doppelpunkten, d. s. solche Vierecke, in welchen sich zwei nicht aneinanderstossende Seiten (oder wie man auch zu sagen pflegt, in welchem sich die Umfänge) in einem Punkt schneiden.

Anmerkung 36. Vergleicht man die durch die Figuren 274 u. 275 dargestellten vollständigen Vierecke, bezw. mit den durch die Figuren 274^a bis 274^c und durch die Figuren 275^a bis 275^c dargestellten einfachen Vierecken, so ergibt sich aus dieser Vergleichung, dass je drei der zusammengehörigen einfachen Vierecke in dem betreffenden vollständigen Viereck enthalten sind. Die in den einfachen Vierecken fehlenden Verbindungslinien, ... dieselben zu vollständigen Vierecken ergänzen, heissen die Diagonalen dieser ... Vierecke, so sind z. B. in den Figuren 274^a und 275^a die gedachten Ver... nien AC und BD die Diagonalen derselben, in den Figuren 274^b und 275^b ... gedachten Verbindungslinien AB und CD die Diagonalen, und in den ... 4c und 275^c sind die gedachten Verbindungslinien AD und BC die Diago... ser einfachen Vierecke. Die Verbindungslinien, durch welche diese einfachen

Vierecke gebildet werden, heissen die Seiten derselben. Denkt man sich jede Seite eines einfachen Vierecks um den Punkt, welchen sie mit der nächstfolgenden Seite gemeinschaftlich hat, in einerlei Sinn, z. B. stets in dem durch die Bewegung der Zeiger einer Uhr ausgedrückten Drehungssinn, so lange gedreht, bis sie mit dieser zusammenfällt, so bestimmt die Grösse dieser Drehung bezw. den von zwei unmittelbar aufeinander folgenden Seiten gebildeten Winkel des betreffenden Vierecks.

Anmerkung 87. Denkt man sich in den durch die Figuren 274ᵃ bis 275ᶜ dargestellten einfachen Vierecken Diagonalen gezogen, so stellen die hierdurch erhaltenen Liniensysteme die durch die Figur 274, bezw. durch die Figur 275 dargestellten vollständigen Vierecke dar. Denkt man sich ferner in den durch die Figuren 274ᵃ und 275ᵃ dargestellten einfachen Vierecken die Diagonalen gezogen, und betrachtet man diese beiden gedachten Diagonalen als Seiten, und je zwei nicht aneinanderstossende Seiten dieser Vierecke als Diagonalen, so erhält man durch diese Vertauschung die durch die Figuren 274ᵇ und 274ᶜ, bezw. die durch die Figuren 275ᵇ und 275ᶜ dargestellten einfachen Vierecke. Hat man also ein einfaches Viereck zu berechnen, wie es durch die Figur 274ᵃ oder durch die Figur 275ᵃ dargestellt ist, und man zieht bei dieser Berechnung auch die Diagonalen und die Winkel, welche diese Diagonalen mit den Seiten dieses Vierecks bilden, mit in Betracht, so kann man mit jenem einfachen Viereck zugleich auch die beiden andern einfachen, bezw. durch die Figuren 274ᵇ und 274ᶜ und durch die Figuren 275ᵇ und 275ᶜ dargestellten Vierecke berechnen, indem man hierbei nur zu berücksichtigen hat, dass jene Diagonalen Seiten dieser Vierecke, dann aber je zwei nicht aneinanderstossende Seiten jener Vierecke Diagonalen dieser Vierecke sind; und dass die konvexen Winkel (d. s. Winkel, die überstumpf oder grösser als $2R$ sind) der durch dieFiguren 274ᵇ bis 275ᶜ dargestellten Vierecke, durch deren Scheitelwinkel, welches konkave Winkel sind (d. s. Winkel, die kleiner als $2R$ sind) ersetzt werden können.

Anmerkung 88. Der Studierende sei an dieser Stelle noch auf den Unterschied aufmerksam gemacht, der zwischen einem Viereck und einem Vierseit besteht.

Man versteht nämlich:

a) unter einem ebenen Vierseit im weitesten Sinn oder unter einem ebenen „vollständigen Vierseit“ das System von allen möglichen Durchschnittspunkten, welche durch die wechselseitige Begegnung von vier in einer Ebene liegenden geraden Linien entstehen.

Sind z. B., siehe die Figur 276 oder die Figur 277, die vier geraden Linien a, b, c und d gegeben, und man denkt sich dieselben so verlängert, bis sie sich wechselseitig schneiden, so stellt das System der sämtlichen somit erhaltenen Durchschnittspunkte A, B, C, D, C_1 und D_1 ein vollständiges Vierseit dar. Die vier gegebenen Geraden heissen die Seiten des durch das System jener sechs Durchschnittspunkte dargestellten vollständigen Vierseits.

Figur 276.

Figur 277.

und

b) unter einem ebenen Vierseit im engeren Sinn, oder unter einem ebenen „einfachen Vierseit“ versteht man das System von allen möglichen Durchschnittspunkten, welche man erhält, wenn man jede der vier in einer Ebene liegenden Geraden in irgend einer gewählten Aufeinanderfolge

so verlängert denkt, dass jede nur die nächstfolgende Gerade und die letzte nur die als erste gewählte Gerade schneidet.

Sind z. B., siehe die Figuren 276a bis 276c oder die Figuren 277a bis 277c, die vier Geraden *a*, *b*, *c* und *d* gegeben, so kann man sich diese Figuren dadurch entstanden denken, dass diese vier Geraden in der erwähnten Weise verlängert wurden und zwar:

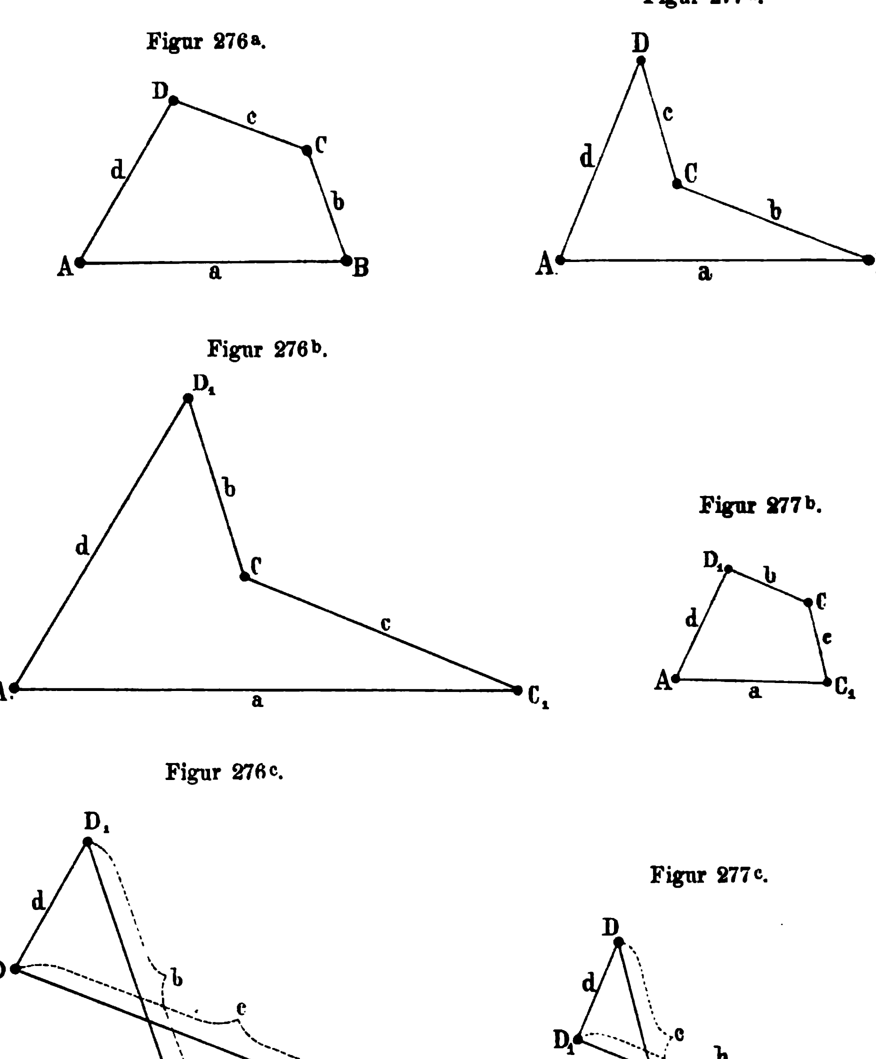
a) in der Aufeinanderfolge *a*, *b*, *c* und *d*, siehe die Figuren 276a und 277b,

b) in der Aufeinanderfolge *a*, *c*, *b* und *d*, siehe die Figuren 276b und 277b,

und

c) in der Aufeinanderfolge *a*, *b*, *d* und *c*, siehe die Figuren 276c und 277c.

Bei jeder anders gewählten Aufeinanderfolge der vier gegebenen Geraden und entsprechender Verlängerung derselben, wird man Figuren erhalten, welche unter jenen Figuren bereits enthalten sind.



Figur 276a. Figur 277a. Figur 276b. Figur 277b. Figur 276c. Figur 277c.

Anmerkung 39. Vergleicht man die durch die Figuren 276 und 277 dargestellten vollständigen Vierseite, bezw. mit den durch die Figuren 276[a] bis 276[c] und durch die Figuren 277[a] bis 277[c] dargestellten einfachen Vierseiten, so ergibt sich aus dieser Vergleichung, dass je drei der zusammengehörigen einfachen Vierseite in dem betreffenden vollständigen Vierseit enthalten sind.

Vergleicht man ferner die durch die Figuren 276 und 277 dargestellten vollständigen Vierseite mit den durch die Figuren 274 und 275 dargestellten vollständigen Vierecken, so findet man, dass dieselben wesentlich verschieden sind. Ausführliches über die Unterschiede von Vierecken und Vierseiten, überhaupt von Vielecken und Vielseiten findet man in den Lehrbüchern dieser Encyklopädie, welche über Planimetrie und Polygonometrie handeln.

Vergleicht man ferner die durch die Figuren 276[a] bis 277[c] dargestellten einfachen Vierseite mit den durch die Figuren 274[a] bis 275[c] dargestellten einfachen Vierecken, so wird man einen wesentlichen Unterschied derselben nicht erkennen und aus diesem Grund können die Namen einfaches Viereck und einfaches Vierseit vertauscht werden.

Anmerkung 40. Wie in der Anmerkung 17 bereits erwähnt und wie in den Aufgaben dieses Abschnitts gezeigt wird, erfolgt die Berechnung eines Vierecks im allgemeinen dadurch, dass man dasselbe durch eine Diagonale oder durch die beiden Diagonalen in Dreiecke zerlegt, oder dass man auch durch anderweite Hülfslinien solche Dreiecke herstellt, welche durch die gegebenen Stücke unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind, und dass man dann mittels der aus diesen Dreiecken sich ergebenden trig. Beziehungen, die gesuchten Stücke des Vierecks direkt oder indirekt zu berechnen sucht.

Bei der Zerlegung eines Vierecks durch seine beiden Diagonalen können im allgemeinen folgende Fälle stattfinden:

a) Zwei von den vier Dreiecken, in welche das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, sind durch die gegebenen Stücke unmittelbar trigonometrisch bestimmt.

In diesem Fall können die nicht gegebenen Stücke des Vierecks durch einfache trigonometrische Dreiecksberechnung bestimmt werden. Man nennt deshalb solche Aufgaben, deren Lösung auf diese Weise möglich ist, „trigonometrische Vierecksaufgaben". Solche Aufgaben sind z. B. die nachfolgenden Aufgaben 755 bis 761.

b) Nur eins der unter a) erwähnten Dreiecke ist unmittelbar durch die gegebenen Stücke trigonometrisch bestimmt.

und

c) Keins der unter a) erwähnten Dreiecke ist unmittelbar trigonometrisch bestimmt.

In den unter b) und c) erwähnten Fällen können die gesuchten Stücke des Vierecks aus jenen Dreiecken direkt nicht berechnet werden.

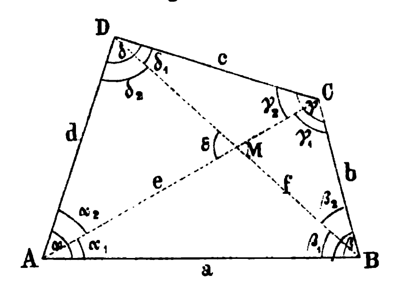
Zur Berechnung der gesuchten Stücke muss man in solchen Fällen mittels anderweiter Hülfslinien und entsprechend einzuführender Hülfsgrössen solche Relationen zwischen den Bestimmungsstücken des Vierecks und auch der eingeführten Hülfsgrössen aufstellen, aus welchen man die gesuchten Stücke berechnen kann. Da also solche Relationen aufgestellt werden müssen, in welchen nicht allein Stücke eines Dreiecks, sondern Stücke eines Vierecks enthalten sind, so nennt man Aufgaben, deren Lösung mittels solcher Relationen ausgeführt werden muss, tetragonometrische Aufgaben, abgeleitet von dem griechischen Wort „Tetragon" d. h. Viereck.

Anmerkung 41. Die in diesem Abschnitt enthaltenen Aufgaben beziehen sich auf solche einfache Vierecke (oder einfache Vierseite), welche nur konkave Winkel (d. s. Winkel, die kleiner als $2R$ sind) enthalten, und welche man dementsprechend konkave einfache Vierecke oder auch Trapezoide nennt, indem, wie in der Anmerkung 36 erwähnt, die Berechnung anderer einfacher Vierecke mit konvexen Winkeln der Berechnung jener Vierecke im allgemeinen analog ist, und man in der diesbezüglichen Berechnung nur den Scheitelwinkel des betreffenden konvexen Winkels einzuführen und ferner das nur zu berücksichtigen hat, was über die Vertauschung der Diagonalen und Seiten in der Anmerkung 36 gesagt ist, und man sich ausserdem auch zur Berechnung ganz beliebiger Vierecke und Vielecke für praktische Zwecke ganz allgemeiner Methoden bedient, welche in dem Lehrbuch dieser Encyklopädie, das über die Polygonometrie handelt, vorgeführt werden,

Zur Berechnung eines Vierecks müssen, wie schon in der Anmerkung 16 erwähnt, und wie in der Auflösung der Aufgabe 767 gezeigt wird, im allgemeinen fünf voneinander

unabhängige Stücke gegeben sein, unter welchen sich nicht vier Winkel befinden dürfen, indem der vierte Winkel eines Vierecks von den der drei andern abhängig ist, da sich die vier Winkel eines konkaven einfachen Vierecks zu $4R$ (= 360°) ergänzen. Was die Bezeichnung eines konkaven einfachen Vierecks anbetrifft, so ist in diesen und den folgenden Abschnitten, in welchen Vierecke vorkommen, die Bezeichnung beibehalten, wie sie aus der Figur 278 ersichtlich ist.

Figur 278.



Aufgabe 755. In dem durch die Fig. 278 dargestellten Viereck messen die gegenüberliegenden Seiten a und c bezw. = 36,06 m und 64,03 m, ferner sei die Diagonale e = 60 m lang und die beiden Winkel α_1 und γ_2, welche die Diagonale e mit den Seiten a und c bildet, seien bezw. = 56° 20′ 18″ und 49° 50′ 44″. Man soll die nicht gegebenen Stücke dieses Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 36{,}06 \text{ m} \\ c = 64{,}03 \text{ m} \\ e = 60 \text{ m} \\ \alpha_1 = 56^0\, 20'\, 18'' \\ \gamma_2 = 49^0\, 50'\, 44'' \end{cases}$

Andeutung. Von jedem der Dreiecke, in welche das gegebene Viereck durch die Diagonale e zerlegt wird, kennt man gemäss der Aufgabe zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die gesuchten Seiten und Winkel berechnen.

Aufgabe 756. In dem durch die Fig. 278 dargestellten Viereck $ABCD$ messe:

$$a = 450 \text{ dm}$$
$$c = 110 \text{ dm}$$
$$\alpha = 132^0\, 8'\, 10''$$
$$\delta = 51^0\, 32'\, 8{,}4''$$
$$\alpha_2 = 70^0\, 0'\, 24''$$

man soll die nicht gegebenen Stücke dieses Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 450 \text{ dm} \\ c = 110 \text{ dm} \\ \alpha = 132^0\, 8'\, 10'' \\ \delta = 51^0\, 32'\, 8{,}4'' \\ \alpha_2 = 70^0\, 0'\, 24'' \end{cases}$

Andeutung. Von dem Dreieck ACD, siehe Figur 278, kennt man die Seite c und die beiden Winkel δ und α_2; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite e und den Winkel γ_2 berechnen. Ist hiernach die Seite e berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seiten e und a und den Winkel α_1, derselbe ist nämlich $= \alpha - \alpha_2$; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite b und die Winkel β und γ_1 berechnen.

Aufgabe 757. Die vier Seiten a, b, c und d eines Vierecks sind bezw. 640, 781, 922 und 806 dm lang und die Diagonale, welche die Endpunkte der beiden aneinanderstossenden Seiten a und b verbindet ist e = 100 dm lang; wie gross sind die Winkel und welches ist der Inhalt dieses Vierecks?

Gegeben: $\begin{cases} a = 640 \text{ dm} \\ b = 781 \text{ dm} \\ c = 922 \text{ dm} \\ d = 806 \text{ dm} \\ e = 100 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Von jedem der Dreiecke, in welche das gegebene Viereck durch die

gegebene Diagonale e zerlegt wird, kennt man die drei Seiten; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, die Winkel und den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke berechnen.

Aufgabe 758. Die Seiten a und b eines Vierecks messen bezw. 0,2 m und 0,4 m. der von denselben eingeschlossene Winkel β beträgt $78^0\,33'\,20{,}4''$ und die beiden Winkel α_2 und γ_2, welche die beiden andern Seiten mit der durch ihren Endpunkt gehenden Diagonale e bilden, betragen $66^0\,32'\,10''$ und $58^0\,0'\,10{,}4''$; man soll die nicht gegebenen Stücke des Vierecks berechnen.

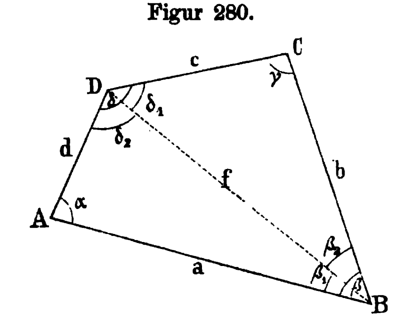
Figur 279.

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} a = 0{,}2\text{ m} \\ b = 0{,}4\text{ m} \\ \beta = 78^0\,33'\,20{,}4'' \\ \alpha_2 = 66^0\,32'\,10'' \\ \gamma_2 = 58^0\,0'\,10{,}4'' \end{array}\right.$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 279, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, so kennt man von dem Dreieck ABC gemäss der Aufgabe die Seiten a und b und den von denselben eingeschlossenen Winkel β; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite e und die Winkel α_1 und γ_1 dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach die Seite e berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACD die Seite e und die derselben anliegenden Winkel α_2 und γ_2; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, hieraus die Seiten c und d, sowie den Winkel δ berechnen.

Aufgabe 759. Eine der Diagonalen eines Vierecks ist $f = 87{,}55$ m lang und die Winkel, welche diese Diagonale mit den vier Seiten bildet sind, siehe Figur 280, bezw. $\beta_1 = 37^0\,49'\,24''$, $\beta_2 = 40^0\,0'\,10''$, $\delta_1 = 63^0\,32'\,8{,}4''$ und $\delta_2 = 64^0\,12'\,22''$; man soll die vier Seiten des Vierecks berechnen.

Figur 280.



$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} f = 87{,}55\text{ m} \\ \beta_1 = 37^0\,49'24'' \\ \beta_2 = 40^0\,0'\,10'' \\ \delta_1 = 63^0\,32'\,8{,}4'' \\ \delta_2 = 64^0\,12'\,22'' \end{array}\right\}\text{(siehe Figur 280)}$$

Andeutung. Von jedem der Dreiecke, in welche die Diagonale f das gegebene Viereck $ABCD$ zerlegt, siehe Figur 280, kennt man eine Seite (f) und die daran liegenden Winkel; man kann somit die gesuchten Seiten berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 760. Eine der Diagonalen eines Vierecks ist $f = 72$ m lang und die Winkel, welche dieselbe mit den anliegenden Seiten bildet, sind an dem einen Endpunkt $\beta_1 =$

$$\text{Gegeben:}\left\{\begin{array}{l} f = 72\text{ m} \\ \beta_1 = 45^0\,20' \\ \beta_2 = 26^0\,30'\,10'' \\ \delta_1 = 36^0\,12'\,30'' \\ \delta_2 = 35^0\,0'\,40'' \end{array}\right\}\text{(siehe Figur 280)}$$

$45^0\,20'$ und $\beta_2 = 26^0\,30'\,10''$; an dem andern Endpunkt $\delta_1 = 36^0\,12'\,30''$ und $\delta_2 = 35^0\,0'\,40''$; wie gross ist der Inhalt dieses Vierecks?

Andeutung. Von jedem der Dreiecke ABD und BCD, in welche, siehe Fig. 280, die gegebene Diagonale f das Viereck zerlegt, kennt man eine Seite, nämlich die Seite BD ($= f$) und die derselben anliegenden Winkel. Für den Inhalt F_1 des Dreiecks ABD hat man somit nach der in der Erklärung 130 aufgestellten Formel 104:

$$F_1 = \frac{f^2 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\delta_2}{2\sin(\beta_1 + \delta_2)}$$

und für den Inhalt F_2 des andern Dreiecks BCD hat man nach derselben Formel:

$$F_2 = \frac{f^2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\delta_1}{2\sin(\beta_2 + \delta_1)}$$

und hieraus ergibt sich für den gesuchten Inhalt F des Vierecks:

$$F = \frac{f^2 \cdot \sin\beta_1 \cdot \sin\delta_2}{2\sin(\beta_1 + \delta_2)} + \frac{f_2 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin\delta_1}{2\sin(\beta_2 + \delta_1)}$$

oder

$$A) \ldots F = \frac{f^2}{2} \cdot \left[\frac{\sin\beta_1 \sin\delta_2}{\sin(\beta_1 + \delta_2)} + \frac{\sin\beta_2 \cdot \sin\delta_1}{\sin(\beta_2 + \delta_1)}\right]$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 761. Die zwei aneinanderstossenden Seiten a und b eines Vierecks sind bezw. 92 und 105 dm lang, die die Endpunkte dieser Seiten verbindende Diagonale e misst 142 dm und die Winkel, welche diese Diagonale mit den beiden andern Seiten d und c bildet, sind bezw. $\alpha_2 = 60^0\,10'\,18{,}2''$ und $\gamma_2 = 44^0\,0'\,20''$; man berechne die nicht gegebenen Stücke.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 92 \text{ dm} \\ b = 105 \text{ dm} \\ e = 142 \text{ dm} \\ \alpha_2 = 60^0\,10'\,18{,}2'' \\ \gamma_2 = 44^0\,0'\,20'' \end{cases}$$

Andeutung. Von dem einen der Dreiecke, in welche die Diagonale e das Viereck zerlegt, siehe Figur 279, kennt man die drei Seiten a, b und e, von dem andern die Seite e und die beiden anliegenden Winkel α_2 und γ_2; man kann somit, wie in den Auflösungen der Aufgaben 119 und 117 gezeigt wurde, die Seiten und Winkel dieser Dreiecke berechnen.

Aufgabe 762. Man soll den Inhalt des durch die Figur 279 dargestellten Vierecks berechnen, wenn in demselben:

$$\begin{aligned} a &= 423{,}032 \text{ m} \\ b &= 1044 \text{ m} \\ c &= 1543 \text{ m} \\ \beta &= 86^0\,12'\,50'' \\ \delta &= 36^0\,24' \end{aligned}$$

ist.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 423{,}032 \text{ m} \\ b = 1044 \text{ m} \\ c = 1543 \text{ m} \\ \beta = 86^0\,12'\,50'' \\ \delta = 36^0\,24' \end{cases}$$

Andeutung. Zieht man in dem durch die Figur 279 dargestellten Viereck die Diagonale AC ($= e$), so entstehen die beiden Dreiecke ABC und CDA. Da man von dem Dreieck ABC gemäss der Aufgabe die Seiten AB ($= a$) und BC ($= b$) und den von denselben eingeschlossenen Winkel β kennt, so kann man, analog wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite AC ($= e$), die Winkel α_1 und γ_1, sowie den Inhalt dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach die Seite e berechnet, so kennt man von dem

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen**, **das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium**, **das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

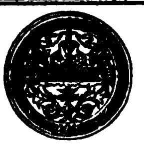
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

306. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | **Ebene Trigonometrie.** Forts. v. Heft 305. — Seite 497—512. Mit 11 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 305. — Seite 497—512. Mit 11 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das Viereck, Fortsetzung. — Aufgaben über das allgemeine Viereck oder das Trapezoid.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.

Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen und angewandten Mathematik** — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord.**, **gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn.** Vorbereitungsschulen aller **Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden **kann, hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden [illegible] genommen und mit Angabe der Namen verbre[illegible]ktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. [illegible]gen und wird deren Erledigung [illegible]

[illegible] **Verlagshandlung.**

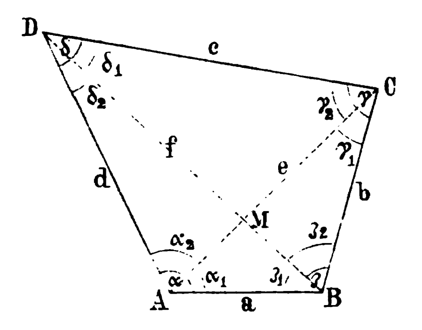
Dreieck ACD die Seiten AC ($= e$) und CD ($= c$), sowie den der Seite e gegenüberliegenden Winkel δ; man kann somit aus diesen Stücken, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Seite d, die Winkel α_2 und γ_2, sowie den Inhalt dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 763. In dem durch die Fig. 281 dargestellten Viereck sei:

$$a = 58 \text{ m}$$
$$b = 86 \text{ m}$$
$$d = 95 \text{ m}$$
$$\alpha_1 = 60^0\, 8'\, 20''$$
$$\beta_1 = 25^0\, 40'\, 30{,}5''$$

wie gross sind die nicht bekannten Seiten und Winkel dieses Vierecks?

Figur 281.



Gegeben: $\begin{cases} a = 58 \text{ m} \\ b = 86 \text{ m} \\ d = 95 \text{ m} \\ \alpha_1 = 60^0\, 8'\, 20'' \\ \beta_1 = 25^0\, 40'\, 30{,}5'' \end{cases}$

Andeutung. Von dem Dreieck ABC, siehe Figur 281, kennt man die zwei Seiten a und b und den der grösseren Seite b gegenüberliegenden Winkel α_1; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, den Winkel β dieses Dreiecks berechnen. Von dem Dreieck ABD kennt man die Seiten a und d und den der grösseren Seite d gegenüberliegenden Winkel β_1; man kann somit in derselben Weise den Winkel α und die Seite BD berechnen. Ist BD hiernach berechnet, so kennt man von dem Dreieck BCD die Seiten BD ($= f$) und b sowie den Winkel β_2 (derselbe ist nämlich $= \beta - \beta_1$); man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite c und den Winkel γ berechnen.

Aufgabe 764. In dem durch die Fig. 281 dargestellten Viereck seien die beiden Diagonalen e und f, bezw. $= 0{,}8$ m und 1 m lang, die Seite b messe 0,64 m und die beiden Winkel γ und δ betragen bezw. $86^0\, 22'\, 10{,}5''$ und $54^0\, 18'\, 12{,}4''$; man soll die nicht gegebenen Stücke dieses Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} e = 0{,}8 \text{ m} \\ f = 1 \text{ m} \\ b = 0{,}64 \text{ m} \\ \gamma = 86^0\, 22'\, 10{,}5'' \\ \delta = 54^0\, 18'\, 12{,}4'' \end{cases}$

Andeutung. Von dem Dreieck BCD, siehe Figur 281, kennt man gemäss der Aufgabe die beiden Seiten b und f und den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite f gegenüberliegenden Winkel γ; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Seite c, sowie den Winkel β_2 dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach die Seite c berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACD die beiden Seiten e und c und den Winkel δ, man kann somit in gleicher Weise die Seite d berechnen. Ist hiernach die Seite d berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABD die Seiten f und d und den Winkel δ_2 (derselbe ist $= \delta - \delta_1$), man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite a und den Winkel α dieses Dreiecks berechnen.

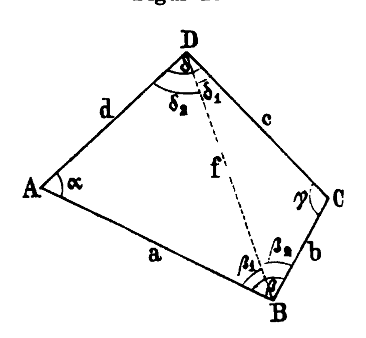
Aufgabe 765. In dem durch die Fig. 281 dargestellten Viereck seien die Seiten a und b bezw. 60 m und 80 m lang, die Diagonale BD messe $f = 130$ m und die Winkel α und β betragen bezw. 160° und 68° 45′ 30,6″; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Vierecks.

Gegeben: $\begin{cases} a = 60 \text{ m} \\ b = 80 \text{ m} \\ f = 130 \text{ m} \\ \alpha = 160^0 \\ \beta = 68^0\,45'\,30{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Von dem Dreieck ABD, siehe Figur 281, kennt man gemäss der Aufgabe die Seiten $AB\,(= a)$ und $BD\,(= f)$, sowie den der grösseren dieser Seiten, nämlich den der Seite f gegenüberliegenden Winkel α: man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, die Seite d und die Winkel β_1 und δ_2 dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach β_1 berechnet, so kann man leicht aus β und β_1 den Winkel β_2 des Dreiecks BCD berechnen; da man alsdann von dem Dreieck BCD den Winkel β_2 und die denselben einschliessenden Seiten b und f kennt, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite c und die Winkel δ_1 und γ berechnen.

Aufgabe 766. In dem durch die Fig. 282 dargestellten Viereck $ABCD$ sei jeder der Winkel β und δ ein rechter Winkel; ferner sei der Winkel $\gamma = 82^0\,22'\,16''$; die Seite a messe 250,6 dm, die Seite d messe 238,4 dm; man soll den Inhalt und die nicht gegebenen Seiten dieses Vierecks berechnen.

Figur 282.



Gegeben: $\begin{cases} a = 250{,}6 \text{ dm} \\ d = 238{,}4 \text{ dm} \\ \beta = 90^0 \\ \delta = 90^0 \\ \gamma = 82^0\,22'\,16'' \end{cases}$

Andeutung. Zieht man in dem gegebenen und durch die Figur 282 dargestellten Viereck die Diagonale BD, so erhält man die beiden Dreiecke ABD und BCD. Da nun:

$$\alpha = 4R - (\beta + \gamma + \delta)$$

oder gemäss der Aufgabe:

$$\alpha = 4R - (R + \gamma + R)$$

mithin:

a) . . . . $\alpha = 2R - \gamma$

ist, so kennt man von dem Dreieck ABD den Winkel α und die denselben einschliessenden Seiten a und d; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, den Inhalt und die sämtlichen übrigen Stücke, wie z. B. die Seite f und den Winkel δ_2 berechnen. Sind f und δ_2 berechnet, so kennt man von dem Dreieck BCD in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe:

$$\delta_1 = R - \delta_2$$

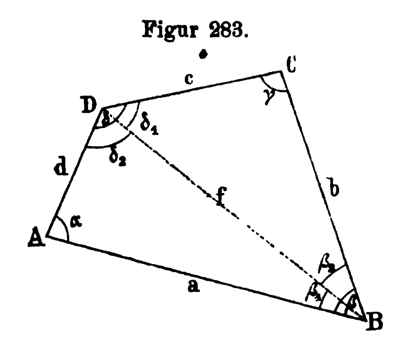
ist, die Seite f und die Winkel δ_1 und γ: man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, den Inhalt und die Seiten b und c dieses Dreiecks berechnen.

Aufgabe 767. Von einem Dreieck kennt man die vier Seiten $a = 34{,}65$ m, $b = 35{,}70$ m, $c = 36{,}33$ m und $d = 37{,}48$ m und den Winkel $\alpha = 86^0\,16'\,38''$; man soll den dem Winkel α gegenüberliegenden Winkel γ und den Inhalt des Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 34{,}65 \text{ m} \\ b = 35{,}70 \text{ m} \\ c = 36{,}33 \text{ m} \\ d = 37{,}48 \text{ m} \\ \alpha = 86^0\,16'\,38'' \end{cases}$

Gesucht: γ und F

Figur 283.



Erkl. 425. Die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung:

a) .. $a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$

welche man auch in der Form schreiben kann:

b) .. $a^2+d^2-(b^2+c^2) = 2(ad\cdot\cos\alpha-bc\cos\gamma)$

drückt eine allgemeine Beziehung zwischen den vier Seiten eines Vierecks und zwei gegenüberliegenden Winkeln desselben aus. Die durch diese Gleichung ausgedrückte allgemeine Beziehung zwischen sechs Stücken eines Vierecks, nämlich zwischen den vier Seiten und zwei gegenüberliegenden Winkeln benutzt man dazu, wenn von jenen sechs Stücken fünf gegeben sind, das nicht gegebene sechste Stück zu berechnen.

Andeutung. Ist, siehe Figur 283, $ABCD$ das gegebene Viereck, und man zieht die Diagonale BD $(=f)$, so erhält man nach dem Projektionssatz aus den Dreiecken ABD und BCD bezw. die Relationen:

$$f^2 = a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha$$

und

$$f^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$$

und aus diesen Gleichungen folgt die Relation:

a) . . $a^2+d^2-2ad\cdot\cos\alpha = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\gamma$ (siehe Erkl. 425)

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\cos\gamma$ auf, so erhält man:

$$\text{A)} \;\ldots\; \cos\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2+2ad\cdot\cos\alpha}{2bc}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Winkel γ berechnen kann. Man kann diese Gleichung auch noch wie folgt umformen:

Man kann nämlich nach der Erkl. 252:

$$\cos\gamma = 2\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}-1$$

und nach der Erkl. 102:

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

setzen; man erhält alsdann:

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2}-1 = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2+2ad\left(1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)}{2bc}$$

oder:

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = 1+\frac{b^2+c^2-a^2-d^2+2ad-4ad\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2bc}$$

$$2\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{2bc+b^2+c^2-a^2-d^2+2ad-4ad\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2bc}$$

$$\cos^2\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4}\cdot\frac{(b^2+2bc+c^2)-(d^2-2ad+a^2)-4ad\sin^2\frac{\alpha}{2}}{bc}$$

mithin:

$$\text{A}_1) \;\ldots\; \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(b+c)^2-(d-a)^2-4ad\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{bc}}$$

oder man kann auch nach der Erkl. 102 in Gleichung A):

$$\cos\gamma = 1-2\sin^2\frac{\gamma}{2}$$

und

$$\cos\alpha = 1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

setzen; man erhält alsdann in analoger Weise, wie oben gezeigt wurde:

$$\text{A}_2) \;\ldots\; \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{(d-a)^2-(b-c)^2+4ad\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{bc}}$$

Ist nach einer der Gleichungen A), A_1) oder A_2) der Winkel γ berechnet, so kann man zur Berechnung des gesuchten Inhalts F den in der Erkl. 151 aufgestellten Satz benutzen, indem man denselben auf jedes der Dreiecke ABD und BCD in Anwendung bringt; man erhält:

$$F = \frac{a \cdot d}{2} \cdot \sin\alpha + \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin\gamma$$

oder

$$\text{B)} \ldots . F = \frac{1}{2}[ad \cdot \sin\alpha + bc \cdot \sin\gamma]$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 768. Von einem Viereck kennt man die vier Seiten $a = 1000$, $b = 1700$, $c = 1875$ und $d = 1275$ m, sowie den Inhalt $F = 866250$ qm; man soll hieraus die Winkel des Vierecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} F = 866250 \text{ qm} \\ a = 1000 \text{ m} \\ b = 1700 \text{ m} \\ c = 1875 \text{ m} \\ d = 1275 \text{ m} \end{cases}$$

Andeutung. Nach den in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 767 aufgestellten Gleichungen a) und B) bestehen zwischen den vier Seiten, zwei Winkeln und dem Inhalt die Relationen:

$$\alpha) \ldots a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cos\gamma$$

und

$$\beta) \ldots F = \frac{ad}{2} \sin\alpha + \frac{bc}{2} \cdot \sin\gamma$$

Ordnet man diese Gleichungen in bezug auf γ, so erhält man bezw.:

$$bc \cdot \cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2 + 2ad \cdot \cos\alpha}{2}$$

oder

$$\text{a)} \ldots bc \cdot \cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2} + ad \cdot \cos\alpha$$

und

$$\text{b)} \ldots bc \cdot \sin\gamma = 2F - ad \cdot \sin\alpha$$

Quadriert man diese beiden Gleichungen und addiert die somit erhaltenen Gleichungen, so erhält man:

$$b^2c^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2} + ad \cdot \cos\alpha\right)^2 + (2F - ad \sin\alpha)^2$$

oder, in Rücksicht der Erkl. 142:

$$b^2c^2 = \left(\frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2} + ad \cdot \cos\alpha\right)^2 + (2F - ad \sin\alpha)^2$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel α vorkommt.

Bei der weiteren Reduktion dieser Gleichung fallen durch Benutzung der in der Erkl. 142 aufgestellten Formel:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

die zweiten Potenzen der Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ weg und man erhält schliesslich

eine Gleichung, in welcher nur noch die Funktionen $\sin\alpha$ und $\cos\alpha$ vorkommen. Setzt man alsdann in der somit erhaltenen Gleichung für:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$$

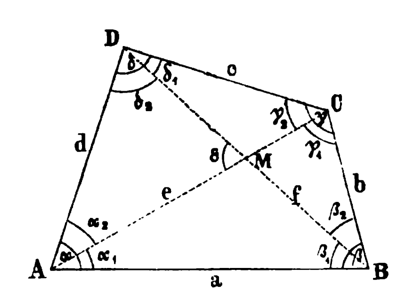
oder für:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

so erhält man eine goniometrische Gleichung, in welcher nur noch die Funktion $\cos\alpha$ (oder $\sin\alpha$) vorkommt, und welche man in bezug auf diese Unbekannte leicht auflösen kann. Hat man nach dieser zuletzt erhaltenen Gleichung und in Rücksicht der gegebenen Zahlenwerte den Winkel α berechnet, so kann man die übrigen Winkel berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 767 gezeigt wurde.

Aufgabe 769. Die zwei aneinanderstossenden Seiten a und b eines Vierecks sind bezw. $= 4$ und $= 3$ m, die Diagonale, welche die Endpunkte dieser Seiten verbindet, ist $e = 5$ m und die andere Diagonale ist $f = 6$ m; wie gross sind die nicht gegebenen Seiten, wenn die beiden Diagonalen einen Winkel $\varepsilon = 60^0$ miteinander bilden?

Figur 284.



$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a = 4\text{ m} \\ b = 3\text{ m} \\ e = 5\text{ m} \\ f = 6\text{ m} \\ \varepsilon = 60^0 \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 284, $ABCD$ das Viereck dar, welches den gegebenen Bedingungen entspricht, so kennt man von dem Dreieck ABC die drei Seiten; die Winkel α_1, γ_1 und β dieses Dreiecks kann man somit berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde. Dann kann man den Winkel β_1 des Dreiecks ABM in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle AMB = 2R - \varepsilon$$

ist, mittels der Relation:

$$\beta_1 = 2R - [\alpha_1 + (2R - \varepsilon)]$$

berechnen und den Winkel β_2 mittels der Relation:

$$\beta_2 = \beta - \beta_1$$

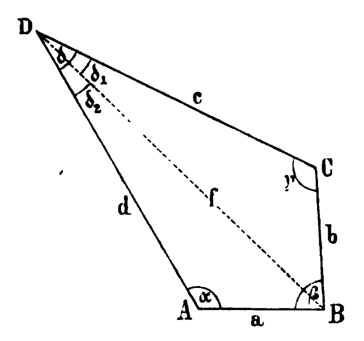
bestimmen. Sind hiernach β_1 und β_2 berechnet, so kennt man von jedem der Dreiecke ABD und BCD zwei Seiten (a und f, bezw. b und f) und den von denselben eingeschlossenen Winkel; wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt ist, kann man somit die Seiten d und c, sowie die Winkel α, δ_2, γ und δ_1 dieser Dreiecke berechnen.

Aufgabe 770. Von den vier Seiten a, b, c und d eines Vierecks bilden die Seiten a und b einen rechten Winkel, die Seiten b und c einen Winkel $\gamma = 120^0$ und die Seiten d und a einen Winkel $\alpha = 120^0$. Wie gross ist die durch den Schnittpunkt der Seiten a und b gehende Diagonale f dieses Vierecks, wenn diese Seiten bezw. 5 und 6 m messen?

$$\text{Gegeben:}\begin{cases} a = 5\text{ m} \\ b = 6\text{ m} \\ \beta = R \text{ oder } = 90^0 \\ \gamma = 120^0 \\ \alpha = 120^0 \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 285, $ABCD$ das Viereck dar, welches den Bedingungen der Aufgabe entspricht, so erhält man nach der Sinusregel aus den Dreiecken ABD und BCD bezw. die Relationen:

Figur 285.



Erkl. 426. Eine goniometrische Formel heisst:

$\sin(3R - \alpha) = -\sin(R - \alpha)$ oder $= -\cos\alpha$

(Siehe Formel 38a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 427. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

(Siehe Formel 43 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$\text{a)} \ldots f = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin\delta_2}$$

und

$$\text{b)} \ldots f = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\delta_1}$$

In diesen beiden Gleichungen kommen die drei Unbekannten f, δ_1 und δ_2 vor. Den unbekannten Winkel δ_2 kann man wie folgt eliminieren:

Zwischen den vier Winkeln des Vierecks besteht die Relation:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass:

$$\delta = \delta_1 + \delta_2$$

und dass gemäss der Aufgabe:

$$\beta = R$$

ist:

$$\alpha + R + \gamma + \delta_1 + \delta_2 = 4R$$

oder:

$$\text{c)} \ldots \delta_2 = 3R - (\alpha + \gamma + \delta_1)$$

Setzt man also in Gleichung a) für δ_2 diesen Wert und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 426:

$$\sin[3R - (\alpha + \gamma + \delta_1)] = -\cos(\alpha + \gamma + \delta_1)$$

ist, so geht jene Gleichung über in:

$$\text{a}_1) \ldots f = \frac{a \cdot \sin\alpha}{-\cos(\alpha + \gamma + \delta_1)}$$

Mittels der Gleichungen a_1) und b) kann man nunmehr zunächst den Winkel δ_1 berechnen; man erhält nämlich aus diesen beiden Gleichungen die Relation:

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{-\cos(\alpha + \gamma + \delta_1)} = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\delta_1}$$

oder, wenn man diese Gleichung umformt und in bezug auf $\cos(\alpha + \gamma + \delta_1)$ die in der Erkl. 427 aufgestellte Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben:

$$\alpha = \alpha + \gamma$$

und

$$\beta = \delta_1$$

setzt:

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{b \cdot \sin\gamma} = \frac{-[\cos(\alpha + \gamma)\cos\delta_1 - \sin(\alpha + \gamma)\sin\delta_1]}{\sin\delta_1}$$

oder:

$$\frac{a \cdot \sin\alpha}{b \cdot \sin\gamma} = -\cos(\alpha + \gamma) \cdot \operatorname{ctg}\delta_1 + \sin(\alpha + \gamma)$$

und hieraus erhält man die goniometrische Gleichung:

$$\operatorname{ctg}\delta_1 = \frac{\sin(\alpha + \gamma)}{\cos(\alpha + \gamma)} - \frac{a\sin\alpha}{b\sin\gamma \cdot \cos(\alpha + \gamma)}$$

oder

$$\text{A)} \ldots \operatorname{ctg}\delta_1 = \operatorname{tg}(\alpha + \gamma) - \frac{a\sin\alpha}{b\sin\gamma\cos(\alpha + \gamma)}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel δ_1 berechnen kann.

Ist hiernach der Winkel δ_1 berechnet, so kann man im weiteren die gesuchte Diagonale f nach vorstehender Gleichung b) berechnen.

Aufgabe 771. In einem Viereck sind die vier Seiten a, b, c und d bezw. $= 34$, 29, 11 und 27 m lang und die beiden gegenüberliegenden Winkel β und δ sind einander gleich; man soll hieraus den Inhalt des Vierecks berechnen.

Figur 286.

Erkl. 428. Die nebenstehende Gleichung ε) kann man wie folgt umformen:

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{2(ab-cd)-(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2(ab-cd)}} \cdot \sqrt{\frac{2(ab-cd)+(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2(ab-cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{2ab-2cd-a^2-b^2+c^2+d^2}{2(ab-cd)}} \cdot \sqrt{\frac{2ab-2cd+a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{(c^2-2cd+d^2)-(a^2-2ab+b^2)}{2(ab-cd)}} \cdot \sqrt{\frac{(a^2+2ab+b^2)-(c^2+2cd+d^2)}{2(ab-cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{[(c-d)^2-(a-b)^2]\cdot[(a+b)^2-(c+d)^2]}{4(ab-cd)^2}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{[(c-d)+(a-b)]\cdot[(c-d)-(a-b)]}{2^2(ab-cd)^2}} \cdot \sqrt{[(a+b)+(c+d)]\cdot[(a+b)-(c+d)]}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2(ab-cd)} \cdot \sqrt{(a+b+c+d)(b+c-a-d)} \cdot \sqrt{(a+c-d-b)(a+b-c-d)}$$

Gegeben: $\begin{cases} a = 34\,\text{m} \\ b = 29\,\text{m} \\ c = 11\,\text{m} \\ d = 27\,\text{m} \\ \beta = \delta \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 286, $ABCD$ das gegebene Viereck, und man zieht die Diagonale AC ($= e$), so hat man nach der Erkl. 151 für den gesuchten Inhalt F des Vierecks:

$$F = \frac{ab}{2}\cdot\sin\beta + \frac{cd}{2}\cdot\sin\delta$$

oder in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe:

$$\delta = \beta$$

ist:

$$a) \ldots\ldots F = \frac{1}{2}(ab+cd)\cdot\sin\beta$$

In dieser Gleichung kommt noch der unbekannte Winkel β vor; um denselben, bezw. um $\sin\beta$ zu eliminieren, verfahre man wie folgt:

Nach dem Projektionssatz ergeben sich aus den Dreiecken ABC und ACD bezw. die Relationen:

$$e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta$$

und

$$e^2 = c^2+d^2-2cd\cdot\cos\delta$$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich unter gleichzeitiger Berücksichtigung, dass

$$\delta = \beta$$

ist:

$$a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta = c^2+d^2-2cd\cdot\cos\beta$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\cos\beta$ auf, so erhält man:

$$\alpha) \ldots \cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 52:

$$\beta) \ldots \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

und dass nach den Erkl. 227 und 226:

$$\gamma) \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$$

und

$$\delta) \ldots \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$

ist, dass also:

$$\sin\beta = 2\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}}$$

oder:

$$\sin\beta = 2\sqrt{\frac{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)}{4}}$$

mithin:

$$\sin\beta = \sqrt{(1-\cos\beta)(1+\cos\beta)}$$

ist, und dass hiernach und in Rücksicht der Gleichung α):

$$\varepsilon) \ldots \sin\beta = \sqrt{\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab-cd)}\right)}$$

oder nach der Erkl. 428:

$$\text{b)} \ldots \sin\beta = \frac{1}{2(ab - cd)} \cdot \sqrt{(a+b+c+d)(b+c-a-d)(a+c-d-b)(a+b-c-d)}$$

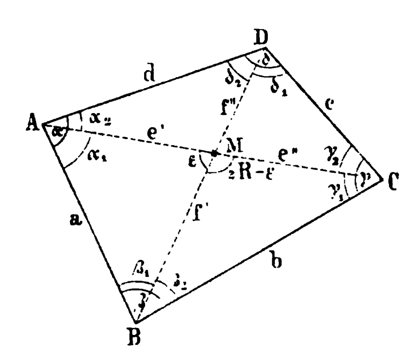
gesetzt werden kann, so ergibt sich hiernach aus Gleichung a):

$$\text{A)} \ldots F = \frac{1}{4} \cdot \frac{ab+cd}{ab-cd} \cdot \sqrt{(a+b+c+d)(b+c-a-d)(a+c-d-b)(a+b-c-d)}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt berechnen kann.

Aufgabe 772. Die Diagonalen e und f eines Vierecks sind bezw. 427,58 und 241,6082 m lang und einer der Winkel, welche dieselben bilden, ist $\varepsilon = 70^0\,14'\,50{,}6''$; man soll aus diesen Angaben den Inhalt des Vierecks berechnen.

Figur 287.



Gegeben: $\begin{cases} c = 427{,}58 \text{ m} \\ f = 241{,}6082 \text{ m} \\ \varepsilon = 70^0\,14'\,50{,}6'' \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 287, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, und bezeichnet man die Inhalte der Dreiecke, in welche das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, der Reihe nach mit $\triangle ABM$, $\triangle BCM$, $\triangle CDM$ und $\triangle DAM$ und die Abschnitte der Diagonalen mit e', e'', f' und f'', so bestehen nach der Erkl. 151 die Relationen:

$$\triangle ABM = \frac{e' \cdot f'}{2} \cdot \sin\varepsilon$$

$$\triangle BCM = \frac{e'' \cdot f'}{2} \cdot \sin(2R - \varepsilon)$$

$$\triangle CDM = \frac{e'' \cdot f''}{2} \cdot \sin\varepsilon$$

und

$$\triangle DAM = \frac{e' \cdot f''}{2} \cdot \sin(2R - \varepsilon)$$

Durch Addition dieser vier Gleichungen erhält man, in Rücksicht, dass die Summe der Inhalte der vier Dreiecke gleich dem gesuchten Inhalt F des Vierecks ist, und dass $\sin(2R - \varepsilon) = \sin\varepsilon$ gesetzt werden kann:

$$F = \frac{e' \cdot f'}{2} \cdot \sin\varepsilon + \frac{e'' f'}{2} \cdot \sin\varepsilon + \frac{e'' \cdot f''}{2} \cdot \sin\varepsilon + \frac{e' f''}{2} \cdot \sin\varepsilon$$

oder:

$$F = (e' f' + e'' f' + e'' f'' + e' f'') \cdot \frac{\sin\varepsilon}{2}$$

$$F = e'(f' + f'') + e''(f' + f'') \cdot \frac{\sin\varepsilon}{2}$$

$$F = (e' + e'') \cdot (f' + f'') \cdot \frac{\sin\varepsilon}{2}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass:

$$f' + f'' = f$$

und

$$e' + e'' = e$$

ist:

$$F = \frac{e \cdot f}{2} \cdot \sin\varepsilon$$

nämlich eine Gleichung, mittels welcher man den gesuchten Inhalt F aus den gegebenen Stücken direkt berechnen kann.

Aufgabe 773. In dem durch die Fig. 288 dargestellten Viereck $ABCD$ sind die Winkel, welche die Diagonale AC mit den Vierecksseiten bildet:

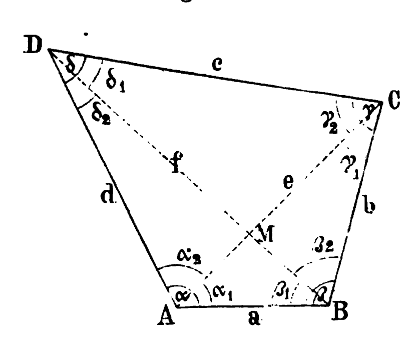
$$\alpha_1 = 22^0\,14'\,20''$$
$$\alpha_2 = 43^0\,16'\,10{,}5''$$
$$\gamma_1 = 66^0\,25'\,0{,}8''$$

und

$$\gamma_2 = 70^0\,8'\,2{,}1''$$

wie gross sind die vier Winkel β_1, β_2, δ_1 und δ_2, welche die andere Diagonale BD mit den Vierecksseiten bildet?

Figur 288.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l}\alpha_1 = 22^0\,14'\,20'' \\ \alpha_2 = 43^0\,16'\,10{,}5'' \\ \gamma_1 = 66^0\,25'\,0{,}8'' \\ \gamma_2 = 70^0\,8'\,2{,}1''\end{array}\right\}$ (siehe Fig. 288)

Andeutung. Nach der Sinusregel erhält man aus den Dreiecken ABC, BCD und ACD der Figur 288 bezw. die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \quad \frac{e}{b} = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2)}{\sin\alpha_1}$$

$$\text{b)} \ldots \quad \frac{b}{c} = \frac{\sin\delta_1}{\sin\beta_2}$$

und

$$\text{c)} \ldots \quad \frac{c}{e} = \frac{\sin\alpha_2}{\sin(\delta_1 + \delta_2)}$$

Multipliziert man diese drei Gleichungen miteinander, so erhält man:

$$\frac{e \cdot b \cdot c}{b \cdot c \cdot e} = \frac{\sin(\beta_1 + \beta_2) \cdot \sin\delta_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin(\delta_1 + \delta_2)}$$

oder, wenn man reduziert und berücksichtigt, dass:

$$\left.\begin{array}{r}\beta_1 + \beta_2 \text{ und } \alpha_1 + \gamma_1) \\ \text{ebenso } \delta_1 + \delta_2 \text{ und } \alpha_2 + \gamma_2)\end{array}\right\} \text{Supplementwinkel}$$

sind, dass also nach der Erkl. 66:

$$\sin(\beta_1 + \beta_2) = \sin(\alpha_1 + \gamma_1)$$
und
$$\sin(\delta_1 + \delta_2) = \sin(\alpha_2 + \gamma_2)$$

gesetzt werden kann:

$$1 = \frac{\sin(\alpha_1 + \gamma_1) \cdot \sin\delta_1 \cdot \sin\alpha_2}{\sin\alpha_1 \cdot \sin\beta_2 \cdot \sin(\alpha_2 + \gamma_2)}$$

Aus dieser Gleichung, welche nur noch die unbekannten Winkel β_2 und δ_1 enthält, ergibt sich:

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta_1} = \frac{\sin\alpha_2 \cdot \sin(\alpha_1 + \gamma_1)}{\sin\alpha_1 \cdot \sin(\alpha_2 + \gamma_2)}$$

oder, wenn man den bekannten Ausdruck rechts der Kürze halber $= m$ setzt:

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta_1} = m$$

und in bezug auf diese Proportion:

$$\frac{\sin\beta_2}{\sin\delta_1} = \frac{m}{1}.$$

den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung bringt:

$$\frac{\sin\beta_2 - \sin\delta_1}{\sin\beta_2 + \sin\delta_1} = \frac{m-1}{m+1}$$

und dann die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel berücksichtigt:

$$\text{e)} \ldots \quad \frac{\operatorname{tg}\frac{\beta_2 - \delta_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta_2 + \delta_1}{2}} = \frac{m-1}{m+1}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass in dem Dreieck BCD:

$$\text{A)} \ldots \quad \beta_2 + \delta_1 = 2R - (\gamma_1 + \gamma_2)$$

also:

$$\frac{\beta_2 + \delta_1}{2} = R - \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2}$$

ist, dass also die Winkel $\frac{\beta_2+\delta_1}{2}$ und $\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$ Komplementwinkel sind und sonach und nach der Erkl. 19:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta_2+\delta_1}{2} = \operatorname{ctg}\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man schliesslich aus jener Gleichung in Rücksicht dessen:

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta_2-\delta_1}{2} = \frac{m-1}{m+1}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}$$

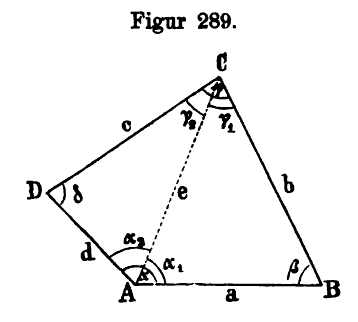
nach welcher Gleichung man, in Rücksicht, dass:

$$\text{B}_1) \ldots m = \frac{\sin\alpha_2\cdot\sin(\alpha_1+\gamma_1)}{\sin\alpha_1\cdot\sin(\alpha_2+\gamma_2)}$$

ist, $\beta_2-\delta_1$ berechnen kann. Aus dieser berechneten Winkeldifferenz $\beta_2-\delta_1$ und aus der nach Gleichung A) bekannten Winkelsumme $\beta_2+\delta_1$ kann man dann leicht die Winkel δ_1 und β_2 berechnen. In ganz analoger Weise kann man die gesuchten Winkel β_1 und δ_2 berechnen.

Aufgabe 774. Von dem durch die Fig. 289 dargestellten Viereck $ABCD$ kennt man die Seiten $a = 1484{,}83$ und $c = 896{,}73$ m, sowie die von diesen Seiten und einer der beiden anderen Seiten, nämlich der Seite d gebildeten Winkeln $\alpha = 50^0\,39'\,36''$ und $\delta = 108^0\,37'\,28''$; ferner kennt man den Winkel $\gamma_1 = 64^0\,12'\,36''$, welchen die Diagonale AC mit der vierten Seite b bildet; man soll aus diesen Angaben die Winkel berechnen, welche jene Diagonale mit den übrigen Seiten bildet.

Figur 289.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 1484{,}83\text{ m} \\ c = 896{,}73\text{ m} \\ \alpha = 50^0\,39'\,36'' \\ \delta = 108^0\,37'\,28'' \\ \gamma_1 = 64^0\,12'\,36'' \end{array}\right\}$ (siehe Fig. 289)

Andeutung. Nach der Sinusregel erhält man aus den Dreiecken ABC und ACD der Figur 289 die Relationen:

$$\frac{e}{a} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma_1}$$

und

$$\frac{e}{c} = \frac{\sin\delta}{\sin\alpha_2}$$

Dividiert man die zweite dieser Gleichungen durch die erste und berücksichtigt man, dass sich β und $\alpha_1+\gamma_1$ zu 180^0 ergänzen und dass $\alpha_1 = \alpha - \alpha_2$ ist, so erhält man:

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin\delta\cdot\sin\gamma_1}{\sin\alpha_2\cdot\sin(\alpha-\alpha_2+\gamma_1)}$$

nämlich eine Gleichung, in welcher nur noch der unbekannte Winkel α_2 vorkommt. Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\sin\alpha_2\cdot\sin[(\alpha+\gamma_1)-\alpha_2] = \frac{c\cdot\sin\delta\cdot\sin\gamma_1}{a}$$

und, wenn man in bezug auf $\sin[(\alpha+\gamma_1)-\alpha_2]$ die in der Erkl. 232 aufgestellte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben

$$\alpha = \alpha+\gamma_1$$

und

$$\beta = \alpha_2$$

setzt:

$$\sin\alpha_2\cdot[\sin(\alpha+\gamma_1)\cos\alpha_2 - \cos(\alpha+\gamma_1)\cdot\sin\alpha_2] = \frac{c\sin\delta\cdot\sin\gamma_1}{a}$$

oder

$$\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_2\cdot\sin(\alpha+\gamma_1)-\sin^2\alpha_2\cdot\cos(\alpha+\gamma_1)=\frac{c\sin\delta\cdot\sin\gamma_1}{a}$$

dann nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha_2\cdot\cos\alpha_2=\frac{\sin 2\alpha_2}{2}$$

und nach der Erkl. 301:

$$\sin^2\alpha_2=\frac{1-\cos 2\alpha_2}{2}$$

setzt:

$$\frac{\sin 2\alpha_2}{2}\cdot\sin(\alpha+\gamma_1)-\frac{1-\cos 2\alpha_2}{2}\cdot\cos(\alpha+\gamma_1)=\frac{c\sin\delta\sin\gamma_1}{a}$$

oder:

$$\sin 2\alpha_2\cdot\sin(\alpha+\gamma_1)-\cos(\alpha+\gamma_1)+\cos 2\alpha_2\cdot\cos(\alpha+\gamma_1)=\frac{2c\sin\delta\sin\gamma_1}{a}$$

$$\sin 2\alpha_2\cdot\sin(\alpha+\gamma_1)+\cos 2\alpha_2\cdot\cos(\alpha+\gamma_1)=\frac{2c\sin\delta\sin\gamma_1}{a}+\cos(\alpha+\gamma_1)$$

Bringt man schliesslich in bezug auf den Ausdruck links die in der Erkl. 225 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, indem man in derselben:

$$\alpha=\alpha+\gamma_1$$
und $$\beta=2\alpha_2$$

setzt, so erhält man:

$$\text{A)}\ \ldots\ \cos(\alpha+\gamma_1-2\alpha_2)=\frac{2c\sin\delta\sin\gamma_1}{a}+\cos(\alpha+\gamma_1)$$

nämlich eine goniometrische Gleichung, nach welcher man $\alpha+\gamma_1-2\alpha_2$ berechnen kann. Ist dieser Wert berechnet, so kann man hieraus, da α und γ_1 gegeben sind, leicht α_2 berechnen. Ist einmal α_2 berechnet, so lassen sich mittels dieses Winkels α_2 die übrigen Winkel α_1 und γ_2 leicht bestimmen.

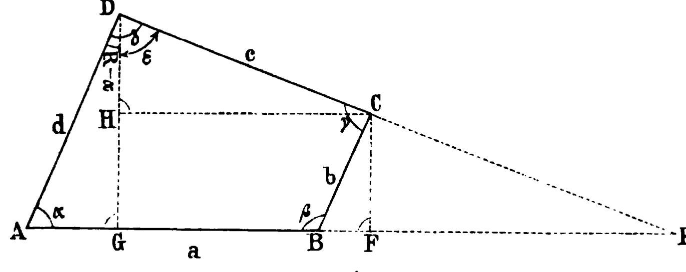


Aufgabe 775. Man soll die allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Seiten a, b, c und d eines beliebigen einfachen Vierecks mit den hohlen Winkeln α, β, γ und δ und diesen vier Winkeln aufsuchen.

Gesucht: Die allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Winkeln und den vier Seiten eines Vierecks.

Auflösung. Zur Aufsuchung der allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Seiten a, b, c und d und den vier Winkeln α, β, γ und δ des durch die Fig. 290 dargestellten einfachen Vierecks mit den hohlen Winkeln α, β, γ und δ kann man wie folgt verfahren: Verlängert man z. B. die Seiten a und c bis zu ihrem Durchschnitt E, fällt alsdann von den Endpunkten D und C der Seite c

Figur 290.



die Perpendikel CF und DG auf die Seite a, bezw. auf deren Verlängerung, und zieht CH parallel der Seite a, bezw. parallel AE, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke DGA, DHC und CFB sowie das Rechteck $HCFG$; da sich nun aus der Figur ergibt, dass:

$$\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GF} - \overline{BF}$$

bezw. dass:

a) . . . $a = \overline{AG} + \overline{HC} - \overline{BF}$

ist, und da sich aus dem rechtwinkligen Dreieck DGA die Relation:

b) . . . $\overline{AG} = d \cdot \cos\alpha$ (siehe Erkl. 51)

aus dem rechtwinkligen Dreieck DHC die Relation:

$$\overline{HC} = c \cdot \sin\varepsilon \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

oder, in Rücksicht, dass:

$$\varepsilon = \delta - (R - \alpha)$$
$$\varepsilon = (\alpha + \delta) - R$$

ist, die Relation:

c) . . . $\overline{HC} = c \cdot \sin[(\alpha + \delta) - R]$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB die Relation:

d) . . . $\overline{BF} = b \cdot \cos(2R - \beta)$ (siehe Erkl. 51)

ergibt, so folgt aus diesen Gleichungen a) bis d):

$$a = d \cdot \cos\alpha + c \sin[(\alpha + \delta) - R] - b \cos(2R - \beta)$$

oder:

$$a = d \cdot \cos\alpha + c \cdot \sin[-(R - (\alpha + \delta))] - b \cdot -\cos\beta \text{ (siehe Erkl. 94)}$$
$$a = d \cdot \cos\alpha + c \cdot -\sin[R - (\alpha + \delta)] + b \cdot \cos\beta \text{ (siehe Erkl. 127)}$$

mithin:

A) . . . $a = d \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos(\alpha + \delta) + b \cdot \cos\beta$ (siehe Erkl. 429)

oder auch, wenn man berücksichtigt, dass in dem Viereck nach der Erkl. 332:

$$\alpha + \delta = 4R - (\beta + \gamma)$$

ist, dass also:

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos[4R - (\beta + \gamma)]$$

oder hiernach und nach der Erkl. 430:

$$\cos(\alpha + \delta) = \cos(\beta + \gamma)$$

gesetzt werden kann:

A_1) . . . $a = d \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos(\beta + \gamma) + b \cdot \cos\beta$

Eine weitere allgemeine Beziehung findet man wie folgt:

Aus der Figur 290 ergibt sich die Relation:

$$DG = \overline{DH} + \overline{HG}$$

oder:

e) . . . . $DG = \overline{DH} + \overline{CF}$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck DGA:

f) . . . . $DG = d \cdot \sin\alpha$ (siehe Erkl. 50)

aus dem rechtwinkligen Dreieck DHC:

Erkl. 429. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(R - \alpha) = \cos\alpha$$

[Siehe Formel 16a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie und den Abschnitt 13) dieses Lehrbuchs, in welchem die Allgemeingültigkeit jener Formel nachgewiesen ist.]

Erkl. 430. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(4R - \alpha) = \cos\alpha$$

(Siehe Formel 40b in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 431. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos[R-\alpha] = \sin\alpha$$

[Siehe Formel 16 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie und den Abschnitt 13) dieses Lehrbuchs, in welchem die Allgemeingültigkeit jener Formel nachgewiesen ist.]

Erkl. 432. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(4R-\alpha) = -\sin\alpha$$

(Siehe Formel 40a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 433. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichungen A) bis C) schreibt man auch oft der Reihe nach in der Form:

1) . . . $d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\alpha+\delta) + b\cdot\cos\beta - a = 0$

1a) . . . $d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\beta+\gamma) + b\cdot\cos\beta - a = 0$

2) . . . $d\cdot\sin\alpha - c\cdot\sin(\alpha+\delta) + b\cdot\sin\beta = 0$

2a) . . . $d\cdot\sin\alpha + c\sin(\beta+\gamma) + b\cdot\sin\beta = 0$

und

3) . . . $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4R$

oder auch,

in Rücksicht, dass nach Gleichung 3) und nach der Erkl. 434:

$$\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 1$$

also:

α) . . . $a = a\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

und dass nach der Erkl. 434:

$$\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = 0$$

also:

β) . . . $0 = a\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta)$

gesetzt werden kann,

in der noch übersichtlicheren Form:

a) . . . $a\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\alpha+\delta) + b\cdot\cos\beta$

a_1) . . . $a\cdot\cos(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\beta+\gamma) + b\cdot\cos\beta$

b) . . . $a\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cdot\sin\alpha - c\cdot\sin(\alpha+\delta) + b\cdot\sin\beta$

b_1) . . . $a\cdot\sin(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = d\cdot\sin\alpha + c\cdot\sin(\beta+\gamma) + b\sin\beta$

und

c) . . . $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4R$

Erkl. 434. Für die Werte der trigonometr. Funktionen eines Winkels von $4R$ hat man:

a) . . . $\sin 4R = 0$

b) . . . $\cos 4R = 1$

c) . . . $\operatorname{tg} 4R = 0$

d) . . . $\operatorname{ctg} 4R = \infty$

[Siehe Abschnitt 10) in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.]

$$\overline{DH} = c\cdot\cos\varepsilon \text{ (siehe Erkl. 51)}$$

oder, da $\varepsilon = \delta - (R-\alpha)$

oder $\varepsilon = (\alpha+\delta) - R$

ist:

g) . . . . $\overline{DH} = c\cdot\cos[(\alpha+\delta)-R]$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck CFB:

h) . . . . $\overline{CF} = b\cdot\sin(2R-\beta)$ (s. Erkl. 50)

Aus den Gleichungen e) bis h) folgt also:

$$d\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos[(\alpha+\delta)-R] + b\cdot\sin(2R-\beta)$$

oder:

$$d\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos[-(R-(\alpha+\delta))] + b\cdot\sin\beta$$
(siehe Erkl. 66)

$$d\cdot\sin\alpha = c\cdot\cos[R-(\alpha+\delta)] + b\cdot\sin\beta$$
(siehe Erkl. 126)

mithin:

B) . . . $d\cdot\sin\alpha = c\cdot\sin(\alpha+\delta) + b\sin\beta$
(siehe Erkl. 431)

oder auch, wenn man berücksichtigt, dass in dem Viereck nach der Erkl. 332:

$$\alpha+\delta = 4R-(\beta+\gamma)$$

ist, dass also:

$$\sin(\alpha+\delta) = \sin[4R-(\beta+\gamma)]$$

oder hiernach und nach der Erkl. 432:

$$\sin(\alpha+\delta) = -\sin(\beta+\gamma)$$

gesetzt werden kann:

B_1) . . $d\cdot\sin\alpha = -c\cdot\sin(\beta+\gamma) + b\sin\beta$

Berücksichtigt man noch, dass nach der Erkl. 332 zwischen den vier Winkeln die Relation:

C) . . . $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4R$

besteht, so hat man mit den Gleichungen A), B) und C) oder mit den Gleichungen A_1), B_1) und C) je drei Gleichungen, durch welche die allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Seiten und den vier Winkeln eines einfachen Vierecks ausgedrückt sind. (Siehe die Erkl. 433 bis 436.)

Erkl. 485. Aus den in der nebenstehenden Auflösung aufgestellten Gleichungen A) bis C), durch welche die allgemeinen Beziehungen zwischen den vier Seiten und den vier Winkeln, also zwischen den acht Bestimmungsstücken eines einfachen Vierecks ausgedrückt sind, ergibt sich, dass wenn von den acht Bestimmungsstücken eines solchen Vierecks fünf derselben gegeben sind, man mittels drei jener Gleichungen die drei übrigen Stücke berechnen kann.

Erkl. 486. Durch die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung A):

1) . . . $a = d \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos(\alpha + \delta) + b \cdot \cos\beta$

ist eine allgemeine Beziehung zwischen den vier Seiten und drei Winkeln eines Vierecks ausgedrückt, nach welcher sich die weiteren analogen Relationen ergeben:

2) . . . $b = a \cdot \cos\beta - d \cdot \cos(\alpha + \beta) + c \cdot \cos\gamma$

3) . . . $c = b \cdot \cos\gamma - a \cdot \cos(\beta + \gamma) + d \cdot \cos\delta$

und

4) . . . $d = c \cdot \cos\delta - b \cdot \cos(\delta + \gamma) + a \cdot \cos\alpha$

Desgleichen wird durch die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung A_1):

1a) . . . $a = d \cdot \cos\alpha - c \cdot \cos(\beta + \gamma) + b \cdot \cos\beta$

eine allgemeine Beziehung ausgedrückt, nach welcher sich die weiteren analogen Relationen ergeben:

2a) . . . $b = a \cdot \cos\beta - d \cdot \cos(\delta + \gamma) + c \cdot \cos\gamma$

3a) . . . $c = b \cdot \cos\gamma - a \cdot \cos(\alpha + \delta) + d \cdot \cos\delta$

und

4a) . . . $d = c \cdot \cos\delta - b \cdot \cos(\alpha + \beta) + a \cdot \cos\alpha$

Ferner wird durch die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung B):

5) . . . $d \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin(\alpha + \delta) + b \sin\beta$

eine allgemeine Beziehung zwischen drei Seiten und drei Winkeln eines Vierecks ausgedrückt, nach welcher sich die weiteren analogen Relationen ergeben:

6) . . . $a \cdot \sin\beta = d \cdot \sin(\alpha + \beta) + c \cdot \sin\gamma$

7) . . . $b \cdot \sin\gamma = a \cdot \sin(\beta + \gamma) + d \cdot \sin\delta$

und

8) . . . $c \cdot \sin\delta = b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \cdot \sin\alpha$

In analoger Weise wird durch die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung B_1):

5a) . . . $d \cdot \sin\alpha = - c \cdot \sin(\beta + \gamma) + b \cdot \sin\beta$

eine allgemeine Beziehung ausgedrückt, nach welcher sich die weiteren dieser analogen Relationen ergeben:

6a) . . . $a \cdot \sin\beta = - d \cdot \sin(\gamma + \delta) + c \cdot \sin\gamma$

7a) . . . $b \cdot \sin\gamma = - a \cdot \sin(\alpha + \delta) + d \cdot \sin\delta$

und

8a) . . . $c \cdot \sin\delta = - b \cdot \sin(\alpha + \beta) + a \cdot \sin\alpha$

Die in dieser Erkl. 486 aufgestellten Formeln kann man in Verbindung mit der Relation:

9) . . . $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 4R$

oft mit Vorteil bei der Auflösung sog. tetragonometrischer Aufgaben (s. Anmerkung 39) benutzen, wie bei einigen der nachfolgenden Aufgaben gezeigt ist.

Aufgabe 776. Von einem Viereck kennt man die drei Seiten $a = 2{,}6$ m, $b = 33{,}15$ m und $c = 96{,}98$ m und die beiden der mittleren Seite b anliegenden Winkel $\beta = 118^0\ 4'\ 20{,}9''$ und $\gamma = 142^0\ 55'\ 9{,}1''$; man soll hieraus die vierte Seite, die beiden anderen Winkel und den Inhalt F des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 2{,}6 \text{ m} \\ b = 33{,}15 \text{ m} \\ c = 96{,}98 \text{ m} \\ \beta = 118^0\, 4'\, 20{,}9'' \\ \gamma = 142^0\, 55'\, 9{,}1'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 291, $ABCD$ das gegebene Viereck, so bestehen nach den in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichungen 2a) und 6a) die Relationen:

$$b = a \cos\beta - d \cdot \cos(\delta + \gamma) + c \cdot \cos\gamma$$

und

$$a \sin\beta = - d \cdot \sin(\gamma + \delta) + c \cdot \sin\gamma$$

oder die Relationen:

a) . . . $d \cdot \cos(\delta + \gamma) = a \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma - b$

und

b) . . . $d \cdot \sin(\gamma + \delta) = c \cdot \sin\gamma - a \sin\beta$

Quadriert man nunmehr diese beiden Gleichungen und addiert dieselben, so erhält man:

$$d^2 \cdot \cos^2(\delta + \gamma) + d^2 \cdot \sin^2(\gamma + \delta) = (a \cos\beta + c \cdot \cos\gamma - b)^2 + (c \cdot \sin\gamma - a \sin\beta)^2$$

$$d^2 \cdot [\sin^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha + \beta)] = a^2 \cos^2\beta + 2ac \cos\beta \cos\gamma + c^2 \cos^2\gamma - 2ab \cdot \cos\beta - 2bc \cos\gamma + b^2 + c^2 \sin^2\gamma - 2ac \sin\beta \sin\gamma + a^2 \sin^2\beta$$

oder nach der Erkl. 142 und nach gehöriger Reduktion:

$$d^2 = a^2(\sin^2\beta + \cos^2\beta) + b^2 + c^2(\sin^2\gamma + \cos^2\gamma) - 2[ab \cos\beta + bc \cdot \cos\gamma - ac(\cos\beta \cos\gamma - \sin\beta \sin\gamma)]$$

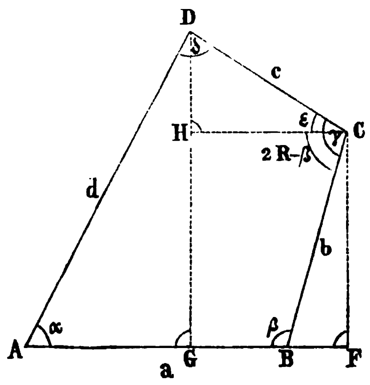
und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 142 und 427:

$$\text{A)} \ldots d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2[ab \cos\beta + bc \cos\gamma - ac \cos(\beta + \gamma)]}$$

Nach welcher Gleichung man die gesuchte vierte Seite d berechnen kann.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels α kann man wie folgt verfahren:

Figur 291.



Fällt man, siehe Fig. 291, die Perpendikel CF und DG auf die Seite a, d. h. projiciert man die Seiten b, c und d auf die Seite a des Vierecks, so ergibt sich aus der Fig. 291:

$$\overline{AB} = \overline{AG} + \overline{GF} - \overline{BF}$$

oder:

c) . . . $a = \overline{AG} + \overline{JC} - \overline{BF}$

Da sich nun aus dem rechtwinkligen Dreieck AGD die Relation:

d) . . . $\overline{AG} = d \cdot \cos\alpha$ (siehe Erkl. 51)

aus dem rechtwinkligen Dreieck BFC die Relation:

$$\overline{BF} = b \cdot \cos(2R - \beta)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 437:

e) . . . $\overline{BF} = - b \cdot \cos\beta$

und aus dem rechtwinkligen Dreieck DJC die Relation:

$$\overline{JC} = c \cdot \cos\varepsilon$$

oder in Rücksicht, dass:

$$\varepsilon = \gamma - (2R - \beta)$$

oder:

$$\varepsilon = (\beta + \gamma) - 2R$$

ist:

$$\overline{JC} = c\cdot\cos[(\beta+\gamma)-2R]$$

oder:

$$\overline{JC} = c\cdot\cos[-(2R-(\beta+\gamma))]$$

$$\overline{JC} = c\cdot\cos[2R-(\beta+\gamma)] \text{ (s. Erkl. 126)}$$

mithin:

f) . . . $\overline{JC} = -c\cdot\cos(\beta+\gamma)$ (s. Erkl. 487)

ergibt, so erhält man aus den Gleichungen c) bis f):

g) . . . $a = d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\beta+\gamma) + b\cdot\cos\beta$

Löst man diese Gleichung in bezug auf $\cos\alpha$ auf und setzt für d den nach Gleichung A) gefundenen Wert, so erhält man:

B) . . . $$\cos\alpha = \frac{a+c\cdot\cos(\beta+\gamma)-b\cdot\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2[ab\cdot\cos\beta+bc\cdot\cos\gamma-ac\cdot\cos(\beta+\gamma)]}}$$

nämlich eine Gleichung, nach welcher man den gesuchten Winkel α direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann. Ist α hiernach berechnet, so kann man den vierten Winkel δ mittels der Relation:

C) . . . $\delta = 4R-(\alpha+\beta+\gamma)$

berechnen.

Erkl. 487. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\cos(2R-\alpha) = -\cos\alpha$$

(Siehe Formel 36a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Den gesuchten Inhalt F findet man wie folgt:

Denkt man sich die Diagonale BD gezogen, so wird das Viereck in die beiden Dreiecke BCD und ABD zerlegt und man hat nach der Erkl. 151 für den Inhalt F:

a) . . . $$F = \frac{bc}{2}\cdot\sin\gamma + \frac{ad}{2}\cdot\sin\alpha$$

Ferner hat man nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 5a):

b) . . . $d\cdot\sin\alpha = -c\cdot\sin(\beta+\gamma) + b\cdot\sin\beta$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$F = \frac{bc}{2}\sin\gamma + \frac{a}{2}\cdot[-c\sin(\beta+\gamma)+b\sin\beta]$$

oder:

D) . . . $$F = \frac{1}{2}(ab\sin\beta + bc\sin\gamma - ac\sin(\beta+\gamma))$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 777. Die drei Seiten a, b und c eines Vierecks messen bezw. 120, 78 und 117 dm und die beiden an der äusseren Seite a liegenden Winkel α und β betragen bezw. $94^0\,10'\,40''$ und $72^0\,46'\,52{,}8''$; man soll hieraus die vierte Seite, die übrigen Winkel und den Inhalt des Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 120\text{ dm} \\ b = 78\text{ dm} \\ c = 117\text{ dm} \\ \alpha = 94^0\,10'\,40'' \\ \beta = 72^0\,46'\,52{,}8'' \end{cases}$

Andeutung. Ist, siehe Fig. 291, $ABCD$ das gegebene Viereck, so besteht nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 4a) die Relation:

a) . . . $d = c\cdot\cos\delta - b\cdot\cos(\alpha+\beta) + a\cdot\cos\alpha$

in welcher Gleichung die unbekannte Seite d und der unbekannte Winkel δ vorkommt:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

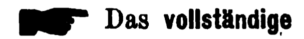
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.



Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

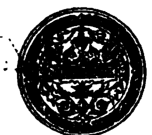
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

307. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 306. — Seite 513—528.
Mit 12 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 306. — Seite 513—528. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Diese Aufgabensammlung erscheint fortlaufend, monatlich 3—4 Hefte.
Die einzelnen Hauptkapitel sind mit eigener Paginierung versehen, so dass jedes derselben einen Band bilden wird.

zur Elimination des Winkels δ beachte man, dass nach der Erkl. 145:

$$\cos\delta = \pm\sqrt{1-\sin^2\delta}$$

ist, dass also:

$$c\cdot\cos\delta = \pm c\sqrt{1-\sin^2\delta}$$

oder:

b) . . . . $c\cdot\cos\delta = \pm\sqrt{c^2-c^2\sin^2\delta}$

gesetzt werden kann, und dass ferner nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 8a):

$$c\sin\delta = a\sin\alpha - b\cdot\sin(\alpha+\beta)$$

mithin:

c) . . . $c^2\sin^2\delta = [a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)]^2$

ist. Aus den Gleichungen a) bis c) erhält man also:

A) . . $d = \pm\sqrt{c^2-[a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)]^2} - b\cos(\alpha+\beta) + a\cdot\cos\alpha$

nach welcher Gleichung man die gesuchte vierte Seite direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Zur Berechnung des Winkels δ kann man jene in der Erkl. 436 aufgestellte Gleichung 8a):

$$c\sin\delta = a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)$$

benutzen, man erhält aus derselben:

B) . . . $\sin\delta = \frac{a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)}{c}$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Winkel δ berechnen kann. Den vierten Winkel γ findet man mittels der Relation:

C) . . . $\gamma = 4R - (\alpha+\beta+\delta)$

Man kann denselben auch, in Rücksickt, dass:

$$\delta = 4R - (\alpha+\beta+\gamma)$$

und dass hiernach und nach der Erkl. 432:

$$\sin\delta = \sin[4R-(\alpha+\beta+\gamma)] \text{ oder } = -\sin(\alpha+\beta+\gamma)$$

ist, nach der aus Gleichung B) sich hiernach ergebenden Gleichung:

$$-\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{a\sin\alpha - b\sin(\alpha+\beta)}{c}$$

oder nach der Gleichung:

D). . . $\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{b\sin(\alpha+\beta) - a\sin\alpha}{c}$

berechnen, indem man hiernach $\alpha+\beta+\gamma$ berechnet und aus diesem berechneten und aus dem für $\alpha+\beta$ gegebenen Wert den Winkel γ bestimmt. Sind d und δ berechnet, so kann man den gesuchten Inhalt schliesslich mittels der in der Andeutung zur Aufgabe 767 aufgestellten Gleichung B):

$$F = \frac{1}{2}(ad\cdot\sin\alpha + bc\cdot\sin\gamma)$$

berechnen.

Aufgabe 778. In einem Viereck messen drei Seiten $a = 14{,}85$ m, $b = 14{,}96$ m und $c = 89{,}67$ m und die beiden an der vierten Seite liegenden Winkel α und δ betragen bezw. $108^0\,37'\,28''$ und $78^0\,13'$; man soll hieraus die vierte Seite, die übrigen Winkel und den Inhalt berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 14{,}85 \text{ m} \\ b = 14{,}96 \text{ m} \\ c = 89{,}67 \text{ m} \\ \alpha = 108^0\,37'\,28'' \\ \delta = 78^0\,13' \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 292, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, so hat man nach den in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichungen 4) und 8) die Beziehungen:

a) . . . $d = c \cdot \cos\delta - b \cdot \cos(\gamma + \delta) + a \cdot \cos\alpha$

und

b) . . . $c \sin\delta = b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \sin\alpha$

nämlich zwei Gleichungen mit den beiden Unbekannten d und γ. Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 145:

$$\cos(\gamma + \delta) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\gamma + \delta)}$$

dass also:

$$b \cdot \cos(\gamma + \delta) = \pm \sqrt{1 - \sin^2(\gamma + \delta)}$$

oder:

c) . . $b \cdot \cos(\gamma + \delta) = \pm \sqrt{b^2 - b^2 \sin^2(\gamma + \delta)}$

ist und dass sich aus Gleichung b):

d) . . . $b \cdot \sin(\gamma + \delta) = c \sin\delta - a \sin\alpha$

ergibt, so erhält man aus den Gleichungen a), c) und d):

A) . . . $d = c \cdot \cos\delta \mp \sqrt{b^2 - [c \sin\delta - a \sin\alpha]^2} + a \cdot \cos\alpha$

nach welcher Gleichung man die gesuchte vierte Seite d berechnen kann. Ferner ist nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 5):

$$d \cdot \sin\alpha = c \cdot \sin(\alpha + \delta) + b \cdot \sin\beta$$

und hieraus erhält man:

B) . . . $\sin\beta = \dfrac{d \cdot \sin\alpha - c \sin(\alpha + \delta)}{b}$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für d berechneten Wertes den Winkel β berechnen kann. Im weiteren verfahre man wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 777 gesagt wurde. Man kann auch verfahren wie in der Andeutung zur folgenden Aufgabe 779 gesagt ist.

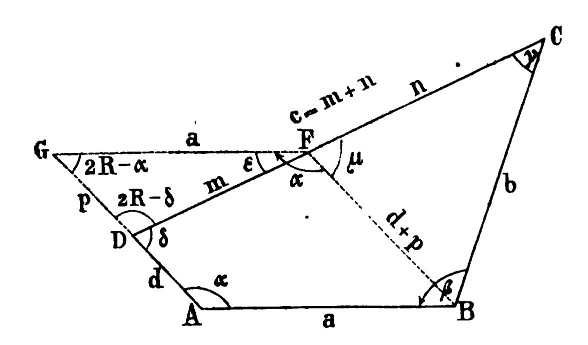
Aufgabe 779. Drei der Seiten eines Vierecks sind $a = 4123$ dm, $b = 7211$ dm und $c = 10817$ dm und die an der vierten Seite liegenden Winkel α und δ betragen bezw. $156^0\,42'\,10{,}4''$ und $39^0\,56'\,51{,}8''$; man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Vierecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 4123 \text{ dm} \\ b = 7211 \text{ dm} \\ c = 10817 \text{ dm} \\ \alpha = 156^0\,42'\,10{,}4'' \\ \delta = 39^0\,56'\,51{,}8'' \end{cases}$$

Andeutung. Anstatt wie in der Andeutung zur vorhergehenden analogen Aufgabe gesagt wurde, kann man auch, wie folgt verfahren:

Stellt, siehe Figur 292, $ABCD$ das gegebene Viereck dar und man zieht BF parallel der nicht gegebenen vierten Seite AD und FG parallel AB, so erhält man das gr $ABFG$ und die beiden Dreiecke BCF und DFG.

Figur 292.



Von dem ‖gr $ABFG$ kennt man die Seite AB (= a) und die Winkel, letztere sind α und $2R - \alpha$. Da hiernach von dem Dreieck DFG die Seite FG (= a), der Winkel FGA (= $2R - \alpha$) bekannt sind und da ferner $\sphericalangle GDF = 2R - \delta$ ist, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, hieraus die Seite DF (= m) und DG (= p) und den Winkel ε dieses Dreiecks berechnen. Sind hiernach m und ε berechnet, so kann man leicht die Seite FC (= n) des Dreiecks FCB aus der Relation:

$$c = m + n$$

und den Winkel μ dieses Dreiecks aus der Relation:

$$\alpha - \varepsilon + \mu = 2R$$

berechnen und dann kann man, da man gemäss der Aufgabe noch die Seite CB (= b) dieses Dreiecks kennt, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite BF (= $d + p$) sowie den Winkel γ dieses Dreiecks berechnen u. s. f.

Aufgabe 780. Von einem Viereck kennt man die beiden aneinanderstossenden Seiten $a = 3{,}16$ m und $b = 4{,}27$ m und die drei diesen Seiten anliegenden Winkel $\alpha = 79^0\,47'\,30''$, $\beta = 94^0\,40'\,10''$ und $\gamma = 67^0\,11'\,14''$; man soll die beiden übrigen Seiten und den Inhalt des Vierecks berechnen.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 3{,}16 \text{ m} \\ b = 4{,}27 \text{ m} \\ \alpha = 79^0\,47'\,30'' \\ \beta = 94^0\,40'\,10'' \\ \gamma = 67^0\,11'\,14'' \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 291, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, so hat man nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 8) die Relation:

$$c \cdot \sin\delta = b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \sin\alpha$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots c = \frac{b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \sin\alpha}{\sin\delta}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann, indem:

$$\delta = 4R - (\alpha + \beta + \gamma)$$

ist.

In analoger Weise erhält man aus der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 7a):

$$b \cdot \sin\gamma = -a \cdot \sin(\alpha + \delta) + d \sin\delta$$

für d:

$$\text{B)} \ldots d = \frac{b \sin\gamma + a \sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta}$$

nach welcher Gleichung man die Seite d berechnen kann.

Den Inhalt F findet man, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 767 gezeigt wurde, mittels der Relation:

$$F = \frac{1}{2}\left[a d \cdot \sin\alpha + b c \cdot \sin\gamma\right]$$

Setzt man in derselben für d und c die Werte aus den Gleichungen A) und B), so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$F = \frac{1}{2}\left[a \sin\alpha \cdot \frac{b \sin\gamma + a \sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta} + b \sin\gamma \cdot \frac{b \sin(\gamma + \delta) + a \sin\alpha}{\sin\delta}\right]$$

oder:

$$\text{C)} \ldots F = \frac{2ab \sin\alpha \sin\gamma + a^2 \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \delta) + b^2 \sin\gamma \cdot \sin(\gamma - \delta)}{2 \sin\delta}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 781. In einem Viereck messen die beiden gegenüberstehenden Seiten a und c bezw. 538,8 und 380,04 m und die drei Winkel α, β und γ sind bezw. $= 82^0\,28'\,10''$, $68^0\,30'\,40''$ und $103^0\,10'\,20''$; man soll hieraus die übrigen Seiten und den Inhalt des Vierecks berechnen.

Figur 293.

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 538{,}8 \text{ m} \\ c = 380{,}04 \text{ m} \\ \alpha = 82^0\,28'\,10'' \\ \beta = 68^0\,30'\,40'' \\ \gamma = 103^0\,10'\,20'' \end{cases}$$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 293. $ABCD$ das gegebene Viereck dar, so hat man nach der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 8) die Relation;

$$c \cdot \sin\delta = b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \cdot \sin\alpha$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots b = \frac{c \sin\delta - a \cdot \sin\alpha}{\sin(\gamma + \delta)}$$

nach welcher Gleichung man die Seite b berechnen kann. In analoger Weise erhält man aus der in der Erkl. 436 aufgestellten Gleichung 6 a):

$$a \sin\beta = -d \sin(\gamma + \delta) + c \sin\gamma$$

für d:

$$\text{B)} \ldots d = \frac{c \cdot \sin\gamma - a \sin\beta}{\sin(\gamma + d)}$$

nach welcher Gleichung man die Seite d berechnen kann.

Für den Inhalt F des Vierecks hat man:

$$F = \frac{1}{2}(bc \cdot \sin\gamma + ad \cdot \sin\alpha)$$

oder, wenn man für b und d die Werte aus den Gleichungen A) und B) substituiert:

$$F = \frac{1}{2}\left[c \sin\gamma \cdot \frac{c \sin\delta - a \sin\alpha}{\sin(\gamma + \delta)} + a \sin\alpha \cdot \frac{c \sin\gamma - a \sin\beta}{\sin(\gamma + \delta)}\right]$$

und reduziert:

$$\text{C)} \ldots F = \frac{c^2 \sin\delta \sin\gamma - a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\gamma + \delta)}$$

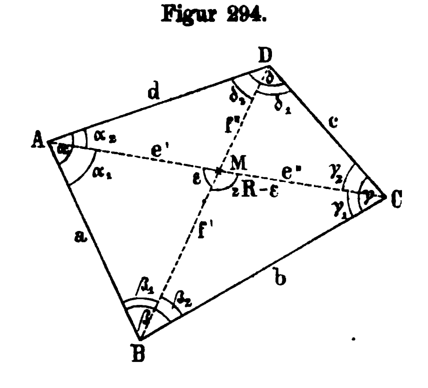
nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 782. Die vier Seiten eines Vierecks sind $a = 235{,}21$ dm, $b = 227{,}08$ dm, $c = 189{,}18$ dm und $d = 330{,}72$ dm; man soll aus diesen Stücken und dem Winkel

$$\text{Gegeben:} \begin{cases} a = 235{,}21 \text{ dm} \\ b = 227{,}08 \text{ dm} \\ c = 189{,}18 \text{ dm} \\ d = 330{,}72 \text{ dm} \\ \varepsilon = 71^0\,18'\,46{,}5'' \end{cases}$$

$\varepsilon = 71^0\,18'\,46{,}5''$, **welchen die beiden Diagonalen miteinander bilden, den Inhalt F des Dreiecks berechnen.**

Figur 294.



Andeutung. Stellt, siehe Figur 294, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, so erhält man aus den Dreiecken ABM, BCM, CDM und DAM nach dem Projektionssatz bezw. die Relationen:

$$a^2 = e'^2 + f'^2 - 2e'f' \cdot \cos\varepsilon$$
$$b^2 = e''^2 + f'^2 - 2e''f' \cdot \cos(2R - \varepsilon)$$
$$c^2 = e''^2 + f''^2 - 2e''f'' \cos\varepsilon$$
$$d^2 = e'^2 + f''^2 - 2e'f'' \cos(2R - \varepsilon)$$

und aus diesen Gleichungen ergeben sich, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 94:

$$\cos(2R - \varepsilon) = -\cos\varepsilon$$

ist, der Reihe nach die Gleichungen:

a) . . . $2e'f' \cdot \cos\varepsilon = e'^2 + f'^2 - a^2$

b) . . . $2e''f' \cdot \cos\varepsilon = b^2 - e''^2 - f'^2$

c) . . . $2e''f'' \cos\varepsilon = e''^2 + f''^2 - c^2$

und

d) . . . $2e'f'' \cos\varepsilon = d^2 - e'^2 - f''^2$

Addiert man diese Gleichungen, so erhält man weiter:

$$2\cos\varepsilon\,[e'f' + e''f' + e''f'' + e'f''] = b^2 + d^2 - a^2 - c^2$$

oder:

e) . . . $e'f' + e''f' + e''f'' + e'f'' = \dfrac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{2\cos\varepsilon}$

Multipliziert man nunmehr Glied für Glied dieser Gleichung mit $\dfrac{\sin\varepsilon}{2}$, so erhält man:

$$\frac{e'f'}{2} \cdot \sin\varepsilon + \frac{e''f'}{2} \cdot \sin\varepsilon + \frac{e''f''}{2} \sin\varepsilon + \frac{e'f''}{2} \cdot \sin\varepsilon = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{4} \cdot \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass nach der Erkl. 151 ein jedes Glied auf der rechten Seite dieser Gleichung den Inhalt eines der vier Dreiecke darstellt, in welche das Viereck durch die beiden Diagonalen zerlegt wird, und dass die Summe der Inhalte dieser vier Dreiecke gleich dem gesuchten Inhalt F des ganzen Vierecks ist, und in Rücksicht der Erkl. 120, die Relation:

A) . . . $F = \dfrac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\varepsilon$

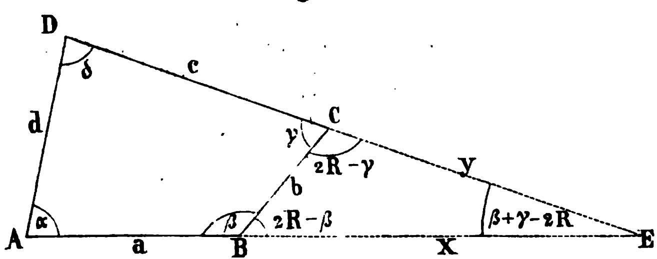
nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 783. Man soll den Inhalt eines Vierecks aus den drei Seiten $a = 452$ m, $b = 610$ m und $c = 411$ m und den beiden von diesen Seiten eingeschlossenen Winkeln $\beta = 92^0\,5'$ und $\gamma = 68^0\,53'$ berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 452\text{ m} \\ b = 610\text{ m} \\ c = 411\text{ m} \\ \beta = 92^0\,5' \\ \gamma = 68^0\,53' \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 295, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, und man verlängert die Seiten a und c bis zu ihrem


Figur 295.



Durchschnitt in E, so erhält man das Dreieck AED und das Dreieck BEC. Bezeichnet man nun den Inhalt des Dreiecks AED mit F_1, den Inhalt des Dreiecks BEC mit F_2, so erhält man für den gesuchten Inhalt F des Vierecks $ABCD$:

$$\text{a)} \ldots F = F_1 - F_2$$

Da nun nach der Erkl. 151, siehe Fig. 295:

$$F_1 = \frac{(a+x)(c+y)}{2} \cdot \sin[(\beta+\gamma) - 2R]$$

und

$$F_2 = \frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin[(\beta+\gamma) - 2R]$$

ist, und da man:

$$\sin[(\beta+\gamma) - 2R] = \sin[-(2R - (\beta+\gamma))]$$

also hiernach und nach der Erkl. 127:

$$\sin[(\beta+\gamma) - 2R] = -\sin[2R - (\beta+\gamma)]$$

oder hiernach und nach der Erkl. 66:

$$\alpha) \ldots \sin[(\beta+\gamma) - 2R] = -\sin(\beta+\gamma)$$

setzen kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung a):

$$F = \frac{(a+x)(c+y)}{2} \cdot -\sin(\beta+\gamma) - \frac{x \cdot y}{2} \cdot -\sin(\beta+\gamma)$$

$$F = -\frac{(a+x)(c+y)}{2} \sin(\beta+\gamma) + \frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin(\beta+\gamma)$$

$$F = [-(a+x)(c+y) + x \cdot y] \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{2}$$

$$F = [-ac - cx - ay - xy + xy] \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{2}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots F = [-ac - cx - ay] \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{2}$$

Um aus dieser Gleichung die unbekannten Abschnitte x und y noch zu eliminieren, beachte man, dass sich aus dem Dreieck BEC nach der Sinusregel die Relationen:

$$x : b = \sin(2R - \gamma) : \sin[(\beta+\gamma) - 2R]$$

und

$$y : b = \sin(2R - \beta) : \sin[(\beta+\gamma) - 2R]$$

ergeben, und dass man aus denselben in Rücksicht der vorstehenden Gleichung α) und der Erkl. 66 bezw.:

$$x = b \cdot \frac{\sin\gamma}{-\sin(\beta+\gamma)}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots x = -b \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

und

$$y = b \cdot \frac{\sin\beta}{-\sin(\beta+\gamma)}$$

oder:

$$\text{d)} \ldots y = -b \cdot \frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}$$

erhält. Setzt man diese Werte für x und y in Gleichung b), so erhält man:

$$F = \left[-ac + bc \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)} + ab\frac{\sin\beta}{\sin(\beta+\gamma)}\right] \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{2}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots F = [ab\sin\beta + bc\sin\gamma - ac\sin(\beta+\gamma)] \cdot \frac{\sin(\beta+\gamma)}{2}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken berechnen kann.

Aufgabe 784. Die vier Seiten a, b, c und d eines Vierecks verhalten sich wie $2:3:5:4$, die Summe der Inhalte der Quadrate über jenen vier Seiten ist $S^2 = 486$ qm und der Winkel, welcher von den Seiten a und b eingeschlossen wird, ist $\beta = 110^0\,20'$; man soll aus diesen Angaben die Seiten, Winkel und den Inhalt des Vierecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a:b:c:d = 2:3:5:4 \\ a^2+b^2+c^2+d^2 = S^2 = 486 \text{ qm} \\ \beta = 110^0\,20' \end{cases}$

Andeutung. Gemäss der Aufgabe bestehen die Relationen:

$$\text{a)} \ldots a:b:c:d = 2:3:5:4$$

und

$$\text{b)} \ldots a^2+b^2+c^2+d^2 = S^2$$

aus denselben kann man zunächst die vier Seiten wie folgt berechnen:

Schreibt man die gegebene laufende Proportion a) nach der Erkl. 88 in der Form:

$$\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{d}{4}$$

und quadriert dieselbe, so erhält man:

$$\frac{a^2}{4} = \frac{b^2}{9} = \frac{c^2}{25} = \frac{d^2}{16}$$

und wenn man den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung bringt:

$$\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4+9+25+16} = \frac{a^2}{4} \text{ oder } = \frac{b^2}{9} \text{ oder } = \frac{c^2}{25} \text{ oder } = \frac{d^2}{16}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der vorstehenden Gleichung b):

$$\text{A)} \ldots \begin{cases} \dfrac{S^2}{4+9+25+16} = \dfrac{a^2}{4} \\ \dfrac{S^2}{4+9+25+16} = \dfrac{b^2}{9} \\ \dfrac{S^2}{4+9+25+16} = \dfrac{c^2}{25} \\ \text{und} \\ \dfrac{S^2}{4+9+25+16} = \dfrac{d^2}{16} \end{cases}$$

nach welchen Gleichungen man, wenn man für S^2 den gegebenen Zahlenwert substituiert, die gesuchten Seiten a, b, c und d berechnen kann.

Sind hiernach die Seiten berechnet, so kennt man von dem Viereck die vier Seiten und einen Winkel; man kann somit zur Berechnung der Winkel und der Seiten im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 767 gesagt wurde.

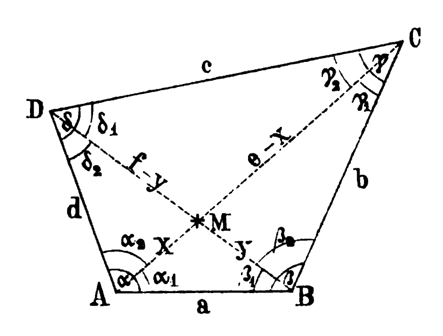
Aufgabe 785. Die vier Seiten eines Vierecks sind:

$a = 40$ dm
$b = 68$ dm
$c = 75$ dm
und $d = 51$ dm

und die beiden Diagonalen desselben sind:

$e = 84$ dm
und $f = 77$ dm

Man soll hieraus die Segmente der beiden Diagonalen berechnen.



Figur 296.

Gegeben: $\begin{cases} a = 40 \text{ dm} \\ b = 68 \text{ dm} \\ c = 75 \text{ dm} \\ d = 51 \text{ dm} \\ e = 84 \text{ dm} \\ f = 77 \text{ dm} \end{cases}$

Andeutung. Stellt, siehe Figur 296, $ABCD$ das gegebene Viereck dar, und bezeichnet man den Abschnitt AM der Diagonale AC $(= e)$ mit x, also den anderen Abschnitt mit $e - x$, und den Abschnitt BM der Diagonale BD $(= f)$ mit y, also den anderen Abschnitt DM mit $f - y$, so erhält man nach dem Projektionssatz:

aus dem Dreieck ABM:

a) . . . $x^2 = a^2 + y^2 - 2ay \cdot \cos \beta_1$

aus dem Dreieck BCM:

b) . . . $(e - x)^2 = b^2 + y^2 - 2by \cdot \cos \beta_2$

und

c) . . . $y^2 = b^2 + (e - x)^2 - 2b \cdot (e - x) \cdot \cos \gamma_1$

aus dem Dreieck MCD:

d) . . $(f - y)^2 = c^2 + (e - x)^2 - 2c \cdot (e - x) \cdot \cos \gamma_2$

aus dem Dreieck ABD:

$$d^2 = a^2 + f^2 - 2af \cdot \cos \beta_1$$

oder:

e) . . . $\cos \beta_1 = \dfrac{a^2 + f^2 - d^2}{2af}$

aus dem Dreieck BCD:

$$c^2 = f^2 + b^2 - 2bf \cdot \cos \beta_2$$

oder:

f) . . . $\cos \beta_2 = \dfrac{f^2 + b^2 - c^2}{2bf}$

aus dem Dreieck ABC:

$$a^2 = b^2 + e^2 - 2be \cdot \cos \gamma_1$$

oder:

g) . . . $\cos \gamma_1 = \dfrac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$

und aus dem Dreieck ACD:

$$d^2 = e^2 + c^2 - 2ec \cdot \cos \gamma_2$$

oder:

h) . . . $\cos \gamma_2 = \dfrac{e^2 + c^2 - d^2}{2ec}$

Subtrahiert man nunmehr von der Gleichung b) die Gleichung a), von der Gleichung d) die Gleichung c) und setzt in den somit neu erhaltenen beiden Gleichungen für die Kosinus der Winkel β_1, β_2, γ_1 und γ_2 die Werte aus den Gleichungen e) bis h), so erhält man nach gehöriger Reduktion bezw:

$$e^2 - 2ex = b^2 - a^2 - 2by \cdot \frac{f^2 + b^2 - c^2}{2bf} + 2ay \cdot \frac{a^2 + f^2 - d^2}{2af}$$

oder:

A) . . . $e^2 - 2ex = b^2 - a^2 + \dfrac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{f} \cdot y$

und

$$f^2 - 2fy = c^2 - b^2 - 2c(e-x) \cdot \frac{e^2 + c^2 - d^2}{2ec} + 2b(e-x) \cdot \frac{b^2 + e^2 - a^2}{2be}$$

oder:

$$\text{B)} \ldots f^2 - 2fy = c^2 - b^2 + \frac{b^2 - a^2 + d^2 - c^2}{e} \cdot (e-x)$$

Man hat mit den Gleichungen A) und B) zwei Gleichungen, in welchen nur noch die zwei Unbekannten x und y vorkommen, und welche man im weiteren nach einfachen algebraischen Regeln in bezug auf x und y auflösen kann.

Aufgabe 786. In einem Viereck sind die vier Winkel

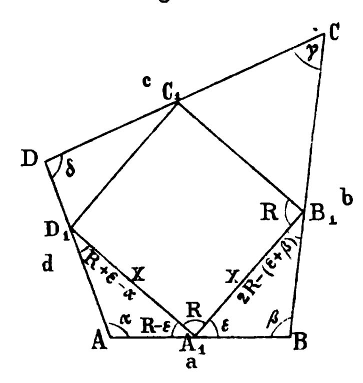
$\alpha = 115^0\, 3'\, 27{,}4''$
$\beta = 98^0\, 47'\, 50{,}7''$
$\gamma = 64^0\, 56'\, 32{,}6''$
und $\delta = 81^0\, 12'\, 9{,}3''$

und die beiden aneinanderstossenden Seiten:

$a = 400$ m
und $b = 680$ m

Man soll in dasselbe ein Quadrat so konstruieren, dass dessen Ecken auf den Vierecksseiten liegen.

Figur 297.



Erkl. 488. Sind, siehe die nebenstehende Andeutung und die Figur 297, der Winkel ε und die Quadratseite x berechnet, also bekannt, so kann man in das gegebene Viereck $ABCD$ das geforderte Quadrat wie folgt konstruieren:

Man trage, siehe Figur 298, den berechneten Winkel ε beliebig an der Vierecksseite a, z. B. in dem Punkt F an, trage dann die berechnete Seite x auf dem einen Schenkel dieses Winkels ε nach FG ab, ziehe durch G zu AB die Parallele GB_1 und durch B_1 zu FG die Parallele A_1B_1, errichte alsdann in A_1 und B_1 die zu A_1B_1 Senkrechten A_1D_1 und B_1C_1 und verbinde D_1 mit C_1. Das hierdurch erhaltene Viereck $A_1B_1C_1D_1$ ist das verlangte Quadrat.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 115^0\, 3'\, 27{,}4'' \\ \beta = 98^0\, 47'\, 50{,}7'' \\ \gamma = 64^0\, 56'\, 32{,}6'' \\ \delta = 81^0\, 12'\, 9{,}3'' \\ a = 400 \text{ m} \\ b = 680 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: ein Quadrat, dessen Ecken in den Seiten des gegeb. Vierecks liegen.

Andeutung. Angenommen es sei, siehe Figur 297, $ABCD$ das gegebene Viereck und $A_1B_1C_1D_1$ das in dasselbe zu konstruierende Quadrat. Dieses Quadrat wäre leicht in das gegebene Viereck $ABCD$ einzuzeichnen, wenn man die Lage irgend einer der Quadratseiten zu einer der Vierecksseiten, z. B. die Lage der Quadratseite A_1B_1 zur Vierecksseite AB, also den Winkel ε, sowie auch die Länge x der Quadratseite A_1B_1 kennen würde (siehe Erklärung 438); diese Bestimmungsstücke, Winkel ε und Seite x kann man, wie folgt, aus den gegebenen Stücken des Vierecks berechnen:

Aus dem Dreieck A_1BB_1 ergibt sich nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle A_1B_1B = 2R - (\varepsilon + \beta)$$

ist:

$$\overline{A_1B} : x = \sin[2R - (\varepsilon + \beta)] : \sin\beta$$

oder:

$$\text{a)} \ldots A_1B = \frac{x \cdot \sin(\varepsilon + \beta)}{\sin\beta}$$

ferner ergibt sich aus diesem Dreieck die Relation:

$$\overline{BB_1} : x = \sin\varepsilon : \sin\beta$$

oder:

$$\text{b)} \ldots \overline{BB_1} = \frac{x \cdot \sin\varepsilon}{\sin\beta}$$

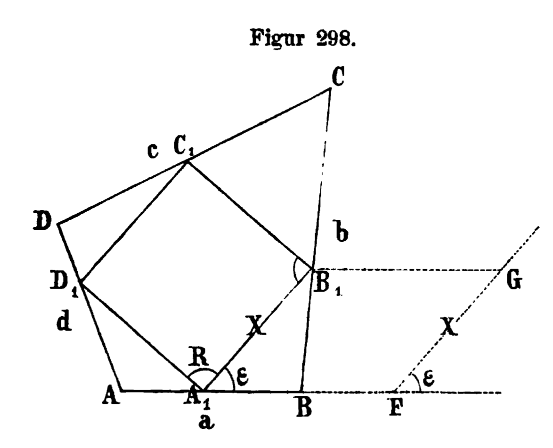
Weiter ergibt sich aus dem Dreieck AA_1D_1 nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle AA_1D = 2R - (R + \varepsilon) \text{ also } = R - \varepsilon$$

und dass hiernach:

$$\sphericalangle AD_1A_1 = 2R - [\alpha + (R - \varepsilon)]$$
$$\text{also } = R + (\varepsilon - \alpha)$$

Figur 298.



Erkl. 349. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin(R+\alpha) = \cos\alpha$$

(Siehe Formel 35a in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 440. Die nebenstehende Gleichung l) kann man wie folgt umformen:

Multipliziert man jene Gleichung mit dem Generalnenner $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$, so erhält man:

ist:

$$\overline{AA_1} : x = \sin[R+(\varepsilon-\alpha)] : \sin\alpha$$

oder nach der Erkl. 439:

$$\text{c)} \ldots \overline{AA_1} = \frac{x\cdot\cos(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha}$$

und schliesslich ergibt sich aus dem Dreieck B_1CC_1 nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle C_1B_1C = 2R - [R + 2R - (\varepsilon+\beta)]$$
$$\text{oder} = (\varepsilon+\beta) - R$$

und dass hiernach:

$$\sphericalangle B_1C_1C = 2R - [\gamma + (\varepsilon+\beta) - R]$$
$$\text{oder} = 3R - (\beta+\gamma+\varepsilon)$$

ist:

$$\overline{B_1C} : x = \frac{\sin[3R-(\beta+\gamma+\varepsilon)]}{\sin\gamma}$$

oder nach der Erkl. 426:

$$\text{d)} \ldots \overline{B_1C} = -\frac{x\cdot\cos(\beta+\gamma+\varepsilon)}{\sin\gamma}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass in dem Viereck $ABCD$:

$$\text{e)} \ldots \overline{AA_1} + \overline{A_1B} = a$$

und dass:

$$\text{f)} \ldots \overline{BB_1} + \overline{B_1C} = b$$

ist, so erhält man hieraus, wenn man für: $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1B}$, $\overline{BB_1}$ und $\overline{B_1C}$ die entsprechenden Werte aus den Gleichungen a) bis e) substituiert:

$$\text{g)} \ldots \frac{x\cdot\cos(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{x\cdot\sin(\varepsilon+\beta)}{\sin\beta} = a$$

und

$$\text{h)} \ldots \frac{x\cdot\sin\varepsilon}{\sin\beta} - \frac{x\cdot\cos(\beta+\gamma+\varepsilon)}{\sin\gamma} = b$$

nämlich zwei Gleichungen mit den zwei zu berechnenden Unbekannten x und ε. Den Winkel ε kann man nunmehr zunächst aus diesen Gleichungen wie folgt berechnen:

Löst man jede dieser Gleichungen nach x auf, so erhält man bezw.:

$$\text{i)} \ldots x = a : \left[\frac{\cos(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\varepsilon+\beta)}{\sin\beta}\right]$$

und

$$\text{k)} \ldots x = b : \left[\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} - \frac{\cos(\beta+\gamma+\varepsilon)}{\sin\gamma}\right]$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die goniometrische Gleichung:

$$\text{l)} \ldots a\cdot\left[\frac{\sin\varepsilon}{\sin\beta} - \frac{\cos(\beta+\gamma+\varepsilon)}{\sin\gamma}\right] = b\cdot\left[\frac{\cos(\varepsilon-\alpha)}{\sin\alpha} + \frac{\sin(\varepsilon+\beta)}{\sin\beta}\right]$$

Formt man dieselbe um, wie in der Erklärung 440 gezeigt, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin\beta\,[a\cos(\beta+\gamma) + b\sin\gamma\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)]}{a[\sin\gamma + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)] - b\sin\gamma\,[\sin\beta + \cos\beta]}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Winkel ε berechnen kann. Ist hiernach ε berechnet, so kann man nach einer der Gleichungen i) und k) die gesuchte Quadrat-

$a \cdot [\sin\varepsilon \sin\alpha \sin\gamma - \cos(\beta+\gamma+\varepsilon)\sin\alpha\sin\beta] =$
$b \cdot [\cos(\varepsilon-\alpha)\sin\beta\sin\gamma + \sin(\varepsilon+\beta)\sin\alpha\sin\gamma]$
oder:

$$a \cdot \sin\alpha\,[\sin\varepsilon\sin\gamma - \sin\beta\cos((\beta+\gamma)+\varepsilon)] = b\sin\gamma\,[\cos(\varepsilon-\alpha)\sin\beta + \sin(\varepsilon+\beta)\sin\alpha]$$

Bringt man in bezug auf $\cos[(\beta+\gamma)+\varepsilon]$ die in der Erkl. 427 angeführte Formel in Anwendung, indem man in derselben:

$$\alpha = \beta+\gamma \text{ und } \beta = \varepsilon$$

setzt, so erhält man:

$$a\sin\alpha\,[\sin\varepsilon\sin\gamma - \sin\beta\cdot[\cos(\beta+\gamma)\cos\varepsilon - \sin(\beta+\gamma)\sin\varepsilon)] = b\cdot\sin\gamma\,[\cos(\varepsilon-\alpha)\sin\beta + \sin(\varepsilon+\beta)\sin\alpha]$$

Bringt man ferner in bezug auf $\cos(\varepsilon-\alpha)$ und $\sin(\varepsilon+\beta)$ die in den Erkl. 225 und 95 angeführten Formeln in Anwendung, so geht jene Gleichung über in:

$$a\sin\alpha\,[\sin\varepsilon\sin\gamma - \sin\beta\cos(\beta+\gamma)\cos\varepsilon + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)\sin\varepsilon] = b\sin\gamma\,[(\cos\varepsilon\cos\alpha + \sin\varepsilon\sin\alpha)\sin\beta + (\sin\varepsilon\cos\beta + \cos\varepsilon\sin\beta)\sin\alpha]$$

oder in:

$$a\sin\alpha\,[\sin\varepsilon\sin\gamma - \sin\beta\cos(\beta+\gamma)\cos\varepsilon + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)\sin\varepsilon] = b\sin\gamma\,[\sin\beta\cos\varepsilon\cos\alpha + \sin\beta\sin\varepsilon\sin\alpha + \sin\alpha\sin\varepsilon\cos\beta + \sin\alpha\cos\varepsilon\sin\beta]$$

Dividiert man nunmehr Glied für Glied dieser Gleichung durch $\sin\alpha\cos\varepsilon$, reduziert und setzt:

$$\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varepsilon} = \operatorname{tg}\varepsilon,\quad \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{ctg}\alpha$$

so erhält man:

$$a\,[\operatorname{tg}\varepsilon\cdot\sin\gamma - \sin\beta\cos(\beta+\gamma) + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)\operatorname{tg}\varepsilon] = b\sin\gamma\,[\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha + \sin\beta\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\varepsilon\cos\beta + \sin\beta]$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon\cdot a\sin\gamma - a\sin\beta\cos(\beta+\gamma) + \operatorname{tg}\varepsilon\cdot a\sin\beta\sin(\beta+\gamma) = b\sin\gamma\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon\cdot b\sin\beta\sin\gamma + \operatorname{tg}\varepsilon\cdot b\sin\gamma\cos\beta + b\sin\beta\sin\gamma$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon\,[a\sin\gamma + a\sin\beta\sin(\beta+\gamma) - b\sin\beta\sin\gamma - b\sin\gamma\cos\beta] = a\sin\beta\cos(\beta+\gamma) + b\sin\gamma\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha + b\sin\beta\sin\gamma$$

$$\operatorname{tg}\varepsilon\cdot[a\,(\sin\gamma + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)) - b\sin\gamma\,(\sin\beta + \cos\beta)] = \sin\beta\,[a\cos(\beta+\gamma) + b\sin\gamma\operatorname{ctg}\alpha + b\sin\gamma]$$

mithin:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\sin\beta\,[a\cos(\beta+\gamma) + b\sin\gamma\,(1+\operatorname{ctg}\alpha)]}{a\,[\sin\gamma + \sin\beta\sin(\beta+\gamma)] - b\sin\gamma\,(\sin\beta+\cos\beta)}$$

seite x berechnen und dann das Quadrat konstruieren, wie in der Erkl. 438 angedeutet ist.

Anmerkung 42. Weitere Aufgaben, in welchen die Berechnung von allgemeinen Vierecken gefordet wird, sind noch in einigen der folgenden Abschnitten enthalten.

11). Aufgaben über Vielecke oder Polygone.

Anmerkung 43. Was in den Anmerkungen 34 bis 39 über Vierecke und Vierseite gesagt ist, gilt in seiner Verallgemeinerung auch für jedes beliebige Vieleck und Vielseit.

Man unterscheidet wie bei den Vierecken und Vierseiten, ganz allgemein: vollständige Vielecke und einfache Vielecke, ebenso vollständige Vielseite und einfache Vielseite.

Da die einfachen Vielecke und Vielseite, wie die einfachen Vierecke und Vierseite, wesentlich nicht von einander verschieden sind, so kann man ihren Namen vertauschen.

Im engeren Sinn versteht man hiernach unter einem Vieleck (griech. Polygon) ein einfaches Vieleck oder ein einfaches Vielseit.

In diesem Lehrbuch kommen nur einfache Vielecke (oder einfache Vielseite) in Betracht.

Anmerkung 44. Sind die sämtlichen Seiten und auch die sämtlichen Winkel eines Vielecks oder Polygons je unter sich einander gleich, so nennt man ein solches Vieleck

ein regelmässiges oder reguläres

ist dies nicht der Fall, so heisst das Vieleck:

ein unregelmässiges oder irreguläres.

Hiernach unterscheidet man regelmässige und unregelmässige Vielecke oder Polygone.

a) Aufgaben über die regelmässigen Vielecke oder die regulären Polygone.

Anmerkung 45. Da man bei der trig. Berechnung der regelmässigen Vielecke oder der regulären Polygone die Beziehungen benutzt, welche zwischen einem solchen Polygon und den demselben um- und einbeschriebenen Kreisen bestehen, so sind an dieser Stelle keine Aufgaben über die regulären Polygone aufgenommen. Diesbezügliche Aufgaben findet man in dem späteren Abschnitt, welcher Aufgaben über die Polygone in Verbindung mit den denselben um- und einbeschriebenen Kreisen enthält.

b) Aufgaben über die unregelmässigen Vielecke oder Polygone.

Anmerkung 46. Die Berechnung eines Polygons erfolgt im allgemeinen dadurch, dass man dasselbe durch Diagonalen oder auch durch andere Hülfslinien, in solche Dreiecke zerlegt, welche unmittelbar trigonometrisch bestimmt sind, und aus diesen die gesuchten Stücke direkt oder indirekt berechnet. Ist dies, in Anbetracht der in einer diesbezüglichen Aufgabe gegebenen Bestimmungsstücke eines Polygons, möglich, so ist die Aufgabe eine trigonometrische Vielecksaufgabe; ist dies jedoch nicht möglich, so muss man sich zur Aufstellung von Beziehungen zwischen den gegebenen und den gesuchten Stücken anderweiter sogenannter polygonometrischer Methoden bedienen, und dann ist eine solche Aufgabe eine polygonometrische Aufgabe (siehe Anmerkung 47).

Anmerkung 47. Da die Berechnung beliebiger Vielecke für das praktische Vermessungswesen von sehr wichtiger Bedeutung ist, so ist in dieser Encyklopädie der Berechnung der Vielecke ein besonderes Buch „das Lehrbuch der Polygonometrie" gewidmet. Da in diesem Lehrbuch der Polygonometrie allgemeine Methoden angeführt werden, nach welchen man jedes beliebige Vieleck, auch das Dreieck und das Viereck als einfachere Arten der Vielecke, berechnen kann, so sind an dieser Stelle des Lehrbuchs der ebenen Trigonometrie nur einige trigonometrische Vielecksaufgaben angeführt, um zu zeigen, wie man in besonderen Fällen die Berechnung eines einfachen Vielecks auf die Berechnung schiefwinkliger Dreiecke zurückführen kann.

Aufgabe 787. Man soll den Flächeninhalt eines Fünfecks $ABCDE$ berechnen, in welchem:

die Seiten: $\begin{cases} \overline{AB} = a = 214 \text{ m} \\ \overline{BC} = b = 129 \text{ m} \\ \overline{CD} = c = 112 \text{ m} \\ \overline{DE} = d = 138 \text{ m} \\ \overline{EA} = e = 154 \text{ m} \end{cases}$

und die

Diagonalen: $\begin{cases} \overline{AC} = f = 204 \text{ m} \\ \overline{AD} = g = 125 \text{ m} \end{cases}$

lang sind.

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} a = 214 \text{ m} \\ b = 129 \text{ m} \\ c = 112 \text{ m} \\ d = 138 \text{ m} \\ e = 154 \text{ m} \\ f = 204 \text{ m} \\ g = 125 \text{ m} \end{array} \right\}$ (siehe Figur 299)

Andeutung. Von jedem der drei Dreiecke ABC, ACD und ADE, siehe Figur 299, in welche das gegebene Fünfeck durch die gegebenen Diagonalen f und g zerlegt wird, kennt man die drei Seiten; man kann somit den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde. Durch Addition dieser hiernach zu berechnenden Inhalte der drei Dreiecke erhält man den gesuchten Inhalt des Fünfecks.

Aufgabe 788. Von einem Fünfeck kennt man die

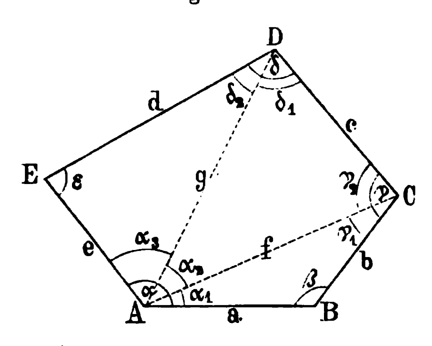
Seiten: $\begin{cases} \overline{AB} = a = 37{,}6 \text{ m} \\ \overline{BC} = b = 20{,}5 \text{ m} \\ \overline{CD} = c = 46{,}08 \text{ m} \\ \overline{DE} = d = 45{,}2 \text{ m} \end{cases}$

und die

Winkel: $\begin{cases} ABC = \beta = 142^0\,40'\,30{,}4'' \\ BCD = \gamma = 84^0\,53'\,10{,}5'' \\ CDE = \delta = 98^0\,12'\,0{,}8'' \end{cases}$

und soll aus diesen Angaben dessen Inhalt berechnen.

Figur 299.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 37{,}6 \text{ m} \\ b = 20{,}5 \text{ m} \\ c = 46{,}08 \text{ m} \\ d = 45{,}2 \text{ m} \\ \beta = 142^0\,40'\,30{,}4'' \\ \gamma = 84^0\,53'\,10{,}5'' \\ \delta = 98^0\,12'\,0{,}8'' \end{array}\right\}$ (s. Figur 299)

Andeutung. Ist, siehe Fig. 299, $ABCDE$ das gegebene Fünfeck, und man zieht die Diagonalen AC ($= f$) und AD ($= g$), so wird hierdurch das Fünfeck in die drei Dreiecke ABC, ACD und ADE zerlegt. Da man von dem Dreieck ABC die Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel β kennt, so kann man, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, den Inhalt, die Seite f und den Winkel γ_1 dieses Dreiecks berechnen.

Da man, wenn diese Berechnung ausgeführt ist, von dem Dreieck ACD die Seiten c und f und den von denselben eingeschlossenen Winkel γ_2 kennt, derselbe ist nämlich $= \gamma - \gamma_1$, so kann man in derselben Weise den Inhalt, die Seite g und den Winkel δ_1 dieses Dreiecks berechnen.

Da man nach Ausführung dieser Berechnung von dem Dreieck ADE die Seiten d und g und den Winkel δ_2 kennt, derselbe ist nämlich $= \delta - \delta_1$, so kann man schliesslich in gleicher Weise den Inhalt dieses Dreiecks berechnen. Der gesuchte Inhalt des Fünfecks ergibt sich durch Addition der hiernach berechneten Inhalte jener drei Dreiecke.

Aufgabe 789. Von einem Fünfeck $ABCDE$ kennt man:

die Seiten: $\begin{cases} \overline{AB} = a = 20{,}4 \text{ m} \\ \overline{BC} = b = 32{,}45 \text{ m} \\ \overline{CD} = c = 60{,}38 \text{ m} \end{cases}$

und

die Winkel: $\begin{cases} EAB = \alpha = 145^0\,40'\,20{,}3'' \\ ABC = \beta = 110^0\,54'\,0{,}8'' \\ BCD = \gamma = 48^0\,36'\,4{,}6'' \\ DEA = \varepsilon = 35^0\,0'\,26{,}8'' \end{cases}$

Man soll aus diesen Angaben die übrigen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt berechnen.

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} a = 20{,}4 \text{ m} \\ b = 32{,}45 \text{ m} \\ c = 60{,}38 \text{ m} \\ \alpha = 145^0\,40'\,20{,}3'' \\ \beta = 110^0\,54'\,0{,}8'' \\ \gamma = 48^0\,36'\,4{,}6'' \\ \varepsilon = 35^0\,0'\,26{,}8'' \end{array}\right\}$ (s. Figur 300)

Andeutung. Stellt, siehe Figur 300, $ABCDE$ das gegebene Fünfeck dar, so zerlege man dasselbe durch die Diagonalen f und g in Dreiecke. Von dem Dreieck ABC kennt man die Seiten a und b und den eingeschlossenen Winkel β; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, den Inhalt, die Seite f und die Winkel α_1 und γ_1 dieses Dreiecks berechnen. Von dem Dreieck ACD kennt man, wenn jene Berechnung ausgeführt ist, die Seiten c

Aufgabe 793. In einem Sechseck ABC DEF messen

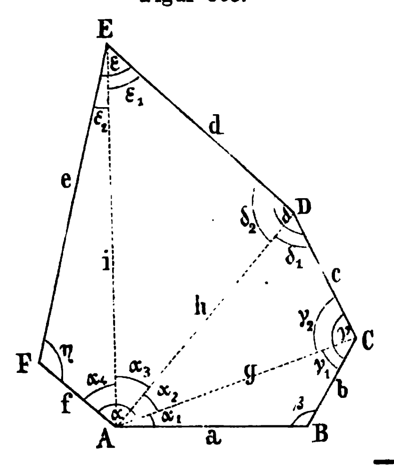
die Seiten:
$$\begin{cases} \overline{AB} = a = 185 \text{ m} \\ \overline{BC} = b = 65 \text{ m} \\ \overline{CD} = c = 85 \text{ m} \\ \overline{DE} = d = 255 \text{ m} \\ \text{und} \\ \overline{EF} = e = 750 \text{ m} \end{cases}$$

ferner betragen

die Winkel:
$$\begin{cases} ABC = \beta = 94^0\,50'\,16{,}8'' \\ BCD = \gamma = 139^0\,21'\,22{,}4'' \\ CDE = \delta = 160^0\,8'\,10{,}4'' \\ DEF = \varepsilon = 172^0\,43'\,0{,}6'' \end{cases}$$

Man soll hieraus die übrigen Stücke und den Inhalt berechnen.

Figur 303.



Gegeben:
$$\begin{cases} a = 185 \text{ m} \\ b = 65 \text{ m} \\ c = 85 \text{ m} \\ d = 255 \text{ m} \\ e = 750 \text{ m} \\ \beta = 94^0\,50'\,16{,}8'' \\ \gamma = 139^0\,21'\,22{,}4'' \\ \delta = 160^0\,8'\,10{,}4'' \\ \varepsilon = 172^0\,43'\,0{,}6'' \end{cases}$$
(s. Figur 303)

Andeutung. Man zerlege, siehe Fig. 303. das gegebene Sechseck durch die drei von dem Eckpunkt A ausgehenden Diagonalen $AC\,(= g)$, $AD\,(= h)$ und $AE\,(= i)$ in die vier Dreiecke ABC, ACD, ADE und AEF. Dann berechne man, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde:

a) aus a, b und β, den Inhalt, die Seite g und die Winkel α_1 und γ_1 des Dreiecks ABC,

b) aus c, g und $\gamma_2\,(= \gamma - \gamma_1)$, den Inhalt, die Seite h und die Winkel α_2 und δ_1 des nächstfolgenden Dreiecks ACD.

c) aus d, h und $\delta_2\,(= \delta - \delta_1)$, den Inhalt, die Seite i und die Winkel ε_1 und α_3 des nächstfolgenden Dreiecks ADE,

und

d) aus e, i und $\varepsilon_2\,(= \varepsilon - \varepsilon_1)$, den Inhalt, die Seite f und die Winkel η und α_4 des letzten Dreiecks AEF.

Aufgabe 794. In einem Sechseck ABC DEF betragen die vier aufeinanderfolgenden

Seiten:
$$\begin{cases} \overline{AB} = a = 5 \text{ m} \\ \overline{BC} = b = 10 \text{ m} \\ \overline{CD} = c = 15 \text{ m} \\ \overline{DE} = d = 20 \text{ m} \end{cases}$$

ferner betragen die fünf aufeinanderfolgenden

Winkel:
$$\begin{cases} FAB = \alpha = 164^0\,10'\,12'' \\ ABC = \beta = 86^0\,22'\,8'' \\ BCD = \gamma = 127^0\,0'\,42'' \\ CDE = \delta = 158^0\,47'\,3'' \\ DEF = \varepsilon = 101^0\,8'\,36'' \end{cases}$$

Man soll hieraus die nicht gegebenen Stücke und den Inhalt des Sechsecks bestimmen.

Gegeben:
$$\begin{cases} a = 5 \text{ m} \\ b = 10 \text{ m} \\ c = 15 \text{ m} \\ d = 20 \text{ m} \\ \alpha = 164^0\,10'\,12'' \\ \beta = 86^0\,22'\,8'' \\ \gamma = 127^0\,0'\,42'' \\ \delta = 158^0\,47'\,3'' \\ \varepsilon = 101^0\,8'\,36'' \end{cases}$$
(s. Figur 303)

Andeutung. Man verfahre im allgemeinen wie in der Andeutung zur vorhergehenden Aufgabe gesagt wurde.

Die Berechnung des letzten Dreiecks AEF, siehe Figur 303, erfolgt, wenn die drei ersten Dreiecke ABC, ACD und ADE berechnet sind, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, indem man schliesslich von diesem letzten Dreieck die Seite i, den Winkel $\varepsilon_2\,(= \varepsilon - \varepsilon_1)$ und den Winkel $\alpha_4\,[= \alpha - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)]$ kennt.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen und dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles,** was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.



Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte 1—266

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

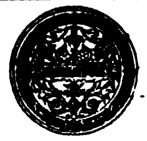
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

314. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 307. — Seite 529—544.
Mit 15 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 307. — Seite 529—544. Mit 15 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über den Kreis. — Aufgaben, in welchen die Berechnung auf den Kreis sich beziehender geometrischer Grössen verlangt wird. — Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen, auf den Kreis sich beziehender geometrischer Grössen gegeben sind oder die Feststellung solcher Beziehungen gefordert wird.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der **wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die **Lösung** jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen **Kapiteln** angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des **Studierenden** überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht **benutzt** werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand des Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur **Ausgabe**.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine **vollständige** Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 795. Im Innern eines Sechsecks $ABCDEF$ ist ein Punkt P gegeben. Die Verbindungslinien dieses Punktes mit den sechs Ecken des Sechsecks sind bekannt und zwar ist:

$\overline{PA} = 125$ m
$\overline{PB} = 195$ m
$\overline{PC} = 225$ m
$\overline{PD} = 195$ m
$\overline{PE} = 125$ m
$\overline{PF} = 260$ m

Wie gross ist der Inhalt dieses Sechsecks, wenn die Seiten:

$\overline{AB} = a = 80$ m
$\overline{BC} = b = 210$ m
$\overline{CD} = c = 210$ m
$\overline{DE} = d = 80$ m
$\overline{EF} = e = 165$ m
und $\overline{FA} = f = 315$ m

lang sind?

Gegeben: Die Längen der sechs Seiten eines Sechsecks und die Längen der Verbindungslinien eines Punktes P im Innern des Sechsecks mit den sechs Ecken desselben.

Andeutung. Von jedem der sechs Dreiecke, in welche das Sechseck durch die Verbindungslinien des gegebenen Punktes P mit den sechs Ecken zerlegt wird, kennt man gemäss der Aufgabe die drei Seiten. Den Inhalt eines jeden dieser Dreiecke kann man somit berechnen, wie in der Auflösung zur Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 796. Von einem Siebeneck $ABCDEFG$ kennt man

die sechs Seiten:

$\overline{AB} = a = 18{,}5$ m
$\overline{BC} = b = 45{,}2$ m
$\overline{CD} = c = 2{,}8$ m
$\overline{DE} = d = 19{,}7$ m
$\overline{EF} = e = 61{,}05$ m
$\overline{FG} = f = 20{,}95$ m

und die fünf Winkel:

$ABC = \beta = 194^0\, 12'\, 48{,}32''$
$BCD = \gamma = 98^0\, 34'\, 12{,}05''$
$CDE = \delta = 79^0\, 10'\, 08''$
$DEF = \varepsilon = 184^0\, 26'\, 14{,}32''$
$EFG = \mu = 16^0\, 44'\, 14{,}5''$

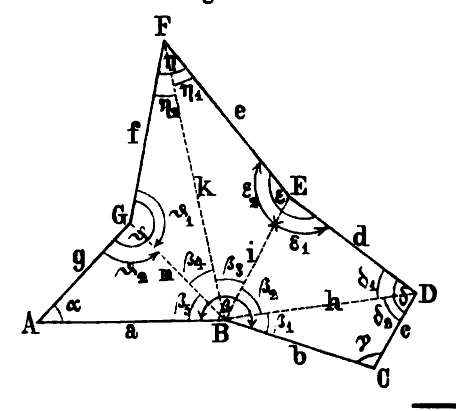
Man soll aus diesen Angaben die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt berechnen.

Gegeben: (s. Figur 304)

$a = 18{,}5$ m
$b = 45{,}2$ m
$c = 2{,}8$ m
$d = 19{,}7$ m
$e = 61{,}05$ m
$f = 20{,}95$ m
$\beta = 194^0\, 12'\, 48{,}32''$
$\gamma = 98^0\, 34'\, 12'05''$
$\delta = 79^0\, 10'\, 0{,}8''$
$\varepsilon = 184^0\, 26'\, 14{,}32''$
$\mu = 16^0\, 44'\, 14{,}5''$

Andeutung. Man zerlege, siehe Fig. 304, das gegebene Siebeneck durch die vier von dem Eckpunkt B ausgehenden Diagonalen $BD\,(= h)$, $BE\,(= i)$, $BF\,(= k)$ und $BG\,(= m)$ in die fünf Dreiecke BCD, BDE, BEF, BFG und BGA. Dann berechne man, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 793 gesagt wurde, diese einzelnen Dreiecke in der hier angeführten Reihenfolge.


Figur 304.



Anmerkung 48. Weitere Aufgaben, durch welche die Berechnung von Vielecken verlangt wird, findet man in dem Teil dieser Encyklopädie, welcher über die Polygonometrie handelt.

12). Aufgaben über den Kreis.

Anmerkung 49. In diesem Abschnitt sind solche trig. Aufgaben enthalten, in welchen die Berechnung des Kreises, bezw. die Berechnung von Teilen desselben, sowie die Berechnung auf den Kreis sich beziehender geometrischer Grössen verlangt wird.

Die meisten der hierher gehörigen Aufgaben können mittels der einfachen trig. Formeln, welche für das rechtwinklige und das gleichschenklige Dreieck aufgestellt wurden, gelöst werden.

Die Aufgaben, deren Auflösungen auf solche transscendente Gleichungen führen, die nur mittels Probieren gelöst werden können (siehe die Erkl. 483 und 484), sowie die Aufgaben, zu deren Auflösung trig. Formeln erforderlich sind, welche sich auf das schiefwinklige Dreieck beziehen, sind in diesem Abschnitt mit einem Kreuz (†), bezw. mit einem Sternchen (*) versehen.

Anmerkung 50. Unter den auf einen Kreis sich beziehenden geometrischen Grössen sind z. B. zu verstehen: Radien, Durchmesser, Sehnen, Sekanten, Tangenten, Bogenstücke, Centriewinkel, Peripheriewinkel, Berührungswinkel etc.

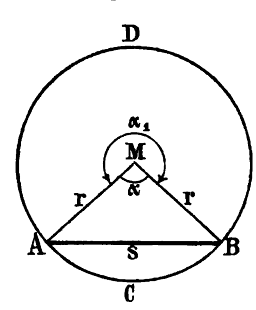
Unter den Teilen eines Kreises sind irgend welche Flächenstücke zu verstehen, welche Teile eines Kreises sind, wie z. B. Sektoren, Segmente, Halbkreise, Quadranten etc.

---

a) Aufgaben, in welchen die Berechnung auf den Kreis sich beziehender geometrischer Grössen gefordert wird.

Aufgabe 797. Der Radius eines Kreises ist $r = 10{,}4$ dm; wie gross ist die Sehne, die zu einem Centriewinkel von $\alpha = 36^0\,40'\,20''$ gehört?

Figur 305.



Erkl. 442. Unter einem Kreis versteht man eine ebene Figur, welche von einer krummen Linie, der sogenannten Kreislinie begrenzt wird (siehe Erkl. 443).

Diese Kreislinie heisst Umfang oder Peripherie des Kreises. Oft wird auch eine Kreislinie kurzweg Kreis genannt.

Erkl. 443. Unter einer Kreislinie versteht man eine solche krumme Linie, welche die Eigenschaft hat, dass alle in ihr liegend gedachte Punkte von einem fixen Punkt, dem sogenannten Mittelpunkt oder Centrum der Kreislinie gleichweit entfernt sind.

Den Mittelpunkt oder das Centrum einer Kreislinie nennt man auch Mittelpunkt oder

Gegeben: $\begin{cases} r = 10{,}4 \text{ dm} \\ \alpha = 36^0\,40'\,20'' \end{cases}$

Gesucht: Sehne s

Andeutung. Stellt, siehe Figur 305 und die Erkl. 442 bis 447, der Kreis um M den gegebenen Kreis dar, und ist α der gegebene Centriewinkel, so repräsentiert AB ($= s$) die gesuchte Sehne.

Zur Bestimmung der Sehne s beachte man, dass das Dreieck MAB ein gleichschenkliges Dreieck ist, dass somit zwischen dem Schenkel r, dem Scheitelwinkel α und der Basis s desselben nach der in Auflösung der Aufgabe 61 aufgestellten Formel 39 die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2\cdot r}$$

(siehe auch die Erkl. 448)

Aus dieser Relation erhält man für die gesuchte Sehne s allgemein:

$$\text{A)} \ldots s = 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

(siehe Erkl. 453)

Nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r und α gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Sehne s berechnen kann, wie in den gelösten Aufgaben 61 bis 66 gezeigt wurde (siehe die Erkl. 454).

Centrum des von dieser Kreislinie begrenzten Kreises.

Ein Stück einer Kreislinie nennt man einen Kreisbogen oder kurzweg einen Bogen.

Erkl. 444. Unter dem Halbmesser oder dem Radius eines Kreises versteht man die Verbindungslinie eines Punktes der Peripherie mit dem Mittelpunkt des Kreises.

Alle Radien oder Halbmesser, welche man sich in einem und demselben Kreis gezogen denken kann, müssen nach der in der Erkl. 443 gegebenen Definition einander gleich sein.

Erkl. 445. Unter einer Sehne oder Chorde eines Kreises versteht man die Verbindungslinie zweier beliebiger Punkte der Peripherie eines Kreises.

Erkl. 446. Unter dem Durchmesser oder Diameter eines Kreises versteht man eine Sehne, welche durch den Kreismittelpunkt geht.

Alle Durchmesser oder Diameter, welche man sich in einem und demselben Kreis gezogen denken kann, sind einander gleich und zwar je gleich dem doppelten Radius (siehe Erkl. 444).

Erkl. 447. Unter einem Centriewinkel oder Mittelpunktswinkel in einem Kreis versteht man einen Winkel, dessen Scheitel in dem Centrum, dem Mittelpunkt des Kreises liegt und dessen Schenkel Radien sind.

Zu jedem Centriewinkel gehört ein zweiter Centriewinkel; beide zusammen betragen $4R$ oder 360^0. So sind z. B. die in der Figur 305 von den Radien MA und MB eingeschlossenen Centriewinkel $= \alpha$ und α_1.

Erkl. 448. Die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung erhält man auch direkt aus der Figur 306, wenn man die Höhe MD des gleichschenkligen Dreiecks MAB fällt und berücksichtigt, dass sich aus jedem der hierdurch entstandenen rechtwinkligen Dreiecke MDA und MDB nach Antwort der Frage 6 die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$$

ergibt.

Man erhält diese Gleichung a) auch, wenn man, siehe Fig. 307, eine der Radien MA und MB, z. B. den Radius MB bis zur Peripherie verlängert und D mit A verbindet.

Man erhält nämlich alsdann das Dreieck BAD, in welchem:

$\sphericalangle ADB = \frac{\alpha}{2}$ (siehe die Erkl. 449 bis 451)

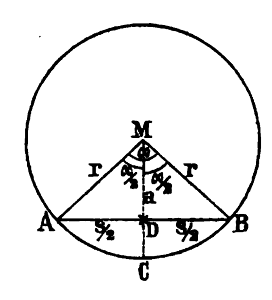
$\overline{DB} = 2r$ (siehe die Erkl. 446)

$\sphericalangle BAD = R$ (siehe die Erkl. 452)

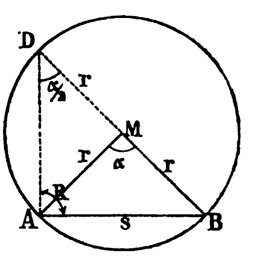
und

$\overline{AB} = s$

Figur 306.



Figur 307.



ist, und aus diesem bei A rechtwinkligen Dreieck ergibt sich nach Antwort der Frage 6 direkt die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$$

Erkl. 449. Unter einem Umfangs- oder Peripheriewinkel versteht man einen solchen Winkel, dessen Scheitel in dem Umfang, der Peripherie eines Kreises liegt und dessen Schenkel Sehnen desselben sind. Der Bogen, welcher durch die Schenkel eines Peripheriewinkels begrenzt wird, heisst „Standbogen".

Erkl. 450. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Jeder Peripheriewinkel eines Kreises ist halb so gross als der mit ihm über derselben Sehne (oder auf gleichem Bogen) stehenden Centriewinkel."

Nach diesem Lehrsatz ist in der Figur 307:

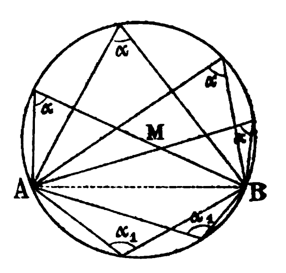
$$\sphericalangle ADB = \frac{1}{2} \sphericalangle AMB \text{ also } = \frac{\alpha}{2}$$

Erkl. 451. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Alle Peripheriewinkel in ein und demselben Kreis, welche über derselben Sehne, demselben Bogen stehen, also gleiche Standbogen haben, sind bezw. einander gleich."

Nach diesem Satz sind die in der Figur 308 durch α bezeichneten und ebenso die durch α_1 bezeichneten Winkel bezw. je unter sich gleich.

Figur 308.



Erkl. 452. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Alle Peripheriewinkel, welche über einem Durchmesser eines Kreises stehen (oder über einem Bogen stehen, welcher gleich dem halben Umfang des Kreises ist), sind rechte Winkel."

Nach diesem Lehrsatz ist in der Figur 307:

$$\sphericalangle BAD = R$$

Erkl. 453. Die in Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellte Gleichung A):

$$s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

kann man wie folgt in Worte fassen:

„Jede Sehne eines Kreises ist gleich dem Durchmesser dieses Kreises multipliziert mit dem Sinus des zu dieser Sehne gehörigen halben Centriewinkels oder multipliziert mit dem Sinus des über dieser Sehne stehenden Peripheriewinkels" (siehe Figur 307).

Erkl. 454. Für den Fall, dass der Radius eines Kreises gleich der Längeneinheit ist, geht die Gleichung:

$$1) \ldots s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

über in:

2) .... $s = 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$

und für den Fall, dass der Durchmesser des Kreises gleich der Längeneinheit ist, geht jene Gleichung über in:

3) .... $s = \sin \frac{\alpha}{2}$

Aufgabe 798. Man soll den Radius r eines Kreises berechnen, in welchem einem Centriewinkel von $\alpha = 24^{\circ}\,16'\,39''$ eine Sehne von $s = 21$ m Länge entspricht.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 24^{\circ}\,16'\,39'' \\ s = 21 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius r

Andeutung. Nach der in Andeutung der vorigen Aufgabe 797 aufgestellten Gleich. a) besteht die Relation:

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$$

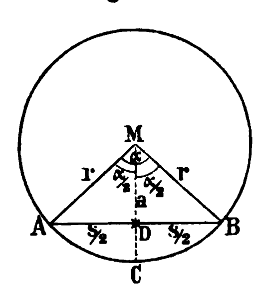
und hieraus erhält man für den gesuchten Radius allgemein:

A) ... $r = \dfrac{s}{2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2}}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Radius r berechnen kann.

Aufgabe 799. Der zu einer Sehne eines Kreises gehörige Centriewinkel beträgt 115° $26'\,36{,}4''$, der Abstand a dieser Sehne vom Mittelpunkt beträgt 8 dm; wie gross ist die Sehne und der Radius des Kreises?

Figur 309.



Erkl. 455. Unter der Entfernung einer geraden Linie von einem festen Punkt, versteht man den Perpendikel, welchen man von dem Punkt auf jene gerade Linie gefällt denken kann.

Erkl. 456. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Senkrechte, welche man vom Mittelpunkt eines Kreises auf eine Sehne desselben fällen kann, halbiert diese Sehne, den zu ihr gehörigen Centriewinkel und den zu ihr gehörigen Bogen."

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 115^{\circ}\,26'\,36{,}4'' \\ a = 8 \text{ dm} \end{cases}$

Gesucht: Radius r und Sehne s

Andeutung. Ist, siehe Figur 309, α der gegebene Centriewinkel eines Kreises und ist AB eine, in der gegebenen Entfernung MD ($= a$) vom Mittelpunkt M jenes Kreises gezogene Sehne s (siehe die Erkl. 455 und 456), so ergeben sich aus jedem der kongruenten, rechtwinkligen Dreiecke MDA und MDB die Relationen:

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : a$$

und

$$\cos \frac{\alpha}{2} = a : r$$

und aus diesen Relationen erhält man für die gesuchte Sehne s und den gesuchten Radius r ganz allgemein:

A) ... $s = 2a \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

und

B) ... $r = \dfrac{a}{\cos \frac{\alpha}{2}}$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte, s und r berechnen kann.

Aufgabe 800. In einem Kreis mit dem Radius $r = 12{,}5$ dm ist eine Sehne s gezogen, welche 16,4 dm lang ist; man soll den Centriewinkel berechnen, welcher zu dieser Sehne gehört.

Gegeben: $\begin{cases} r = 12{,}5 \text{ dm} \\ s = 16{,}4 \text{ dm} \end{cases}$

Gesucht: Centriewinkel α

Andeutung. Nach der in der Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellten Gleichung a) besteht, siehe Figur 310, zur Berechnung des gesuchten Centriewinkels α die Relation:

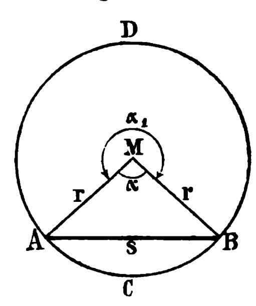
$$\text{A)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2 \cdot r}$$

Berechnet man nach dieser Gleichung den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, indem man für r und s die gegebenen Zahlenwerte substituiert, so erhält man in Rücksicht der Erkl. 271 für $\frac{\alpha}{2}$ zwei Werte, nämlich den direkt für $\frac{\alpha}{2}$ aus der Tafel sich ergebenden spitzen Winkel und dessen Supplementwinkel. Da beide Winkelwerte vorstehender Gleichung A) genügen, indem nach der Erkl. 66:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(2R - \frac{\alpha}{2}\right)$$

ist, so erhält man für den gesuchten Centriewinkel α ebenfalls zwei Werte, der eine ist gleich dem doppelten des für $\frac{\alpha}{2}$ berechneten spitzen Winkels, der andere ist gleich dem doppelten Supplementwinkel dieses spitzen Winkels. Diese beiden hiernach zu berechnenden Centriewinkel sind Winkel, welche sich zu $4R$ oder 360^0 ergänzen (siehe die Erkl. 457 und 458).

Figur 310.



Erkl. 457. Aus nebenstehender Andeutung ergibt sich, dass jeder Sehne eines Kreises zwei Centriewinkel entsprechen, welche sich zu $4R$ oder 360^0 ergänzen. So ist z. B., siehe Fig. 310, der eine zur Sehne AB gehörige Centriewinkel der Winkel α, der andere zu dieser Sehne gehörige Centriewinkel ist der Winkel α_1. Beide Winkel betragen als Winkel um einen Punkt herum zusammen $4R$. (siehe Erkl. 447.)

Erkl. 458. Für den Fall, dass der Radius eines Kreises gleich der Längeneinheit ist, geht die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung A) über in:

$$1) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2}$$

Für den Fall, dass der Durchmesser eines Kreises gleich der Längeneinheit ist, geht jene Gleichung über in:

$$2) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = s$$

Aufgabe 801. In einem Kreis mit dem Radius $r = 17$ m ist eine Sehne s gezogen, welche 16 m lang ist. Man soll den kleinern der zwei Bogen berechnen, in welche durch diese Sehne die Peripherie des Kreises geteilt wird. Der zu berechnende Bogen ist

a) in Winkel- oder Bogenmass

und

b) in Längenmass

auszudrücken.

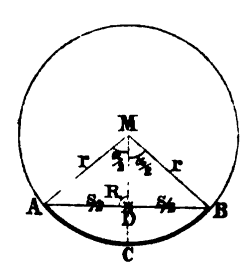
Gegeben: $\begin{cases} r = 17 \text{ m} \\ s = 16 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: bog ACB in Winkelmass und in Längenmass

(s. Fig. 311)

Auflösung. Verbindet man, siehe Fig. 311, die Endpunkte A und B der gegebenen Sehne s mit dem Mittelpunkt M, so schliessen diese Verbindungslinien den Centriewinkel α ein, welcher zu dem kleinern der Bogen gehört, in die der Umfang des Kreises durch die gegebene Sehne s geteilt wird, welcher also zu dem zu berechnenden Bogen ACB gehört.

Figur 811.



Hülfsrechnung 1.

Aus der nebenstehenden goniometrischen Gleichung:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{17}$$

findet man $\frac{\alpha}{2}$ wie folgt:

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = \log 8 - \log 17$$

Nun ist:

$$\log 8 = \overset{(+1)}{0{,}9030900}^{(-1)}$$
$$-\log 17 = -\ 1{,}2304489$$

oder:

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = 0{,}6726411 - 1$$
$$+9 \qquad -9$$
$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = 9{,}6726411 - 10$$

6373
38
00
38
35,6
2,4
2,4

mithin:

$$\frac{\alpha}{2} = 28^0\,4'\,20''$$
$$+0''$$
$$+0{,}9''$$
$$+0{,}06''$$

also $\frac{\alpha}{2} = 28^0\,4'\,20{,}96''$

Erkl. 459. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Umfang eines Kreises verhält sich zu der Länge eines Bogens wie der zu dem ganzen Umfang gehörige Centriewinkel von 360^0 zu dem zu jenem Bogen gehörigen und ebenfalls in Grade ausgedrückten Centriewinkel."

Bezeichnet man mit r den Radius eines Kreises, also nach der Erkl. 460 dessen Umfang mit $2r\pi$, die Länge eines Bogens desselben, welcher zu dem Centriewinkel α gehört mit bog α, so besteht nach jenem Satz die Proportion:

$$2r\pi : \text{bog}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0$$

(Siehe Abschnitt 23 in dem Lehrbuch der Goniometrie und die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Dieser Centriewinkel α, welcher das **Mass** des zu berechnenden Bogens ACB ist, indem im **Winkelmass**:

A) . . . $\text{bog}\,ACB = \alpha$

ist, kann zunächst wie folgt berechnet werden:

Zieht man den zur Sehne s senkrecht stehenden Radius MC, so halbiert dieser nach der Erkl. 456 die Sehne s und den Bogen ACB.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AMD ergibt sich die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r$$

oder:

a) . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2\cdot r}$

Setzt man hierin für s und r die gegebenen Zahlenwerte, so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{16}{2\cdot 17}$$

oder:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{8}{17}$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung 1 für $\frac{\alpha}{2}$:

$$\frac{\alpha}{2} = 28^0\,4'\,20{,}96''$$

also für den Centriewinkel α:

b) . . . $\alpha = 56^0\,8'\,41{,}92''$

Da nun, wie erwähnt, der Centriewinkel α das **Mass** des Bogens ACB ist, so hat man für den Bogen ACB, im **Winkel- oder Bogenmass** ausgedrückt:

1) . . . $\text{bog}\,ACB = 56^0\,8'\,41{,}92''$

Um den Bogen ACB in **Längenmass** auszudrücken, beachte man, dass nach der Erkl. 459 die Proportion besteht:

$$2r\pi : \text{bog}\,ACB = 360^0 : \alpha^0$$

und dass man hieraus für den bog ACB **allgemein** erhält:

B) . . . $\text{bog}\,ACB = 2r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}$ Längeneinheiten des Radius r

(siehe auch die Erkl. 461).

Setzt man in diese Gleichung den für r gegebenen, und aus Gleichung b) den für α berechneten **Wert**, so erhält man:

$$\text{bog}\,ACB = 2\cdot 17\cdot\pi\cdot\frac{56^0\,8'\,41{,}92''}{360^0}\ \text{Meter}$$

oder:

$$\text{bog}\,ACB = 2\cdot 17\cdot\pi\cdot\frac{56\cdot 60\cdot 60''+8\cdot 60''+41{,}92''}{360\cdot 60\cdot 60''}\ \text{Meter}$$

Erkl. 460. Bezeichnet man den Umfang eines Kreises mit U, dessen Rasius mit r und mit π die irrationale Zahl 3,14159265··· so besteht die Relation:

$$U = 2r\cdot\pi$$

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 461. Da in nebenstehender Gleichung

$$\text{B)} \ldots \text{bog}\, ACB = 2r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}$$

der Quotient $\alpha^0 : 360^0$ das Verhältnis der Winkel von α^0 und 360^0, bezw. das Verhältnis der in gleiche Winkelmasseinheiten, als: Grade oder Minuten oder Sekunden, ausgedrückten Winkel α und 360^0 vorstellt, so kann man in Rücksicht dessen jene Gleichung B) noch reduzieren und dafür auch schreiben:

$$\text{B}_1) \ldots \text{bog}\, ACB = r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}$$

Bei einer entsprechenden numerischen Berechnung wird man aus den Gleichungen B) und B_1) für bog ACB dieselben Werte erhalten.

Hülfsrechnungen:

2) 56 · 60 = 3360; 3360 · 60 = 201600

3) 360 · 60 = 21600; 21600 · 60 = 1296000

4) 201600 + 480 + 41,92 = 202121,02

Hülfsrechnung 5.

Aus nebenstehender Gleichung:

$$\text{bog}\, ACB = 34\cdot\pi\cdot\frac{202121{,}92}{1296000}$$

findet man bog ACB wie folgt:

$$\log \text{bog}\, ACB = \log 34 + \log\pi + \log 202121{,}92 - \log 1296000$$

Nun ist:

log 202121,92 =	5,3056093
	+ 21,5
	+ 19,35
	+ 0,43
	5,3056134
$+\log\pi = \log 3{,}141593 =$	+ 0,4971499
$+\log 34 =$	+ 1,5314789
	7,3342422
$-\log 1296000 =$	− 6,1126050
log bog ACB =	1,2216372
	6229
	143
	130
	13
	13

mithin:

numlog bog ACB

oder: bog ACB = 16,65855

bog ACB =

$$2\cdot 17\cdot\pi\cdot\frac{201600 + 480 + 41{,}92}{1296000}\ \text{Meter}$$

(siehe die Hülfsrechnungen 2 und 3)

$$\text{bog}\, ACB = 34\cdot\pi\cdot\frac{202121{,}92}{1296000}\ \text{Meter}$$

(siehe Hülfsrechnung 4)

und hieraus erhält man nach der Hülfsrechnung 5 für den in Längeneinheiten ausgedrückten Bogen ACB:

2) . . . bog ACB = 16,65855 Meter

Aufgabe 802. In einem Kreis ist eine Sehne s von 16 Meter Länge gezogen, der zu dieser Sehne gehörige Centriewinkel α beträgt $56^0\ 8'\ 41{,}92''$; man soll hieraus die Länge des zu diesem Centriewinkel α gehörigen Bogens berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} s = 16 \text{ m} \\ \alpha = 56^0\ 8'\ 41{,}92'' \end{cases}$
Gesucht: bog α

Andeutung. Nach der in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 801 aufgestellten Gleichung B) besteht zur Berechnung der gesuchten Länge des Bogens, welcher zu dem Centriewinkel α eines Kreises mit dem Radius r gehört, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \text{bog}\,\alpha = 2r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \text{ Längeneinheiten des Radius}$$

Da nun in dieser Aufgabe der Radius r nicht gegeben ist, so muss man denselben in die gegebenen Stücke ausdrücken. Nach der in der Andeutung zur Aufgabe 798 aufgestellten Gleichung A) hat man für den Radius r:

$$\text{b)} \ldots r = \frac{s}{2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man diesen Wert für r in Gleichung a), so erhält man für die gesuchte Länge des zum Centriewinkel α gehörigen Bogens, allgemein:

$$\text{A)} \ldots \text{bog}\,\alpha = \frac{\pi \cdot s}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \text{ Längeneinheiten der Sehne } s$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte, und in Rücksicht, dass der Quotient $\frac{\alpha^0}{360^0}$ das Verhältnis der Winkel von α^0 und 360^0 darstellt, die gesuchte Bogenlänge berechnen kann, analog wie in der Auflösung der vorigen Aufgabe 801 gezeigt wurde.

Aufgabe 803. In einem Kreis, dessen Radius $r = 40{,}32$ m misst, sind nach derselben Seite vom Mittelpunkt des Kreises aus zwei parallele Sehnen s und s_1 gezogen, welche bezw. $= 75{,}084$ und $62{,}14$ m lang sind; man soll die Längen der zwischen denselben liegenden Bogen berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} r = 40{,}32 \text{ m} \\ s = 75{,}084 \text{ m} \\ s_1 = 62{,}14 \text{ m} \end{cases}$ (s. Figur 312)
Gesucht: bog AF und bog BG

Figur 312.

Andeutung. Ist, siehe Figur 312, der Kreis um M der gegebene und sind AB und FG die parallelen Sehnen, welche den Bedingungen der Aufgabe entsprechen, so sind AF und BG die Bogen, deren Längen gemäss der Aufgabe berechnet werden sollen. Da nach der Erkl. 462 die Bogen AF und BG einander gleich sind, so ergibt sich die Länge x eines solchen Bogens aus der Relation:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{\text{bog}\,ACB - \text{bog}\,FCG}{2}$$

Bestimmt man die Längen der Bogen ACB und FCG, wie in der Auflösung zur Auf-

Erkl. 462. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

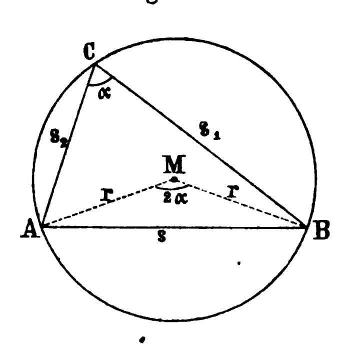
„Die zwischen zwei parallelen Sehnen eines Kreises liegenden Bogen sind einander gleich."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über die Planimetrie handeln.)

gabe 801 gezeigt wurde, so kann man nach dieser Gleichung leicht die gesuchte Länge x der Bogen AF und BG berechnen.

Aufgabe 804. Wie gross ist der Radius eines Kreises, in welchem der über der Sehne $s = 12{,}046$ dm stehende Peripheriewinkel $\alpha = 53^0\,45'\,20{,}4''$ beträgt?

Figur 313.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} s = 12{,}046 \text{ dm} \\ \alpha = 53^0\,45'\,20{,}4 \end{array}\right.$ (siehe Figur 313)
Gesucht: Radius r

Andeutung. Ist, siehe Figur 313, s die gegebene Sehne und α der gegebene Peripheriewinkel, und zieht man die durch die Endpunkte der Sehne AB gehenden Radien, so ist der von denselben eingeschlossene Centriewinkel AMB nach der Erkl. 450 $= 2\alpha$.

Zwischen diesem Centriewinkel 2α, dem gesuchten Radius r und der Sehne s besteht nach der in Andeutung der Aufgabe 798 aufgestellten Gleichung A) die Relation:

$$r = \frac{s}{2\sin\frac{2\alpha}{2}}$$

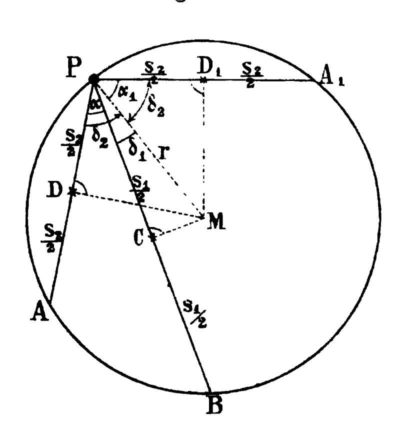
oder:

$$\text{A)} \ldots r = \frac{s}{2\sin\alpha}$$

nach welcher allgemeinen Gleichung man in Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte den Radius r berechnen kann.

Aufgabe 805. Zwei von einem Punkt der Peripherie eines Kreises ausgehende Sehnen sind $s_1 = 14{,}34$ und $s_2 = 8{,}56$ m lang; welchen Winkel bilden dieselben miteinander, wenn der Radius des Kreises $r = 8{,}4$ m misst?

Figur 314.



Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} s_1 = 14{,}34 \text{ m} \\ s_2 = 8{,}56 \text{ m} \\ r = 8{,}4 \text{ m} \end{array}\right.$ (siehe Fig. 314)
Gesucht: Peripheriewinkel α und α_1

Andeutung. Ist, siehe Figur 314, der Kreis um M der gegebene und ist PB ($= s_1$) die grössere der gegebenen Sehnen, so kann die kleinere Sehne s_2 entweder links von jener Sehne s_1 liegen, also die Lage PA haben, oder sie kann rechts von der Sehne s_1 liegen, also die Lage PA_1 haben. Die gegebenen Sehnen können also den Winkel $APB = \alpha$ oder den Winkel BPA_1 miteinander bilden. Verbindet man nunmehr den Punkt P mit dem Mittelpunkt M und fällt von M auf die gegebenen Sehnen s_1 und s_2 Perpendikel, so erhält man das rechtwinklige Dreieck PCM und die beiden kongruenten und rechtwinkligen Dreiecke PDM und PD_1M (siehe Erkl. 456). Wie sich aus der Fig. 314 ergibt, hat man ferner für den Winkel α die Relation:

$$\text{A)} \ldots \alpha = \delta_2 - \delta_1$$

und für den Winkel α_1:

$$\text{B)} \ldots \alpha_1 = \delta_2 + \delta_1$$

nach welchen Gleichungen man die gesuchten Peripheriewinkel α und α_1 berechnen kann,

sobald die Winkel δ_1 und δ_2 gefunden sind. Diese Winkel δ_1 und δ_2 kann man aber leicht mittels der aus jenen rechtwinkligen Dreiecken PCM und PDM (oder PD_1M) sich ergebenden Relationen:

$$\text{C)} \ldots \cos\delta_1 = \frac{s_1}{2} : r$$

und

$$\text{D)} \ldots \cos\delta_2 = \frac{s_2}{2} : r$$

berechnen.

Aufgabe 806. Ueber einem Bogen eines Kreises, dessen Radius $r = 0{,}85$ m misst, steht ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel $s_1 = 1{,}02$ und $s_2 = 0{,}98$ m lang sind; wie lang ist jener Bogen des Kreises?

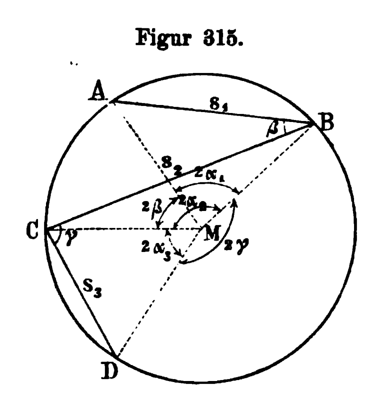
Gegeben: $s_1 = 1{,}02$ m, $s_2 = 0{,}98$ m, $r = 0{,}85$ m
Gesucht: Bogen AB und A_1B (s. Fig. 314)

Andeutung. Man berechne, wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 805 gesagt, zunächst die zu den Bogen AB und A_1B der Figur 314 gehörigen Peripheriewinkel α_1 und α_2. Beachte alsdann, dass nach der Erkl. 450 die zu jenen Bogen gehörigen Centriewinkel bezw. $= 2\alpha$ und $2\alpha_1$ sind, dass also die zu berechnenden Bogen im Winkelmass $= 2\alpha$ und $2\alpha_1$ sind. Sind 2α und $2\alpha_1$ berechnet, so drücke man hiernach wie in der Auflösung der Aufgabe 801 gezeigt, diese somit im Winkelmass bekannten Bogen in die Längeneinheit des gegebenen Radius aus.

Aufgabe 807. In einem Kreis, dessen Radius $r = 11$ m ist, liegen im Zickzack drei Sehnen von $s_1 = 9$ m, $s_2 = 20$ m und $s_3 = 7$ m Länge; wie gross sind die Winkel, welche diese Sehnen miteinander bilden?

Gegeben: $r = 11$ m, $s_1 = 9$ m, $s_2 = 20$ m, $s_3 = 7$ m
Gesucht: die Winkel γ und β (siehe die Fig. 315 u. 316)

Figur 315.



Andeutung. Ist, siehe die Figuren 315 und 316, der Kreis um M der gegebene, so können die drei gegebenen Sehnen s_1, s_2 und s_3, von welchen $s_2 > s_1 > s_3$ ist, entweder die Zickzacklage zu einander haben, wie die Figur 315 zeigt oder sie können die Zickzacklage zueinander haben, wie die Figur 316 zeigt.

Zur Berechnung des gesuchten Winkels β in der Figur 315 beachte man folgendes:

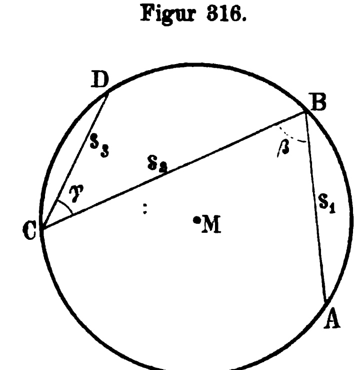
Der Winkel β ist ein Peripheriewinkel über dem Bogen AC, mithin ist nach der Erkl. 450 der zu Bogen AC gehörige Centriewinkel $AMC = 2\beta$. Bezeichnet man nunmehr den zur Sehne s_1 gehörigen Centriewinkel mit $2\alpha_1$, den zur Sehne s_2 gehörigen Centriewinkel $2\alpha_2$, so ergibt sich aus der Figur 315 die Relation:

$$2\beta = 2\alpha_2 - 2\alpha_1$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \ldots \beta = \alpha_2 - \alpha_1$$

Figur 316.



Man kann also hiernach den gesuchten Winkel β berechnen, wenn man die halben Centriewinkel α_1 und α_2 kennt, welche zu den jenen Winkel β einschliessenden Sehnen s_1 und s_2 gehören. Diese Centriewinkel kann man aber aus den gegebenen Sehnen s_1 und s_2 und aus dem gegebenen Radius r berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 800 gesagt wurde.

In ganz analoger Weise kann man den Winkel γ in Figur 315 berechnen; aus der Figur 315 ergibt sich nämlich die Relation:

$$2\gamma + 2\alpha_2 + 2\alpha_3 = 4R$$

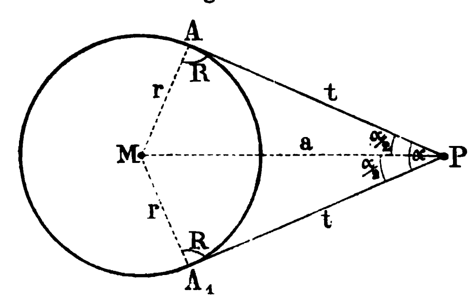
und hieraus erhält man:

B) . . . . $\gamma = 2R - (\alpha_2 + \alpha_3)$

Die Berechnung der gesuchten Winkel β und γ bei der Lage der drei gegebenen Sehnen, wie sie in der Figur 316 angedeutet ist, geschieht auf dieselbe Weise.

Aufgabe 808. An einen Kreis, dessen Radius $r = 20{,}24$ m misst, sind von einem Punkt P ausserhalb desselben zwei Tangenten an den Kreis gezogen; welchen Winkel bilden dieselben miteinander, wenn die Entfernung a des Punktes P vom Kreismittelpunkt gleich 50,06 m beträgt?

Figur 317.



Erkl. 463. Unter einer Berührenden oder einer Tangente an einen Kreis versteht man eine gerade Linie, welche mit der Peripherie des Kreises nur einen Punkt gemeinschaftlich hat.

Erkl. 464. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der nach dem Berührungspunkt einer Tangente gezogene Radius eines Kreises ist stets senkrecht zur Tangente."

Erkl. 465. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die zwei von einem Punkt aus nach einem Kreis gezogenen Tangenten sind gleich lang, und die Verbindungslinie jenes Punktes mit dem Mittelpunkt des Kreises halbiert den Winkel, welchen die beiden Tangenten miteinander bilden."

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} r = 20{,}24 \text{ m} \\ a = 50{,}06 \text{ m} \end{array} \right\}$ (siehe Figur 317)
Gesucht: Winkel α

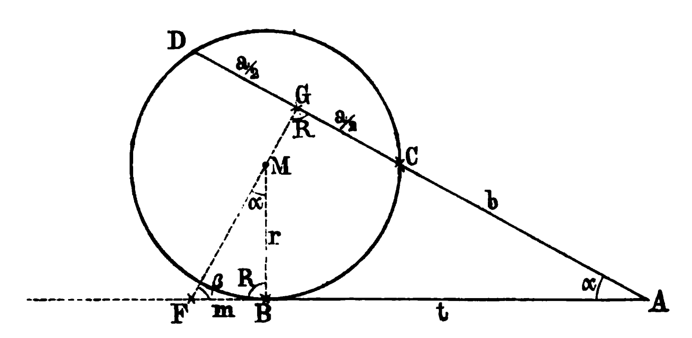
Andeutung. Ist, siehe Figur 317, der Kreis um M der gegebene und ist P der Punkt, dessen Entfernung von $M = a$ ist und von welchem aus die Tangenten PA und PA_1 an jenen Kreis gezogen sind, so erhält man, wenn man die Berührungspunkte A und A_1 mit dem Kreismittelpunkt M verbindet, nach den Erkl. 463 bis 465 die beiden kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MAP und MA_1P. Aus jedem dieser Dreiecke ergibt sich die Relation:

A) . . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{a}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r und a gegebenen Zahlenwerte, den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und somit auch den gesuchten Winkel α, welchen die beiden Tangenten PA und PA_1 miteinander bilden, berechnen kann.

Aufgabe 809. Zu einem Kreis ist eine Tangente und eine Sekante gezogen, beide schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 39^0 58' 46''$. Der innere Abschnitt der Sekante ist $a = 8{,}432$ dm, der äussere Abschnitt derselben ist $b = 19{,}008$ dm. Man soll den Radius jenes Kreises berechnen.

Figur 318.



Erkl. 466. Unter einer **Sekante** eines Kreises versteht man im allgemeinen Sinn jede den Kreis durchschneidende Gerade; im engeren Sinn, wie z. B. in der Elementargeometrie, versteht man unter einer Sekante eine nach einer Richtung hin verlängerte Sehne desselben.

Der Teil einer Sekante, welcher innerhalb des Kreises liegt, heisst **innerer Abschnitt**, der Teil derselben, welcher ausserhalb des Kreises liegt, heisst **äusserer Abschnitt** der Sekante.

Erkl. 467. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man von einem Punkt ausserhalb eines Kreises eine Tangente und eine Sekante nach jenem Kreis, so ist die Tangente die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Sekante und dem ausserhalb des Kreises liegenden Stück derselben" (siehe Erkl. 468).

Hiernach besteht in der Figur 318 zwischen der Tangente $AB\ (= t)$ und der Sekante AD $(= a + b)$, die Relation:

$$\overline{AD} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{AC}$$

oder die Relation:

$$(a + b) : t = t : b$$

Erkl. 468. Sind in einer geometrischen Proportion (siehe Erkl. 469) die beiden mittleren Glieder gleich, so heisst die Proportion eine **stetige** und jedes der mittleren Glieder heisst **die mittlere geometrische Proportionale**

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 39^0 58' 46'' \\ a = 8{,}432 \text{ dm} \\ b = 19{,}008 \text{ dm} \end{cases}$ (siehe Figur 318)

Gesucht: Radius r

Andeutung. Ist, siehe Figur 318, AD eine solche Sekante des Kreises um M (siehe Erkl. 466), deren innerer Abschnitt $CD = a$ und deren äusserer Abschnitt $= b$ ist, und welche mit der an diesen Kreis gezogenen Tangente AB den Winkel α bildet, und zieht man durch M die zur Sehne DC Senkrechte FG und verbindet M mit dem Berührungspunkt B, so erhält man das bei G rechtwinklige Dreieck AGF und nach der Erkl. 464 das bei B rechtwinklige Dreieck MBF. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AGF ergibt sich die Relation:

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AG}}{\overline{AF}}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha = \frac{\frac{a}{2} + b}{t + m} \quad \text{(s. Erkl. 456)}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MBF und in Rücksicht, dass nach der Erkl. 293 $\sphericalangle BMF = \sphericalangle BAD$ also $= \alpha$ ist, die Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{m}{r}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots\ldots m = r \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Weiter besteht noch nach dem in der Erkl. 467 angeführten planimetrischen Lehrsatz zwischen der Tangente t, der ganzen Sekante $b + a$ und dem äussern Abschnitt b derselben die Relation:

$$(a + b) : t = t : b$$

woraus sich:

$$\text{c)} \ldots\ldots t = \sqrt{b\,(a + b)}$$

ergibt.

Setzt man die Werte für m und t aus den Gleichungen b) und c) in Gleichung a), so erhält man für r die Bestimmungsgleichung:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2} + b}{\sqrt{b\,(a + b)} + r \cdot \operatorname{tg}\alpha}$$

und hieraus erhält man:

$$\cos\alpha \sqrt{b\,(a + b)} + r \cdot \cos\alpha \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{2} + b$$

zu den beiden anderen. So ist z. B. die geometrische Proportion:

$$8:4=4:2$$

eine **stetige** Proportion; die Zahl 4 heisst die **mittlere geometrische** Proportionale zu den Zahlen 8 und 2.

Erkl. 469. Unter einer **geometrischen** Proportion, versteht man die Verbindung **zweier gleicher Quotienten**, durch das Gleichheitszeichen, so ist z. B. $1:2=3:6$ eine **geometrische** Proportion.

$$r\cdot\cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{a}{2}+b-\cos\alpha\sqrt{b(a+b)}$$

$$r\sin\alpha=\frac{a}{2}+b-\cos\alpha\sqrt{b(a+b)}$$

oder:

$$\text{A)}\ \ldots\ r=\frac{\frac{a}{2}+b-\cos\alpha\cdot\sqrt{b(a+b)}}{\sin\alpha}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b und α gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Radius r berechnen kann.

---

b) Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen, auf den Kreis sich beziehenden geometrischen Grössen gegeben sind oder die Feststellung solcher Beziehungen gefordert werden.

Aufgabe 810. Man berechne den Centriewinkel eines Kreises, dessen zugehörige Sehne $=\frac{3}{5}$ des Radius des Kreises ist.

Gegeben: die Beziehung: $s=\frac{3}{5}r$
Gesucht: Centriewinkel α zur Sehne s gehörig.

Andeutung. Nach der in der Andeutung zur Aufgabe 800 aufgestellten Gleichung A) besteht zwischen dem Radius r eines Kreises, einer Sehne s desselben und dem zu letzterer gehörigen Centriewinkel α, die Relation:

$$\text{a)}\ \ldots\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{s}{2r}$$

ferner besteht gemäss der Aufgabe die Relation:

$$\text{b)}\ \ldots\ s=\frac{3}{5}r$$

Setzt man den Wert für s aus Gleich. b) in Gleichung a), so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\frac{3}{5}r}{2r}$$

oder:

$$\text{A)}\ \ldots\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{3}{10}$$

Nach welcher Gleichung man den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mittels einer trig. oder einer log.-trig. Tafel berechnen, und dann den gesuchten Centriewinkel α bestimmen kann.

Aufgabe 811. In einem Kreis ist eine Sehne gezogen, welche gleich dem **geometrischen Mittel** zwischen dem Halbmesser und dem Durchmesser des Kreises ist; man soll den zu dieser Sehne gehörigen Centriewinkel berechnen.

Gegeben: die Beziehung: $s=\sqrt{r.2r}$
Gesucht: Centriewinkel α zur Sehne s gehörig.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der vorigen. Man hat einmal, wie in voriger Andeutung gesagt, die Relation:

$$\text{a)}\ \ldots\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{s}{2r}$$

Erkl. 470. Unter dem geometrischen Mittel zweier Zahlen (Grössen) versteht man das mittlere Glied einer stetigen geometrischen Proportion (siehe Erkl. 468).

Das geometrische Mittel zweier Zahlen (Grössen) ist gleich der Quadratwurzel aus dem Produkt dieser zwei Zahlen.

Hat man die stetige geometrische Proportion:

$$a:x = x:b$$

so erhält man für das geometrische Mittel x der Zahlen oder Grössen a und b:

$$x^2 = a \cdot b$$

oder:

$$x = \sqrt{a \cdot b}$$

Ferner hat man gemäss der Aufgabe nach der Erkl. 470 die Relation:

$$\text{b)} \ldots s = \sqrt{r \cdot 2r}$$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$s = \sqrt{2r^2}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots s = r\sqrt{2}$$

Setzt man diesen Wert für s in Gleichung a), so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r\sqrt{2}}{2r}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und somit auch den gesuchten Centriewinkel α berechnen kann.

Beachtet man hier, dass nach der Erkl. 216:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, so ergibt sich hieraus:

$$\frac{\alpha}{2} = 45^0$$

mithin:

$$1) \ldots \alpha = 90^0$$

Aufgabe 812. Man soll den Centriewinkel eines Kreises berechnen, der einer Sehne entspricht, die gleich dem arithmetischen Mittel zwischen dem Halbmesser und dem Durchmesser des Kreises ist.

Gegeben: die Beziehung: $s = \frac{r+2r}{2}$

Gesucht: Centriewinkel α zur Sehne s gehörig.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 810.

Man hat einmal, wie in der Andeutung zu jener Aufgabe gesagt ist, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$$

Ferner hat man gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 471 die Relation:

$$\text{b)} \ldots s = \frac{r+2r}{2}$$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$\text{c)} \ldots s = \frac{3}{2}r$$

Setzt man diesen Wert für s in Gleichung a), so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{3}{2}r}{2r}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mittels einer trig. oder einer log.-trig. Tafel berechnen und somit den gesuchten Winkel α bestimmen kann.

Erkl. 471. Unter dem arithmetischen Mittel zweier Zahlen (Grössen) versteht man das mittlere Glied einer stetigen arithmetischen Proportion (siehe Erkl. 472).

Das arithmetische Mittel zweier Zahlen (Grössen) ist gleich der halben Summe dieser zwei Zahlen.

Hat man die stetige arithmetische Proportion:

$$a - x = x - b$$

so erhält man für das arithmetische Mittel x der Zahlen oder Grössen a und b:

$$2x = a + b$$

oder:

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Erkl. 472. Sind in einer arithmetischen Proportion (siehe Erkl. 473), die beiden mittleren Glieder gleich, so heisst diese Proportion eine stetige arithmetische Proportion:

So ist z. B. die arithmetische Proportion:

$$8 - 6 = 6 - 4$$

eine stetige arithmetische Proportion.

Erkl. 473. Unter einer arithmetischen Proportion versteht man die Verbindung zweier gleicher Differenzen durch das Gleichheitszeichen; so ist z. B.:

$$5 - 2 = 19 - 16$$

eine arithmetische Proportion:

Aufgabe 813. Eine Sehne eines Kreises ist gleich dem harmonischen Mittel zwischen Radius und Durchmesser dieses Kreises; wie gross muss der zu dieser Sehne gehörige Centriewinkel sein?

Erkl. 474. Besteht zwischen vier Grössen

a, b, c und d

eine harmonische Proportion, siehe Erkl. 475, und sind die beiden mittleren Grössen b und c einander gleich, so nennt man jede dieser mittleren Grössen das harmonische Mittel der beiden anderen Grössen; die zwischen diesen Grössen bestehende harmonische Proportion:

1) . . . $(a-b):(b-d) = a:d$ (siehe Erkl. 475)

selbst heisst eine stetige harmonische Proportion.

Aus der vorstehenden stetigen harmonischen Proportion erhält man:

$$(a-b)\cdot d = (b-d)\cdot a$$
$$ad - bd = ab - ad$$
$$ab + bd = ad + ad$$
$$b(a+d) = 2ad$$

oder:

2) . . . . $b = \frac{2\cdot ad}{b+d}$

und hieraus ergibt sich, dass das harmonische Mittel b zweier Grössen a und d gleich dem Quotient ist, welcher gebildet wird aus dem doppelten Produkt dieser beiden Grössen a und d und der Summe derselben.

Erkl. 475. Besteht zwischen vier Grössen, welche der Reihe nach durch:

a, b, c und d

bezeichnet seien, eine solche Beziehung, dass der Quotient $\frac{a-b}{c-d}$ gebildet aus der Differenz $a-b$ der beiden ersten Grössen und der Differenz der beiden letzten Grössen $c-d$, gleich dem Quotient $\frac{a}{d}$ ist, welcher aus der ersten und der vierten jener Grössen gebildet wird, so nennt man die hierdurch ausgedrückte Beziehung:

$$(a-b):(c-d) = a:d$$

eine harmonische Proportion.

(Ausführliches über die harmonischen Proportionen findet man in den Teilen der Encyklopädie, welche über Planimetrie und die Proportionen handeln.)

Gegeben: die Beziehung: $s = \frac{2.r.2r}{r+2r}$

Gesucht: Centriewinkel α zur Sehne s gehörig.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 810.

Man hat einmal, wie in der Andeutung zu jener Aufgabe gesagt ist, die Relation:

a) . . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$

Ferner hat man gemäss der Aufgabe nach der Erkl. 474 die Relation:

b) . . . . $s = \frac{2\cdot r\cdot 2r}{r+2r}$

Aus Gleichung b) erhält man:

$$s = \frac{4r^2}{3r}$$

oder:

c) . . . . $s = \frac{4}{3}r$

Setzt man diesen Wert für s in Gleichung a), so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{4}{3}r}{2r}$$

oder:

A) . . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{3}$

nach welcher Gleichung man den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ mittels einer trig. oder einer log.-trig. Tafel berechnen und somit den gesuchten Centriewinkel α bestimmen kann.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

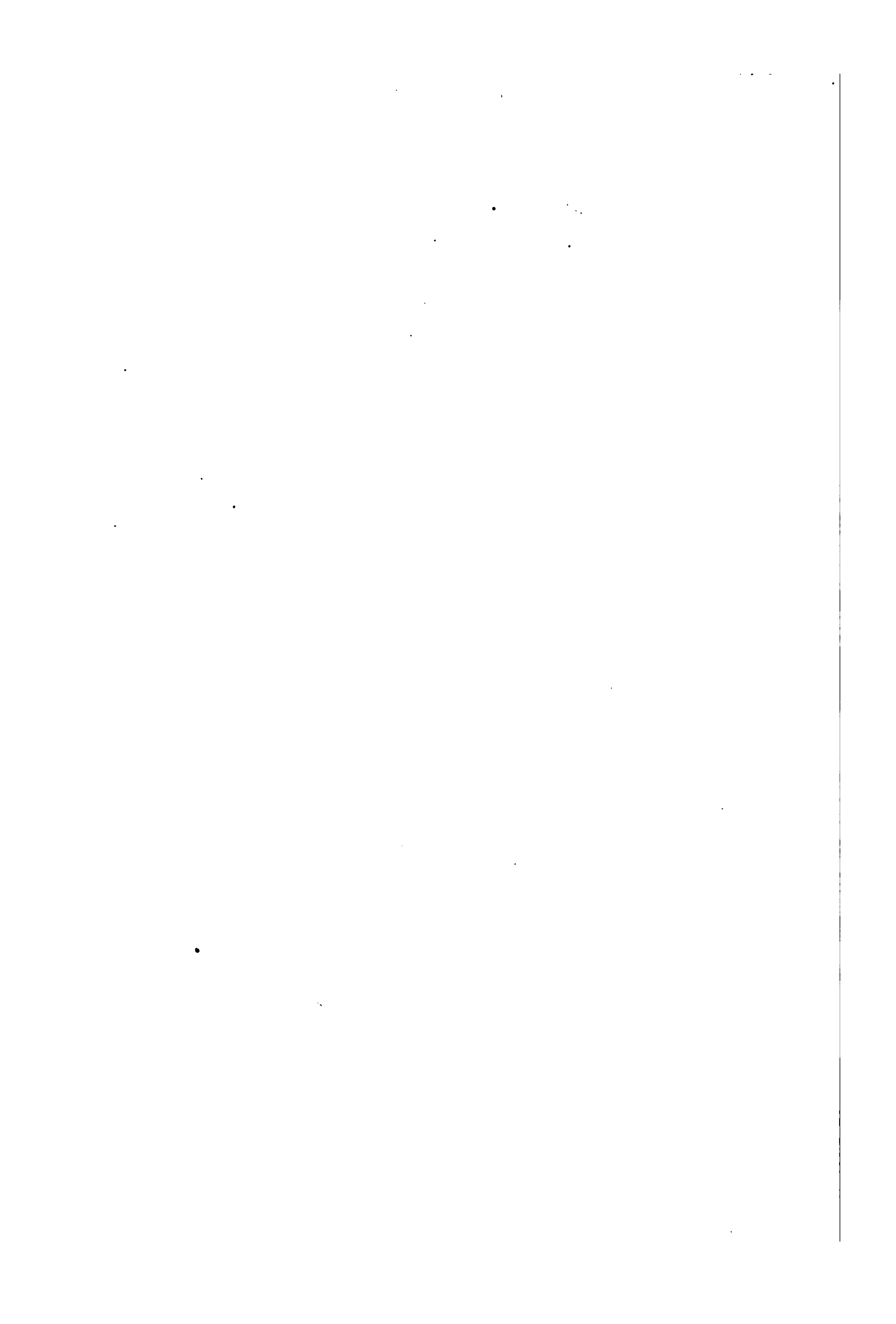
Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

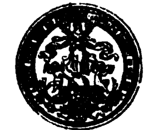
Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



315. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 314. — Seite 545—560.
Mit 11 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 314. — Seite 545—560. Mit 11 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht**, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der **Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc.** und zwar **in vollständig gelöster Form**, mit vielen **Figuren, Erklärungen** nebst Angabe und Entwickelung der benutzten **Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc.**, so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang von ungelösten Aufgaben** beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.**

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.**

Die **Schüler, Studierenden und Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. anzuwenden und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung zur **Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den Antrieb zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der **Redaktion** entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16**, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 814. Man soll den Centriewinkel eines Kreises, welcher 60^0 beträgt, so in zwei Teile zerlegen, dass sich die zu den einzelnen Teilen gehörigen Sehnen wie $2:5$ verhalten; wie gross sind jene Teile?

Gegeben: $\begin{cases} \text{Centriewinkel von } 60^0 \\ s_1 : s_2 = 2:5 \end{cases}$

Gesucht: solche Teile jenes Winkels, dass deren Sehnen s_1 und s_2 der Bedingung $s_1 : s_2 = 2:5$ genügen.

Andeutung. In Figur 319 sei MC der Radius, welcher den gegebenen Centriewinkel von 60^0 in die zu berechnenden Teile α und $60^0 - \alpha$ so teilt, dass die zu diesen Centriewinkeln gehörigen Sehnen s_1 und s_2 in dem gegebenen Verhältnis:

$$\text{a)} \ldots s_1 : s_2 = 2:5$$

stehen. Zur Berechnung der Winkel α und $60^0 - \alpha$ beachte man, dass nach der in der Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellten Gleichung A) die Relationen bestehen:

$$\text{b)} \ldots s_1 = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{c)} \ldots s_2 = 2r \cdot \sin\frac{60^0 - \alpha}{2}$$

Durch Division der Gleichung c) in Gleichung b) erhält man:

$$\text{d)} \ldots s_1 : s_2 = \sin\frac{\alpha}{2} : \sin\frac{60^0 - \alpha}{2}$$

und aus den Gleichungen a) und d) ergibt sich in bezug auf den unbekannten Winkel α die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\text{e)} \ldots \sin\frac{60^0 - \alpha}{2} : \sin\frac{\alpha}{2} = 5:2$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{60^0 - \alpha}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{60^0 - \alpha}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{5+2}{5-2}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt und reduziert:

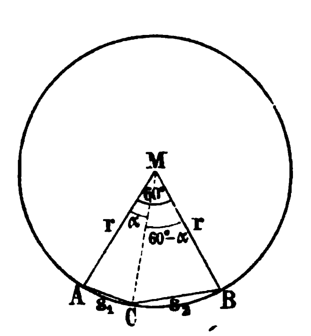
$$\frac{\operatorname{tg} 30^0}{\operatorname{tg}(30^0 - \alpha)} = \frac{7}{3}$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}(30^0 - \alpha) = \frac{3}{7} \cdot \operatorname{tg} 30^0$$

nach welcher Gleichung man den Winkel $30^0 - \alpha$ berechnen kann. Ist dieser Winkel berechnet, so kann man leicht die gesuchten Winkel α und $60^0 - \alpha$ bestimmen.

Figur 319.



Aufgabe 815. In welchem Verhältnis steht ein seinem Halbmesser gleicher Bogen eines Kreises zu der ihm zugehörigen Sehne?

Gegeben: die Beziehung $\operatorname{bog}\alpha = r$

Gesucht: Verhältnis jenes Bogens zur zugehörigen Sehne.

Auflösung. Bezeichnet man den Radius des gedachten Kreises mit r, also die Länge

Hülfsrechnung 1.

$$\frac{180^0}{\pi} = 57{,}29577 \text{ Grad (s. Hülfsrechnung 2)}$$
$$= 57\frac{29577}{100000} \text{ Grad}$$
$$= \left(57 + \frac{29577}{100000}\right) \text{ Grad}$$
$$= 57^0 + \frac{29577 \cdot 60}{100000} \text{ Minuten}$$
$$= 57^0 + 17{,}7462' \text{ (s. Hülfsrechnung 3)}$$
$$= 57^0 + 17\frac{7462'}{10000}$$
$$= 57^0 + 17' + \frac{7462'}{10000}$$
$$= 57^0 + 17' + \frac{7462 \cdot 60}{10000} \text{ Sekunden}$$
$$= 57^0 + 17' + 44{,}772'' \text{ (s. Hülfsr. 4).}$$

Hülfsrechnung 2.

$$\log\frac{180}{\pi} = \log 180 - \log \pi$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 180 &= 2{,}2552725 \\ -\log\pi &= -0{,}4971499 \\ \hline \log\frac{180}{\pi} &= 1{,}7581226 \end{aligned}$$

1167
59
53,2
5,8
5,3

mithin:

$$\frac{180}{\pi} = 57{,}29577$$

Hülfsrechnung 3.

$$\log\frac{29577 \cdot 60}{100000} = \log 29577 + \log 60 - \log 100000$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 29577 &= 4{,}4709541 \\ +\log 60 &= +1{,}7781513 \\ \hline & 6{,}2491054 \\ -\log 100000 &= -5{,}0000000 \\ \hline \log\frac{29577 \cdot 60}{100000} &= 1{,}2491054 \end{aligned}$$

1005
49
48,8

mithin:

$$\frac{29577 \cdot 60}{100000} = 17{,}7462$$

Hülfsrechnung 4.

$$\log\frac{7462 \cdot 60}{10000} = \log 7462 + \log 60 - \log 10000$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 7462 &= 3{,}8728552 \\ +\log 60 &= +1{,}7781513 \\ \hline & 5{,}6510065 \\ -\log 100000 &= -4{,}0000000 \\ \hline \log\frac{7462 \cdot 60}{10000} &= 1{,}6510065 \end{aligned}$$

0065

mithin:

$$\frac{7462 \cdot 60}{10000} = 44{,}772$$

des Bogens, welcher gleich diesem Radius ist, ebenfalls mit r, den zu diesem Bogen gehörigen Centriewinkel mit α, so besteht nach der Erkl. 459 die Relation:

$$2r\pi : (\text{bog} = r) = 360^0 : \alpha^0$$

oder:

$$2r\pi : r = 360^0 : \alpha^0$$

oder:

$$2\pi : 1 = 360^0 : \alpha^0$$

und hieraus erhält man für den Centriewinkel α, welcher dem Bogen entspricht, dessen Länge gleich dem Radius r ist:

$$\alpha = \frac{360}{2\pi} \text{ Grad}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \alpha = \frac{180}{\pi} \text{ Grad}$$

nach welcher Gleichung man nach Hülfsrechnung 1:

$$1) \ldots \alpha = 57^0\, 17'\, 44{,}772''$$

und

$$2) \ldots \frac{\alpha}{2} = 28^0\, 38'\, 52{,}386''$$

erhält.

Für die Sehne, welche diesem Centriewinkel α entspricht, hat man nach der in der Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellten Gleichung A):

$$s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung 2):

$$3) \ldots s = 2r \cdot \sin 28^0\, 38'\, 52{,}39''$$

Für das gesuchte Verhältnis des Bogens, welcher gleich dem Radius r ist, zu der zu diesem Bogen gehörigen Sehne besteht also die Gleichung:

$$\text{Bogen} : \text{Sehne} = r : 2r \sin 28^0\, 38'\, 52{,}39''$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \text{Bogen} : \text{Sehne} = 1 : 2 \sin 28^0\, 38'\, 52{,}39''$$

oder auch nach nebenstehender Hülfsrechnung 5):

$$\text{A}_1) \ldots \text{Bogen} : \text{Sehne} = 1 : 0{,}958851$$

Hülfsrechnung 5.

$\log 2\cdot\sin 28^0\,38'\,52{,}39'' = \log 2 + \log\sin 28^0\,38'\,52{,}39''$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 2 = & 0{,}3010300 \\ +\log\sin 28^0\,38'\,52{,}39'' = + & 9{,}6807119 - 10 \\ & +77 \\ & +11{,}55 \\ & 3{,}47 \\ \hline \log 2\cdot\sin 28^0\,38'\,52{,}39'' = & 9{,}9817511 - 10 \\ \text{oder} = & 0{,}9817511 - 1 \\ & 7507 \\ & 4 \\ & 4{,}5 \end{array}$$

mithin:

$2\cdot\sin 28^0\,38'\,52{,}39'' = 0{,}958851$

Aufgabe 816. Eine Sehne eines Kreises ist halb so gross als der Radius desselben; in welchem Verhältnis steht diese Sehne zur Länge des zugehörigen Bogens?

Gegeben: die Beziehung $s = \frac{r}{2}$

Gesucht: das Verhältnis der Sehne s zur Länge des zugehörigen Bogens.

Andeutung. Gemäss der Aufgabe soll zwischen der Sehne s und dem Radius r eines Kreises die Beziehung bestehen:

a) . . . $s = \frac{r}{2}$

Ferner besteht nach der in der Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellten Gleichung A) zwischen der Sehne s, dem Radius r und dem zur Sehne s gehörigen Centriewinkel die Relation:

b) . . . $s = 2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

Aus dieser Gleichung erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2r}$$

oder, wenn man nach Gleichung a) für:

$$s = \frac{r}{2}$$

setzt und reduziert:

A) . . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$

nach welcher Gleichung man zunächst den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ und somit den Centriewinkel α berechnen kann, welcher zu der Sehne eines Kreises gehört, die gleich dem halben Radius desselben ist.

Man erhält nach Hülfsrechnung 1 für $\frac{\alpha}{2}$

1) . . . . $\frac{\alpha}{2} = 14^0\,28'\,39{,}04''$

also für α:

1a) . . . . $\alpha = 28^0\,57'\,18{,}08''$

Weiter hat man nach der in der Auflösung zur Aufgabe 801 aufgestellten Gleichung B), für die Länge eines Bogens, der zum Centriewinkel α gehört, die Relation:

c) . . . . $\text{bog}\,\alpha = 2r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}$

Hülfsrechnung 1.

Aus:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{4}$$

erhält man $\frac{\alpha}{2}$ wie folgt:

$$\log\sin\frac{\alpha}{2} = \log 1 - \log 4$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} & +10 \qquad\quad -10 \\ \log 1 = & 0{,}0000000 \\ -\log 4 = - & 0{,}6020600 \\ \hline \log\sin\frac{\alpha}{2} = & 9{,}3979400 - 10 \\ & 8663 \\ & 737 \\ & 733{,}5 \\ & 3{,}5 \\ & 3{,}3 \end{array}$$

mithin:

$$\begin{array}{rl} \frac{\alpha}{2} = & 14^0\,28'\,30'' \\ & +9'' \\ & +0{,}0'' \\ & +0{,}04'' \\ \hline \frac{\alpha}{2} = & 14^0\,28'\,39{,}04'' \end{array}$$

Hülfsrechnung 2.

Für das Verhältnis der Winkel α (= $28^0\,57'\,18{,}08''$) und 90^0 erhält man:

$$\frac{28^0\,57'\,18{,}08''}{90^0} = \frac{28\cdot 60\cdot 60'' + 57\cdot 60'' + 18{,}08''}{90\cdot 60\cdot 60''}$$

$$= \frac{100800 + 3420 + 18{,}08}{324000}$$

(s. Hülfsr. 3 bis 5)

$$= \frac{104238{,}08}{324000}$$ (s. Hülfsr. 6)

Hülfsrechnungen:

3. $28 \cdot 60 = 1680$; $1680 \cdot 60 = 100800$

4. $57 \cdot 60 = 3420$

5. $90 \cdot 60 = 5400$; $5400 \cdot 60 = 324000$

6. $100800 + 3420 + 18,08 = 104238,08$

Hülfsrechnung 7.

$$\log \pi \cdot \frac{104238,08}{324000} = \log \pi + \log 104238,08 - \log 324000$$

Nun ist:

$$\log 104238,08 = 5,0179927 + 333,6 + 0,0 + 3,34 = 5,0180264$$
$$+ \log \pi = + 0,4971499$$
$$5,5151763$$
$$- \log 324000 = - 5,5105450$$
$$0,0046313$$
$$6223$$
$$90$$
$$85,5$$

mithin:

$$\pi \cdot \frac{104238,08}{324000} = 1,01072$$

Aus den Gleichungen b) und c) ergibt sich für das Verhältnis einer Sehne s zu dem ihr zugehörigen Bogen allgemein:

$$\text{Sehne} : \text{Bogen} = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} : 2r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

oder:

d) . . Sehne: Bogen $= \sin\frac{\alpha}{2} : \pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

Setzt man in das hierdurch ausgedrückte Verhältnis den Wert für $\sin\frac{\alpha}{2}$ aus Gleich. A),

so erhält man:

$$\text{Sehne} : \text{Bogen} = \frac{1}{4} : \pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

oder:

A_1) . . . Sehne: Bogen $= 1 : \pi \cdot \frac{\alpha^0}{90^0}$

Setzt man hierin den für α gefundenen Zahlenwert aus Gleichung 1a), so erhält man:

$$\text{Sehne} : \text{Bogen} = 1 : \pi \cdot \frac{28^0\,57'\,18,08''}{90^0}$$

oder nach Hülfsrechnung 2:

$$\text{Sehne} : \text{Bogen} = 1 : \pi \cdot \frac{104238,08}{324000}$$

und nach Hülfsrechnung 7:

2) . . Sehne: Bogen $= 1 : 1,01072$

Aufgabe 817. Die Stücke einer Sehne, von welcher eine andere Sehne halbiert wird, sind die Wurzeln der Gleichung:

$$x - a = \sqrt{x - a}$$

auf Meter als Masseinheit bezogen. Beide Sehnen schneiden sich unter dem Winkel $\varepsilon = 36^0\,36'\,36,3''$. Wie gross ist der Durchmesser des Kreises, zu welchem die Sehnen gehören, wenn $a = 9$ m ist?

Gegeben: eine Beziehung zwischen zwei sich schneidenden Sehnen, und der Winkel, unter welchem sie sich schneiden.

Gesucht: Durchmesser $2r$ des Kreises.

Andeutung. In Figur 320 sei AB die Sehne, welche durch die Sehne CD halbiert wird, deren Abschnitte die Wurzeln der gegebenen Gleichung:

$$x - a = \sqrt{x - a}$$

seien. Löst man diese Gleichung in bezug auf x auf, so erhält man nach der Erkl. 476 für die Wurzeln dieser Gleichung:

$$x_1 = a$$

und

$$x_2 = a + 1$$

Der kleinere Abschnitt DF der Sehne CD ist also:

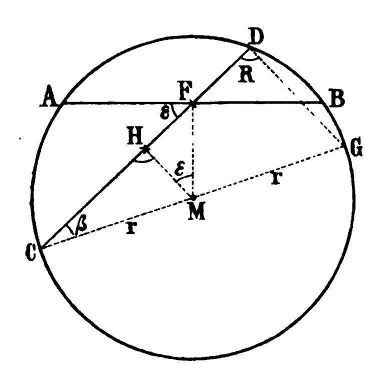
a) . . . . $\overline{DF} = a$

und der grössere Abschnitt CF derselben ist:

b) . . . . $\overline{CF} = a + 1$

und die ganze Sehne CD ist hiernach:

Figur 320.



Erkl. 476. Aus der Gleichung:

$$x - a = \sqrt{x - a}$$

erhält man die Werte für x wie folgt:

Quadriert man die Gleichung, so erhält man:

$$\text{a)} \;\ldots\; (x - a)^2 = x - a$$

Da nun $x - a$ ein Faktor dieser Gleichung ist, so muss x einen solchen Wert haben, welcher der Gleichung:

$$\text{b)} \;\ldots\; x - a = 0$$

genügt. Man erhält aus dieser Gleichung zunächst:

$$1) \;\ldots\; x = a$$

Dividiert man die Gleichung a) durch den in derselben enthaltenen Faktor $(x - a)$, so erhält man:

$$x - a = 1$$

und hieraus ergibt sich für x der weitere Wert:

$$2) \;\ldots\; x = 1 + a$$

Der gegebenen Gleichung genügen also die beiden Werte:

$$x_1 = a$$

und

$$x_2 = a + 1$$

$$\text{c)} \;\ldots\; \overline{CD} = 2a + 1$$

Zieht man nun durch einen Endpunkt der Sehne CD, z. B. durch den Endpunkt C den Durchmesser CG, und verbindet D mit G, so erhält man nach der Erkl. 452 das bei D rechtwinklige Dreieck CDG; aus demselben ergibt sich die Relation:

$$\cos\beta = \frac{\overline{CD}}{\overline{CG}}$$

oder in Rücksicht der Gleichung c):

$$\cos\beta = \frac{2a + 1}{2r}$$

woraus man für den Durchmesser $2r$:

$$\text{A)} \;\ldots\; 2r = \frac{2a + 1}{\cos\beta}$$

erhält, nach welcher Gleichung man den Durchmesser $2r$ berechnen könnte, wenn der Winkel β bekannt wäre. Diesen Winkel β kann man aber wie folgt berechnen:

Fällt man auf CD die Senkrechte MH, so wird jene Sehne halbiert und man hat das bei H rechtwinklige Dreieck CHM, aus welchem sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\overline{MH}}{\overline{CH}}$$

oder in Rücksicht, dass $\overline{CH} = \frac{CD}{2}$ oder $= \frac{2a + 1}{2}$ ist, die Relation:

$$\text{d)} \;\ldots\; \operatorname{tg}\beta = \frac{2 \cdot \overline{MH}}{2a + 1}$$

ergibt. Verbindet man ferner die Mitte F der Sehne AB mit M, so erhält man das bei H rechtwinklige Dreieck MHF, in welchem nach der Erkl. 293 $\sphericalangle FMH = \varepsilon$, also gemäss der Aufgabe bekannt ist, und in welchem:

$$\overline{HF} = \overline{HD} - \overline{DF}$$

oder:

$$\overline{HF} = \frac{\overline{CD}}{2} - DF$$

$$\overline{HF} = \frac{2a + 1}{2} - a$$

$$\overline{HF} = \frac{2a + 1 - 2a}{2}$$

oder:

$$\text{e)} \;\ldots\; \overline{HF} = \frac{1}{2}$$

ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{ctg}\varepsilon = \frac{\overline{MH}}{\overline{HF}}$$

oder in Rücksicht der Gleichung e):

$$\operatorname{ctg} \varepsilon = \frac{\overline{MH}}{\frac{1}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{f)} \ldots \overline{MH} = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{ctg} \varepsilon$$

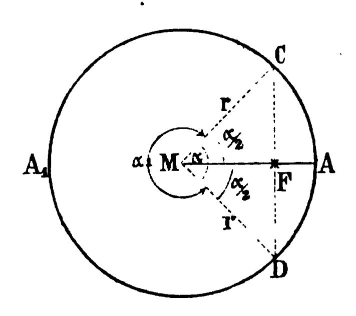
Setzt man diesen Wert für $\overline{MH}$ in Gleichung d), so erhält man:

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg} \beta = \frac{\operatorname{ctg} \varepsilon}{2a+1}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für ε und a gegebenen Zahlenwerte den Winkel β berechnen kann. Substituiert man den für β hiernach zu berechnenden Wert und den für a gegebenen Wert in Gleich. A), so kann man nach jener Gleichung den gesuchten Durchmesser $2r$ berechnen.

Aufgabe 818. In welchem Verhältnis muss ein Radius eines Kreises durch eine zu ihm senkrechte Sehne geteilt werden, damit diese Sehne die Peripherie des Kreises im Verhältnis 3 : 1 teilt?

Figur 321.



Erkl. 477. Aus den Gleichungen:

$$\text{a)} \ldots \alpha_1 : \alpha = 3 : 1$$

und

$$\text{b)} \ldots \alpha + \alpha_1 = 360^0$$

erhält man α wie folgt:

Aus Gleichung a) ergibt sich:

$$\alpha_1 = 3\alpha$$

Diesen Wert in Gleichung b) substituiert gibt:

$$\alpha + 3\alpha = 360^0$$
$$4\alpha = 360^0$$

also:

$$\alpha = 90^0$$

Erkl. 478. Das Verhältnis:

$$\frac{r}{2}\sqrt{2} : \left(r - \frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$$

kann man wie folgt reduzieren:

Gegeben: eine Beziehung zwischen zwei Teilen der Kreisperipherie.

Gesucht: eine Beziehung zwischen zwei Abschnitten eines Radius.

Auflösung. Soll, siehe Figur 321, die Peripherie des Kreises um M, durch die Sehne CD, welche senkrecht zu dem Radius MA steht, so in zwei Teile zerlegt werden, dass die Proportion besteht:

$$\text{bog}\, CA_1D : \text{bog}\, CAD = 3 : 1$$

so muss, da die Centriewinkel eines Kreises das Mass der zu denselben gehörigen Bogen sind, zwischen den Centriewinkeln α_1 und α die Proportion bestehen:

$$\text{a)} \ldots \alpha_1 : \alpha = 3 : 1$$

Da nun:

$$\text{b)} \ldots \alpha + \alpha_1 = 360^0$$

ist, so erhält man aus diesen Gleichungen nach der Erkl. 477 für den Winkel α:

$$1) \ldots \alpha = 90^0$$

Bezeichnet man den Radius des Kreises um M mit r, den Abschnitt $\overline{MF}$ mit x, also den Abschnitt FA mit $r-x$, so hat man für das gesuchte Verhältnis:

$$\text{c)} \ldots \overline{MF} : \overline{FA} = x : (r-x)$$

Den unbekannten Abschnitt MF $(=x)$ kann man wie folgt in den Radius r und in den Centriewinkel α ausdrücken:

Aus dem rechtwinkligen Dreieck MFC ergibt sich die Relation:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MF}}{\overline{MC}} \text{ oder } = \frac{x}{r}$$

oder in Rücksicht der Gleichung 1):

$$\text{d)} \ldots \cos 45^0 = \frac{x}{r}$$

$$\frac{r}{2}\sqrt{2}:\left(r-\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)=\frac{r}{2}\sqrt{2}:r\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}:\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2\left(1-\frac{1}{2}\sqrt{2}\right)}:1$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}:1$$
$$=\frac{\sqrt{2}\cdot(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})(2+\sqrt{2})}:1$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2}{2^2-(\sqrt{2})^2}:1$$
$$=\frac{2\sqrt{2}+2}{4-2}:1$$
$$=\frac{2(1+\sqrt{2})}{2}:1$$
$$=(1+\sqrt{2}):1$$

Da nun nach der Erkl. 216:

$$\cos 45^0=\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist, so erhält man aus Gleichung d):

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}=\frac{x}{r}$$

oder:

$$\text{e)}\ \ldots\ x=\frac{r}{2}\sqrt{2}$$

Setzt man diesen Wert in Gleichung c), so geht dieselbe über in:

$$\overline{MF}:\overline{FA}=\frac{r}{2}\sqrt{2}:\left(r-\frac{r}{2}\sqrt{2}\right)$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 478 für das gesuchte Verhältnis:

$$\text{A)}\ \ldots\ldots\ \overline{MF}:\overline{FA}=(1+\sqrt{2}):1$$

Aufgabe 819. Die Peripherie eines Kreises misst $U=450{,}32$ m; diese Peripherie wird durch eine Sehne im Verhältnis $4:15$ geteilt; man soll die Entfernung dieser Sehne vom Kreismittelpunkt berechnen.

Gegeben: der Umfang $U=450{,}32$ m und eine Beziehung zwischen zwei Teilen desselben.

Gesucht: die Entfernung einer Sehne vom Kreismittelpunkt.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 818. Ist, siehe Figur 321, CD die Sehne, welche die Peripherie des Kreises in dem gegebenen Verhältnis teilt, so muss die Proportion:

$$\text{bog}\ CA_1D:\text{bog}\ CAD=4:15$$

bezw. die Proportion:

$$\text{a)}\ \ldots\ \alpha_1:\alpha=15:4$$

bestehen. Da ferner:

$$\text{b)}\ \ldots\ \alpha+\alpha_1=360^0$$

sein muss, so kann man aus diesen beiden Gleichungen zunächst die Centriewinkel α α_1 berechnen.

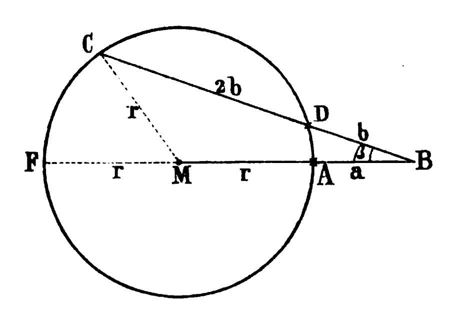
Da ferner der Umfang U des Kreises gegeben ist, und nach der Erkl. 460:

$$\text{c)}\ \ldots\ U=2r\pi$$

ist, so kann man aus dieser Gleichung den Radius r berechnen. Sind r und α hiernach berechnet, so kann man den gesuchten Abstand MF der Sehne CD vom Mittelpunkt M leicht aus dem rechtwinkligen Dreieck CFM bestimmen.

***Aufgabe 820.** Der Radius r eines Kreises von 14,08 dm Länge ist um $a =$ 6,4 m über die Peripherie verlängert und von dem Endpunkt dieser Verlängerung ist eine Sekante durch den Kreis gezogen, welche die Eigenschaft hat, dass der Teil derselben, welcher innerhalb des Kreises liegt, doppelt so gross ist als der äussere Teil dieser Sekante; wie gross ist der Winkel, welchen diese Sekante mit jenem Radius bildet?

Figur 322.



Erkl. 479. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Schneiden sich zwei Sekanten ausserhalb eines Kreises, so verhalten sich die ganzen Sekanten umgekehrt wie ihre äusseren Abschnitte."

Nach diesem Satz besteht zwischen den Sekanten BF und BC in der Figur 322 die Proportion:

$$\overline{BF} : \overline{BC} = \overline{BD} : \overline{BA}$$

Erkl. 480. Löst man die in nebenstehender Andeutung aufgestellte Gleichung a):

$$(2r + a) : (2b + b) = b : a$$

in bezug auf b auf, so erhält man der Reihe nach:

$$(2r + a) : 3b = b : a$$
$$(2r + a) \cdot a = 3b \cdot b$$
$$3b^2 = (2r + a) \cdot a$$
$$b^2 = \frac{a}{3}(2r + a)$$

oder:

$$b = \sqrt{\frac{a}{3}(2r + a)}$$

Gegeben: $\left\{\begin{array}{l} r = 14{,}08 \text{ dm} \\ a = 6{,}4 \text{ dm} \\ \text{die Beziehung:} \\ \overline{CD} = 2 \cdot \overline{DB} \end{array}\right.$ (siehe Figur 322)

Gesucht: Winkel β

Andeutung. In Figur 322 sei MA der gegebene und um $AB = a$ verlängerte Radius r; ferner sei AC die von B aus gezogene Sekante, welche die Eigenschaft hat, dass $\overline{CD} = 2 \cdot \overline{DB}$ ist.

Verlängert man BM bis F, so besteht nach der Erkl. 479 zwischen den Sekanten BC und BF und deren äusseren Abschnitten die Relation:

$$\overline{BF} : \overline{BC} = \overline{BD} : \overline{BA}$$

oder, wenn man BD mit b, also gemäss der Aufgabe $\overline{DC}$ mit $2b$ bezeichnet, die Relation:

$$\text{a)} \ldots (2r + a) : (2b + b) = b : a$$

und hieraus erhält man für den äusseren Abschnitt b der Sekante BC nach der Erklärung 480:

$$b = \sqrt{\frac{a}{3}(2r + a)}$$

also für den inneren Abschnitt CD derselben:

$$\overline{CD} = 2\sqrt{\frac{a}{3}(2r + a)}$$

und für die ganze Sekante CB:

$$\text{A)} \ldots \overline{CB} = 3\sqrt{\frac{a}{3}(2r + a)}$$

nach welcher Gleichung man diese Sekante in Rücksicht der für a und r gegebenen Zahlenwerte berechnen kann.

Ist hiernach CB berechnet und man verbindet M mit C, so kennt man von dem Dreieck BCM die Seite CB, die Seite MC $(= r)$ und die Seite $BM (= r + a)$; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, aus den drei Seiten dieses Dreiecks den gesuchten Winkel β berechnen.

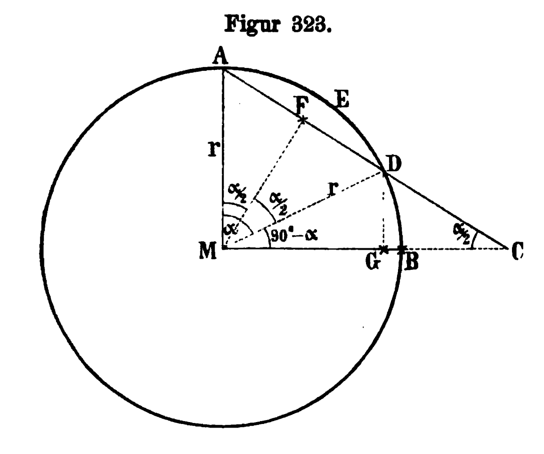
---

† Aufgabe 821. Von dem Endpunkt des, einen Viertelkreis begrenzenden Radius ist eine Strecke nach der Verlängerung des andern jenen Viertelkreis begrenzenden Radius so gezogen, dass diese Strecke gleich wird dem Bogen über dem in den Kreis fallenden Stück der Strecke. Wie gross muss der zu diesem Bogen gehörige Centriewinkel sein?

Gegeben: die Beziehung bog $AED = AC$ (siehe Figur 323)
Gesucht: Centriewinkel α

Andeutung. In Figur 323 sei AMB ein Quadrant des Kreises um M (s. Erkl. 481)

Figur 323.



Erkl. 481. Unter einem Viertelskreis oder „Quadrant" versteht man den Teil eines Kreises, welcher von zwei senkrecht zu einanderstehenden Radien eingeschlossen ist.

Erkl. 482. Die nebenstehende Gleichung e) kann man wie folgt umformen:

$$2r\sin^2\frac{\alpha}{2}+r\cdot\cos\alpha=2r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=2\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man nach der Erkl. 301:

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha$$

so geht jene Gleichung über in:

$$1-\cos\alpha+\cos\alpha=2\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

oder in:

$$1=2\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

Erkl. 483. Unter transscendenten Bestimmungsgleichungen versteht man im Gegensatz zu algebraischen Bestimmungsgleichungen, solche Gleichungen, in welchen die zu bestimmenden Grössen, die sog. Unbekannten als Exponenten von Potenzen oder Wurzeln, als goniometrische Funktionen, als Logarithmen etc. vorkommen.

Die sämtlichen sogenannten goniometrischen Gleichungen, das sind Gleichungen, in welchen goniometr. Funktionen unbekannter Winkel vorkommen, gehören zu den transscendenten Gleichungen.

Die Auflösung transscendenter Gleichungen, in bezug auf die darin vorkommenden Unbekannten ist nur annäherungsweise möglich

oder ein Viertelkreis, und es sei AC die von A nach der Verlängerung des Radius MB gezogene Strecke, welche die Eigenschaft hat, dass sie gleich der Länge des zur Sehne AD gehörigen Bogens AED ist, dass also:

a) . . . $\overline{AD}+\overline{DC}=\text{bog } AED$

ist.

Nach der in Andeutung zur Aufgabe 797 aufgestellten Gleichung A) hat man für die Sehne AD, wenn man mit r den Radius des Kreises und mit α den Centriewinkel bezeichnet, welcher zu dieser Sehne gehört, und welcher gemäss der Aufgabe berechnet werden soll:

b) . . . . $\overline{AD}=2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

Für die Länge des Bogens AED, welche zu dieser Sehne AD gehört, hat man nach der in der Auflösung der Aufgabe 801 aufgestellten Gleichung B) die Relation:

c) . . . $\text{bog } AED=2r\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}$

Den Abschnitt DC der Strecke AC kann man ferner wie folgt in α und r ausdrücken:

Fällt man den Perpendikel DG, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke DGC und DGM. Da nun, wenn MF senkrecht zu AD gefällt wird, nach der Erkl. 293:

$$\sphericalangle DCM=\sphericalangle AMF \text{ also } =\frac{\alpha}{2}$$

ist, und da sich aus dem rechtwinkligen Dreieck DGM:

$$\sin(90^0-\alpha)=\frac{\overline{DG}}{\overline{MD}}$$

oder nach der Erkl. 79:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{DG}}{r}$$

mithin:

α) . . . $\overline{DG}=r\cdot\cos\alpha$

ergibt, so erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck DGC die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\overline{DG}}{\overline{DC}}$$

oder in Rücksicht der Gleichung α):

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{r\cdot\cos\alpha}{\overline{DC}}$$

woraus man schliesslich:

d) . . . . $\overline{DC}=\frac{r\cdot\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

erhält.

Aus den Gleichungen a) bis d) erhält man für α die Bestimmungsgleichung:

und kann oft, wie z. B. bei solchen goniometrischen Gleichungen, in welchen ausser goniometrischen Funktionen eines unbekannten Winkels (oder Bogens) auch noch dieser unbekannte Winkel (oder Bogen) als für sich bestehende Grösse vorkommen, nur mittels Probieren ausgeführt werden (siehe Erkl. 484).

Erkl. 484. Ueber das Auflösen goniometrischer Bestimmungsgleichungen findet man Näheres in dem Abschnitt 25 des Lehrbuchs der Goniometrie und in dem Lehrbuch, welches über die transscendenten Gleichungen im allgemeinen handelt.

e) . . . $2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} + \frac{r \cdot \cos \cdot \alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}} = 2r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360}$

Formt man diese Gleichung um, wie in der Erkl. 482 gezeigt ist, so erhält man die Gleichung:

$$2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 1$$

oder:

A) . . . . $\pi \cdot \frac{\alpha}{180} \cdot \sin\frac{\alpha}{2} = 1$

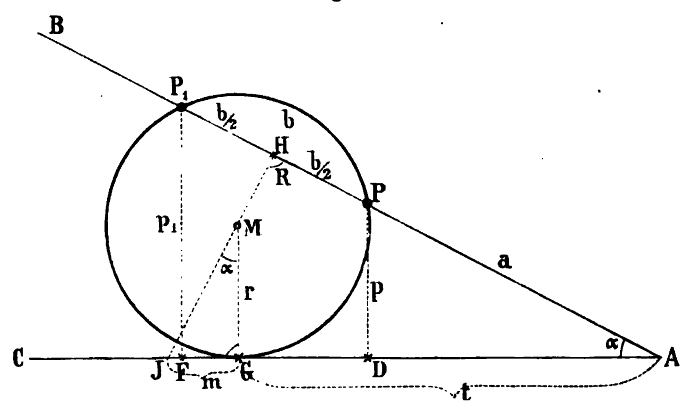
nämlich eine solche transscendente Gleichung, in welcher der unbekannte und in Grade ausgedrückt gedachte Winkel (oder Bogen) α und die unbekannte Funktion Sinus des Winkels $\frac{\alpha}{2}$ vorkommt.

Ueber das Auflösen solcher Gleichungen in bezug auf den unbekannten Winkel α, siehe die Erkl. 483 und 484.

Aufgabe 822. Zwei Gerade schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 28^0\,26'\,10{,}6''$; auf der einen dieser Geraden sind zwei Punkte P und P_1 gegeben, deren Entfernungen von der andern Geraden bezw. $p = 30{,}08$ dm und $p_1 = 42{,}65$ dm sind. Man soll den Radius des Kreises berechnen, welcher durch jene beiden Punkte geht und die andere Gerade berührt.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 28^0\,26'\,10{,}6'' \\ p = 30{,}08 \text{ dm} \\ p_1 = 42{,}65 \text{ dm} \end{cases}$ (s. Fig. 324)
Gesucht: Radius r

Figur 324.



Andeutung. Es seien, siehe Figur 324, AB und AC zwei unter dem gegebenen Winkel α sich schneidende Gerade; P und P_1 seien die Punkte, auf der Geraden AB, deren Entfernungen PD und P_1F von der andern Geraden AC bezw. gleich den gegebenen Strecken p und p_1 sind, und der Kreis um M sei derjenige, welcher durch die Punkte P und P_1 geht, die Gerade AC berührt und dessen Radius r gesucht ist.

Zur Berechnung dieses Radius r kann man wie folgt verfahren:

Mittels der für α, p und p_1 gegebenen Werte berechne man zunächst die Hypotenusen:

$$\overline{AP} = a$$

und

$$\overline{AP_1} = a + b$$

der rechtwinkligen Dreiecke ADP und AFP_1.

Dann fälle man von M den Perpendikel MG auf die Gerade AC und berechne mittels des in der Erkl. 467 angeführten Satzes aus der Sekante $a+b$ und deren äusserem Abschnitt a

die Tangente t. Hierauf fälle man MH senkrecht auf PP_1, verlängere MH bis J und berechne aus dem bei H rechtwinkligen Dreieck AHJ, mittels des für:

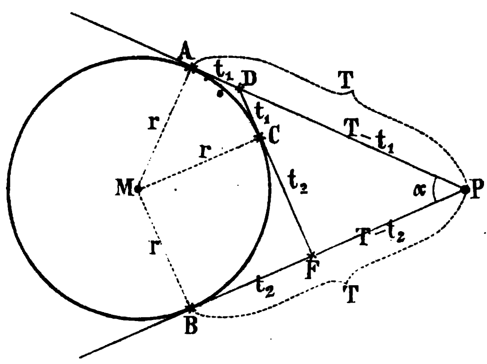
$$\overline{AH} = \overline{AP} + \overline{PH} \text{ oder } = a + \frac{b}{2}$$

sich ergebenden und des für α gegebenen Werts die Hypotenuse $AJ (= t + m)$ und bestimme aus den für t und $t + m$ gefundenen Werten die Strecke m. Beachte dann, dass nach der Erkl. 293 $\sphericalangle JMG = \alpha$ ist und berechne aus dem bei G rechtwinkligen Dreieck MGJ mittels des für α gegebenen Werts und des für m vorhin berechneten Werts den gesuchten Radius $MG (= r)$

***Aufgabe 823.** Von einem Punkt P ausserhalb eines Kreises sind von demselben unter dem Winkel $\alpha = 42^0\,20'\,10''$ zwei Tangenten gezogen, welche bis zu ihrem Berührungspunkt $T = 12{,}42$ m messen. An diesen Kreis ist eine dritte Tangente so gezogen, dass das zwischen jene beiden Tangenten fallende Stück derselben $t = 2{,}86$ m misst. Man soll die Stücke t_1 und t_2 jener dritten Tangente, welche zwischen dem Berührungspunkt derselben und jenen beiden Tangenten liegen, berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 42^0\,20'\,10'' \\ T = 12{,}42 \text{ m} \\ t = 2{,}86 \text{ m} \end{cases}$
Gesucht: Abschnitte t_1 und t_2 (s. Erkl. 325)

Figur 325.



Andeutung. Ist in der Figur 325 P der Punkt, von welchem unter dem gegebenen Winkel α die Tangenten PA und PB von der gegebenen Länge T an den Kreis um M gezogen sind; ist ferner $DF (= t)$ eine dritte an diesen Kreis gezogene Tangente, welche zwischen jenen Tangenten liegt, und fällt man von M den Perpendikel MC auf diese Tangente t, so sind $CD (= t_1)$ und $CF (= t_2)$ die zu berechnenden Abschnitte.

Zur Berechnung dieser Abschnitte beachte man folgendes: Sind MA und MB die von M auf die Tangenten PA und PB gefällten Perpendikel, so muss nach dem in der Erkl. 465 angeführten Satz:

$$\overline{AD} = \overline{DC} \text{ also } = t_1$$

und

$$\overline{BF} = \overline{FC} \text{ also } = t_2$$

sein, indem man DA und DC (ebenso FB und FC) als Tangenten betrachten kann, die von dem Punkt D (bezw. von dem Punkt F) an den Kreis um M gezogen sind.

Hiernach ergibt sich, dass in dem Dreieck

$$PDF \text{ die drei Seiten: } \begin{Bmatrix} \overline{PD} = T - t_1 \\ \overline{PF} = T - t_2 \\ \overline{DF} = t_1 + t_2 \end{Bmatrix} \text{ sind.}$$

Da nun nach dem Projektionssatz, bezw. nach der in Auflösung der Aufgabe 119 auf-

gestellten Formel 173 zwischen jenen drei Seiten und dem Winkel α die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha = \frac{(T-t_1)^2+(T-t_2)^2-(t_1+t_2)^2}{2(T-t_1)\cdot(T-t_2)}$$

und da ferner:

$$\text{b)} \ldots t_1+t_2=t$$

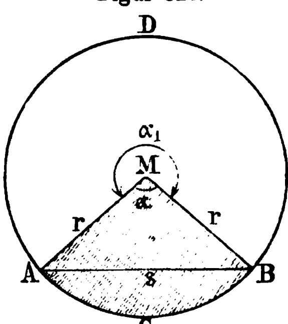
ist, so hat man hiermit zwei Gleichungen mit den zwei Unbekannten t_1 und t_2 [indem α. T und t gemäss der Aufgabe gegeben sind] und aus diesen Gleichungen kann man leicht jede dieser Unbekannten berechnen.

---

c) Aufgaben, in welchen die Berechnung von Teilen eines Kreises gefordert wird.

Aufgabe 824. Eine Sehne eines Kreises ist $s = 15{,}204$ m, der zugehörige Centriewinkel beträgt $\alpha = 66^0\,40'\,20{,}5''$; wie gross ist der Inhalt des Sektors, welcher diesem Centriewinkel entspricht?

Figur 326.



Erkl. 485. Unter einem Kreisausschnitt oder Kreissektor, auch kurzweg Sektor genannt, versteht man ein Stück eines Kreises, welches von zwei Radien und dem zwischen denselben liegenden Bogen begrenzt wird.

Durch je zwei Radien wird ein Kreis in zwei Sektoren zerlegt; so wird z. B. der Kreis in Figur 326 durch die beiden Radien MA und MB in die beiden Sektoren $MACB$ und $MADB$ zerlegt.

Erkl. 486. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Inhalt eines Kreissektors verhält sich zu dem Inhalt ($r^2\pi$, s. Erkl. 487) des ganzen zugehörigen Kreises, wie der zu dem Sektor gehörige und in Grade ausgedrückte Centriewinkel (α^0) zu 360 Grad"

in Zeichen:

$$\text{Sektor}: r^2\pi = \alpha^0 : 360^0$$

Nach diesem Satz erhält man für den Inhalt eines Sektors:

$$\text{Sektor} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \text{ Flächeneinheiten.}$$

(siehe auch die Erkl. 488)

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 66^0\,40'\,20{,}5'' \\ s = 15{,}204 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Sektors

Andeutung. Ist in Figur 326 α der gegebene Centriewinkel und ist s die gegebene Sehne des Kreises um M, so ist, siehe die Erkl. 485, $MACB$ der Sektor, dessen Inhalt berechnet werden soll. Nach der in der Erkl. 486 angeführten planimetrischen Formel hat man für den gesuchten Inhalt des Sektors:

$$\text{a)} \ldots \text{Sektor} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

Da r nicht gegeben, so muss man noch r in die gegebene Sehne s und in den Centriewinkel α ausdrücken. Wie in der Andeutung zur Aufgabe 798 gezeigt, ist:

$$\text{b)} \ldots r = \frac{s}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man diesen Wert für r in Gleich. a) ein, so erhält man allgemein:

$$\text{Sektor} = \frac{s^2}{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \text{Sektor} = \frac{\pi s^2}{4\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte, und in Rücksicht, dass der Quotient $\frac{\alpha^0}{360^0}$ das Verhältnis der Winkel von α^0 und 360^0 darstellt, den gesuchten Inhalt berechnen kann, analog wie in der Auflösung der folgenden Aufgabe gezeigt ist.

Erkl. 487. Bezeichnet man den Flächeninhalt eines Kreises mit F, dessen Radius mit r und mit π die irrationale Zahl 3,14159265, so besteht die Relation:

$$F = r^2\pi \text{ Flächeneinheiten.}$$

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 488. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Inhalt eines Kreissektors verhält sich zu dem Inhalt des ganzen zugehörigen Kreises wie der zu dem Sektor gehörige Bogen zu dem Umfang des Kreises.“

Bezeichnet man den Radius eines Kreises mit r, also nach der Erkl. 487 dessen Inhalt mit $r^2\pi$ und nach der Erkl. 460 dessen Umfang mit $2r\pi$, und bezeichnet man ferner einen Centriewinkel des Kreises mit α, also den zu diesem Centriewinkel gehörigen und in Längeneinheiten ausgedrückten Bogen mit bog α, und den Inhalt des Sektors, welcher zu jenem Centriewinkel α, bezw. zu jenem Bogen gehört mit dem Namen „Sektor“, so hat man nach jenem Satz die Relation:

$$\text{Sektor} : r^2\pi = \text{bog}\,\alpha : 2r\pi$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$\text{Sektor} = \frac{r^2\pi}{2r\pi} \cdot \text{bog}\,\alpha$$

oder:

$$\text{Sektor} = \frac{r}{2} \cdot \text{bog}\,\alpha$$

Diese letztere Formel kann man wie folgt in Worte fassen:

„Der Inhalt eines Sektors ist gleich dem Inhalt eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem in gerader Linie ausgestreckten und zu jenem Sektor gehörigen Bogen (= bog α) ist, und dessen Höhe gleich dem Radius r des zugehörigen Kreises ist.“

Aufgabe 825. In einem Kreis hat eine Sehne von 6 m einen 4 m langen Abstand vom Kreismittelpunkt; welchen Inhalt hat der zu dieser Sehne gehörige Sektor?

Figur 327.

Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} s = 6 \text{ m} \\ \overline{MD} = 4 \text{ m} \end{array} \right\}$ (siehe Figur 327)

Gesucht: Inhalt eines Sektors

Auflösung. In Figur 327 sei AB die gegebene Sehne s, welche von dem Mittelpunkt M des Kreises den gegebenen Abstand MD (= a) hat. Nach der Erkl. 486 hat man für den Inhalt F des Sektors $MACB$ die Relation:

$$\text{a)} \ldots F = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \text{ Flächeneinheiten}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck MDA für den unbekannten Radius r:

$$\text{b)} \ldots r = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + a^2} \text{ Längeneinheiten}$$

Hülfsrechnung 1.

Aus nebenstehender Gleichung c):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : a$$

erhält man $s = 6$ m

und $a = 4$ m

gesetzt:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{6}{2} : 4$$

oder: $$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$$

und hieraus findet man α wie folgt:

$$\log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \log 3 - \log 4$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} & \quad (+10) \qquad (-10) \\ \log 3 = & 0{,}4771213 \\ -\log 4 = & -0{,}6020600 \\ \hline \log\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = & 9{,}8750613 - 10 \end{array}$$

mithin:

$$\frac{\alpha}{2} = 36^0\,52'\,12''$$

und

$$\alpha = 73^0\,44'\,24''$$

Hülfsrechnung 2.

Aus nebenstehender Gleichung b):

$$r = \sqrt{\left(\frac{s}{2}\right)^2 + a^2}$$

erhält man $s = 6$ m

und $a = 4$ m

gesetzt:

$$r = \pm\sqrt{\left(\frac{6}{2}\right)^2 + 4^2} \text{ Meter}$$

oder:

$$r = \pm\sqrt{3^2 + 4^2} \text{ Meter}$$

$$r = \pm\sqrt{9 + 16} \quad ,,$$

$$r = \pm\sqrt{25} \text{ Meter}$$

$$r = \pm 5 \text{ Meter}$$

mithin:

$$r = 5 \text{ Meter}$$

da das negative Vorzeichen in bezug auf die Länge des Radius r keinen Sinn zulässt und vernachlässigt werden kann.

Hülfsrechnung 3.

Setzt man in nebenstehender Gleichung a):

$$F = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

$$r = 5$$

und $\alpha = 73^0\,44'\,24''$

so geht dieselbe über in:

$$F = 5^2 \cdot \pi \cdot \frac{73^0\,44'\,24''}{360^0}$$

und für den unbekannten Centriewinkel α die Relation:

c) . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : a$

Aus den Gleichungen b) u. c) kann man in Rücksicht der für s und a gegebenen Zahlenwerte den Radius r und den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, bezw. den Centriewinkel α berechnen. Dann kann man diese berechneten Werte in Gleichung a) substituieren und den gesuchten Inhalt F berechnen. Man erhält nach Hülfsrechnung 1:

1) . . . . $\alpha = 73^0\,44'\,24''$

nach Hülfsrechnung 2:

2) . . . . $r = 5$ m

und nach Hülfsrechnung 3:

3) . . . . $F = 16{,}08757$ qm

und hieraus erhält man F wie folgt:

$$F = 25 \cdot \pi \cdot \frac{73 \cdot 60 \cdot 60'' + 44 \cdot 60'' + 24''}{360 \cdot 60 \cdot 60''}$$

$$F = 25 \cdot \pi \cdot \frac{262800 + 264 + 24}{1296000}$$

$$F = 25 \cdot \pi \cdot \frac{265464}{1296000}$$

$$\log F = \log 25 + \log \pi + \log 265464 - \log 1296000$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 265464 &= 5{,}4239991 \\ &\quad + 65{,}2 \\ & 5{,}4240056 \\ + \log \pi &= + 0{,}4971499 \\ + \log 25 &= + 1{,}3979400 \\ & 7{,}3190955 \\ - \log 1296000 &= - 6{,}1126050 \\ \log F &= 1{,}2064905 \end{aligned}$$

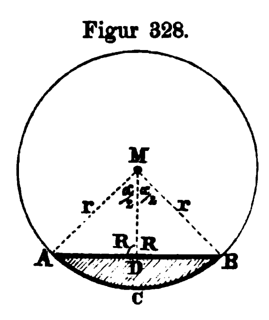
$$\begin{array}{r} 4751 \\ \hline 154 \\ 135{,}5 \\ \hline 18{,}5 \\ 18{,}9 \end{array}$$

mithin:

$$F = 16{,}08757$$

Aufgabe 826. In einem Kreis, dessen Radius $r = 4{,}562$ m misst, ist ein Centriewinkel $\alpha = 44^0\,20'\,10''$ konstruiert; welchen Inhalt hat der zugehörige Kreisabschnitt?

Figur 328.



Erkl. 489. Unter einem Kreisabschnitt oder Kreissegment, auch kurzweg Segment genannt, versteht man ein Stück eines Kreises, welches von einer Sehne und einem der Bogen des Kreises begrenzt wird, in welche die Peripherie des Kreises durch jene Sehne zerlegt wird.

Ist eine Sehne zugleich Durchmesser eines Kreises, so sind die beiden durch dieselben gebildeten Segmente einander gleich, indem jedes derselben gleich der Hälfte des ganzen Kreises, also gleich einem Halbkreis ist.

Gegeben: $\begin{cases} r = 4{,}562 \text{ m} \\ \alpha = 44^0\,20'\,10'' \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Segments

Auflösung. Ist, siehe Figur 328, der Radius r des Kreises um M gleich dem gegebenen und ist α der gegebene Centriewinkel, so ist das Segment ABC, siehe die Erkl. 489, das zu berechnende.

Nach der Erkl. 490 berechnet man den gesuchten Inhalt F des Segments ABC mittels der Relation:

a) . . . Segment $ABC =$ Sektor $MACB$ — Dreieck MAB

Da man nun für den Inhalt des Sektors $MACB$ nach der Erkl. 486:

b) . . . Sektor $MACB = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

und nach der in Auflösung der Aufgabe 64 aufgestellten Formel 60 für den Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks MAB:

c) . . . Dreieck $MAB = \frac{r^2}{2} \cdot \sin\alpha$

hat, so erhält man aus den Gleichungen a) bis c):

$$\text{Segment } ABC = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \frac{r^2}{2} \cdot \sin\alpha$$

oder:

A) . . Segment $ABC = \frac{r^2}{2} \cdot \left[2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right]$

(siehe auch die Erkl. 491)

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für α und r gegebenen Zahlenwerte den gesuchten Inhalt F des Segments ABC berechnen kann.

Durch jede Sehne, welche nicht zugleich Durchmesser ist, wird ein Kreis in zwei Segmente zerlegt, von welchen das eine grösser als ein Halbkreis, das andere um dasselbe kleiner als ein Halbkreis ist, so wird z. B. der Kreis in Figur 329 durch die Sehne AB in die beiden Segmente ABC und ABD zerlegt.

Das Segment ABD ist um das Kreisstück $ABFE$ grösser als der Halbkreis EFD und das Segment ABC ist um dasselbe Kreisstück $ABFE$ kleiner als der Halbkreis EFC bezw. EFD.

Da sich beide Segmente zu einem ganzen Kreis ergänzen, so nennt man das eine das Ergänzungssegment des andern.

Erkl. 490. Der Inhalt eines Segments, das kleiner als ein Halbkreis ist, wird berechnet, indem man von dem Inhalt des Sektors, welcher durch diejenigen Radien begrenzt wird, die durch die beiden Endpunkte der das Segment begrenzenden Sehne gehen, den Inhalt des Dreiecks, welches durch diese Sehne und jene beiden Radien begrenzt wird, subtrahiert. So ist z. B. in Figur 329:

a) . . . Segment $ABC =$ Sektor $MACB$ — Dreieck MAB

Der Inhalt eines Segments, welches grösser als ein Halbkreis ist, wird berechnet, indem man von dem Inhalt des ganzen Kreises den Inhalt des Ergänzungssegments subtrahiert. So ist z. B. in Figur 329:

b) . . . Segment $ABD =$ Kreis um M — Segment ABC

Man kann den Inhalt des Segments ABD, in Figur 329, welches grösser als ein Halbkreis ist, auch nach der Relation:

c) . . . Segment $ABD =$ Sektor $MADB$ + Dreieck MAB

berechnen.

Erkl. 491. Setzt man in nebenstehender Gleichung:

A) . . . Segt. $ABC = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$

analog, wie in der Erkl. 461, für:

$$2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$$

so geht jene Gleichung über in:

A_1) . . . Segt. $ABC = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$

(siehe auch die Erkl. 492).

Man erhält für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel für F:

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{44^0\,20'\,10''}{360^0} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{44 \cdot 60' + 20' + \frac{10'}{60}}{360 \cdot 60'} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{2640' + 20' + \frac{1'}{6}}{21600'} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(2 \cdot \pi \cdot \frac{2660\frac{1}{6}}{21600} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\frac{15961}{6}}{10800} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}\left(\frac{\pi \cdot 15961}{64800} - \sin 44^0\,20'\,10''\right)$$

$$F = \frac{4{,}562^2}{2}(0{,}77381 - 0{,}698866)$$

(siehe die Hülfsrechnungen 1 und 2)

$$F = \frac{4{,}562^2}{2} \cdot 0{,}074045$$

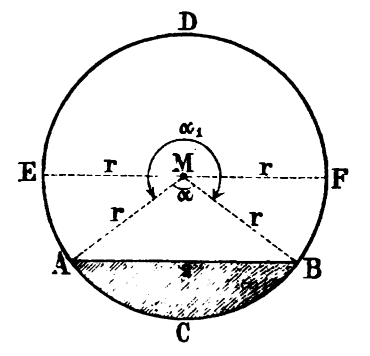
und hieraus erhält man endlich nach der Hülfsrechnung 3) für den gesuchten Inhalt F des Segments ABC:

1) . . . . $F = 0{,}779872$ qm

(siehe auch die Erkl. 492).



Figur 329.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

316. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 315. — Seite 561—576.
Mit 12 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 315. — Seite 561—576. Mit 12 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über den Kreis, Fortsetzung. — Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit dem demselben umbeschriebenen Kreis.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 492. Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 493 allgemein: $2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$ den zum Centriewinkel α gehörigen Bogen eines Kreises bedeutet, dessen Radius $r = 1$, gleich der Längeneinheit ist, dass man also nach der Erkl. 493:

$$2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} = \text{arc}\,\alpha$$

setzen kann, so geht die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung A) über in:

1) . . . Segment $ABC = \frac{r^2}{2} \cdot [\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha]$

Hat man eine Tabelle, in welcher die Bogen sämtlicher Centriewinkel eines Kreises, dessen Radius gleich der Längeneinheit (= 1) ist, enthalten sind, so kann man bei numerischen Berechnungen den Wert für:

$$2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} \text{ bezeichnet durch arc}\,\alpha$$

aus dieser Tabelle entnehmen, wodurch die Rechnung wesentlich vereinfacht wird.

Erkl. 493. Nach der Erkl. 459 besteht die Relation:

$$2r\pi : \text{bog}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0$$

Bezeichnet man für den Fall, dass:

$$r = 1$$

ist, den Bogen α zur Unterscheidung, nicht mit bog α, sondern mit arc α (siehe Erkl. 494), so geht jene Proportion über in:

$$2\pi : \text{arc}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0$$

und hieraus erhält man:

a) . . . . $\text{arc}\,\alpha = 2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

oder auch, da der Quotient $\frac{\alpha^0}{360^0}$ nur das Verhältnis der Winkel von α^0 und 360^0 ausdrückt:

b) . . . $\text{arc}\,\alpha = \pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$

Erkl. 494. Die Bezeichnung „arc" ist eine Abkürzung des lateinischen Wortes arcus, d. h. Bogen.

Hülfsrechnung 1.

$$\log \frac{\pi \cdot 15961}{64800} = \log\pi + \log 15961 - \log 64800$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log\pi &= 0{,}4971499 \\ +\log 15961 &= 4{,}2030601 \\ & (+1)\ 4{,}7002100\ (-1) \\ -\log 64800 &= -4{,}8115750 \\ \log\frac{\pi \cdot 15961}{64800} &= 0{,}8886350 - 1 \\ & 6343 \\ & 7 \end{aligned}$$

mithin:

$$\frac{\pi \cdot 15961}{64800} = 0{,}773811$$

Hülfsrechnung 2. *)

$$\begin{aligned} \log\sin 44^0\,20'\,10'' &= 9{,}8443940 - 10 \\ \text{oder } &= 0{,}8443940 - 1 \\ & 3902 \\ & 38 \\ & 37{,}2 \end{aligned}$$

mithin:

$$\sin 44^0\,20'\,10'' = 0{,}698866$$

*) Den Sinus des Winkels 44° 20′ 10″ kann man auch direkt einer trigonometrischen Tafel entnehmen.

Hülfsrechnung 3.

Aus:

$$F = \frac{4{,}562^2}{2} \cdot 0{,}074945$$

erhält man F wie folgt:

$$\log F = 2 \cdot \log 4{,}562 + \log 0{,}074945 - \log 2$$

Nun ist:

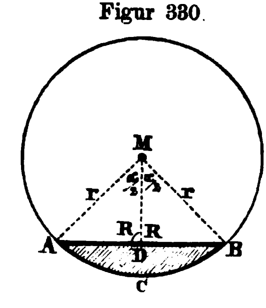
$$\begin{aligned} \log 4{,}562 &= 0{,}6591553 \\ & \cdot 2 \\ & 1{,}3183106 \\ +\log 0{,}074945 &= 0{,}8747427 - 2 \\ & 2{,}1930533 - 2 \\ -\log 2 &= -0{,}3010300 \\ \log F &= 1{,}8920233 - 2 \\ \text{oder } &= 0{,}8920233 - 1 \\ & 0222 \\ & 11 \\ & 11{,}2 \end{aligned}$$

mithin:

$$F = 0{,}779872$$

Aufgabe 827. Wie gross ist der Inhalt eines Kreissegments, wenn der zugehörige Centriewinkel 29° 38′ 15″ beträgt und der zugehörige Bogen 8,793624 dm lang ist?

Figur 330.



Gegeben: $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 29^0\,38'\,15'' \\ \text{bog}\,\alpha = 8{,}793624 \text{ dm} \end{array} \right\}$ (siehe Figur 330)
Gesucht: Inhalt eines Segments

Auflösung. Nach der in Auflösung der vorigen Aufgabe 826 aufgestellten Gleichung A) besteht die Relation:

A) . . Segment $ABC = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$

ferner besteht nach der Erkl. 459 die Relation:

$$2r\pi : \text{bog}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0$$

aus welcher sich:

A_1) . . . $r = \frac{\text{bog}\,\alpha}{2\pi} \cdot \frac{360^0}{\alpha^0}$

Hülfsrechnung 1.

Setzt man in nebenstehender Gleichung A_1):

$$r = \frac{\text{bog}\,\alpha}{2\pi} \cdot \frac{360^0}{\alpha^0}$$

für $\text{bog}\,\alpha = 8{,}793624$
und für $\alpha = 29^0\,38'\,15''$
so erhält man:

$$r = \frac{8{,}793624}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{360^0}{29^0\,38'\,15''}$$

oder:

$$r = \frac{8{,}793624}{2\pi} \cdot \frac{360 \cdot 60'}{29 \cdot 60' + 38' + \frac{15'}{60}}$$

$$r = \frac{9{,}793624}{2\pi} \cdot \frac{21600'}{1740' + 38' + \frac{1'}{4}}$$

$$r = \frac{8{,}793624}{2\pi} \cdot \frac{21600}{1778\frac{1}{4}}$$

$$r = \frac{8{,}793624}{2\pi} \cdot \frac{21600}{\frac{7113}{4}}$$

$$r = \frac{8{,}793624 \cdot 43200}{\pi \cdot 7113}$$

$\log r =$
$\log 8{,}793624 + \log 43200 - (\log\pi + \log 7113)$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log 8{,}793624 & = & 0{,}9441667 \\ & & +9{,}8 \\ & & +1{,}9 \\ \hline & & 0{,}9441679 \\ +\log 43200 & = & +4{,}6354837 \\ \hline & & 5{,}5796516 \\ -(\log\pi + \log 7113) & = & -4{,}3492027 \text{ (s. Hülfsr. 2)} \\ \hline \log r & = & 1{,}2304489 \end{array}$$

mithin:

$$r = 17$$

Hülfsrechnung 2.

$$\begin{array}{rcl} \log\pi & = & 0{,}4971499 \\ +\log 7113 & = & 3{,}8520528 \\ \hline \log\pi + \log 7113 & = & 4{,}3492027 \end{array}$$

Hülfsrechnung 3.

$$\log\pi \cdot \frac{7113}{43200} = \log\pi + \log 7113 - \log 43200$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rcl} \log\pi & = & 0{,}4971499 \\ +\log 7113 & = & 3{,}8520528 \\ \hline & & (+1)\ 4{,}3492027\ (-1) \\ -\log 43200 & = & -4{,}6354837 \\ \hline \log\pi \cdot \frac{7113}{43200} & = & 0{,}7137190 - 1 \\ & & 7173 \\ \hline & & 17 \\ & & 16{,}8 \end{array}$$

mithin:

$$\pi \cdot \frac{7113}{43200} = 0{,}517272$$

ergibt. Nach Gleichung A_1) kann man in Rücksicht der für $\text{bog}\,\alpha$ und α gegebenen Zahlenwerte den Radius r des Kreises berechnen, dann kann man diesen Wert für r in Gleichung A) substituieren und nach dieser Gleichung den gesuchten Inhalt F des Segments ABC berechnen.

Man erhält nach Hülfsrechnung 1):

1) . . . . $r = 17$ m

Setzt man diesen Wert für r und den für α gegebenen Wert in Gleichung A), so erhält man für den gesuchten Inhalt F:

$$F = \frac{17^2}{2} \left(2\pi \cdot \frac{29^0\,38'\,15''}{360^0} - \sin 29^0\,38'\,15''\right)$$

oder in Rücksicht, dass nach der Hülfsrechnung 1 für das Verhältnis:

$$\frac{29^0\,38'\,15''}{360^0} = \frac{\frac{7113}{4}}{21600} \text{ oder } = \frac{7113}{4 \cdot 21600}$$

gesetzt werden kann:

$$F = \frac{17^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{7113}{4 \cdot 21600} - \sin 29^0\,38'\,15''\right)$$

$$F = \frac{17^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{7113}{43200} - \sin 29^0\,38'\,15''\right)$$

oder:

$$F = \frac{17^2}{2}(0{,}517272 - 0{,}494511)$$

(siehe die Hülfsrechnungen 3 und 4)

$$F = \frac{17^2}{2} \cdot 0{,}022761$$

und hieraus ergibt sich schliesslich nach Hülfsrechnung 5:

2) . . . . $F = 3{,}28894$ qdm

Hülfsrechnung 4.

$$\log \sin 29^0\,38'\,15'' = 9{,}6941573 - 10$$
$$+185$$
$$\overline{9{,}6941758 - 10}$$
$$\text{oder} = 0{,}6941758 - 1$$
$$\frac{1751}{7}$$
$$8{,}8$$

mithin:

$$\sin 29^0\,38'\,15'' = 0{,}494511$$

Hülfsrechnung 5.

Aus der Gleichung:

$$F = \frac{17^2}{2} \cdot 0{,}022761$$

erhält man F wie folgt:

$$\log F = 2 \cdot \log 17 + \log 0{,}022761 - \log 2$$

Nun ist:

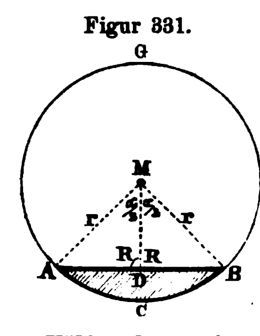
$$\log 17 = 1{,}2304489$$
$$\cdot 2$$
$$\overline{2{,}4608978}$$
$$+ \log 0{,}022761 = 0{,}3571913 - 2$$
$$\overline{2{,}8180891 - 2}$$
$$- \log 2 = - 0{,}3010300$$
$$\log F = \overline{2{,}5170591 - 2}$$
$$\text{oder:} \quad = 0{,}5170591$$
$$\frac{0507}{84}$$
$$52{,}8$$

mithin:

$$F = 3{,}28894$$

Aufgabe 828. Der Radius r eines Kreises ist 65 dm lang, eine Sehne s desselben misst 77,70644 dm; welchen Inhalt haben die Segmente, in welche durch diese Sehne der Kreis zerlegt wird?

Figur 331.



Hülfsrechnung 1.

Aus nebenstehender Gleichung:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{77{,}70644}{2} : 65$$

oder:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{77{,}70644}{130}$$

erhält man $\frac{\alpha}{2}$ bezw. α wie folgt:

$$\log \sin\frac{\alpha}{2} = \log 77{,}70644 - \log 130$$

Gegeben: $\begin{cases} r = 65 \text{ dm} \\ s = 77{,}70644 \text{ dm} \end{cases}$
Gesucht: Inhalte der beiden zu s gehörigen Segmente
(s. Fig. 331)

Auflösung. Nach der in Auflösung der Aufgabe 826 aufgestellten Gleichung A) besteht, siehe Figur 331, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \text{Segment } ABC = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$$

ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AMD die Relation:

$$\text{b)} \ldots \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r$$

In Rücksicht der für s und r gegebenen Zahlenwerte kann man aus Gleichung b) den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, bezw. den Centriewinkel α berechnen; man wird hierfür in Rücksicht der Erkl. 271 für α zwei Werte erhalten; der eine dieser Werte entspricht, siehe Fig. 326 und die Erkl. 447, dem konkaven Centriewinkel α, der andre dem konvexen Centriewinkel α_1 ($= 4R - \alpha$). Der erste Centriewinkel α entspricht dem Segment ABC, der zweite dem Segment ABG. Hat man auf diese Weise die Werte für α berechnet, und man substituiert den ersten jener Werte für α in Gleichung a), so kann man nach dieser

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 77{,}70644 = & 1{,}8904546 \\ & +22 \\ & +2{,}2 \\ \hline (+10) & 1{,}8904570\ (-10) \\ -\log 130 = & -2{,}1139434 \\ \hline \log\sin\frac{\alpha}{2} = & 9{,}7765136 - 10 \end{array}$$

mithin:

$$\frac{\alpha}{2} = 36^0\,42'\,30''$$

oder:

1) . . . $\alpha = 73^0\,25'$

Man erhält auch, da:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sin\left(2R - \frac{\alpha}{2}\right)$$

und

$$2R - \frac{\alpha}{2} = 180^0 - 36^0\,42'\,30''$$

oder:

$$2R - \frac{\alpha}{2} = 143^0\,17'\,30''$$

für α den weitern Wert:

2) . . . $\alpha_1 = 2\cdot\left(2R - \frac{\alpha}{2}\right)$ oder $= 286^0\,35'$

Die Werte für α und α_1 müssen zusammen $4R$ oder $= 360^0$ betragen (siehe Erkl. 447).

Hülfsrechnung 2.

$$\log\pi\cdot\frac{4405}{10800} = \log\pi + \log 4405 - \log 10800$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log\pi = & 0{,}4971499 \\ +\log 4405 = & 3{,}6439459 \\ \hline & 4{,}1410958 \\ -\log 10800 = & -4{,}0334238 \\ \hline \log\pi\cdot\frac{4405}{10800} = & 0{,}1076720 \\ & 6508 \\ \hline & 212 \\ & 203{,}4 \\ \hline \end{array}$$

mithin:

$$\pi\cdot\frac{4405}{10800} = 1{,}28136$$

Hülfsrechnung 3.

$$\begin{array}{rl} \log\sin 73^0\,25' = & 9{,}9815494 - 10 \\ \text{oder} = & 0{,}9815494 - 1 \\ & 5468 \\ \hline & 26 \\ & 27 \end{array}$$

mithin:

$$\sin 73^0\,25' = 0{,}958406$$

Hülfsrechnung 4.

Aus nebenstehender Gleichung:

$$F = 65^2\cdot 0{,}161477$$

erhält man F wie folgt:

$$\log F = 2\cdot\log 65 + \log 0{,}161477$$

Gleichung den Inhalt des kleinern Segments ABC berechnen; substituiert man hingegen den zweiten jener Werte, nämlich den Wert $(4R - \alpha)$ für α in Gleichung a), so kann man nach der somit erhaltenen Gleichung, und in Rücksicht der Erkl. 432, den Inhalt des grössern Segments ABG berechnen (siehe auch die Erkl. 490).

Man erhält in Rücksicht der für s und r gegebenen Zahlenwerte nach Gleichung b):

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{77{,}70644}{2} : 65$$

und hieraus ergibt sich nach Hülfsrechnung 1:

1) . . . $\alpha = 73^0\,25'$

Setzt man diesen Wert für α und den für r gegebenen Wert in Gleichung a), so erhält man für den gesuchten Inhalt F des Segments ABC:

$$F = \frac{65^2}{2}\cdot\left(2\pi\cdot\frac{73^0\,25'}{360^0} - \sin 73^0\,25'\right)$$

oder:

$$F = \frac{65^2}{2}\cdot\left(2\pi\cdot\frac{73^0\cdot 60' + 25'}{360\cdot 60'} - \sin 73^0\,25'\right)$$

$$F = \frac{65^2}{2}\left(2\pi\cdot\frac{4380' + 25'}{21600'} - \sin 73^0\,25'\right)$$

$$F = \frac{65^2}{2}\left(2\pi\cdot\frac{4405}{21600} - \sin 73^0\,25'\right)$$

$$F = \frac{65^2}{2}\left(\pi\cdot\frac{4405}{10800} - \sin 73^0\,25'\right)$$

$$F = \frac{65^2}{2}(1{,}28136 - 0{,}958406)$$

(siehe die Hülfsrechnungen 2 und 3)

$$F = \frac{65^2}{2}\cdot 322954$$

$$F = 65^2\cdot 0{,}161477$$

und hieraus ergibt sich schliesslich nach Hülfsrechnung 4:

2) . . . $F = 682{,}2404$ qdm

Den gesuchten Inhalt F_1 des andern Segments ABG kann man in derselben Weise berechnen, wenn man in jener Gleichung a) für α den aus Hülfsrechnung 1 sich ergebenden Wert:

$$\alpha_1 = 286^0\,35'$$

substituiert und hierbei berücksichtigt, dass nach der Erkl. 432:

$$\sin 286^0\,35' = -\sin(360^0 - 286^0\,35')$$
$$\text{also} = -\sin 73^0\,25'$$

ist. Einfacher findet man diesen Inhalt F_1 nach der Erkl. 490 mittels der Relation:

$$F_1 = r^2\pi - F$$

in welcher F den vorhin berechneten Inhalt des Segments ABC und $r^2\pi$ den Inhalt des Kreises bedeutet.

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log 0{,}161477 = & 0{,}2080918 - 1 \\ & +188 \\ \hline & 0{,}2081106 - 1 \\ +2\cdot\log 65 = 2\cdot 1{,}8129134 = & +3{,}6258268 \\ \hline \log F = & 3{,}8339374 - 1 \\ \text{oder} = & 2{,}8339374 \\ & 9372 \\ \hline & 2 \\ & 2{,}5 \end{array}$$

mithin:

$$F = 682{,}2404$$

Aufgabe 829. Man soll den Inhalt eines Kreissegments berechnen, wenn der Radius r des Kreises $= 0{,}834$ m und der Abstand a derjenigen Sehne, von welcher das Segment begrenzt wird, vom Mittelpunkt 0,508 m beträgt.

Gegeben: $\begin{cases} r = 0{,}834 \text{ m} \\ a = 0{,}508 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Segments

Andeutung. Man berechne zunächst aus a und r den Centriewinkel, welcher zu der Sehne gehört, die jenen Abstand a vom Mittelpunkt hat. Dann verfahre man im weitern wie in der Auflösung zur Aufgabe 826 gezeigt wurde.

Aufgabe 830. In einem Kreis ist in einem Abstand $a = 2{,}28$ m vom Mittelpunkt eine Sehne s gezogen, welche 5,08 m misst; wie gross ist der Inhalt des kleinern der durch diese Sehne gebildeten Kreisabschnitte?

Gegeben: $\begin{cases} a = 2{,}28 \text{ m} \\ s = 5{,}08 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt des zur Sehne s gehörigen kleineren Segments

Andeutung. Man berechne zunächst aus a und s den Radius r und den zu s gehörigen kleinern Centriewinkel; verfahre dann im weitern wie in der Auflösung der Aufgabe 826 gezeigt wurde.

Aufgabe 831. Der Radius eines Kreises ist $r = 480{,}623$ m; wie gross ist der Inhalt eines Segments desselben, das von einem Bogen begrenzt wird, dessen Länge gleich 602,004 m ist?

Gegeben: $\begin{cases} r = 480{,}623 \text{ m} \\ \text{bog}\,\alpha = 602{,}004 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Segments

Andeutung. Man berechne nach der in der Erkl. 461 aufgestellten Gleichung B_1):

$$\text{bog}\,\alpha = r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$$

den zu dem gegebenen Bogen gehörigen Centriewinkel α; man erhält aus jener Gleichung:

$$\text{A)} \ldots \alpha = \frac{180}{r\pi} \cdot \text{bog}\,\alpha \text{ Grade}$$

dann verfahre man im weitern wie in der Auflösung der Aufgabe 826 gnzeigt wurde.

Aufgabe 832. Man soll den Inhalt eines Kreisstücks berechnen, welches zwischen einem Durchmesser und einer Sehne liegt, wenn der Radius r des Kreises $= 1{,}25$ m misst und wenn der zur Sehne gehörige kleinere Bogen $= 2{,}04$ m lang ist.

Gegeben: $\begin{cases} r = 1{,}25 \text{ m} \\ \text{bog}\,\alpha = 2{,}04 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Flächenstücks zwischen einem Durchmesser und einer Sehne

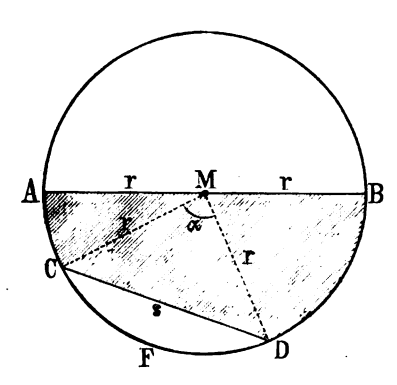
Andeutung. In Figur 332 sei der Radius r des Kreises um M gleich dem gegebenen; ferner sei CD eine Sehne, deren zugehöriger Bogen CFD gleich dem gegebenen Bogen ist. Den Inhalt F des von einem Durchmesser AB und der Sehne CD

grenzten Flächenstücks kann man mittels der Beziehung:

Flächenstück $ABDC$ = Inhalt des Halbkreises ABF — Inhalt des Segments CDF

wie folgt berechnen:

Figur 332.



Man berechne zunächst aus dem gegebenen Radius r, nach der in der Erkl. 487 aufgestellten Inhaltsformel für einen Kreis, den Inhalt des Halbkreises ABF. Dann berechne man aus dem gegebenen Bogen CDF und dem Radius r des Kreises, analog wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 831 gesagt wurde, mittels der Relation:

$$\alpha = \frac{180}{r\pi} \cdot \text{bog}\,\alpha \text{ Grade}$$

den zu dem Bogen CFD gehörigen Centriewinkel α; hierauf berechne man aus dem Winkel α und dem Radius r, wie in der Auflösung der Aufgabe 826 gezeigt wurde, den Inhalt des Segments CDF und benutze schliesslich obige Beziehung.

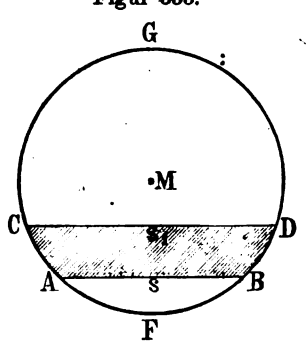
Aufgabe 833. In einem Kreis, dessen Radius $r = 286{,}479$ m misst, sind zwei parallele Sehnen s und s_1 gezogen, welche bezw. 527,415 und 558,27 m lang sind; man soll den Inhalt des zwischen diesen Sehnen liegenden Kreisstücks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} r = 286{,}479 \text{ m} \\ s = 527{,}415 \text{ m} \\ s_1 = 558{,}27 \text{ m} \end{cases}$

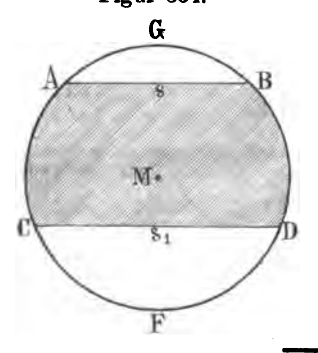
Gesucht: Inhalt des Flächenstücks zwischen den parallelen Sehnen s und s_1

(siehe die Figuren 333 u. 334)

Figur 333.



Figur 334.



Andeutung. In bezug auf die Lage der beiden gegebenen parallelen Sehnen in dem Kreis können zwei Fälle stattfinden, entweder können beide Sehnen auf derselben Seite vom Kreismittelpunkt liegen, wie die Fig. 333 zeigt, oder sie können auf verschiedenen Seiten vom Kreismittelpunkt liegen, wie die Figur 334 zeigt.

Den gesuchten Inhalt des Flächenstücks $CDBA$ in der Figur 333 erhält man, indem man, wie in der Auflösung der Aufgabe 828 gezeigt wurde, jeden der Inhalte der beiden Segmente CDF und ABF aus dem gegebenen Radius und der betreffenden Sehne berechnet und beide für diese Inhalte gefundenen Werte subtrahiert. Den gesuchten Inhalt des Flächenstücks $ABDC$ in der Fig. 334 kann man in derselben Weise berechnen, indem man, wie vorhin, die Inhalte der Segmente ABG und CDF berechnet und die Summe dieser Inhalte von dem Inhalt ($r^2\pi$) des ganzen Kreises subtrahiert.

d) Aufgaben, in welchen Beziehungen zwischen einem Kreis oder Teilen desselben und auf den Kreis sich beziehender geometrischer Grössen gegeben sind oder die Feststellung solcher Beziehungen gefordert werden.

Aufgabe 834. Ein Kreissegment hat einen Inhalt $F = 224,36$ qm, der zu diesem Segment gehörige Centriewinkel ist $\alpha = 102^0\,40'\,10''$; man soll die Sehne und den Bogen berechnen, welche dieses Segment begrenzen.

Gegeben: $\begin{cases} \text{Segment} = 224,36 \text{ qm} \\ \alpha = 102^0\,40'\,10'' \end{cases}$

Gesucht: Sehne s und bog α

Andeutung. Nach der in der Erkl. 491 aufgestellten Gleichung A_1) besteht die Relation:

$$\text{Sgt} = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

löst man diese Gleichung in bezug auf r auf, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots\ldots r = \sqrt{\frac{2 \cdot \text{Sgt}}{\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha}}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für den Inhalt und für den Centriewinkel gegebenen Zahlenwerte, den Radius r berechnen kann.

Ist hiernach r berechnet, so kann man aus r und α die Sehne und den dazugehörigen Bogen berechnen, wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 797 und 801 gesagt wurde.

Aufgabe 835. Der Inhalt eines Kreises ist $F = 1000$ qm; man soll den Inhalt eines Segments desselben berechnen, dessen Sehne $\frac{2}{7}$ der Kreisperipherie ist.

Gegeben: $\begin{cases} F \text{ eines Kreises} = 1000 \text{ qm} \\ \text{eine Beziehung zwischen Sehne und Umfang} \end{cases}$

Gesucht: Inhalt eines Segments

Andeutung. Nach der in Auflösung der Aufgabe 826 aufgestellten Gleichung A) hat man für den Inhalt eines Segments:

$$\text{a)} \ldots \text{Sgt} = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$$

Ferner hat man nach der Erkl. 487 für den Inhalt F eines Kreises:

$$\text{b)} \ldots\ldots F = r^2\pi$$

Setzt man den für r^2 sich hieraus ergebenden Wert:

$$\text{c)} \ldots\ldots r^2 = \frac{F}{\pi}$$

in Gleichung a), so erhält man:

$$\text{Sgt} = \frac{F}{2 \cdot \pi}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$$

oder:

$$\text{A)} \ldots\ldots \text{Sgt} = F \cdot \left(\frac{\alpha^0}{360^0} - \frac{\sin\alpha}{2\pi}\right)$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt des Segments berechnen könnte, wenn der Centriewinkel α bekannt wäre. Diesen Winkel findet man aber wie folgt:

Nach der Auflösung der Aufgabe 800 besteht die Relation:

d) . . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r$

ferner besteht gemäss der Aufgabe und in Rücksicht der Erkl. 460 die Relation:

e) . . . . $s = \frac{2}{7} \cdot 2r\pi$

aus den Gleichungen d) und e) erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2}{2 \cdot 7} \cdot 2r\pi : r$$

oder:

A$_1$) . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{2\pi}{7}$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

---

† **Aufgabe 836.** Welche Winkel müssen zwei Radien eines Kreises einschliessen, damit der kleinere der hierdurch gebildeten Sektoren durch die zu ihm gehörige Sehne halbiert wird?

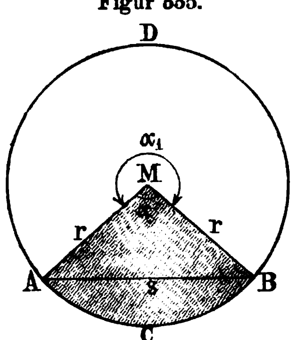
Gegeben: eine Beziehung zwischen einem Sektor und der ihm zugehörigen Sehne

Gesucht: Winkel des Sektors

Andeutung. Ist in der Fig. 335 $MACB$ ein Sektor, welcher durch die Sehne AB halbiert wird, so muss zwischen dem Inhalt dieses Sektors und dem des Mittelpunktsdreiecks MAB die Beziehung bestehen:



Figur 335.



a) . . . Dreieck $MAB = \frac{1}{2}$ Sektor $MACB$

Nach der in Auflösung der Aufgabe 64 aufgestellten Formel 60 hat man für den in r und α ausgedrückten Inhalt des gleichschenkligen Dreiecks MAB:

b) . . . Dreieck $MAB = \frac{r^2}{2} \cdot \sin\alpha$

Ferner hat man nach der Erkl. 486 für den in r und α ausgedrückten Inhalt des Sektors $MACB$:

c) . . . Sektor $MACB = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

Aus den Gleichungen a) bis c) erhält man also für α die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{r^2}{2} \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

oder:

A) . . . . . $\sin\alpha = \pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

und dies ist eine goniometrische Gleichung, in welcher nicht allein der unbekannte Winkel α, sondern auch die unbekannte Funktion Sinus dieses Winkels α vorkommt. In bezug auf das Auflösen solcher transscendenter Gleichungen beachte man die Erkl. 484.

*** Aufgabe 837.** Von einem Kreis, dessen Radius r gegeben ist, soll man mittels einer Sehne ein Segment abschneiden, das gleich dem vierten Teil jenes Kreises ist; wie gross ist der zu diesem Segment gehörige Centriewinkel?

Gegeben: eine Beziehung zwischen dem Inhalt eines Segments und dem eines Kreises.
Gesucht: Centriewinkel α

Andeutung. Gemäss der Aufgabe soll zwischen dem Inhalt eines Segments und dem Inhalt $(r^2\pi)$ des zugehörigen Kreises die Relation bestehen:

$$\text{a)} \ldots \text{Sgt} = \frac{1}{4} \cdot r^2\pi$$

Da ferner nach der Erkl. 491 die Relation besteht:

$$\text{b)} \ldots \text{Sgt} = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

so ergibt sich aus den Gleichungen a) und b) für den gesuchten Winkel α die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right) = \frac{1}{4} r^2\pi$$

oder:

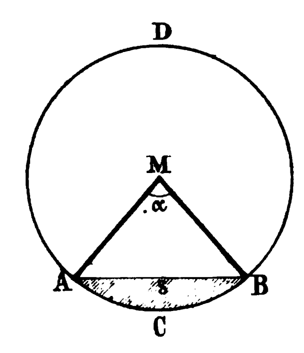
$$\text{A)} \ldots \pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha = \frac{\pi}{2}$$

in welcher Gleichung nicht allein der unbekannte Winkel α, sondern auch die unbekannte Funktion Sinus dieses Winkels α vorkommt. In bezug auf das Auflösen solcher transscendenter Gleichungen siehe man die Erkl. 484.

---

† Aufgabe 838. In einem Kreis, dessen Halbmesser $r = 25{,}25$ m lang ist, ist eine Sehne so gezogen, dass sich das dadurch abgeschnittene kleinere Segment zum zugehörigen Sektor wie 2 : 5 verhält. Wie lang ist jene Sehne.

Figur 336.



Gegeben: $r = 25{,}25$ m; eine Beziehung zwischen dem Inhalt eines Segments und dem des zugehörigen Sektors
Gesucht: Sehne

Andeutung. In Figur 336 sei s die Sehne, welche den gegebenen Kreis um M in die beiden Segmente ABC und ABD so zerlegt, dass zwischen dem Inhalt des kleinern Segments ABC und dem Inhalt des zu diesem Segment gehörigen Sektors $MACB$ die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots \text{Sgt } ABC : \text{Sekt } MACB = 2 : 5$$

Da nun nach der Erkl. 491 die Relation besteht:

$$\text{b)} \ldots \text{Sgt} = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

und da ferner nach der Erkl. 486 die Relation:

$$\text{c)} \ldots \text{Sekt} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$$

besteht, so ergibt sich aus den Gleichungen a) bis c) für den zu jener Sehne s gehörigen Centriewinkel α die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\frac{r^2}{2}\left(\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}-\sin\alpha\right):r^2\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}=2:5$$

oder, wenn man diese Gleichung noch reduziert:

$$\left(\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}-\sin\alpha\right):\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}=4:5$$

$$\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}-\sin\alpha=\frac{4}{5}\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0}$$

$$\sin\alpha=\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}-\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}$$

mithin:

$$\sin\alpha=\frac{3}{5}\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}$$

oder:

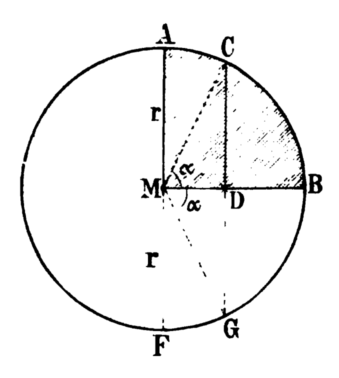
A) . . $\sin\alpha=\pi\cdot\frac{\alpha^0}{300^0}$

In welcher Gleichung nicht allein der unbekannte Winkel α, sondern auch die unbekannte Funktion Sinus dieses Winkels α vorkommt. Hat man nach dieser Gleichung, siehe Erkl. 484, den Winkel α näherungsweise berechnet, so kann man aus demselben und dem gegebenen Radius r die gesuchte Sehne s berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 797 gezeigt wurde.

---

† **Aufgabe 839.** Ein Viertelskreis sei durch eine zu einem der Begrenzungshalbmesser Senkrechte halbiert. Wie gross ist der dieser Senkrechten entsprechende Centriewinkel?

Figur 337.



Gegeben: eine Beziehung zwischen einem Segment und einem Halbkreis

Gesucht: Centriewinkel α

Andeutung. Stellt in der Figur 337 AMB einen Viertelskreis dar, welcher durch die zum Begrenzungsradius MB Senkrechte CD halbiert wird, und man verbindet C mit M, so ist der Centriewinkel α der gesuchte. Verlängert man AM bis F und CD bis G, so muss zwischen dem Inhalt $\frac{r^2\pi}{2}$ des Halbkreises AFB und dem Inhalt des Segments CGB gemäss der Aufgabe die Beziehung bestehen:

a) . . . Segment $CGB=\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2\pi}{2}$

Da nun nach der Erkl. 491 und in Rücksicht, dass der Centriewinkel CMG des Segments CGB für diesen Fall $=2\alpha$ ist, die Relation besteht:

b) . . . Sgt $CGB=\frac{r^2}{2}\cdot\left(\pi\cdot\frac{2\alpha^0}{180^0}-\sin 2\alpha\right)$

so ergibt sich aus den Gleichungen a) und b) für α die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{r^2}{2}\left(\pi\cdot\frac{2\alpha^0}{180^0}-\sin 2\alpha\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{r^2\pi}{2}$$

oder:

A) . . . $\pi\cdot\frac{\alpha^0}{90^0}-\sin 2\alpha=\frac{\pi}{2}$

in welcher Gleichung nicht allein der unbekannte Winkel α, sondern auch die unbekannte Funktion Sinus des Winkels 2α vorkommt. In bezug auf das Auflösen solcher transscendenter Gleichungen siehe man die Erkl. 484.

Aufgabe 840. Auf einen Durchmesser eines Kreises, dessen Radius r ist, ist eine Senkrechte errichtet, welche diesen Durchmesser stetig teilt; in welchem Verhältnis stehen die Inhalte der Segmente, in welche der Kreis durch jene Senkrechte zerlegt wird?

Gegeben: eine Beziehung zwischen zwei Stücken eines Durchmessers

Gesucht: Verhältnis der Inhalte zweier Segmente

Figur 338.

Andeutung. Ist, siehe Figur 338, AB ein Durchmesser des gegebenen Kreises und ist DF eine zu AB Senkrechte, welche den Durchmesser AB stetig teilt, so besteht nach der Erkl. 495 zwischen dem Durchmesser AB $(= 2r)$, dem grössern Abschnitt AC $(= r + a)$ und dem kleinern Abschnitt CB $(= r - a)$ die Proportion:

a) . . . $2r : (r + a) = (r + a) : (r - a)$

und aus dieser Proportion erhält man nach der Erkl. 496 zunächst für den Abstand a der zur Sehne AB senkrechten Sehne DF vom Kreismittelpunkt M:

b) . . . $a = r \cdot (-2 + \sqrt{5})$

Verbindet man nunmehr M mit D und F, so ist der Winkel DMF der kleinere der Centriewinkel, welche zu der Sehne DF gehören. Aus dem rechtwinkligen Dreieck DCM ergibt sich zur Berechnung dieses Winkels die Relation:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{MC}}{\overline{MD}}$$

oder:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{r}$$

oder in Rücksicht der Gleichung b):

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r(-2 + \sqrt{5})}{r}$$

mithin:

A) . . . . $\cos\frac{\alpha}{2} = -2 + \sqrt{5}$

nach welcher Gleichung man mittels einer trig. oder einer log.-trig. Tafel den Winkel $\frac{\alpha}{2}$ also auch den Centriewinkel α berechnen kann.

Nach der in Auflösung der Aufgabe 826 aufgestellten Gleichung A) hat man für den Inhalt des Segments DFB:

c) . . . Sgt $DFB = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$

und für den Inhalt des Segments DFA:

Erkl. 495. Man sagt: eine Strecke ist **stetig** oder **nach dem mittlern und äussern Verhältnis** oder **nach dem goldenen Schnitt** geteilt, wenn das grössere Stück derselben die mittlere geometrische Proportionale zwischen der ganzen Strecke und dem andern, dem kleinern Stück derselben ist.

Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.

Erkl. 496. Ist in der Fig. 338 der Punkt C ein solcher Punkt, durch welchen die Strecke AB stetig geteilt wird, so besteht nach der Erkl. 495 die Proportion:

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

oder:

$$2r : (r + a) = (r + a) : (r - a)$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf a auf, so erhält man der Reihe nach:

$$2r \cdot (r - a) = (r + a) \cdot (r + a)$$
$$2r^2 - 2r \cdot a = (r + a)^2$$
$$2r^2 - 2r \cdot a = r^2 + 2r \cdot a + a^2$$
$$2r^2 - r^2 = 2r \cdot a + 2r \cdot a + a^2$$
$$a^2 + 4r \cdot a = r^2$$
$$a^2 + 4r \cdot a + \left(\frac{4}{2}r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{4}{2}r\right)^2$$
$$a^2 + 4r \cdot a + (2r)^2 = r^2 + (2r)^2$$
$$(a + 2r)^2 = r^2 + 4r^2$$
$$a + 2r = \pm\sqrt{5r^2}$$
$$a = -2r \pm r\sqrt{5}$$
$$a = r \cdot (-2 + \sqrt{5})$$

$$\text{Sgt } DFA = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha_1{}^0}{360^0} - \sin\alpha_1\right)$$

oder, in Rücksicht, dass:

$$\alpha_1 = 360^0 - \alpha$$

dass also hiernach und nach der Erkl. 432:

$$\sin\alpha_1 = \sin(360^0 - \alpha) \text{ oder } = -\sin\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$\text{d)} \;.\;.\; \text{Sgt } DFA = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{360^0 - \alpha^0}{360^0} + \sin\alpha\right)$$

Nach den Gleichungen c) und d) erhält man für das gesuchte Verhältnis der Inhalte beider Segmente:

$$\text{Sgt } DFB : \text{Sgt } DFA = \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) : \frac{r^2}{2}\left(2\pi \cdot \frac{360^0 - \alpha^0}{360^0} + \sin\alpha\right)$$

oder:

$$\begin{aligned}\text{Sgt } DFB : \text{Sgt } DFA &= \left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) : \left(2\pi \cdot \frac{360^0 - \alpha^0}{360^0} + \sin\alpha\right)\\ &= \left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) : \left[2\pi \cdot \left(\frac{360^0}{360^0} - \frac{\alpha^0}{360^0}\right) + \sin\alpha\right]\\ &= \left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) : \left(2\pi - 2\pi\frac{\alpha^0}{360^0} + \sin\alpha\right)\\ &= \left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right) : \left[2\pi - \left(2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)\right]\end{aligned}$$

oder, wenn man Zähler und Nenner des Quotienten rechts durch den Zähler dividiert:

$$\text{Sgt } DFB : \text{Sgt } DFA = 1 : \left[\frac{2\pi}{2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha} - 1\right]$$

oder:

$$\text{A}_1) \;.\;.\;.\; \text{Sgt } DFB : \text{Sgt } DFA = 1 : \left[\frac{1}{\frac{\alpha^0}{360^0} - \frac{\sin\alpha}{2\pi}} - 1\right]$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für α nach Gleichung A) berechneten Werts, das gesuchte Verhältnis berechnen kann.

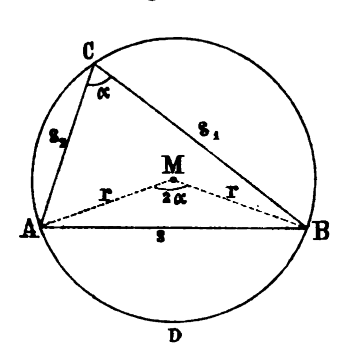
Aufgabe 841. Ein Peripheriewinkel in einem Kreis mit dem Radius $r = 10$ dm ist $\alpha = 18^0$, die Summe der beiden Sehnen s_1 und s_2, welche diesen Winkel einschliessen, ist $= 3r$; man soll die Sehne s berechnen, über welcher jener Peripheriewinkel steht, und soll den Inhalt des Kreisstücks bestimmen, welcher von jenen Sehnen s_1 und s_2 und dem zwischen denselben liegenden Kreisbogen begrenzt wird.

Gegeben: $\left\{\begin{aligned}\alpha &= 18^0\\ s_1 + s_2 &= 3r\\ r &= 10 \text{ dm}\end{aligned}\right.$ (siehe Figur 339.)

Gesucht: s und der Inhalt eines Flächenstücks

Andeutung. Sind, siehe Figur 339, s_1 und s_2 die Sehnen des gegebenen Kreises, deren Summe gleich der gegebenen ist, und welche den gegebenen Peripheriewinkel α einschliessen, und verbindet dann die Endpunkte A und B dieser Sehnen unter sich und mit dem Mittelpunkt M, so erhält man das Mittelpunktsdreieck MAB, in welchem nach der Erkl. 450 der Winkel $AMB = 2\alpha$ ist. Da man somit den Centriewinkel 2α und den

Figur 339.



Radius r kennt, so kann man zunächst die Sehne s berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 797 gezeigt ist.

Ist hiernach die Sehne s berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seite s, die Summe der beiden andern Seiten s_1 und s_2 und den der erstern Seite gegenüberliegenden Winkel α; man kann somit, wie in der Auflösung der Aufgabe 479 gezeigt wurde, den Inhalt dieses Dreiecks berechnen. Ferner kann man den Inhalt des Segments ABD aus dem Centriewinkel 2α und dem gegebenen Radius berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 826 gezeigt wurde. Den gesuchten Inhalt des Flächenstücks $CADB$ findet man schliesslich nach der Relation:

$$CADB = \text{Dreieck } ABC + \text{Sgt } ABD$$

Anmerkung 51. Weitere Aufgaben, in welchen Berechnungen von Teilen eines Kreises, sowie Berechnungen solcher geometrischer Grössen gefordert werden, welche sich auf den Kreis beziehen, sind noch in den folgenden Abschnitten enthalten.

13). Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit den demselben um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen.

Anmerkung 52. Unter dem einem Dreieck umbeschriebenen Kreis versteht man den Kreis, dessen Peripherie durch die drei Eckpunkte des Dreiecks geht; der Radius dieses Kreises ist in nachstehendem mit „r“ bezeichnet.

Unter dem einem Dreieck einbeschriebenen Kreis versteht man den Kreis, dessen Peripherie die drei Seiten des Dreiecks berührt; der Radius dieses Kreises ist in nachstehendem mit „ϱ“ bezeichnet.

Unter den einem Dreieck anbeschriebenen Kreisen versteht man die drei Kreise, von welchen jeder eine Seite eines Dreiecks und die Verlängerungen der beiden andern Dreiecksseiten berührt; je nachdem ein solcher Kreis die Seite a oder die Seite b oder die Seite c des Dreiecks berührt, ist der Radius desselben in nachstehendem bezw. mit ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bezeichnet.

Anmerkung 53. Die Beziehungen, welche zwischen den Radien der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen und anderen Bestimmungsstücken des Dreiecks, als: Seiten, Seitenabschnitte, Inhalt, Höhen, Höhenabschnitte, Schwerlinien, winkelhalbierenden Transversalen etc. bestehen, sind von sehr grosser Wichtigkeit; indem mittels dieser Beziehungen viele trig. Aufgaben, besonders solche Aufgaben, welche mit Hülfe von solchen geometrischen Konstruktionen gelöst werden, bei welchen die sog. geometrischen Oerter in Anwendung kommen [siehe den Abschnitt 6)], auf elegante und leichte Weise gelöst werden können; indem ferner mittels jener Beziehungen trigonometrische Sätze abgeleitet werden können, ohne deren Kenntnis viele trig. Aufgaben überhaupt nicht oder doch nur sehr schwer lösbar sind und indem schliesslich mittels jener Beziehungen auch viele rein planimetrische Sätze, auf einfache Weise hergeleitet werden können.

Anmerkung 54. Die Anzahl der Beziehungen, welche zwischen den Radien der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen und den in voriger Anmerkung angeführten anderen Bestimmungsstücken des Dreiecks aufgestellt werden können, desgleichen die Anzahl der trig. Sätze und planimetr. Sätze, welche man aus jenen Beziehungen herleiten kann, ist eine überaus grosse, indem zwischen je einem dieser Radien und je zwei, drei, vier etc. jener Bestimmungsstücke, wozu auch die anderen jener Radien gehören, Beziehungen aufgestellt und aus diesen vielen Beziehungen durch alle möglichen Kombinationen derselben eine grosse Anzahl trig. und planimetrischer Sätze abgeleitet werden können.

In den nachfolgenden Abschnitten a) bis c) sind die wichtigsten jener Beziehungen vorgeführt, dabei ist gezeigt, wie man diese Beziehungen benutzt, um mittels derselben trig. und planimetrische Sätze herzuleiten und entsprechende Aufgaben zu lösen hat.

a) Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit dem demselben umbeschriebenen Kreis.

Aufgabe 842. Man soll nachweisen, dass zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks, bezw. der halben Summe $\frac{a+b+c}{2}=s$, den drei Winkeln α, β und γ und dem Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises nachfolgende Relationen bestehen:

$$1)\ \ldots\ r=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

$$2)\ \ldots\ r=\frac{b}{2\sin\beta}$$

$$3)\ \ldots\ r=\frac{c}{2\sin\gamma}$$

$$4)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$5)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

$$6)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{b+c}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$7)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{a-b}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$8)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{a-c}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

$$9)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{b-c}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$10)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$11)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{s-a}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$12)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{s-b}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$13)\ \ldots\ r=\frac{1}{4}\cdot\frac{s-c}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$14)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}}$$

$$15)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)}}$$

$$16)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{b^2-c^2}{\sin\alpha\cdot\sin(\beta-\gamma)}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Ist, siehe Figur 340, der Kreis um M der dem Dreieck ABC umbeschriebene Kreis und man zieht von einem der Endpunkte der Seite a einen Durchmesser, z. B. den Durchmesser BD und verbindet C mit D, so erhält man nach der Erkl. 452 das bei C rechtwinklige Dreieck, in welchem nach der Erkl. 451 der Winkel BDC gleich dem Winkel BAC also $=\alpha$ ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha=\frac{\overline{BC}}{\overline{BD}}$$

oder, da:

$$\overline{BC}=a$$

und $$\overline{BD}=2r$$

ist:

$$\sin\alpha=\frac{a}{2r}$$

und hieraus erhält man:

$$1)\ \ldots\ r=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

In derselben Weise kann man darthun, wenn man von einem der Endpunkte der Seite b, bezw. von einem der Endpunkte der Seite c einen Durchmesser zieht, dass:

$$2)\ \ldots\ r=\frac{b}{2\sin\beta}$$

und

$$3)\ \ldots\ r=\frac{c}{2\sin\gamma}$$

ist. Man kann den Beweis auch führen, wie in der Erkl. 497 angegeben ist. (Siehe auch die Erkl. 498 bis 502.)

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Aus der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Mollweide schen Formel 89:

$$(a+b):c=\cos\frac{\alpha-\beta}{2}:\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

erhält man:

$$c=(a+b)\cdot\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

$$17) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{1 + \cos\gamma \cdot \cos(\alpha - \beta)}}$$

$$18) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 + c^2}{1 + \cos\beta \cdot \cos(\alpha - \gamma)}}$$

$$19) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{1 + \cos\alpha \cdot \cos(\beta - \gamma)}}$$

$$20) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{\sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \cos\gamma}}$$

$$21) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{\sin\alpha \cdot \sin\gamma \cdot \cos\beta}}$$

$$22) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha}}$$

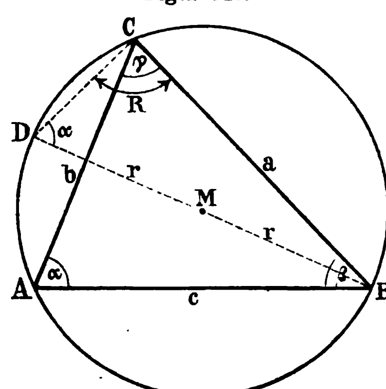
$$23) \ldots r = \sqrt{\frac{ab}{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}}$$

$$24) \ldots r = \sqrt{\frac{ac}{2[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)]}}$$

$$25) \ldots r = \sqrt{\frac{bc}{2[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)]}}$$

$$26) \ldots r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

Figur 340.



Erkl. 497. Ist, siehe Figur 341, der Kreis um M der dem Dreieck ABC umbeschriebene Kreis, und man verbindet M mit den drei Ecken A, B und C, so erhält man die drei gleichschenkligen Dreiecke MAB, MBC und MCA. Nach der Erkl. 450 ist der Scheitelwinkel des Dreiecks $MAB = 2\gamma$
des Dreiecks $MBC = 2\alpha$
des Dreiecks $MCA = 2\beta$

Da diese Winkel zugleich Centriewinkel des Kreises um M sind, so bestehen zwischen dendenselben, dem Radius r und den Dreiecksseiten oder den Sehnen a, b und c des Kreises nach der in Andeutung zur Aufgabe 798 aufgestellten Gleichung A), bezw. die Relationen:

ferner ist nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man diese Werte für c und $\sin\gamma$ in vorstehende Relation:

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

so erhält man:

$$r = \frac{(a+b)\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Berücksichtigt man noch, dass $\alpha + \beta$ und γ als Winkel eines Dreiecks Supplementwinkel sind, dass also $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind und dass somit nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$4) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

In ganz derselben Weise kann man mittels der Formeln 89a und 89b und mittels der vorstehenden Relationen 2) u. 1) nachweisen, dass:

$$5) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+c}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

und

$$6) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{b+c}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

ist.

C) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Aus der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Mollweide'schen Formel 90:

$$(a-b):c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

erhält man:

$$c = (a-b)\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

ferner ist nach der Erkl. 52:

$$\sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man diese Werte für c und $\sin\gamma$ in vorstehende Relation 3):

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

so erhält man:

$$r = \frac{(a-b)\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Berücksichtigt man, wie vorhin, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, dass also:

$$r = \frac{a}{2\sin\frac{2\alpha}{2}}$$

$$r = \frac{b}{2\sin\frac{2\beta}{2}}$$

und

$$r = \frac{c}{2\sin\frac{2\gamma}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$1) \ldots r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

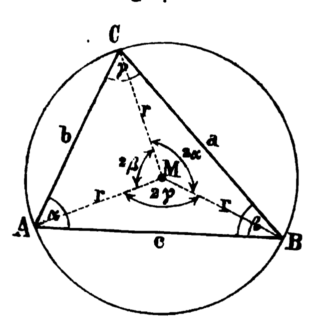
$$2) \ldots r = \frac{b}{2\sin\beta}$$

und

$$3) \ldots r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

womit die Richtigkeit der Relationen 1) bis 3) in der Aufgabe 842 ebenfalls dargethan ist.

Figur 341.



Erkl. 498. Aus den in der Aufgabe 842 angeführten Relationen 1) bis 3) ergibt sich die Relation:

$$2r = \frac{a}{\sin\alpha} \text{ oder } = \frac{b}{\sin\beta} \text{ oder } = \frac{c}{\sin\gamma}$$

d. h.

„Die Masszahl für den Durchmesser eines Kreises, welcher einem Dreieck umbeschrieben ist, ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man die Masszahl einer Dreiecksseite durch den Sinus des dieser Seite gegenüberliegenden Winkels dividiert."

Erkl. 499. Aus den in der Aufgabe 842 angeführten Relationen 1) bis 3) ergibt sich die Relation:

$$\frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{b}{2\sin\beta} = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

und hieraus erhält man:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

oder nach der Erkl. 88:

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$

ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$7) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{a-b}{\sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

In ganz derselben Weise kann man mittels der Formeln 90a und 90b und mittels der vorstehenden Relationen 2) und 1) nachweisen, dass:

$$8) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{a-c}{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}$$

und

$$9) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{b-c}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

ist.

D) Beweis der Relation 10):

Wie in der Auflösung der Aufgabe 561 gezeigt wurde, bestehen die Relationen:

$$a = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$b = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$c = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

Setzt man diese Werte für a, b und c bezw. in die vorstehenden Relationen 1) bis 3) ein, bringt in bezug auf die in diesen Relationen enthaltenen Funktionen $\sin\alpha$, $\sin\beta$ und $\sin\gamma$ die in der Erkl. 52 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, und setzt:

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

so erhält man der Reihe nach:

$$r = \frac{s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$r = \frac{s\cdot\sin\frac{\beta}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$r = \frac{s\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cdot 2\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

und aus jeder dieser Gleichungen erhält man nach gehöriger Reduktion die zu beweisende Relation:

$$10) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

317. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 316. — Seite 577—592. Mit 4 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 316. — Seite 577—592. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

☛ Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

d. h.

„**Die Seiten eines Dreiecks verhalten sich wie die Sinus der diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.**“

Dieser Satz wurde bereits in Antwort der Frage 19, Abschnitt 5, unter dem Namen **Sinussatz** oder **Sinusregel** aufgestellt. Man kann diese **Sinusregel** auch somit herleiten, wie soeben gezeigt wurde.

Erkl. 500. Bezeichnet man die Hypotenuse eines **rechtwinkligen Dreiecks** mit c, so hat man nach der Erkl. 498 und in Rücksicht, dass der der Hypotenuse c gegenüberliegende Winkel $= 90^0$ ist, für den Radius r des diesem **rechtwinkligen Dreieck umbeschriebenen** Kreises:

$$r = \frac{c}{2 \cdot \sin 90^0}$$

oder, da nach der Erkl. 99:

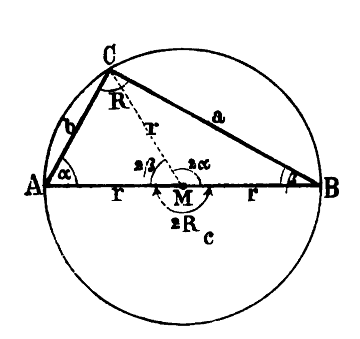
$$\sin 90^0 = 1$$

ist:

$$1) \ldots r = \frac{c}{2}$$

d. h. der Radius des einem **rechtwinkligen** Dreieck **umbeschriebenen** Kreises ist gleich der halben Hypotenuse. Siehe auch Figur 342 und die Erkl. 452.

Figur 342.



Erkl. 501. Bezeichnet man einen der Schenkel eines **gleichschenkligen Dreiecks** mit a, die Basis mit b, den Scheitelwinkel mit β, einen der Basiswinkel mit α und den Radius des diesem **gleichschenkligen Dreieck umbeschriebenen Kreises** mit r, so hat man nach der Erkl. 498 die Relationen:

$$1) \ldots r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

und

$$2) \ldots r = \frac{b}{2 \sin \beta}$$

(Siehe auch die Figur 343.)

E) Beweis der Relationen 11) bis 13):

Aus der vorstehenden Relation 10) ergibt sich:

$$s = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$$

mithin ist:

$$s - a = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - a$$

Setzt man auf der rechten Seite dieser Gleichung für a den aus der Relation 1) sich ergebenden Wert:

$$a = 2r \cdot \sin\alpha$$

so erhält man:

$$s - a = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - 2r \cdot \sin\alpha$$

oder:

$$s - a = r\left(4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - 2 \cdot 2 \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2}\right)$$

(siehe Erkl. 52)

und hieraus erhält man:

$$r = \frac{s - a}{4 \cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)}$$

Setzt man jetzt nach der Erkl. 19 und in Rücksicht, dass:

$\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta + \gamma}{2}$ Komplementwinkel sind

für $\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\beta + \gamma}{2}$ oder $= \cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$

und bringt in bezug auf diese substituierte Funktion $\cos\left(\frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2}\right)$ die in der Erkl. 394 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so erhält man:

$$r = \frac{s - a}{4 \cos\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - \left(\cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}\right)\right]}$$

und hieraus ergibt sich durch Reduktion die zu beweisende Relation:

$$11) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s - a}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen:

$$12) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s - b}{\sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$$

und

$$13) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s - c}{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

darthun.

F) Beweis der Relationen 14) bis 16):

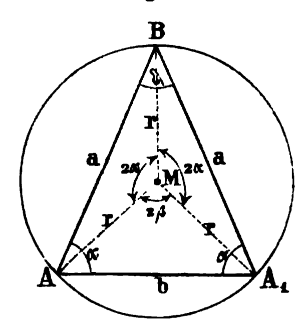
Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oder auch:

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha} = \frac{b^2}{\sin^2\beta}$$

Figur 343.



Erkl. 502. Bezeichnet man die Seite eines gleichseitigen Dreiecks mit a und den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises mit r, so hat man nach der Erkl. 498 und in Rücksicht, dass jeder Winkel im gleichschenkligen Dreieck $= 60^0$ ist, die Relation:

$$r = \frac{a}{2 \sin 60^0}$$

oder, da nach der Erkl. 338:

$$\sin 60^0 = \frac{1}{2} \sqrt{3}$$

ist:

$$r = \frac{a}{2 \cdot \frac{1}{2} \sqrt{3}}$$

oder:

$$r = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

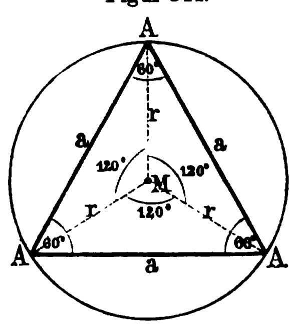
$$r = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2}$$

mithin:

$$1) \ldots r = \frac{a}{3} \cdot \sqrt{3}$$

(Siehe auch die Figur 344.)

Figur 344.



Erkl. 503. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\sin^2\alpha - \sin^2\beta = \sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

(Siehe Formel 202 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a^2 - b^2}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta} = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}$$

und hieraus ergibt sich:

$$a = \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

Setzt man diesen Wert für a in vorstehende Relation 1):

$$r = \frac{a}{2 \sin\alpha}$$

so erhält man:

$$r = \frac{\sin\alpha}{2 \sin\alpha} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\sin^2\alpha - \sin^2\beta}}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 503:

$$r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta)}}$$

Berücksichtigt man noch, dass $\alpha + \beta$ und γ Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 66:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\gamma$$

gesetzt werden kann, so erhält man hieraus die zu beweisende Relation:

$$14) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{\sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen:

$$15) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{a^2 - c^2}{\sin\beta \cdot \sin(\alpha - \gamma)}}$$

und

$$16) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{b^2 - c^2}{\sin\alpha \cdot \sin(\beta - \gamma)}}$$

darthun.

G) Beweis der Relationen 17) bis 19):

Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta}$$

oder auch:

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha} = \frac{a^2}{\sin^2\beta}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 224 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a^2 + b^2}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta} = \frac{a^2}{\sin^2\alpha}$$

und hieraus ergibt sich:

$$a = \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{\sin^2\alpha + \sin^2\beta}}$$

Setzt man diesen Wert für a in vorstehende Relation 1):

$$r = \frac{a}{2 \sin\alpha}$$

so erhält man:

Erkl. 504. Eine goniometrische Formel heisst:

1) $\sin^2(\alpha+\beta)+\sin^2(\alpha-\beta)=1-\cos 2\alpha\cos 2\beta$

(Siehe Formel 148 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha+\beta=\alpha$$

und $\alpha-\beta=\beta$

also $\alpha=\frac{\alpha+\beta}{2}$

und $\beta=\frac{\alpha-\beta}{2}$

so geht derselbe über in:

2) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)$

Erkl. 505. Eine goniometrische Formel heisst:

$\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma=2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$

(Siehe Formel 287 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$r=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta}}$$

oder in Rücksicht der in der Erkl. 504 aufgestellten Gleichung 2):

$$r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1-\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}}$$

Berücksichtigt man noch, dass:

$\alpha+\beta$ und γ Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 94 für:

$$\cos(\alpha+\beta)=-\cos\gamma$$

gesetzt werden kann, so erhält man hiernach die Relation:

$$17)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)}}$$

In ganz analoger Weise kann man darthun, dass:

$$18)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+c^2}{1+\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\gamma)}}$$

und dass:

$$19)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{b^2+c^2}{1+\cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)}}$$

ist.

H) Beweis der Relationen 20) bis 22):

Nach der Sinusregel ist:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$$

oder:

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{b^2}{\sin^2\beta}=\frac{c^2}{\sin^2\gamma}$$

oder:

$$\frac{a^2}{\sin^2\alpha}=\frac{b^2}{\sin^2\beta}=\frac{-c^2}{-\sin^2\gamma}$$

Bringt man in bezug auf diese laufende Proportion den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma}=\frac{a^2}{\sin^2\alpha}$$

und hieraus ergibt sich:

$$a=\sin\alpha\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma}}$$

Setzt man diesen Wert für a in vorstehende Relation 1):

$$r=\frac{a}{2\sin\alpha}$$

so erhält man:

$$r=\frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha}\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\gamma}}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man reduziert und die in der Erkl. 505 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, die Relation:

$$20)\ \ldots\ r=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen:

$$21) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{\sin\alpha \cos\beta \sin\gamma}}$$

und

$$22) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha}}$$

darthun.

I) Beweis der Relationen 23) bis 25):

Multipliziert man die vorstehenden Relationen 1) und 2):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

und

$$r = \frac{b}{2\sin\beta}$$

miteinander, so erhält man:

$$r^2 = \frac{a\,b}{4\sin\alpha\sin\beta}$$

mithin:

$$a) \ldots r = \sqrt{\frac{a\,b}{4 \cdot \sin\alpha \sin\beta}}$$

Bringt man nunmehr die in der Erkl. 506 angeführte goniometrische Formel in Anwendung, so geht letztere Gleichung über in:

$$r = \sqrt{\frac{a\,b}{4 \cdot \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$23) \ldots r = \sqrt{\frac{a\,b}{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen:

$$24) \ldots r = \sqrt{\frac{a\,c}{2[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma)]}}$$

und

$$25) \ldots r = \sqrt{\frac{b\,c}{2[\cos(\beta - \gamma) - \cos(\beta + \gamma)]}}$$

darthun.

Erkl. 506. Eine goniometrische Formel heisst:

$$2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

(Siehe Formel 194 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

K) Beweis der Relation 26):

Setzt man in vorstehender Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

nach der in der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 182 für $\sin\alpha$:

$$\sin\alpha = \frac{2}{b\,c} \cdot \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

in welcher Formel:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist, so erhält man:

$$r = \frac{a}{2 \cdot \frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$26) \ldots r = \frac{a\,b\,c}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

(siehe die Erkl. 507)

Erkl. 507. Die in nebenstehender Auflösung hergeleitete Relation 26) enthält keine goniometrische Funktionen, sie kann somit auch mittels rein planimetrischer Sätze hergeleitet werden.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Aufgabe 843. Zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen bezw. 30,55 und 28,43 m und der der ersteren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel α beträgt $74^0\,22'\,8{,}4''$; man soll den Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises, sowie die übrigen nicht gegebenen Stücke berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 30{,}55 \text{ m} \\ b = 28{,}43 \text{ m} \\ \alpha = 74^0\,22'\,8{,}4'' \end{cases}$

Gesucht: Radius r des dem gegebenen Dreieck umbeschriebenen Kreises

Andeutung. Nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) besteht zwischen dem gesuchten Radius r, der Seite a und dem demselben gegenüberliegenden Winkel die Relation:

$$\text{a)} \;\ldots\; r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

nach welcher man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte, den Radius r berechnen kann. Die übrigen gesuchten Stücke kann man direkt aus den gegebenen Stücken berechnen, wie in der Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde. Man kann auch den für r gefundenen Wert benutzen und die in Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 2) und 3) in Anwendung bringen.

Aufgabe 844. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist $a = 24{,}008$ m, der Scheitelwinkel desselben ist $\beta = 102^0\,36'\,40{,}8''$; man soll den Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 24{,}008 \text{ m} \\ \beta = 102^0\,36'\,40{,}8'' \end{cases}$

Gesucht: Radius r des dem gegeb. gleichschenkligen Dreieck umbeschriebenen Kreises

Andeutung. Man benutze die in der Erkl. 501 aufgestellte Gleichung 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

und beachte, dass zwischen dem Basiswinkel α und dem Scheitelwinkel β die Relation:

$$2\alpha + \beta = 180^0$$

besteht, dass also:

$$\alpha = \frac{180^0 - \beta}{2}$$

ist.

Aufgabe 845. Von einem Dreieck kennt man eine Seite $a = 234{,}008$ m und die beiden anliegenden Winkel $\beta = 82^0\,16'\,14{,}08''$ und $\gamma = 64^0\,26'\,40{,}4''$; man soll den Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 234{,}008 \text{ m} \\ \beta = 82^0\,16'\,14{,}08'' \\ \gamma = 64^0\,26'\,40'4'' \end{cases}$

Gesucht: Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises

Andeutung. Man benutze die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

und beachte, dass:

$$\alpha = 180^0 - (\beta + \gamma)$$

ist.

Aufgabe 846. Der Umfang eines Dreiecks beträgt 1200 m, zwei Winkel desselben sind $\alpha = 118^0 44' 26''$ und $\beta = 38^0 58' 38''$. Wie gross ist der Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a+b+c = 1200\text{ m} \\ \alpha = 118^0 44' 26'' \\ \beta = 38^0 58' 38'' \end{cases}$

Gesucht: Radius r des dem gegeb. Dreieck umbeschriebenen Kreises

Andeutung. Man benutze die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 10):

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

und beachte, dass in derselben:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

und dass:

$$\gamma = 180^0 - (\alpha + \beta)$$

ist.

Aufgabe 847. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. 7,48 m, 9,81 m und 8,45 m lang, wie gross ist der Radius des diesem Dreieck **umbeschriebenen** Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a = 7{,}48\text{ m} \\ b = 9{,}81\text{ m} \\ c = 8{,}45\text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises

Andeutung. Man benutze die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 26):

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

und beachte, dass in derselben:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist.

Aufgabe 848. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\alpha = 108^0 41' 8''$$
$$\beta = 35^0 18' 0.9''$$

und

$$r = 274{,}2873\text{ dm}$$

man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Die Seiten des Dreiecks kann man mittels der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) bis 3) direkt aus den gegebenen Stücken berechnen. Sind diese Stücke berechnet, so verfahre man im weiteren wie in der Auflösung der Aufgabe 117 (oder in der Auflösung der Aufgabe 118) gezeigt wurde.

Aufgabe 849. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 16\text{ m}$$
$$a = 24\text{ m}$$

und

$$b = 20\text{ m}$$

Andeutung. Man berechne zunächst die Winkel α und β mittels Anwendung der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) und 2). Dann verfahre man weiter, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 oder in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Aufgabe 850. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a : b = 68 : 75$$
$$c = 77 \text{ m}$$

und

$$r = 42{,}5 \text{ m}$$

Andeutung. Man berechne zunächst den Winkel γ mittels Anwendung der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3):

$$r = \frac{c}{2 \sin \gamma}$$

Ist γ hiernach berechnet, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 336 gesagt wurde.

Aufgabe 851. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 75{,}5208 \text{ m}$$
$$a = 145 \text{ m}$$

und

$$\beta - \gamma = 87^0\, 12'\, 20{,}8''$$

Andeutung. Nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$\text{a)} \ldots \; r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

kann man in Rücksicht der für a und r gegebenen Zahlenwerte zunächst den Winkel α berechnen. Ist α hiernach berechnet, so kann man im weiteren zur Berechnung der Seiten b und c die in Antwort der Frage 21 aufgestellten Mollweide schen Formeln 89b und 90b:

$$(b + c) : a = \cos \frac{\beta - \gamma}{2} : \cos \frac{\beta + \gamma}{2}$$

und

$$(b - c) : a = \sin \frac{\beta - \gamma}{2} : \sin \frac{\beta + \gamma}{2}$$

benutzen, indem man berücksichtigt, dass:

$$\frac{\beta + \gamma}{2} + \frac{\alpha}{2} = 90^0$$

ist, dass also nach der Erkl. 19:

$$\cos \frac{\beta + \gamma}{2} = \sin \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sin \frac{\beta + \gamma}{2} = \cos \frac{\alpha}{2}$$

ist, und dass man somit aus jenen Gleichungen:

$$\text{b)} \ldots \; b + c = a \cdot \frac{\cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}$$

und

$$\text{c)} \ldots \; b - c = a \cdot \frac{\sin \frac{\beta - \gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2}}$$

erhält, wonach sich leicht b und c berechnen lassen.

Aufgabe 852. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$b + c = 1920{,}035 \text{ m}$$
$$r = 630{,}05 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 55^0\,20'\,16{,}5''$$

Andeutung. Man benutze die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 6):

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{b+c}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

löse dieselbe nach $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ auf und berechne aus der erhaltenen Gleichung und in Rücksicht der für r, $b + c$ und α gegebenen Zahlenwerte zunächst $\frac{\beta-\gamma}{2}$; da ferner $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ ist, so kann man hiernach leicht die Winkel des Dreiecks berechnen. Dann kann man im weiteren verfahren wie in der Auflösung der Aufgabe 477 gezeigt wurde.

Aufgabe 853. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$b + c = 449 \text{ dm}$$
$$r = 205{,}5125 \text{ dm}$$

und

$$a = 401 \text{ dm}$$

Andeutung. Man berechne zunächst den Winkel α mittels Anwendung der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Ist hiernach α berechnet, so berechne man die Winkel β und γ, wie in der Andeutung zur Aufgabe 852 gesagt wurde.

Aufgabe 854. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a + b = 170 \text{ m}$$
$$r = 55{,}4083 \text{ m}$$

und

$$\alpha - \beta = 46^0\,12'\,45{,}4''$$

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 4):

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{a+b}{\cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

zunächt den Winkel γ; bestimme dann die Winkel α und β aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ ($= 180^0 - \gamma$) und verfahre im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 477 gesagt wurde.

Aufgabe 855. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$b - c = 1 \text{ dm}$$
$$r = 8{,}125 \text{ dm}$$

und

$$\gamma = 59^0\,29'\,23{,}1''$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 9) ist:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{b-c}{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 508:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{\sin\beta - \sin\gamma}{2}$$

Erkl. 508. Bezeichnen α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, so besteht u. a. die Relation:

1) . . . $2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}=\sin\alpha-\sin\beta$

(Siehe Formel 262 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Vertauscht man die Winkel, indem man:

$$\alpha=\beta$$
und $$\beta=\gamma$$

setzt, so erhält man die analoge Formel:

2) . . . $2\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\beta-\sin\gamma$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen:

$$r=\frac{1}{4}\cdot\frac{b-c}{\frac{\sin\beta-\sin\gamma}{2}}$$

oder:

A) . . . . $r=\frac{1}{2}\cdot\frac{b-c}{\sin\beta-\sin\gamma}$

nämlich eine Gleichung, in welcher nur noch die unbekannte Funktion $\sin\beta$ vorkommt, und nach welcher man leicht den Winkel β berechnen kann. Ist β hiernach berechnet, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 486 gesagt wurde.

Aufgabe 856. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$b-c=91\text{ m}$$
$$r=73{,}2250\text{ m}$$
und
$$\beta=124^0\,58'\,33{,}6''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 855.

Aufgabe 857. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$b-c=11\text{ dm}$$
$$r=10{,}37202\text{ dm}$$
und
$$\alpha=81^0\,12'\,9{,}3''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 855. Man benutze die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 9).

Aufgabe 858. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a-b=4800\text{ m}$$
$$c=10200\text{ m}$$
und
$$r=55{,}4083\text{ m}$$

Andeutung. Man berechne zunächst den Winkel γ mittels Anwendung der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3):

$$r=\frac{c}{2\sin\gamma}$$

Ist γ hiernach berechnet, so berechne man mittels Anwendung der in der Aufgabe 842 aufgestellten Relation 7):

$$r=\frac{1}{4}\cdot\frac{a-b}{\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

die Winkeldifferenz $\alpha-\beta$, und dann in Rücksicht, dass $\alpha+\beta=180^0-\gamma$ ist, die Winkel α und β. Die Seiten a und b kann man dann im weiteren mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 859. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r=75{,}5208\text{ dm}$$
$$ab=3625\text{ qdm}$$
und
$$\alpha=73^0\,44'\,23{,}3''$$

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 23):

$$r=\sqrt{\frac{ab}{2\,[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}}$$

in Rücksicht, dass:

$$\alpha+\beta=180^0-\alpha$$

ist, die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ bestimme man dann die Winkel α und β. Sind α und β berechnet, so verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 635 gesagt wurde.

Aufgabe 860. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 20{,}0417 \text{ dm}$$
$$ab = 481 \text{ qdm}$$
und
$$\gamma = 93^0\,41'\,42{,}8''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 859.

Aufgabe 861. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a + b + c = 250 \text{ m}$$
$$r = 73{,}225 \text{ m}$$
und
$$\alpha = 43^0\,36'\,10{,}4''$$

Erkl. 509. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $2\cos\alpha \cdot \cos\beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$

(Siehe Formel 190 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Analog dieser Formel besteht zwischen den Winkeln $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ die Relation:

2) . . . $2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

Sind nun die Winkel α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, ergänzen sich also dieselben zu 180^0, so sind:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} \text{ und } \frac{\alpha}{2} \text{ Komplementwinkel}$$

und in Rücksicht, dass nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

ist, ergibt sich aus Gleichung 2) für die Winkel eines Dreiecks die Relation:

3) . . . $2\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 10) ist:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

in welcher Gleichung:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist. Setzt man in derselben nach der Erkl. 509 für:

$$\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

so erhält man die Gleichung:

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$$

oder:

A) . . . $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$

in welcher Gleichung nur noch die unbekannte Funktion $\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$ vorkommt. Löst man diese Gleichung hiernach auf, so kann man aus der somit erhaltenen Gleichung die Winkeldifferenz $\beta - \gamma$ berechnen, und da $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ ist, alsdann die Winkel β und γ bestimmen. Sind hiernach diese Winkel berechnet, so kann man im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 561 gesagt wurde.

Aufgabe 862. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a + b - c = 58 \text{ m}$$
$$r = 116{,}4083 \text{ m}$$
und
$$\alpha = 79^0\,36'\,40''$$

Erkl. 510. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$

(Siehe Formel 192 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Andeutung. Man setze in der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 13):

$$r = \frac{1}{4} \cdot \frac{s-c}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

für $s - c$:

$$s - c = \frac{a+b+c}{2} - c \text{ oder } = \frac{a+b-c}{2}$$

und nach der Erkl. 510 für $\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$

Analog dieser Formel besteht zwischen den Winkeln $\frac{\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ die Relation:

2) . . . $2\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\beta+\gamma}{2} + \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$

Sind nun die Winkel β, γ und α die Winkel eines Dreiecks, ergänzen sich also dieselben zu 180°, so sind:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} \text{ und } \frac{\alpha}{2} \text{ Komplementwinkel}$$

und man kann nach der Erkl. 19:

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

setzen. In Rücksicht dessen geht die Gleichung 2) über in:

3) . . . $2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta-\gamma}{2}$

$$\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right)$$

Man erhält hiernach:

a) . . . $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{\frac{a+b-c}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$

nach welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\beta-\gamma$ berechnen kann. Aus $\beta-\gamma$ und $\beta+\gamma$ $(= 180^0 - \alpha)$ kann man dann die Winkel β und γ bestimmen. Sind hiernach β und γ berechnet, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 563 gesagt wurde.

Aufgabe 863. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a + b - c = 400 \text{ dm}$$
$$r = 543{,}006 \text{ dm}$$
und
$$\gamma = 18^0\, 18'\, 31{,}86''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 862.

Aufgabe 864. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 108{,}7202 \text{ m}$$
$$a^2 + b^2 = 49250 \text{ qm}$$
und
$$\gamma = 74^0\, 36'\, 28{,}4''$$

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 17):

$$r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)}}$$

zunächst die Winkeldifferenz $\alpha-\beta$. Bestimme dann aus $\alpha-\beta$ und $\alpha+\beta$ $(= 180^0 - \gamma)$ die Winkel β und γ und verfahre im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 602 gesagt wurde.

Aufgabe 865. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a^2 + b^2 = 394 \text{ qm}$$
$$r = 8{,}125 \text{ m}$$
und
$$\alpha = 53^0\, 7'\, 48{,}4''$$

Erkl. 511. Eine goniometrische Formel heisst:

1) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$

(Siehe Formel 210 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Ist

$$\alpha + \beta = 2R - \gamma$$

so kann man nach der Erkl. 94:

$$\cos(\alpha+\beta) = -\cos\gamma$$

setzen und jene Formel geht über in:

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 17), indem man in derselben nach der Erkl. 511 für:

$$\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$$

setzt, aus a^2+b^2, r und α zunächst den Winkel β; dann verfahre man weiter, wie in der Andeutung zur Aufgabe 602 gesagt wurde.

$$-\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$$

und hieraus erhält man:

$$2)\ .\ \cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta) = -\frac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta)$$

Aufgabe 866. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a^2 - b^2 = 34800 \text{ qm}$$
$$r = 103{,}7202 \text{ m}$$

und

$$c = 200 \text{ m}$$

Andeutung. Man berechne zunächst nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3):

$$r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

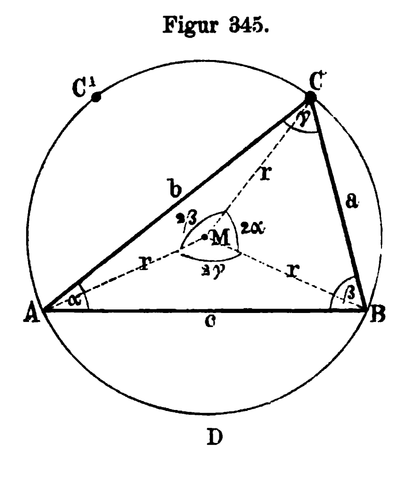
den Winkel γ. Ist hiernach γ berechnet, so berechne man entweder nach der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 14):

$$r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}}$$

die Winkeldifferenz $\alpha-\beta$, und bestimme aus $\alpha-\beta$ und $\alpha+\beta\,(=180^0-\gamma)$ die Winkel α und β; oder man verfahre im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 604 gesagt wurde.

Aufgabe 867. In einem Kreis, dessen Radius $r = 7$ cm ist, befindet sich über einer Sehne von $c = 9$ cm ein Dreieck, dessen Spitze mit einem der Punkte zusammenfällt, durch welche der Bogen des grössern Abschnitts in drei gleiche Teile geteilt wird. Wie gross ist der Flächeninhalt dieses Dreiecks?

Figur 345.



Andeutung. In Figur 345 sei der Kreis um M der gegebene, AB sei die gegebene Sehne c und C und C' seien die Punkte, durch welche der Bogen $AC'CA$ gemäss der Aufgabe in drei gleiche Teile geteilt wird. Verbindet man einen dieser Punkte C und C' z. B. den Punkt C mit A und B, so erhält man das Dreieck ABC, dessen Inhalt berechnet werden soll. Dies kann man wie folgt:

Nach der Erkl. 450 sind die Centriewinkel AMB, BMC und CMA bezw. doppelt so gross als die Dreieckswinkel α, β und γ. Den Centriewinkel 2γ, bezw. den Dreieckswinkel γ kann man wie in der Andeutung zur Aufgabe 800 gesagt wurde, nach der Gleichung:

$$a)\ \ldots\ \sin\gamma = \frac{c}{2r}$$

berechnen.

Ist hiernach der zu dem Bogen ADB gehörige Centriewinkel 2γ berechnet, so kann man leicht den zu dem Bogen $AC'CB$ gehörigen Centriewinkel, welcher $= 4R - 2\gamma$ ist, bestimmen. Da nun durch den nach der Ecke C gezogenen Radius MC dieser letztere Centriewinkel im Verhältnis von $2:1$ geteilt wird, indem der Bogen AC doppelt

so gross sein soll als der Bogen CB, so kann man aus den Relationen:

$$\text{b)} \ldots 2\alpha + 2\beta = 4R - 2\gamma$$

und

$$\text{c)} \ldots 2\beta : 2\alpha = 2 : 1$$

die Centriewinkel 2α und 2β, bezw. die Dreieckswinkel α und β berechnen. Sind hiernach die Winkel α und β des Dreiecks berechnet, so kann man aus c, α und β dessen Inhalt bestimmen, wie in der Auflösung zur Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 868. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, dem Inhalt F, den Seiten und Winkeln desselben nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{abc}{4F}$$

$$2) \ldots r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

$$3) \ldots r = \sqrt{\frac{c^2 + 4F\operatorname{ctg}\gamma}{1 + \cos\gamma\cos(\alpha - \beta)}}$$

$$4) \ldots r = \sqrt{\frac{b^2 + 4F\cdot\operatorname{ctg}\beta}{1 + \cos\beta\cdot\cos(\alpha - \gamma)}}$$

$$5) \ldots r = \sqrt{\frac{a^2 + 4F\operatorname{ctg}\alpha}{1 + \cos\alpha\cos(\beta - \gamma)}}$$

$$6) \ldots r = \frac{F}{a\sin\beta\sin\gamma}$$

$$7) \ldots r = \frac{F}{b\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$8) \ldots r = \frac{F}{c\sin\alpha\sin\beta}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Setzt man in der in Aufg. 842 vorgeführten Relation 26):

$$r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$$

gemäss der in Auflösung der Aufgabe 119 aufgestellten Formel 194 für:

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = F$$

so ergibt sich die Relation:

$$1) \ldots r = \frac{abc}{4F}$$

B) Beweis der Relation 2):

Setzt man in der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

nach der in der Erkl. 130 aufgestellten Inhaltsformel für a:

$$a = \sqrt{\frac{2F\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}$$

so erhält man:

$$r = \frac{\sqrt{\frac{2F.\sin(\beta+\gamma)}{\sin\beta\sin\gamma}}}{2\sin\alpha}$$

oder:

$$r = \sqrt{\frac{2F\sin(\beta+\gamma)}{4\sin^2\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man in Rücksicht, dass $\beta+\gamma$ und α Supplementwinkel sind, nach der Erkl. 66:

$$\sin(\beta+\gamma) = \sin\alpha$$

setzt und reduziert die Relation:

$$2) \ldots r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}} \quad \text{(s. Erkl. 512)}$$

C) Beweis der Relationen 3) bis 5):

Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 17) ist:

$$a) \ldots r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)}}$$

Ferner ist nach dem Projektionssatz:

$$b) \ldots c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\gamma$$

und nach der Erkl. 151:

$$c) \ldots F = \frac{ab}{2}\cdot\sin\gamma$$

Setzt man den aus Gleichung c) für ab sich ergebenden Wert:

$$ab = \frac{2F}{\sin\gamma}$$

in Gleichung b), so erhält man:

$$c^2 = a^2+b^2-4F\cdot\frac{\cos\gamma}{\sin\gamma}$$

und hieraus ergibt sich:

$$a^2+b^2 = c^2+4F\cdot\operatorname{ctg}\gamma$$

Setzt man diesen Wert für a^2+b^2 in Gleichung a), so erhält man die Relation:

$$3) \ldots r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{c^2+4F\operatorname{ctg}\gamma}{1+\cos\gamma\cdot\cos(\alpha-\beta)}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 4) und 5) herleiten.

D) Beweis der Relationen 6) bis 8):

Nach der Relation 2) in Aufgabe 842 ist:

$$r = \frac{b}{2\sin\gamma}$$

Ferner ist nach der in Auflösung der Aufgabe 118 aufgestellten Formel 133:

$$b = \frac{2F}{a\sin\gamma}$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Relation:

$$6) \ldots r = \frac{F}{a\sin\beta\sin\gamma}$$

In ganz derselben Weise kann man die Relationen 7) und 8) herleiten.

Erkl. 512. Den Beweis der Richtigkeit der Relation:

$$r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

kann man auch wie folgt führen:

Setzt man in der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 28):

$$r = \sqrt{\frac{ab}{2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}}$$

gemäss der in Auflösung der Aufgabe 118 hergeleiteten Formel 133 für ab:

$$ab = \frac{2F}{\sin\gamma}$$

so erhält man:

$$r = \sqrt{\frac{2F}{2\sin\gamma[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 506:

$$\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$$

setzt:

$$2) \ldots r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

Aufgabe 869. Der Inhalt F eines Dreiecks beträgt 175,814 qm; zwei Winkel desselben sind $\alpha = 59^0\,32'\,3''$ und $\beta = 78^0\,33'\,45''$. Man soll den Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises berechnen.

Andeutung. Man benutze die in der Aufgabe 868 vorgeführte Relation 2):

$$r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}}$$

und berücksichtige, dass $\gamma = 180^0-(\alpha+\beta)$ ist.

Aufgabe 870. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$F = 1800 \text{ qm}$$
$$r = 75{,}5208 \text{ m}$$

und

$$a = 145 \text{ m}$$

man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

aus a und r den Winkel α; dann benutze man die in der Aufgabe 868 vorgeführte Relation 6):

$$r = \frac{F}{a\sin\beta\sin\gamma}$$

setze in derselben nach der Erkl. 506 für:

$$\sin\gamma\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\gamma-\beta) - \cos(\gamma+\beta)]$$

und berücksichtige, dass zwischen den Supplementwinkeln $\gamma+\beta$ und α nach der Erkl. 94 die Relation besteht:

$$\cos(\gamma+\beta) = -\cos\alpha$$

man erhält hiernach:

$$r = \frac{F}{\frac{a}{2}[\cos(\gamma-\beta) + \cos\alpha]}$$

nach welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\gamma-\beta$ berechnen kann. Aus $\gamma-\beta$ und $\gamma+\beta$ $(= 180^0 - \alpha)$ kann man dann die Winkel γ und β berechnen u. s. f.

Aufgabe 871. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 425 \text{ m}$$
$$F = 2310 \text{ qdm}$$

und

$$\gamma = 64^0\, 56'\, 32{,}5''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 870. Man berechne zuerst aus r und γ die Seite c nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3); benutze dann die in Aufgabe 868 vorgeführte Relation 8).

Aufgabe 872. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Winkeln des Dreiecks und den Höhen desselben nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{h_a}{2\sin\beta\sin\gamma}$$

$$2) \ldots r = \frac{h_b}{2\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$3) \ldots r = \frac{h_c}{2\sin\alpha\sin\beta}$$

$$4) \ldots r = \frac{ab}{2\cdot h_c}$$

$$5) \ldots r = \frac{ac}{2\cdot h_b}$$

$$6) \ldots r = \frac{bc}{2\cdot h_a}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3) ist:

$$a) \ldots r = \frac{c}{2\sin\gamma}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB der Figer 346 die Relation:

$$\sin\beta = \frac{\overline{AD}}{\overline{AB}}$$

oder:

$$\sin\beta = \frac{h_a}{c}$$

7) . . . $r = \frac{h_a + h_b}{8 \sin \frac{\gamma}{2} \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$

oder:

7a) . . . $r = \frac{h_a + h_b}{4 \cos^2 \frac{\gamma}{2} (\cos \alpha + \cos \beta)}$

8) . . . $r = \frac{h_a + h_c}{8 \sin \frac{\beta}{2} \cdot \cos^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}}$

oder:

8a) . . . $r = \frac{h_a + h_c}{4 \cos^2 \frac{\beta}{2} (\cos \alpha + \cos \gamma)}$

9) . . . $r = \frac{h_b + h_c}{8 \sin \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$

oder:

9a) . . . $r = \frac{h_b + h_c}{4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \beta + \cos \gamma)}$

10) . . . $r = \frac{h_a - h_b}{8 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta - \alpha}{2}}$

oder:

10a) . . . $r = \frac{h_a - h_b}{4 \sin^2 \frac{\gamma}{2} (\cos \alpha - \cos \beta)}$

11) . . . $r = \frac{h_a - h_c}{8 \sin^2 \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma - \alpha}{2}}$

oder:

11a) . . . $r = \frac{h_a - h_c}{4 \sin^2 \frac{\beta}{2} (\cos \alpha - \cos \gamma)}$

12) . . . $r = \frac{h_b - h_c}{8 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\gamma - \beta}{2}}$

oder:

12a) . . . $r = \frac{h_b - h_c}{4 \sin^2 \frac{\alpha}{2} (\cos \beta - \cos \gamma)}$

13) . . . $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h_a^2 - h_b^2}{\sin^3 \gamma \sin (\beta - \alpha)}}$

14) . . . $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h_a^2 - h_c^2}{\sin^3 \beta \sin (\gamma - \alpha)}}$

15) . . . $r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h_b^2 - h_c^2}{\sin^3 \alpha \sin (\gamma - \beta)}}$

mithin:

b) . . . $c = \frac{h_a}{\sin \beta}$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich die herzuleitende Relation:

1) . . . $r = \frac{h_a}{2 \sin \beta \sin \gamma}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun (siehe Erkl. 513).

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) ist:

c) . . . $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AGB der Figur 346 die Relation:

$$\sin \alpha = \frac{\overline{CG}}{\overline{AC}}$$

oder:

d) . . $\sin \alpha = \frac{h_c}{b}$

Aus den Gleichungen c) und d) ergibt sich die herzuleitende Relation:

4) . . . $r = \frac{ab}{2 \cdot h_c}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 5) und 6) darthun (siehe die Erkl. 514 und 515).

C) Beweis der Relationen 7) bis 9a):

Wie in der Andeutung zur Aufgabe 528 gezeigt, besteht zwischen der Summe zweier Seiten a und b eines Dreiecks, der Summe der zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_b und dem von jenen Seiten eingeschlossenen Winkel γ die Relation:

e) . . . $a + b = \frac{h_a + h_b}{\sin \gamma}$ (s. Erkl. 516)

Ferner besteht nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 4) die Gleichung:

f) . . . $a + b = 4 r \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die weitere Gleichung:

$$4 r \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{h_a + h_b}{\sin \gamma}$$

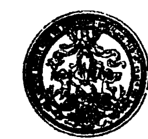
und hieraus erhält man:

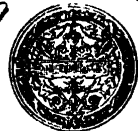
$$r = \frac{h_a + h_b}{4 \sin \gamma \cdot \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 52 für $\sin \gamma = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ setzt:

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

324. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 317. — Seite 593—608. Mit 5 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — **aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 317. — Seite 593—608. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. Die Verlagshandlung.

Figur 346.

$$r = \frac{h_a + h_b}{4 \cdot 2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder:

7) $$r = \frac{h_a + h_b}{8 \sin\frac{\gamma}{2} \cos^2\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Setzt man, in Rücksicht, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, für $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, so geht die letztere Gleichung über in:

$$r = \frac{h_a + h_b}{8 \cos^2\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich nach Anwendung der in der Erkl. 511 angeführten goniometrischen Formel:

7a) . . . $$r = \frac{h_a + h_b}{4 \cos^2\frac{\gamma}{2} (\cos\alpha + \cos\beta)}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 8) bis 9a) darthun (siehe auch die Erkl. 516).

D) Beweis der Relationen 10) bis 12a):

Nach dem in der Erkl. 295 angeführten planimetrischen Satz besteht zwischen den Seiten a und b und den zu diesen Seiten gehörigen Höhen die Proportion:

$$h_a : h_b = b : a$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 251 die Relation:

g) . . . . $$\frac{h_a - h_b}{b - a} = \frac{h_a}{b}$$

Da nun, wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 346 ergibt:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \sin\gamma$$

ist, mithin:

h) . . . . $$\frac{h_a}{b} = \sin\gamma$$

gesetzt werden kann, und da nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 7):

$$a - b = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

oder nach der Erkl. 517:

i) . . . $$b - a = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen g) bis i):

$$\frac{h_a - h_b}{4r \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta-\alpha}{2}} = \sin\gamma$$

und hieraus ergibt sich:

Erkl. 513. Aus der Analogie der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 1) bis 3) kann man den trig. Satz herleiten:

„Der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man die Masszahl einer Höhe des Dreiecks dividiert durch das doppelte Produkt der Sinus der Winkel, welche der Seite anliegen, zu der jene Höhe gehört."

Erkl. 514. Die in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 4) bis 6) enthalten keine goniometrischen Funktionen; dieselben können auch mittels rein planimetrischer Sätze hergeleitet werden (siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln).

Erkl. 515. Aus den in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 4) bis 6) kann man den planimetrischen Satz ableiten:

„Der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man das Produkt der Masszahlen zweier Dreiecksseiten durch die doppelte Masszahl der zur dritten Seite gehörigen Höhe dividiert."

Erkl. 516. Die Richtigkeit der vorstehenden Relationen 7) bis 9a) kann man auch darthun, analog wie in nebenstehender Auflösung unter D) gezeigt ist.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

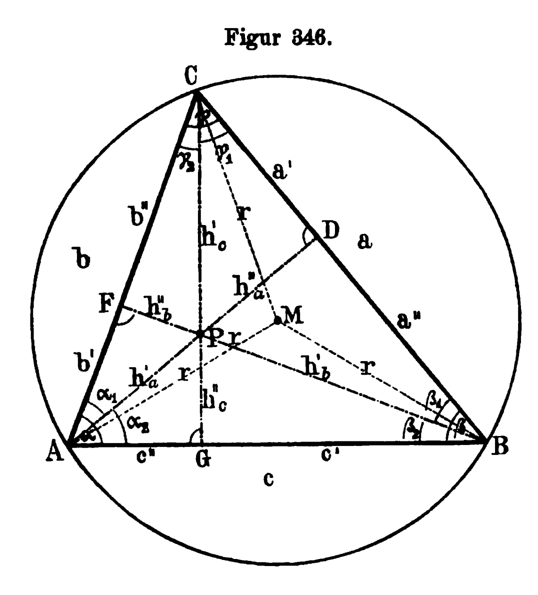
Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 346.



$$r = \frac{h_a + h_b}{4 \cdot 2 \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder:

$$7)\quad r = \frac{h_a + h_b}{8 \sin\frac{\gamma}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

Setzt man, in Rücksicht, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, für $\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$, so geht die letztere Gleichung über in:

$$r = \frac{h_a + h_b}{8 \cos^2\frac{\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

und hieraus ergibt sich nach Anwendung der in der Erkl. 511 angeführten goniometrischen Formel:

$$7\text{a})\ \ldots\ r = \frac{h_a + h_b}{4\cos^2\frac{\gamma}{2}(\cos\alpha + \cos\beta)}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 8) bis 9a) darthun (siehe auch die Erkl. 516).

Erkl. 513. Aus der Analogie der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 1) bis 3) kann man den trig. Satz herleiten:

> „Der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man die Masszahl einer Höhe des Dreiecks dividiert durch das doppelte Produkt der Sinus der Winkel, welche der Seite anliegen, zu der jene Höhe gehört."

Erkl. 514. Die in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 4) bis 6) enthalten keine goniometrischen Funktionen; dieselben können auch mittels rein planimetrischer Sätze hergeleitet werden (siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln).

Erkl. 515. Aus den in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 4) bis 6) kann man den planimetrischen Satz ableiten:

> „Der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man das Produkt der Masszahlen zweier Dreiecksseiten durch die doppelte Masszahl der zur dritten Seite gehörigen Höhe dividiert."

Erkl. 516. Die Richtigkeit der vorstehenden Relationen 7) bis 9a) kann man auch darthun, analog wie in nebenstehender Auflösung unter D) gezeigt ist.

D) Beweis der Relationen 10) bis 12a):

Nach dem in der Erkl. 295 angeführten planimetrischen Satz besteht zwischen den Seiten a und b und den zu diesen Seiten gehörigen Höhen die Proportion:

$$h_a : h_b = b : a$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 251 die Relation:

$$\text{g})\ \ldots\ \frac{h_a - h_b}{b - a} = \frac{h_a}{b}$$

Da nun, wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 346 ergibt:

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{AC}} = \sin\gamma$$

ist, mithin:

$$\text{h})\ \ldots\ \frac{h_a}{b} = \sin\gamma$$

gesetzt werden kann, und da nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 7):

$$a - b = 4r\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

oder nach der Erkl. 517:

$$\text{i})\ \ldots\ b - a = 4r\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen g) bis i):

$$\frac{h_a - h_b}{4r\sin\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{2}} = \sin\gamma$$

und hieraus ergibt sich:

Erkl. 517. Die nebenstehende Gleichung:

$$a - b = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

kann man wie folgt umformen:

Multipliziert man die ganze Gleichung mit -1, so erhält man:

$$b - a = -4r \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

oder:

$$b - a = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \cdot - \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)$$

Berücksichtigt man, dass nach der in der Erkl. 127 aufgestellten Formel:

$$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$$

für:

$$-\sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\beta}{2}\right)\right]$$

$$\text{oder } = \sin\left(\frac{\beta}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\text{oder } = \sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, so geht jene Gleichung in Rücksicht dessen über in:

$$b - a = 4r \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}$$

Erkl. 518. Eine goniometrische Formel heisst:

1) $\sin(\alpha + \beta) \cdot \sin(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$

(Siehe Formel 209 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Vertauscht man in derselben die Buchstaben α und β, so erhält man die Relation:

2) $\sin(\beta + \alpha) \cdot \sin(\beta - \alpha) = \frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 2\beta)$

Erkl. 519. Die nebenstehende Gleichung:

$$a^2 - b^2 = 4r^2 \sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

kann man wie folgt umformen:

Multipliziert man die ganze Gleichung mit -1, so erhält man:

$$b^2 - a^2 = -4r^2 \cdot \sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

oder:

$$b^2 - a^2 = 4r^2 \cdot \sin\gamma \cdot - \sin(\alpha - \beta)$$

Berücksichtigt man nun, dass nach der in der Erkl. 127 aufgestellten Formel:

$$-\sin\alpha = \sin(-\alpha)$$

für:

$$-\sin(\alpha - \beta) = \sin[-(\alpha - \beta)]$$

$$\text{oder } = \sin(\beta - \alpha)$$

gesetzt werden kann, so geht jene Gleichung in Rücksicht dessen über in:

$$b^2 - a^2 = 4r^2 \sin\gamma \cdot \sin(\beta - \alpha)$$

$$r = \frac{h_a - h_b}{4 \cdot \sin\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 52 für $\sin\gamma = 2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$ setzt:

$$r = \frac{h_a - h_b}{4 \sin\frac{\gamma}{2} \cdot 2 \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

oder:

10) . . . $r = \frac{h_a - h_b}{8 \sin^2\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\beta - \alpha}{2}}$

Setzt man, in Rücksicht, dass:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, für $\cos\frac{\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$ so geht letztere Gleichung über in:

$$r = \frac{h_a - h_b}{8 \sin^2\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\beta - \alpha}{2}}$$

und hieraus ergibt sich nach Anwendung der in der Erkl. 518 angeführten goniometrischen Formel 2):

10a) . . . $r = \frac{h_a - h_b}{4 \sin^2\frac{\gamma}{2}(\cos\alpha - \cos\beta)}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 11) bis 12a) darthun.

E) Beweis der Relationen 13) bis 15):

Nach dem in der Erkl. 295 angeführten planimetrischen Satz besteht zwischen den Seiten a und b eines Dreiecks und den zu diesen Seiten gehörigen Höhen h_a und h_b die Proportion:

$$h_a : h_b = b : a$$

oder auch:

$$h_a^2 : h_b^2 = b^2 : a^2$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 251 die Relation:

k) . . . . $\frac{h_a^2 - h_b^2}{b^2 - a^2} = \frac{h_a^2}{b^2}$

Ferner hat man nach der in der Aufgabe 84? vorgeführten Relation 14) die Gleichung:

$$a^2 - b^2 = 4r^2 \cdot \sin\gamma \cdot \sin(\alpha - \beta)$$

oder nach der Erkl. 519:

m) . . . $b^2 - a^2 = 4r^2 \sin\gamma \sin(\beta - \alpha)$

und nach der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 2) die Gleichung:

n) . . . $b^2 = 4r^2 \sin^2\beta$

und nach der vorstehenden Relation 1) die Gleichung:

o) . . . $h_a^2 = 4r^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma$

Aus den Gleichungen k) bis o) erhält man die weitere Relation:

$$\frac{h_a^2 - h_b^2}{4r^2 \sin\gamma \sin(\beta - \alpha)} = \frac{4r^2 \sin^2\beta \sin^2\gamma}{4r^2 \sin^2\beta}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\frac{h_a^2 - h_b^2}{4r^2 \sin\gamma \cdot \sin(\beta - \alpha)} = \sin^2\gamma$$

$$r^2 = \frac{h_a^2 - h_b^2}{4 \cdot \sin^3\gamma \sin(\beta - \alpha)}$$

oder:

$$14) \quad \ldots \quad r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{h_a^2 - h_b^2}{\sin^3\gamma \sin(\beta - \alpha)}}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 14) und 15) darthun.

Aufgabe 873. In einem Dreieck sei die zur Seite c gehörige Höhe $h_c = 120$ m und die beiden dieser Seite c anliegenden Winkel α und β seien bezw. $61^0 55' 39{,}1''$ und $73^0 44' 23{,}3''$; man soll hieraus den Halbmesser des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises berechnen.

Andeutung. Man benutze zur Berechnung des gesuchten Radius r die in der Aufgabe 872 vorgeführte Relation 3):

$$r = \frac{h_c}{2 \sin\alpha \sin\beta}$$

Aufgabe 874. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$h_a = 1 \text{ m}$$
$$r = 2{,}5 \text{ m}$$

und

$$c = 4 \text{ m}$$

man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relation 6):

$$r = \frac{b \cdot c}{2 \cdot h_a}$$

zunächst die Seite b. Dann verfahre man im weiteren wie in der Andeutung zur Aufgabe 339 gesagt wurde.

Aufgabe 875. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$h_c = 1200 \text{ m}$$
$$\gamma = 67^0 22' 48{,}5''$$

und

$$r = 812{,}5 \text{ m}$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relation 4) erhält man:

a) . . . $ab = 2 \cdot h_c \cdot r$

Setzt man diesen Wert für ab in die in der Aufgabe 842 vorgeführte Relation 23), so erhält man:

b) . . . $r = \sqrt{\frac{2h_c \cdot r}{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht, dass $\alpha + \beta = 180^0 - \gamma$ ist, die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ kann man alsdann die Winkel α und β bestimmen, u. s. f.

Aufgabe 876. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 925 \text{ dm}$$
$$h_c = 140 \text{ dm}$$

und

$$\alpha - \beta = -17^0 56' 42{,}9''$$

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 875.

Aufgabe 877. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$h_a : h_b = 1:5$$
$$\alpha = 73^0\,36'\,41''$$
und
$$r = 80 \text{ m}$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$\text{a)} \ldots r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$$

kann man zunächst die Seite a berechnen.

Da sich ferner aus den in der Aufgabe 872 hergeleiteten Relationen 1) und 2) die Relation:

$$\text{b)} \ldots h_a : h_b = \sin \beta : \sin \alpha$$

ergibt, und der Quotient $h_a : h_b$, sowie der Winkel α gegeben sind, so kann man nach dieser Relation den Winkel β berechnen. Da man hiernach von dem Dreieck die Seite a und die Winkel α und β kennt, so kann man im weiteren verfahren, wie in der Auflösung zur Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 878. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 8{,}125 \text{ m}$$
$$h_a - h_b = 1{,}7231 \text{ m}$$
und
$$\gamma = 59^0\,29'\,23{,}1''$$

Andeutung. Mittels der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relation 10):

$$r = \frac{h_a - h_b}{8 \sin^2 \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \sin \frac{\beta - \alpha}{2}}$$

kann man zunächst die Winkeldifferenz $\beta - \alpha$ berechnen. Aus $\beta - \alpha$ u. $\beta + \alpha \; (= 180^0 - \gamma)$ kann man dann die Winkel α und β bestimmen. Sind diese Winkel hiernach berechnet, so kann man nach den in der Aufgabe 842 hergeleiteten Relationen 1) bis 3) die Seiten a, b und c berechnen.

Aufgabe 879. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$a + b = 170 \text{ m}$$
$$h_a + h_b = 168{,}8276 \text{ m}$$
und
$$r = 75{,}5208 \text{ m}$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 4) ist:

$$\text{a)} \ldots a + b = 4r \cos \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

und nach der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relation 7) ist:

$$\text{b)} \ldots h_a + h_b = 8r \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Setzt man den aus Gleichung a) für $\cos \frac{\alpha - \beta}{2}$ sich ergebenden Wert:

$$\cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a + b}{4r \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}$$

in Gleichung b), so erhält man:

$$h_a + h_b = 8r \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2} \cdot \frac{a + b}{4r \cos \frac{\gamma}{2}}$$

oder:

$$h_a + h_b = 2 \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\gamma}{2} \cdot (a + b)$$

oder nach der Erkl. 52:

$$\text{A)} \ldots \sin\gamma = \frac{h_a + h_b}{a + b}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für $h_a + h_b$ und $a + b$ gegebenen Zahlenwerte, den Winkel γ berechnen kann.

Ist γ berechnet, so kann man nach der in der Aufgabe 842 hergeleiteten Relation 3) die Seite c aus r und γ berechnen u. s. f.

Aufgabe 880. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 628{,}333 \text{ m}$$
$$a + b = 2070 \text{ m}$$

und

$$h_c = 840 \text{ m}$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 4) erhält man:

$$\text{a)} \ldots \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a + b}{4 \cdot r}$$

ferner erhält man nach der in der Aufgabe 872 vorgeführten Relation 3):

$$\text{b)} \ldots \sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{h_c}{2r}$$

Mittels dieser beiden goniometrischen Gleichungen kann man nach gehöriger Umformung zunächst die Winkel des Dreiecks berechnen.

Aufgabe 881. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Winkeln des Dreiecks und den Abschnitten, welche die Höhen auf den Seiten bilden, die nachfolgenden Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{a'}{2 \cdot \sin\beta \cos\gamma}$$

$$2) \ldots r = \frac{a''}{2 \sin\gamma \cos\beta}$$

$$3) \ldots r = \frac{b'}{2 \sin\gamma \cdot \cos\alpha}$$

$$4) \ldots r = \frac{b''}{2 \sin\alpha \cos\gamma}$$

$$5) \ldots r = \frac{c'}{2 \sin\alpha \cos\beta}$$

$$6) \ldots r = \frac{c''}{2 \sin\beta \cos\alpha}$$

$$7) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a' - a''}{\sin(\beta - \gamma)}$$

$$8) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{b' - b''}{\sin(\gamma - \alpha)}$$

$$9) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c' - c''}{\sin(\alpha - \beta)}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 6):

Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 2) ist:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{b}{2 \sin\beta}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 347:

$$\cos\gamma = \frac{a'}{b}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots b = \frac{a'}{\cos\gamma}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt die herzuleitende Relation:

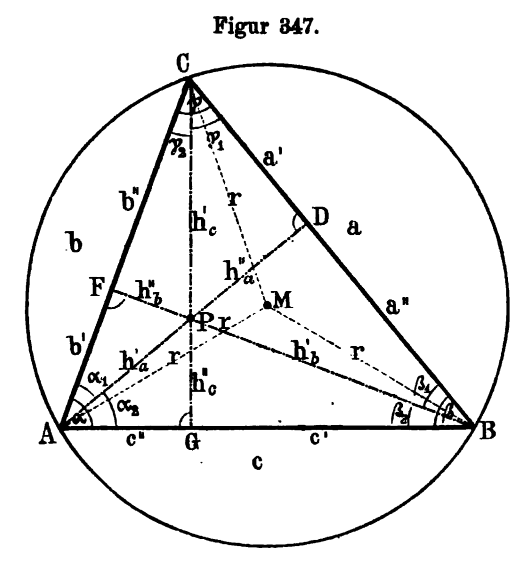
$$1) \ldots r = \frac{a'}{2 \sin\beta \cos\gamma}$$

Nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 3) ist:

$$\text{c)} \ldots r = \frac{c}{2 \sin\gamma}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADB der Figur 347:

Figur 347.



Erkl. 520. Aus der Analogie der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relationen 1) bis 6) kann man den trig. Satz ableiten:

„Der Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist gleich der Masszahl, welche man erhält, wenn man die Masszahl irgend eines der Seitenabschnitte, gebildet durch die zur betreffenden Seite gehörigen Höhe, dividiert durch das doppelte Produkt, gebildet aus dem Sinus des jenem Abschnitt nicht anliegenden aber der betreffenden Dreiecksseite anliegenden Winkels und dem Kosinus des jenem Abschnitt anliegenden Winkels.“

$$\cos\beta = \frac{a''}{c}$$

oder:

$$d) \ldots c = \frac{a''}{\cos\beta}$$

Aus den Gleichungen c) und d) folgt die herzuleitende Relation:

$$2) \ldots r = \frac{a'}{2\sin\gamma\cos\beta}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 3) bis 6) darthun (siehe die Erkl. 520).

B) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Aus den vorstehenden Relationen 1) und 2) ergibt sich die Relation:

$$\frac{a'}{2\sin\beta\cos\gamma} = \frac{a''}{2\sin\gamma\cos\beta}$$

oder:

$$\frac{a'}{a''} = \frac{\sin\beta\cos\gamma}{\sin\gamma\cos\beta}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 251 angeführten Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a'-a''}{\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma} = \frac{a'}{\sin\beta\cos\gamma}$$

Da nun nach der Erkl. 232:

$$\sin\beta\cos\gamma - \cos\beta\sin\gamma = \sin(\beta-\gamma)$$

und nach vorstehender Relation 1):

$$\frac{a'}{\sin\beta\cos\gamma} = 2r$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus vorstehender Gleichung:

$$\frac{a'-a''}{\sin(\beta-\gamma)} = 2r$$

und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

$$7) \ldots r = \frac{1}{2}\cdot\frac{a'-a''}{\sin(\beta-\gamma)}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 8) und 9) darthun.

Aufgabe 882. Man soll mittels der in den Aufgaben 842, 872 und 881 vorgeführten Relationen nachweisen, dass zwischen den Seiten eines Dreiecks, den auf den Seiten durch die zugehörigen Höhen gebildeten Abschnitten und den Höhen eines Dreiecks folgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{b''}{a'}$$

$$2) \ldots\ldots \frac{a}{c} = \frac{c'}{a''}$$

$$3) \ldots\ldots \frac{b}{c} = \frac{c''}{b'}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Aus den in Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) und 2) folgt:

$$a) \ldots\ldots \frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

und aus den in Aufgabe 881 vorgeführten Relationen 1) und 4) folgt:

4) . . . $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (h_a+h_b+h_c)\cdot\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

5) . . . . $\frac{h_a^2}{h_b\cdot h_c}+\frac{h_b^2}{h_a h_c}+\frac{h_c^2}{h_a\cdot h_b} = \frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

6) . . . . $h_a\cdot h_b\cdot h_c = \frac{a^2 b}{c}\cdot\sin^3\gamma$

7) . . . . $h_a\cdot h_b\cdot h_c = \frac{a^2 c^2}{b}\cdot\sin^3\beta$

8) . . . . $h_a\cdot h_b\cdot h_c = \frac{b^2\cdot c^2}{a}\sin^3\alpha$

Erkl. 521. Aus der Analogie der in der Aufgabe 882 vorgeführten Relationen 1) bis 3) kann man den planimetrischen Satz herleiten:

„In jedem Dreieck verhalten sich zwei Seiten umgekehrt wie die Abschnitte derselben, gebildet durch die denselben zugehörigen Höhen, welche an der Ecke liegen, in der jene Seiten zusammenstossen.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 522. Die in der Aufgabe 882 vorgeführten Relationen 1) bis 5) enthalten keine goniometrischen Funktionen; dieselben können auch ohne Hülfe trig. Sätze auf rein planimetrischem Wege hergeleitet werden.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

b) . . . . $\frac{b''}{a'} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$

und aus diesen beiden Gleichungen a) und b) ergibt sich die zu beweisende Relation:

1) . . . . $\frac{a}{b} = \frac{b''}{a'}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

B) Beweis der Relation 2):

Aus den in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) bis 3) ergeben sich die Beziehungen:

c) . . . $a = 2r\sin\alpha$

d) . . . $b = 2r\sin\beta$

e) . . . $c = 2r\cdot\sin\gamma$

oder:

f) . . $\frac{1}{a} = \frac{1}{2r\sin\alpha}$

g) . . $\frac{1}{b} = \frac{1}{2r\sin\beta}$

h) . . $\frac{1}{c} = \frac{1}{2r\sin\gamma}$

Ferner ergeben sich aus den in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 1) bis 3) die Beziehungen:

i) . . . $h_a = 2r\sin\beta\sin\gamma$

k) . . . $h_b = 2r\sin\alpha\sin\gamma$

l) . . . $h_c = 2r\sin\alpha\sin\beta$

oder:

m) . . . $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2r\sin\beta\sin\gamma}$

n) . . . $\frac{1}{h_b} = \frac{1}{2r\sin\alpha\sin\gamma}$

und

o) . . . $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{2r\sin\alpha\sin\beta}$

Addiert man die Gleichungen c) bis e), desgleichen die Gleichungen f) bis h) und bildet das Produkt der somit erhaltenen Summen, so erhält man nach gehöriger Reduktion dasselbe, als wenn man die drei Gleichungen i) bis l), desgleichen die Gleichungen m) bis o) addiert und das Produkt dieser beiden Summen bildet, und hieraus ergibt sich die Richtigkeit der Relation:

4) . . . $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = (h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$

C) Beweis der Relation 5):

Die Richtigkeit der Relation:

5) . . . $\frac{h_a^2}{h_b\cdot h_c}+\frac{h_b^2}{h_a\cdot h_c}+\frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{bc}{a^2}+\frac{ac}{b^2}+\frac{ab}{c^2}$

kann man in ganz analoger Weise als die der vorstehenden Relation 4) mittels der in den Aufgaben 842 und 872 vorgeführten Relationen 1) bis 3) darthun.

D) Beweis der Relationen 6) bis 8):

Multipliziert man die in der Aufgabe 872 vorgeführten Relationen 1) bis 3), so erhält man:

$$\text{p)} \ldots \frac{h_a \cdot h_b \cdot h_c}{8 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma} = r^3$$

Quadriert man ferner die in Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) und 2) und multipliziert die somit erhaltenen Gleichungen, so erhält man:

$$\frac{a^2 \cdot b^2}{16 \sin^2\alpha \sin^2\beta} = r^4$$

oder, wenn man diese Gleichung durch die in der Aufg. 842 vorgeführte Relation 3) dividiert:

$$\text{q)} \ldots \frac{a^2 \cdot b^2 \cdot 2 \sin\gamma}{c \cdot 16 \sin^2\alpha \sin^2\beta} = r^3$$

Aus den Gleichungen p) und q) folgt:

$$\frac{h_a \cdot h_b \cdot h_c}{8 \sin^2\alpha \sin^2\beta \sin^2\gamma} = \frac{a^2 b^2 \cdot 2 \sin\gamma}{c \cdot 16 \sin^2\alpha \sin^2\beta}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$7) \ldots h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{a^2 b^2}{c} \sin^3\gamma$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 8) und 9) darthun (siehe die Erkl. 521 und 522).

Aufgabe 883. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$r = 425 \text{ m}$$
$$c' - c'' = 13 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$$

man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relation 9):

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c' - c''}{\sin(\alpha - \beta)}$$

zunächst die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$; bestimme dann, da α gegeben, den Winkel β. Aus r und α, bezw. aus r und β kann man dann im weiteren mittels der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) und 2) die Seiten a und b berechnen, u. s. f.

Aufgabe 884. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 8{,}125 \text{ dm}$$
$$a' - a'' = 1{,}2308 \text{ dm}$$

und

$$\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$$

Andeutung. Man berechne nach der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relation 7):

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a' - a''}{\sin(\beta - \gamma)}$$

zunächst die Winkeldifferenz $\beta - \gamma$, beachte dann, dass $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ ist und berechne hiernach die Winkel α und β. Dann verfahre man im weiteren wie in voriger Andeutung gesagt wurde.

Aufgabe 885. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 20551{,}25 \text{ m}$$
$$a' = 8956{,}1 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 77^0\,19'\,10{,}6''$$

Andeutung. Aus r und α bestimme man nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) die Seite a des Dreiecks. Dann bestimme man aus a $(= a' + a'')$ den Ab-

schnitt a'' bezw. die Differenz $a' - a''$ und berechne nach der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relation 7):

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a' - a''}{\sin(\beta - \gamma)}$$

die Winkeldifferenz $\beta - \gamma$. Aus $\beta - \gamma$ und $\beta + \gamma = 180^0 - \alpha$ kann man dann leicht die Winkel β und γ berechnen.

Aufgabe 886. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$c' - c'' = 130 \text{ m}$$
$$r = 208{,}0083 \text{ m}$$

und

$$ab = 24961 \text{ qm}$$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relation 9):

$$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c' - c''}{\sin(\alpha - \beta)}$$

berechne man zunächst die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$. Ist hiernach $\alpha - \beta$ berechnet, so berechne man nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 23):

$$r = \sqrt{\frac{ab}{2[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]}}$$

die Winkelsumme $\alpha + \beta$, u. s. f.

Aufgabe 887. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Höhenabschnitten, Winkeln und Seiten des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a}{\cos\alpha}$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b}{\cos\beta}$$

$$3) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_c}{\cos\gamma}$$

$$4) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h''_a}{\cos\beta\cos\gamma}$$

$$5) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h''_b}{\cos\alpha\cos\gamma}$$

$$6) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h''_c}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$7) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + h'^2_a}$$

$$8) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{b^2 + h'^2_b}$$

$$9) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{c^2 + h'^2_c}$$

$$10) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_b + h'_c}{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$11) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{(h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c)^2}{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck AFP der Figur 348 ergibt sich:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha_1 = \frac{b'}{h'_a}$$

ferner ergibt sich aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADC:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots \cos\alpha_1 = \frac{h_a}{b}$$

Aus den Gleichungen c) und b) ergibt sich zunächst die Relation:

$$\text{c)} \ldots \frac{b'}{h'_a} = \frac{h_a}{b}$$

Nach der in der Aufgabe 881 vorgeführten Relation 3) ist:

$$\text{d)} \ldots b' = 2r\sin\gamma\cos\alpha$$

Nach der in Aufgabe 872 vorgeführten Relation 1) ist:

$$\text{e)} \ldots h_a = 2r\sin\beta\sin\gamma$$

und nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 2) ist:

12) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b}{h''_c}$

13) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_c}{h''_b}$

14) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b \cdot h'_c}{h''_a}$

15) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_b}{h''_a + h''_b} \cdot h'_c$

16) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_c}{h''_a + h''_c} \cdot h'_b$

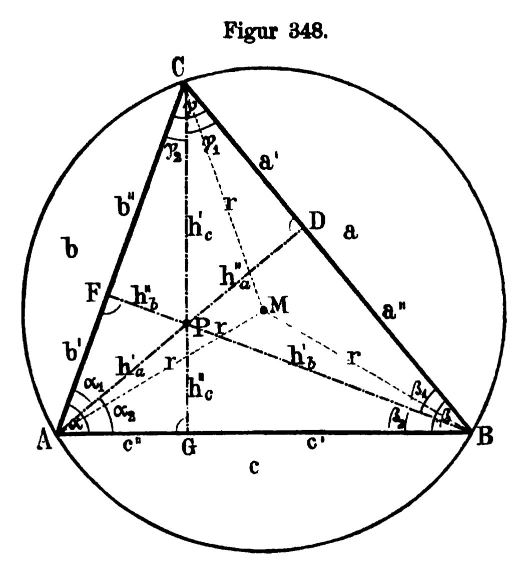
17) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b + h'_c}{h''_b + h''_c} \cdot h'_a$

18) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a - h'_b}{h''_b - h''_a} \cdot h'_c$

19) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a - h'_c}{h''_c - h''_a} \cdot h'_b$

20) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b - h'_c}{h''_c - h''_b} \cdot h'_a$

Figur 348.



f) ... $b = 2r \sin\beta$

Aus den Gleichungen c) bis f) folgt nunmehr:

$$\frac{2r \sin\gamma \cos\alpha}{h'_a} = \frac{2r \sin\beta \sin\gamma}{2r \sin\beta}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

1) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a}{\cos\alpha}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) bis 3) darthun.

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck CDP der Figur 348 ergibt sich:

g) ... $\sin\gamma_1 = \frac{h''_a}{h'_c}$

ferner ergibt sich aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADB:

$$\sin\alpha_2 = \frac{a''}{c}$$

oder, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 523

$$\alpha_2 = \gamma_1$$

ist

h) ... $\sin\gamma_1 = \frac{a''}{c}$

Aus den Gleichungen g) und h) folgt zunächst:

i) ... $\frac{h''_a}{h'_c} = \frac{a''}{c}$

Nach der in Aufgabe 881 vorgeführten Relation 2) ist:

k) ... $a'' = 2r \sin\gamma \cos\beta$

Nach der vorstehenden Relation 3) ist:

l) ... $h'_c = 2r \cos\gamma$

und nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 8) ist:

m) ... $c = 2r \sin\gamma$

Aus den Gleichungen i) bis m) folgt nunmehr:

$$\frac{h''_a}{2r \cos\gamma} = \frac{2r \sin\gamma \cos\beta}{2r \sin\gamma}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

4) ... $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h''_a}{\cos\beta \cos\gamma}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 5) und 6) darthun.

C) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Nach der vorstehenden Relation 1) ist:

$$h'^2_a = 4r^2 \cdot \cos^2\alpha$$

Ferner ist nach der Relation 1) in Aufgabe 842:

$$a^2 = 4r^2 \sin^2\alpha$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$a^2 + h'^2_a = 4r^2 (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$$

und hieraus ergibt sich, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 142:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

ist, die Relation:

$$7) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{a^2 + h'^2_a}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 8) und 9) darthun.

D) Beweis der Relation 10):

Aus den vorstehenden Relationen 1) bis 3) ergibt sich:

$$\frac{h'_a}{\cos\alpha} = \frac{h'_b}{\cos\beta} = \frac{h'_c}{\cos\gamma}$$

Bringt man in bezug auf diese laufende Proportion den in der Erkl. 284 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{h'_a + h'_b + h'_c}{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma} = \frac{h'_a}{\cos\alpha}$$

oder, wenn man nach der vorstehenden Relation 1)

$$h'_a = 2r \cdot \cos\alpha$$

setzt und die in der Erkl. 524 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\frac{h'_a + h'_b + h'_c}{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{2r \cdot \cos\alpha}{\cos\alpha}$$

und hieraus erhält man die Relation:

$$10) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_b + h'_c}{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

E) Beweis der Relation 11):

Multipliziert man die vorstehenden Relationen 1) bis 3), so erhält man:

$$n) \ldots r^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c}{\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma}$$

Multipliziert man ferner die vorstehenden Relationen 4) bis 6), so erhält man:

$$o) \ldots r^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}{\cos^2\alpha \cdot \cos^2\beta \cdot \cos^2\gamma}$$

Setzt man den aus Gleichung n) für $\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$ sich ergebenden Wert:

$$\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma = \frac{1}{8} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c}{r^3}$$

in Gleichung o), so ergibt sich:

$$r^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}{\frac{1}{64} \cdot \frac{(h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c)^2}{r^6}}$$

und hieraus erhält man:

$$r^3 = \frac{64 \cdot r^6}{8} \cdot \frac{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}{(h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c)^2}$$

oder:

$$1 = 8r^3 \cdot \frac{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}{(h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c)^2}$$

woraus sich schliesslich die Relation:

$$11) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{(h'_a \cdot h'_b \cdot h'_c)^2}{h''_a \cdot h''_b \cdot h''_c}}$$

ergibt.

Erkl. 523. Die beiden rechtwinkligen Dreiecke ADB und BGC der Figur 348 haben den Winkel β gemein, sonach müssen die beiden andern spitzen Winkel dieser rechtwinkligen Dreiecke einander gleich sein, es muss also:

$$1) \ldots \alpha_2 = \gamma_1$$

sein. In gleicher Weise kann man darthun, dass:

$$2) \ldots \alpha_1 = \beta_1$$

und dass:

$$3) \ldots \gamma_2 = \beta_2$$

ist.

Erkl. 524. Bezeichnet man mit α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die goniometrische Formel:

$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = 1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 273 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

F) Beweis der Relationen 12) bis 14):

Multipliziert man die vorstehenden Relationen 1) und 2), so erhält man:

$$r^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$$

Setzt man hierin nach vorstehender Relation 6) für:

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{h''_c}{2 \cdot r}$$

so erhält man:

$$r^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b}{\frac{h''_c}{2r}}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$12) \; \ldots \; r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b}{h''_c}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 13) und 14) darthun.

G) Beweis der Relationen 15) bis 17):

Aus den vorstehenden Relationen 1) und 2) ergibt sich:

$$\frac{h'_a}{\cos\alpha} = \frac{h'_b}{\cos\beta}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 251 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{h'_a + h'_b}{\cos\alpha + \cos\beta} = \frac{h'_a}{\cos\alpha}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass nach der vorstehenden Relation 1)

$$\frac{h'}{\cos\alpha} = 2r$$

ist:

$$p) \; \ldots \; h'_a + h'_b = 2r\,(\cos\alpha + \cos\beta)$$

Ferner ergibt sich aus den vorstehenden Relationen 4) und 5):

$$\frac{h''_a}{\cos\beta\cos\gamma} = \frac{h''_b}{\cos\alpha\cos\gamma}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion ebenfalls jenen Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{h''_a + h''_b}{\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma} = \frac{h''_a}{\cos\beta\cos\gamma}$$

und hieraus ergibt sich, in Rücksicht, dass nach vorstehender Relation 4):

$$\frac{h''_a}{\cos\beta\cos\gamma} = 2r$$

ist:

$$h''_a + h''_b = 2r\,[\cos\beta\cos\gamma + \cos\alpha\cos\gamma]$$

oder:

$$q) \; \ldots \; h''_a + h''_b = 2r \cdot \cos\gamma\,[\cos\alpha + \cos\beta]$$

Dividiert man die Gleichung p) durch Gleichung q), so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{h'_a + h'_b}{h''_a + h''_b} = \frac{1}{\cos\gamma}$$

Erkl. 525. Die in Aufgabe 887 vorgeführten Relationen, in welchen keine goniometrischen Funktionen enthalten sind, kann man auch auf rein planimetrischem Wege herleiten.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Setzt man hierin nach vorstehender Relation 3) für:

$$\frac{1}{\cos\gamma} = \frac{2r}{h'_c}$$

so erhält man:

$$\frac{h'_a + h'_b}{h''_a + h''_b} = \frac{2r}{h'_c}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

15) . . . $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_b}{h''_a + h''_b} \cdot h'_c$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 16) und 17) darthun.

H) Beweis der Relationen 18) bis 20):

In ganz analoger Weise wie die Relation 15) im vorstehenden hergeleitet wurde, kann man auch die Relationen 18) bis 20) herleiten (siehe die Erkl. 525).

Aufgabe 888. Man soll mittels der in den Aufgaben 842, 872, 881 und 888 vorgeführten Relationen die Richtigkeit nachfolgender Relationen darthun:

1) . . . $h'_a \cdot h''_a = h'_b \cdot h''_b = h'_c \cdot h''_c$

2) . . . $a \cdot a'' = h_b \cdot h'_b$

3) . . . $b \cdot b'' = h_c \cdot h'_c$

4) . . . $c \cdot c'' = h_a \cdot h'_a$

5) . . . $a \cdot a' = h_c \cdot h'_c$

6) . . . $b \cdot b' = h_a \cdot h'_a$

7) . . . $c \cdot c' = h_b \cdot h'_b$

8) . . . $a' \cdot a'' = h_a \cdot h''_a$

9) . . . $b' \cdot b'' = h_b \cdot h''_b$

10) . . . $c' \cdot c'' = h_c \cdot h''_c$

11) . . . $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2 h_a \cdot h'_a$

12) . . . $b^2 = a^2 + c^2 \pm 2 h_b \cdot h'_b$

13) . . . $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2 \cdot h_c \cdot h'_c$

14) . $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = h_a \cdot h'_a + h_b \cdot h'_b + h_c \cdot h'_c$

Erkl. 526. Die sämtlichen in der Aufgabe 888 vorgeführten Formeln sind rein planimetrische Formeln; man kann dieselben auch ohne Zuhülfenahme der trig. Formeln herleiten.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Multipliziert man die in der Aufgabe 887 vorgeführten Relationen 1) und 4), desgleichen 2) und 5), desgleichen 3) und 6), so erhält man bezw.:

$$h'_a \cdot h''_a = 4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$
$$h'_b \cdot h''_b = 4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$$

und $h'_c \cdot h''_c = 4r^2 \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma$

und aus diesen Gleichungen ergibt sich die Relation:

1) . . . $h'_a \cdot h''_a = h'_b \cdot h''_b = h'_c \cdot h''_c$

B) Beweis der Relationen 2) bis 10):

Multipliziert man die in Aufgabe 842 vorgeführte Relation 1) mit der in Aufgabe 881 vorgeführten Relation 2), so erhält man:

$$a \cdot a'' = 4r^2 \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$$

Multipliziert man ferner die in Aufgabe 872 vorgeführte Relation 2) mit der in Aufgabe 887 vorgeführten Relation 2), so erhält man die weitere Gleichung:

$$h_b \cdot h'_b = 4r^2 \cdot \sin\alpha \cos\beta \sin\gamma$$

und aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich die Relation:

2) . . . $a \cdot a'' = h_b \cdot h'_b$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 3) bis 10) darthun.

C) Beweis der Relationen 11) bis 13):

Nach dem in der Erkl. 112 vorgeführten erweiterten pythagoreischen Lehrsatz besteht, siehe Figur 848, unter anderem die Relation:

$$a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\cdot c\cdot c''$$

Setzt man hierin nach vorstehender Relation 4):

$$c\cdot c'' = h_a\cdot h'_a$$

so erhält man die Relation:

11) . . . $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2 h_a\cdot h'_a$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 12) und 13) darthun.

D) Beweis der Relation 14):

Addiert man die vorstehenden Relationen 2) bis 7), so erhält man:

$$2(h_a\cdot h'_a + h_b\cdot h'_b + h_c\cdot h'_c) = a\cdot a'' + a\cdot a' + b\cdot b'' + b\cdot b' + c\cdot c'' + c\cdot c'$$

oder:

$$2(h_a\cdot h'_b + h_b\cdot h'_b + h_c\cdot h'_c) = a(a' + a'') + b(b' + b'') + c(c' + c'')$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass:

$$a' + a'' = a$$
$$b' + b'' = b$$
und $$c' + c'' = c$$

ist, die Relation:

14) . $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = h_a\cdot h'_b + h_b\cdot h'_b + h_c\cdot h'_c$

(siehe die Erkl. 526).

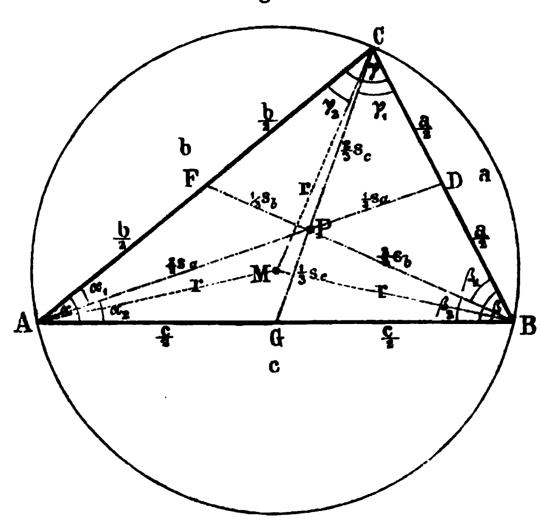
Aufgabe 889. Man soll nachweisen, dass zwischen den Mittellinien oder den Schwerlinien eines Dreiecks, den Winkeln desselben und dem Radius r des demselben umbeschriebenen Kreises die Relationen bestehen:

1) . . . $r = \frac{s_a}{\sqrt{2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}}$

2) . . . $r = \frac{s_b}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta}}$

3) . . . $r = \frac{s_c}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}}$

Figur 349.



Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Nach dem in der Erkl. 299 angeführten planimetrischen Lehrsatz besteht, siehe Figur 349, zwischen den Seiten b und c eines Dreiecks und der nach der dritten Seite a gezogenen Schwerlinie s_a desselben, die Relation:

a) . . . $b^2 + c^2 = 2\cdot\left[s^2_a + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$

Formt man diese Relation, wie folgt um:

$$b^2 + c^2 = 2\cdot s^2_a + 2\cdot\frac{a^2}{4}$$

$$b^2 + c^2 - \frac{a^2}{2} = 2\cdot s^2_a$$

$$2b^2 + 2c^2 - a^2 = 4 s^2_a$$

und setzt für b, c und a die aus den Relationen 1) bis 3) der Aufgabe 842 sich ergebenden Werte, so erhält man:

$$2\cdot 4r^2\sin^2\beta + 2\cdot 4r^2\cdot\sin^2\gamma - 4r^2\sin^2\alpha = 4\cdot s^2_a$$

oder:

$$4r^2\cdot[2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha] = 4\cdot s^2_a$$

$$r^2 = \frac{s^2_a}{2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

1) . . . $r = \frac{s_a}{\sqrt{2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

Aufgabe 890. Von einem Dreieck kennt man den Winkel $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$, die zur gegenüberliegenden Seite gehörige Schwerlinie $s_a = 12{,}9711$ m und den Radius $r = 8{,}125$ m des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises. Man soll die nicht gegebenen Seiten, die Winkel und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 53^0\,7'\,48{,}4'' \\ s_a = 12{,}9711 \text{ m} \\ r = 8{,}125 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Nach der in der Aufgabe 889 vorgeführten Relation 1) ist:

$$r = \frac{s_a}{\sqrt{2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}}$$

oder:

$$r = \frac{s_a}{\sqrt{2(\sin^2\beta + \sin^2\gamma) - \sin^2\alpha}}$$

Setzt man hierin nach der in der Erkl. 504 enthaltenen Gleichung 2) für:

$$\sin^2\beta + \sin^2\gamma = 1 - \cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$

und berücksichtigt man, dass $\beta+\gamma$ und α Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 94

$$\cos(\beta+\gamma) = - - \cos\alpha$$

gesetzt werden kann, so erhält man die Gleichung:

$$r = \frac{s_a}{\sqrt{2[1 - - \cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)] - \sin^2\alpha}}$$

oder:

$$1) \ldots r = \frac{s_a}{\sqrt{2[1 + \cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)] - \sin^2\alpha}}$$

Diese Gleichung in bezug auf $\cos(\beta-\gamma)$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2[1 + \cos\alpha\cos(\beta-\gamma)] - \sin^2\alpha = \frac{s^2_a}{r^2}$$

$$2[1 - \cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma)] = \frac{s^2_a}{r^2} + \sin^2\alpha$$

$$1 - \cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma) = \frac{1}{2}\left(\frac{s^2_a}{r^2} + \sin^2\alpha\right)$$

$$\cos\alpha\cdot\cos(\beta-\gamma) = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{s^2_a}{r^2} + \sin^2\alpha\right]$$

oder:

$$A) \ldots \cos(\beta-\gamma) = \frac{2 - \left(\frac{s_a}{r}\right)^2 - \sin^2\alpha}{2\cos(\beta-\gamma)}$$

nach welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\beta-\gamma$ berechnen kann. Aus $\beta-\gamma$ und $\beta+\gamma$ ($= 180^0 - \alpha$) kann man die Winkel β und γ berechnen. Sind hiernach diese Winkel berechnet, so kann man im weiteren verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 401 gesagt wurde.

Aufgabe 891. Man soll nachweisen, dass zwischen den Abschnitten, in welche die Seiten eines Dreiecks durch die winkelhalbierenden Transversalen zerlegt werden, den Winkeln des Dreiecks und dem Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises nachfolgende Relationen bestehen:

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a'_w}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{b'_w}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \gamma} \cdot \cos \frac{\gamma - \alpha}{2}$$

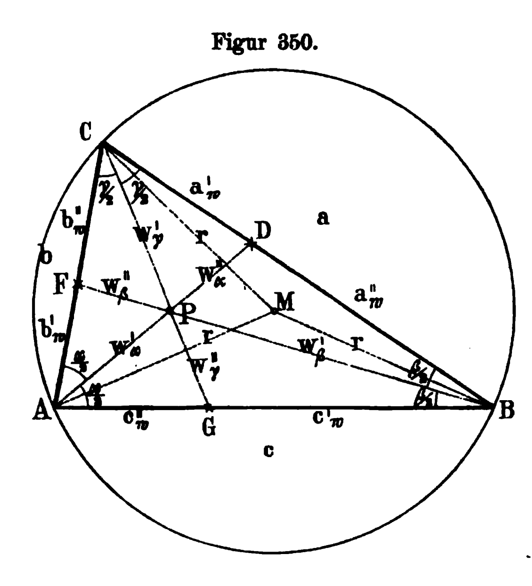
$$3) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c'_w}{\sin \frac{\gamma}{2} \sin \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$4) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a''_w}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \gamma} \cdot \cos \frac{\gamma - \beta}{2}$$

$$5) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{b''_w}{\sin \frac{\beta}{2} \sin \alpha} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

$$6) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c''_w}{\sin \frac{\gamma}{2} \sin \beta} \cdot \cos \frac{\beta - \alpha}{2}$$

Figur 350.



Nach dem in der Erkl. 315 vorgeführten planimetrischen Satz besteht, siehe Figur 350, zwischen den Abschnitten a'_w und a''_w der Seite a und den beiden Dreiecksseiten b und c die Relation:

$$a'_w : a''_w = b : c$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 251 vorgeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a'_w + a''_w}{b + c} = \frac{a'_w}{b}$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass $a'_w + a''_w = a$ ist:

$$a'_w = \frac{ab}{b+c}$$

Setzt man in diese Gleichung nach den in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1), 2) und 6) bezw.:

$$a = 2r \sin \alpha$$

$$b = 2r \sin \beta$$

$$b + c = 4r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

so erhält man:

$$a'_w = \frac{2r \sin \alpha \cdot 2r \sin \beta}{4r \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$r = \frac{a'_w \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{\sin \alpha \cdot \sin \beta}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 52 für:

$$\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

setzt und reduziert:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a'_w}{\sin \frac{\alpha}{2} \sin \beta} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) bis 6) darthun:

Aufgabe 892. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln, den winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks und dem Radius r des demselben umbeschriebenen Kreises die Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\alpha}{\sin \beta \sin \gamma} \cdot \cos \frac{\beta - \gamma}{2}$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\beta}{\sin \alpha \sin \gamma} \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$$

$$3) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\gamma}{\sin \alpha \sin \beta} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Nach dem in der Erkl. 314 vorgeführten planimetrischen Satz besteht, siehe Figur 350, zwischen der den Winkel α halbierenden Transversalen $AD = w_\alpha$, den diesen Winkel einschliessenden Seiten b und c und den Abschnitten a'_w und a''_w der dritten Seite a die Relation:

$$w_\alpha^2 = b \cdot c - a'_w \cdot a''_w$$

Setzt man in derselben für a'_w und a''_w die aus den Relationen 1) und 4) der Aufgabe 891 sich ergebenden Werte:

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

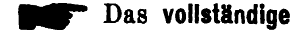
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.


Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

325. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie Forts. v. Heft 324. — Seite 609—624. Mit 5 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 324. — Seite 609—624. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit dem demselben umbeschriebenen Kreis, Fortsetzung. — Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit dem demselben einbeschriebenen Kreis.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint **monatlich in 3—4** Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung **der** wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven** Zeichnens etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des **Studierenden** überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den **Schulunterricht** benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der **mathematischen, technischen** und **naturwissenschaftlichen** Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden **kann, hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der Namen** verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser.** Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird **deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$a'_w = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

$$a''_w = \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}$$

und für $b\cdot c$ den aus der Relation 25) der Aufgabe 842 sich ergebenden Wert:

$$bc = 2r^2[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)]$$

so erhält man die Gleichung:

$$w^2_\alpha = 2r^2[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)] - \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}} \cdot \frac{2r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\gamma}{\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}$$

oder:

$$w^2_\alpha = 2r^2\left[\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) - \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\sin\gamma}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\beta}{2}}\right]$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 126:

$$\cos\frac{\gamma-\beta}{2} = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

und dass nach der Erkl. 506:

$$\cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma) = 2\sin\beta\sin\gamma$$

gesetzt werden kann:

$$w^2_\alpha = 2r^2\left[2\sin\beta\sin\gamma - \frac{2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\beta\sin\gamma}{\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}\right]$$

$$w^2_\alpha = 4r^2\sin\beta\sin\gamma\left[1 - \frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}\right]$$

Erkl. 527. Eine goniometrische Formel heisst:

1) $\cos^2(\alpha+\beta) - \cos^2(\alpha-\beta) = -\sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta$

(Siehe Formel 147 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Nach dieser Formel ist:

2) $\cos^2(\alpha-\beta) - \cos^2(\alpha+\beta) = +\sin 2\alpha\sin 2\beta$

Analog dieser Gleichung ist ferner:

3) . . . $\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\beta\cdot\sin\gamma$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta+\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, so kann man auch schreiben:

$$w^2_\alpha = 4r^2\cdot\sin\beta\sin\gamma\cdot\frac{\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Setzt man nunmehr nach der in der Erkl. 527 vorgeführten Gleichung 3) für:

$$\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2} - \cos^2\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\beta\cdot\sin\gamma$$

so geht jene Gleichung über in:

$$w^2_\alpha = 4r^2\cdot\sin\beta\cdot\sin\gamma\cdot\frac{\sin\beta\sin\gamma}{\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

und hieraus erhält man:

$$r^2 = \frac{w^2_\alpha}{4\sin^2\beta\sin^2\gamma}\cdot\cos^2\frac{\beta-\gamma}{2}$$

oder die Relation:

1) . . . $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{w_\alpha}{\sin\beta\sin\gamma}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

Aufgabe 893. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln eines Dreiecks, den Abschnitten der winkelhalbierenden Transversalen und dem Radius R des dem Dreieck **umbeschriebenen** Kreises die nachfolgenden Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w'_\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w'_\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

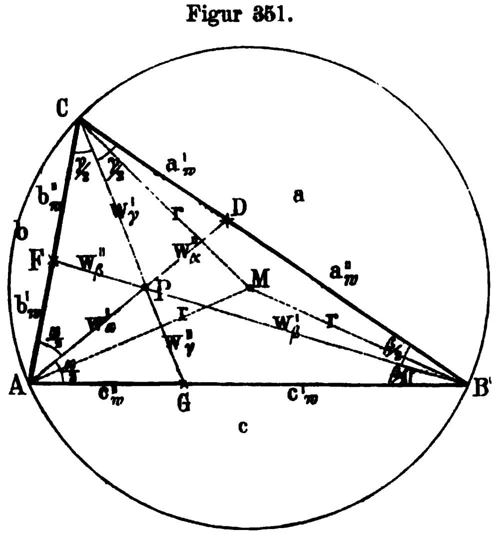
$$3) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w'_\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$4) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w''_\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$5) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w''_\beta}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$$

$$6) \ldots r = \frac{1}{4} \cdot \frac{w''_\gamma}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Figur 351.



Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Aus dem Dreieck PAG der Figur 351 ergibt sich nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass $\sphericalangle\, APG$ als Aussenwinkel des Dreiecks $APC = \frac{\alpha+\gamma}{2}$, und dass hiernach der $\sphericalangle\, AGP = 2R - \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha+\gamma}{2}\right)$ also $= \left[2R - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]$ ist:

$$\frac{w'_\alpha}{c''_w} = \frac{\sin\left[2R - \left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\right]}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

oder:

$$a) \ldots\ldots \frac{w'_\alpha}{c''_w} = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

ferner ist nach der in Aufgabe 891 vorgeführten Relation 6):

$$b) \ldots\ldots c''_w = \frac{2r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$w'_\alpha = \frac{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}} \cdot \frac{2r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$r = \frac{w'_\alpha}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\sin\beta}$$

welche Gleichung man wie folgt umformen kann:

Da $\frac{\alpha+\gamma}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ Komplementwinkel sind, so kann man für:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$$

setzen, ferner kann man nach der Erkl. 52 für:

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta}{2}$$

setzen; hiernach geht jene Gleichung über in:

$$r = \frac{w'_\alpha}{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2} \cdot 2 \cdot \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

oder in:

$$r = \frac{w'_\alpha}{4} \cdot \frac{\cos\frac{\beta-\alpha}{2}}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

Erkl. 528. Den Quotienten:

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)$$

kann man wie folgt umformen:

Setzt man in demselben:

$$\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$$

also:

$$\frac{\gamma}{2} = R - \frac{\alpha+\beta}{2}$$

so erhält man:

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+R-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

oder

$$= \cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(R-\frac{\beta-\alpha}{2}\right)$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$R-\frac{\beta-\alpha}{2} \text{ und } \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Komplementwinkel sind, dass man also nach der Erkl. 19:

$$\sin\left(R-\frac{\beta-\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

setzen kann, so geht jene Gleichung über in:

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = \cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

und hieraus ergibt sich, dass:

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = 1 \text{ ist.}$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 528 der Quotient $\cos\frac{\beta-\alpha}{2} : \sin\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right) = 1$ ist, so erhält man hiernach die Relation:

$$1) \ldots r = \frac{1}{4}\cdot\frac{w'_\alpha}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

B) Beweis der Relationen 3) bis 6):

Aus dem Dreieck PDC der Figur 351 ergibt sich nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass $\sphericalangle CPD$ als Aussenwinkel des Dreiecks $APC = \frac{\alpha+\gamma}{2}$ ist:

$$c) \ldots\ldots \frac{w''_\alpha}{a'_w} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

ferner ist nach der in der Aufgabe 891 vorgeführten Relation 1):

$$d) \ldots\ldots a'_w = \frac{2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

Aus den Gleichungen c) und d) folgt:

$$w''_\alpha = \frac{2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$r = \frac{w''_\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

oder, wenn man in Rücksicht, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$ Komplementwinkel sind, für:

$$\sin\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}$$

und nach der Erkl. 52 für:

$$\sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

setzt, und dann reduziert, die Relation:

$$4) \ldots r = \frac{1}{4}\cdot\frac{w''_\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

In ganz derselben Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 5) und 6) darthun.

Aufgabe 894. Man soll mittels der in den Aufgaben 842 u. 891 vorgeführten Relationen die Richtigkeit nachstehender Relationen darthun:

$$1) \ldots a'_w\cdot b'_w\cdot c'_w = a''_w\cdot b''_w\cdot c''_w$$

$$2) \ldots \frac{a''_w\cdot b''_w}{a'_w\cdot b'_w} = \frac{a}{b}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

$$3) \ldots \frac{a''_w \cdot c''_w}{a'_w \cdot c'_w} = \frac{a}{c}$$

$$4) \ldots \frac{b''_w \cdot c''_w}{b'_w \cdot c'_w} = \frac{b}{c}$$

A) Beweis der Relation 1):

Multipliziert man die aus den Relation 1) bis 3) der Aufgabe 891 für a'_w, b'_w und c'_w sich ergebenden Werte miteinander; desgleichen die aus den Relationen 4) bis 6) jener Aufgabe für a''_w, b''_w und c''_w sich ergebenden Werte, so erhält man für jedes dieser Produkte einen und denselben Wert, und hieraus ergibt sich die Relation:

$$1) \ldots a'_w \cdot b'_w \cdot c'_w = a''_w \cdot b''_w \cdot c''_w$$

B) Beweis der Relationen 2) bis 4):

Bildet man das Produkt der aus den Relationen 4) und 5) der Aufgabe 891 für a''_w und b''_w sich ergebenden Werte, desgleichen das Produkt der aus den Relationen 1) und 2) jener Aufgabe für a'_w und b'_w sich ergebenden Werte und bildet hierauf den Quotienten dieser so erhaltenen Produkte, so erhält man für diesen Quotienten dasselbe als für den Quotienten, welchen man dadurch bildet, dass man die aus den Relationen 1) und 2) der Aufgabe 842 für a und b sich ergebenden Werte einander dividiert. Hieraus ergibt sich die Relation:

$$2) \ldots \frac{a''_w \cdot b''_w}{a'_w \cdot b'_w} = \frac{a}{b}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 3) und 4) darthun.

Aufgabe 895. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$r = 8{,}125 \text{ m}$$
$$a'_w - a''_w = 1 \text{ m}$$
und
$$\alpha = 59^0\,29'\,23{,}1''$$

man soll hieraus die nicht gegebenen Seiten und Winkel, sowie den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus den in Aufgabe 89[illegible] vorgeführten Relationen 1) und 4) ergibt sich:

$$\frac{a'_w}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a''_w}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\gamma}\cos\frac{\gamma-\beta}{2}$$

oder, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 94 für:

$$\cos\frac{\beta-\gamma}{2} = \cos\frac{\gamma-\beta}{2}$$

gesetzt werden kann:

$$a) \ldots \frac{a'_w}{a''_w} = \frac{\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 251 angeführten Differenzsatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{a'_w - a''_w}{\sin\beta - \sin\gamma} = \frac{a'_w}{\sin\beta}$$

oder, wenn man nach der Erkl. 116 für:

$$\sin\beta - \sin\gamma = 2\cdot\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

und nach der in Aufgabe 891 vorgeführten Relation 1):

$$a'_w = \frac{2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

setzt:

$$\frac{a'_w - a''_w}{2\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}} = \frac{2r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\beta}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cdot\sin\beta}$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich, wenn in Rücksicht, dass $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\alpha}{2}$ Komplementwinkel sind, für:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt wird:

$$\frac{a'_w - a''_w}{4r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 120:

$$\text{A)} \;\ldots\ldots\; \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2} = \frac{a'_w - a''_w}{4r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}\,.$$

nach welcher Gleichung man aus $a'_w - a''_w$, r und α die Winkeldifferenz $\beta-\gamma$ berechnen kann. Aus $\beta-\gamma$ und $\beta+\gamma$ ($= 180^0 - \alpha$) kann man dann die Winkel β und γ berechnen. Sind β und γ berechnet, so kann man nach den in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) bis 3) aus r, α, β und γ die Seiten a, b und c berechnen, u. s. f.

Aufgabe 896. Desgleichen, wenn gegeben sind:

$$r = 7322{,}5 \text{ m}$$
$$w_\alpha = 4337{,}05 \text{ m}$$

und

$$\beta-\gamma = -113^0\,33'\,17{,}3''$$

Andeutung. Nach der in Aufgabe 892 vorgeführten Relation 1) ist:

$$r = \frac{1}{2}\cdot\frac{w_\alpha}{2\sin\beta\sin\gamma}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

Setzt man in derselben nach der Erkl. 506:

$$2\sin\beta\sin\gamma = \cos(\beta-\gamma) - \cos(\beta+\gamma)$$

so erhält man eine goniometrische Gleichung, in welcher nur die unbekannte Funktion $\cos(\beta+\gamma)$ vorkommt. Nach derselben kann man somit die Winkelsumme $\beta+\gamma$ berechnen. Aus $\beta+\gamma$ und $\beta-\gamma$ kann man dann die Winkel β und γ berechnen, u. s. f.

Aufgabe 897. Man soll nachweisen, dass zwischen den Seiten, den in der Mitte der drei Seiten errichteten Perpendikeln eines Dreiecks und dem Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises die Relationen bestehen:

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen 1) bis 3) kann man wie folgt darthun:

$$1) \ldots r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2_a}$$

$$2) \ldots r = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + p^2_b}$$

und

$$3) \ldots r = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p^2_c}$$

Aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck MDC der Figur 352 erhält man nach dem pythagoreischen Lehrsatz:

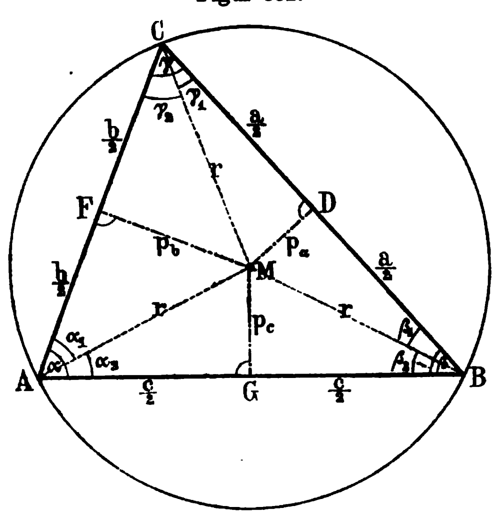
$$r^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2_a$$

oder:

$$1) \ldots r = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + p^2_a}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun:

Figur 352.



Aufgabe 898. Die Seite a eines Dreiecks ist um $d = 2,5$ m grösser als die Seite b; der der Seite a gegenüberliegende Winkel α beträgt $58^0\, 27'\, 36''$ und die Entfernung der kleinern Seite b vom Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist $p_b = 2,3$ m; man soll den Radius r dieses Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a - b = d = 2,5 \text{ m} \\ \alpha = 58^0\, 27'\, 36'' \\ p_b = 2,3 \text{ m} \end{cases}$

Andeutung. Aus der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) ergibt sich:

$$a) \ldots a = 2r \sin\alpha$$

ferner ergibt sich aus der in Aufgabe 897 vorgeführten Relation 2):

$$\frac{b}{2} = \sqrt{r^2 - p^2_b}$$

oder:

$$b) \ldots b = 2\sqrt{r^2 - p^2_b}$$

Subtrahiert man Gleichung b) von Gleichung a), so erhält man in bezug auf r die Bestimmungsgleichung:

$$A) \ldots a - b = 2r \sin\alpha - 2\sqrt{r^2 - p^2_b}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf r auf, so erhält man eine Gleichung, nach welcher man in Rücksicht der für $a - b$, α und p_b gegebenen Zahlenwerte den gesuchten Radius r berechnen kann.

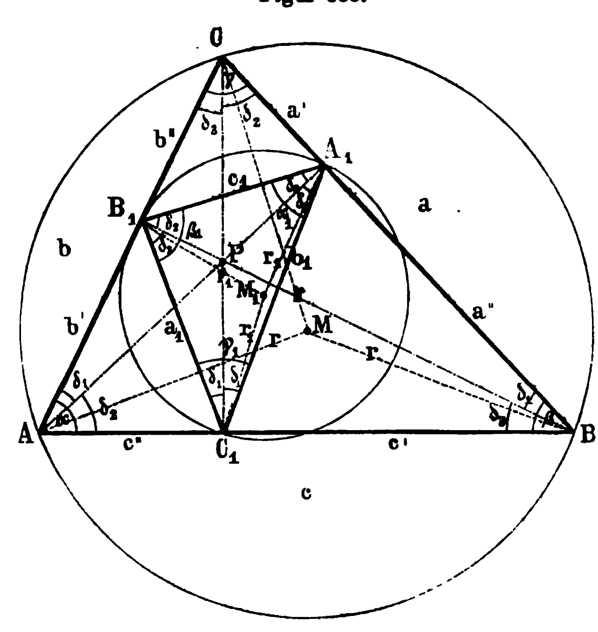
Aufgabe 899. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Seiten a_1, b_1 und c_1 des Dreiecks, welches durch die Fusspunkte der Höhen jenes Dreiecks bestimmt ist und den Winkeln jenes Dreiecks die Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{a_1}{\sin 2\alpha}$$

$$2) \ldots r = \frac{b_1}{\sin 2\beta}$$

$$3) \ldots r = \frac{c_1}{\sin 2\alpha}$$

Figur 353.



Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Wie in der Andeutung zur Aufgabe 653 gezeigt wurde besteht, siehe Fig. 353, zwischen der Seite a, dem gegenüberliegenden Winkel α eines Dreiecks und der jener Seite a gegenüberliegenden Seite a_1 des zugehörigen Höhendreiecks die Relation:

$$a_1 = a \cdot \cos\alpha$$

und hieraus erhält man:

$$a) \ldots a = \frac{a_1}{\cos\alpha}$$

Ferner hat man nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$b) \ldots r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt also:

$$r = \frac{a_1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man nach der Erkl. 52:

$$2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha$$

setzt, die Relation:

$$1) \ldots r = \frac{a_1}{\sin 2\alpha}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

Aufgabe 900. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises und dem Radius r_1 des Kreises, welcher dem durch die Fusspunkte der drei Höhen jenes Dreiecks bestimmten Dreieck umbeschrieben ist, die Relation besteht:

$$1) \ldots r_1 = \frac{1}{2} r$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relation kann man wie folgt darthun:

Nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) ist:

$$a) \ldots r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

für den Radius r_1 des dem Höhendreieck umbeschriebenen Kreises, hat man in Rücksicht, dass der der Seite a_1 desselben gegenüberliegende Winkel α_1 wie in der Auflösung der Aufg. 649 gezeigt wurde $= 2R - 2\alpha$ ist, die analoge Relation:

$$r_1 = \frac{a_1}{2\sin(2R - 2\alpha)}$$

oder, da nach der Erkl. 66:

$$\sin(2R - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$

ist:

$$\text{b)} \ldots r_1 = \frac{a_1}{2\sin 2\alpha}$$

Ferner hat man nach der Andeutung zu Aufgabe 653 die Relation:

$$\text{c)} \ldots a_1 = a \cdot \cos\alpha$$

Aus den Gleichungen b) und c) folgt:

$$\text{d)} \ldots r_1 = \frac{a \cdot \cos\alpha}{2\sin 2\alpha}$$

Dividiert man die Gleichung d) durch Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{a \cdot \cos\alpha}{2\sin 2\alpha} \cdot \frac{2\sin\alpha}{a}$$

oder:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{\sin 2\alpha}$$

und wenn man nach der Erkl. 52:

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

setzt:

$$\frac{r_1}{r} = \frac{\cos\alpha \sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots r_1 = \frac{1}{2} r$$

Aufgabe 901. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius r des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Höhenabschnitten und Seiten dieses Dreiecks und den Seiten des zugehörigen Höhendreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h'_a}{a_1}$$

$$2) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h'_b}{b_1}$$

$$3) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h'_c}{c_1}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Nach den in den Aufgaben 887, 899 und 8[illegible] vorgeführten Relationen 1) ist bezw.:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a}{\cos\alpha}$$

$$\text{b)} \ldots r = \frac{a_1}{\sin 2\alpha}$$

$$\text{c)} \ldots r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Aus den Gleichungen b) und c) folgt:

$$\frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{a_1}{2\sin\alpha\cos\alpha}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{d)} \ldots \cos\alpha = \frac{a_1}{a}$$

Setzt man diesen Wert für $\cos\alpha$ in Gleichung a), so erhält man die Relation:

$$1) \ldots r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h'_a}{a_1}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der Relationen 2) und 3) darthun.

Aufgabe 902. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Flächeninhalt F eines Dreiecks, der halben Summe s_1 der drei Seiten des zu diesem Dreieck gehörigen Höhendreiecks und dem Radius r des jenem Dreieck umbeschriebenen Kreises die Relation besteht:

$$1) \ldots r = \frac{F}{s_1}$$

Erkl. 529. Bezeichnen α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma = 4 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

(Siehe Formel 271 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Auflösung. Nach der in Aufgabe 868 vorgeführten Relation 2) ist:

$$a) \ldots r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}}$$

Ferner ist nach den in Aufgabe 899 vorgeführten Relationen 1) bis 3):

$$a_1 = r \sin 2\alpha$$
$$b_1 = r \sin 2\beta$$
$$c_1 = r \sin 2\gamma$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$a_1 + b_1 + c_1 = r(\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma)$$

oder in Rücksicht der in der Erkl. 529 angeführten goniometr. Formel:

$$b) \ldots a_1 + b_1 + c_1 = 4r \cdot \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

Für die halbe Summe s_1:

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2}$$

erhält man also:

$$c) \ldots s_1 = 2r \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$$

Setzt man den für $2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ sich hieraus ergebenden Wert:

$$2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma = \frac{s_1}{r}$$

in Gleichung a), so erhält man:

$$r = \sqrt{\frac{F \cdot r}{s_1}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$r^2 = \frac{F \cdot r}{s_1}$$

oder die Relation:

$$1) \ldots r = \frac{F}{s_1}$$

Aufgabe 903. Die Winkel eines Dreiecks seien $\alpha = 79^0\,36'\,40''$, $\beta = 33^0\,23'\,54{,}6''$ und $\gamma = 66^0\,59'\,25{,}4''$, der Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises sei $r = 5540{,}83$ m; man soll den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen, welches durch die Fusspunkte der drei Höhen jenes Dreiecks bestimmt ist.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 868 vorgeführten Relation 2) besteht zwischen dem Radius r_1 des dem gedachten Höhendreiecks umbeschriebenen Kreises, dessen Inhalt F_1 und dessen Winkeln $2R - 2\alpha$, $2R - 2\beta$ und $2R - 2\gamma$ (siehe die Auflösung der Aufgabe 649) und in Rücksicht, dass:

$$\sin(2R - 2\alpha) = \sin 2\alpha$$
$$\sin(2R - 2\beta) = \sin 2\beta$$

und

$$\sin(2R - 2\gamma) = \sin 2\gamma$$

ist, die Relation:

$$a) \ldots r_1 = \sqrt{\frac{F_1}{2\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma}}$$

ferner besteht nach der in Aufgabe 900 vorgeführten Relation zwischen jenem Radius r_1 und dem Radius r des dem Hauptdreieck umbeschriebenen Kreises die Relation:

$$b) \ldots r_1 = \frac{1}{2} r$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\frac{r}{2} = \sqrt{\frac{F_1}{2\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots F_1 = \frac{r^2}{2} \cdot \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin 2\gamma$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F_1 des Höhendreiecks berechnen kann.

---

b) Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit dem demselben einbeschriebenen Kreis.

Aufgabe 904. Man soll nachweisen, dass zwischen den drei Seiten a, b und c eines Dreiecks, bezw. der halben Summe $\frac{a+b+c}{2} = s$ derselben, den drei Winkeln α, β und γ, dem Inhalt F und dem Radius ϱ des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \varrho = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$2) \ldots \varrho = \frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$3) \ldots \varrho = \frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

$$4) \ldots \varrho = \frac{a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$5) \ldots \varrho = \frac{b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$6) \ldots \varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$7) \ldots \varrho = (s-a) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

$$8) \ldots \varrho = (s-b) \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

$$9) \ldots \varrho = (s-c) \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$10) \ldots \varrho = \frac{F}{s}$$

$$11) \ldots \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

$$12) \ldots \varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$13) \ldots \varrho = \sqrt{F \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 6):

Ist, siehe Figur 354, der Kreis um M der dem Dreieck ABC einbeschriebene Kreis und verbindet man den Mittelpunkt M dieses Kreises mit den drei Eckpunkten des Dreiecks, so werden nach der Erkl. 530 oder nach der Erkl. 531 die Winkel des Dreiecks durch diese Verbindungslinien halbiert, wie in der Figur 354 angedeutet. Fällt man ferner von M die zu den Dreiecksseiten a, b und c gehörigen Senkrechten MD, MG und MH, so gehen dieselben nach der Erkl. 532 durch die Berührungspunkte jener Seiten und des Kreises um M; diese drei Senkrechten sind einander gleich und zwar je gleich dem Radius ϱ des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises.

Aus den bei D rechtwinkligen Dreiecken MDC und MDB ergeben sich bezw. die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)} \ldots t_3 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \\ \text{und} \\ \text{b)} \ldots t_2 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \end{array}\right\} \text{(siehe Erkl. 43 und die Erkl. 533)}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$t_3 + t_2 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$t_3 + t_2 = a$$

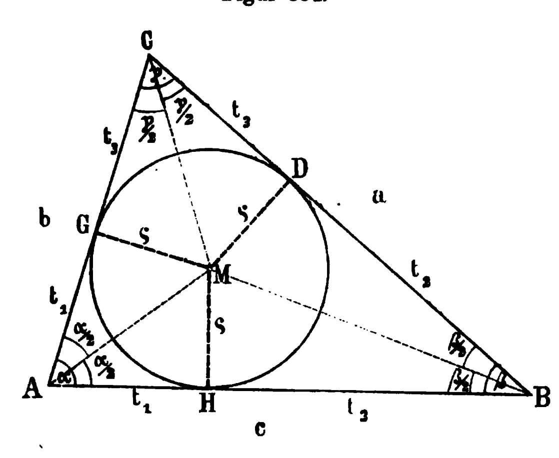
ist:

$$a = \varrho \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

und hieraus ergibt sich die in der Aufgabe vorgeführte Relation:

$$1) \ldots \varrho = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

Figur 354.



Setzt man nach der in der Erkl. 424 vorgeführten goniometrischen Formel für:

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}=\frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

und berücksichtigt man, dass $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta+\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, dass also:

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, so geht jene Gleichung über in:

$$\varrho=\frac{a}{\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}}$$

und hieraus ergibt sich die in der Aufgabe vorgeführte Relation:

$$4)\;\ldots\;\varrho=\frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen 2) und 5) und der Relationen 3) und 6) darthun.

B) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Nach der Erkl. 534 bestehen, unter der Voraussetzung, dass $s=\frac{a+b+c}{2}$ ist, die Relationen:

$$a)\;\ldots\;t_1=s-a$$

$$b)\;\ldots\;t_2=s-b$$

und

$$c)\;\ldots\;t_3=s-c$$

Da sich nun aus jedem der rechtwinkligen Dreiecke MAH und MAG die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{t_1}$$

ergibt, so erhält man in Rücksicht der Gleichung a):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho}{s-a}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$7)\;\ldots\;\varrho=(s-a)\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Da sich ferner aus jedem der rechtwinkligen Dreiecke MBD und MBH die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{t_2}$$

ergibt, so erhält man in Rücksicht der Gleichung b):

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\varrho}{s-b}$$

Erkl. 580. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Halbierungslinien der drei Winkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt und dieser Punkt ist gleichweit von den drei Seiten des Dreiecks entfernt; er ist der Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises."

Siehe die Teile dieser Encyklopädie, welche über die Planimetrie handeln.

Erkl. 581. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Halbierungslinie eines Winkels ist der geometrische Ort für alle Punkte, welche von den beiden Schenkeln des Winkels gleichen Abstand haben."

und hieraus ergibt sich die Relation:

8) . . . $\varrho = (s-b)\cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

Da sich schliesslich aus jedem der rechtwinkligen Dreiecke MCD und MCG die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{t_3}$$

ergibt, so erhält man in Rücksicht der Gleichung c):

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{s-c}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

9) . . . $\varrho = (s-c)\cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

Erkl. 582. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Fällt man vom Mittelpunkt eines Kreises aus die Senkrechte auf eine Tangente desselben, so geht dieselbe durch den Berührungspunkt.“

C) Beweis der Relation 10):

Der Inhalt F des Dreiecks ABC besteht, siehe Figur 354, aus der Summe der Inhalte der Dreiecke ABM, BCM und CAM. Betrachtet man die Seiten a, b und c bezw. als die Grundlinien dieser drei Dreiecke, so sind MH, MD und MG bezw. die Höhen derselben; da jede dieser Höhen gleich dem Radius ϱ ist, so hat man nach der Erkl. 34 für den Inhalt F des ganzen Dreiecks ABC:

$$F = \frac{a\cdot\varrho}{2} + \frac{b\cdot\varrho}{2} + \frac{c\cdot\varrho}{2}$$

oder:

$$F = \frac{a+b+c}{2}\cdot\varrho$$

oder wenn man:

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

setzt:

a) . . . $F = s\cdot\varrho$

und aus dieser Gleichung ergibt sich die Relation:

10) . . . $\varrho = \frac{F}{s}$

Erkl. 583. Die Berührungspunkte D, G und H des Kreises um M mit den Dreiecksseiten a, b und c, siehe Figur 354, zerlegen diese Dreiecksseiten in solche Abschnitte, von welchen je zwei bezw. einander gleich sind, wie in der Figur 354 durch die Buchstaben t_1, t_2 und t_3 angedeutet ist (siehe Erkl. 465).

Die Gleichheit je zweier jener Abschnitte der Dreiecksseiten ergibt sich aus der Kongruenz

der Dreiecke MAH und MAG
„ „ MBH und MBD
und „ „ MCD und MCG

D) Beweis der Relation 11):

Setzt man nach der Erkl. 170 in der bewiesenen Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

für:

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

so erhält man:

$$\varrho = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$$

oder:

$$\varrho = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2}}$$

oder die Relation:

11) . . . $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Erkl. 584. Setzt man die halbe Summe der drei Dreiecksseiten a, b und c gleich s, in Zeichen:

1) . . . $\frac{a+b+c}{2} = s$

und berücksichtigt man, dass in der Figur 354:

a) . . . $a = t_2 + t_3$

b) . . . $b = t_1 + t_3$

und

c) . . . $c = t_1 + t_2$

ist, so geht jene Gleichung 1) über in:

$$\frac{2 \cdot t_1 + 2 \cdot t_2 + 2 \cdot t_3}{2} = s$$

oder in:

2) . . . $t_1 + t_2 + t_3 = s$

und hieraus erhält man:

d) . . . $t_1 = s - (t_2 + t_3)$

e) . . . $t_2 = s - (t_1 + t_3)$

und

f) . . . $t_3 = s - (t_1 + t_2)$

oder, wenn man bezw. die Gleichungen a) bis c) berücksichtigt:

3) . . . $t_1 = s - a$

4) . . . $t_2 = s - b$

und

5) . . . $t_3 = s - c$

E) Beweis der Relation 12):

Durch Multiplikation der vorstehend bewiesenen Relationen 7) bis 9) erhält man:

$$\varrho^3 = (s-a)(s-b)(s-c) \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $(s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)$ den aus der vorstehenden Relation 11) sich ergebenden Wert:

$$(s-a)(s-b)(s-c) = s \cdot \varrho^2$$

so erhält man:

$$\varrho^3 = s \cdot \varrho^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

12) . . . . $\varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

F) Beweis der Relation 13):

Setzt man in der vorstehenden Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

für s den aus der vorstehenden Relation 12) sich ergebenden Wert:

$$s = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

so erhält man:

$$\varrho = \frac{F}{\frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}}$$

oder:

$$\varrho^2 = F \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

13) . . . $\varrho = \sqrt{F \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

Aufgabe 905. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, den drei Höhen h_a, h_b und h_c desselben und den Winkeln α, β und γ die Relationen bestehen:

1) . . . $\varrho = \frac{h_a}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$

2) . . . $\varrho = \frac{h_b}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$

3) . . . $\varrho = \frac{h_c}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Ist, siehe Figur 355, der Kreis um M der dem Dreieck ABC einbeschriebene Kreis und ist ferner AJ die zur Seite a gehörige Höhe h_a des Dreiecks, und zieht man durch den Endpunkt O des Durchmessers OD die zur Seite a Parallele RS, so erhält man die ähnlichen Dreiecke ABC und ASR. Aus diesen Dreiecken ergibt sich nach der Erkl. 585 die Relation:

$$\overline{BC} : \overline{SR} = \overline{AJ} : \overline{AP}$$

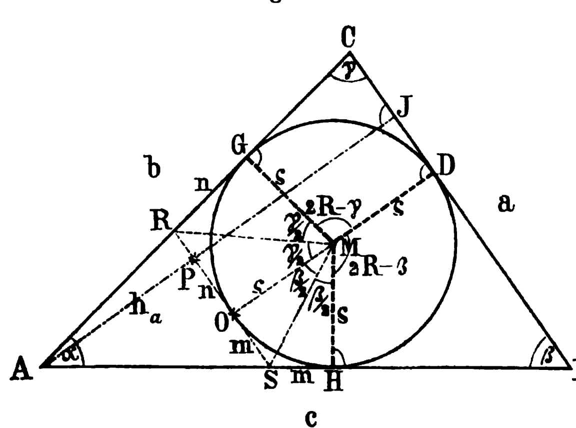
oder, in Rücksicht, dass:

$$\overline{BC} = a$$

$$\overline{SR} = m + n \text{ (siehe die Figur 355)}$$

$$\overline{AJ} = h_a$$

Figur 355.



und

$$\overline{AP} = \overline{AJ} - \overline{PJ} \text{ oder } = \overline{AJ} - \overline{OD}$$
$$\text{oder } = h_a - 2\varrho$$

ist, die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{a}{m+n} = \frac{h_a}{h_a - 2\varrho}$$

Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 1) hat man für die Seite a:

$$\text{b)} \ldots a = \varrho \cdot \left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

Die Abschnitte m und n kann man wie folgt in h_a, ϱ, β und γ ausdrücken:

Berücksichtigt man, dass in dem Viereck $BDMH$ nach der Erkl. 536

$$\sphericalangle DMH = 2R - \beta$$

dass ebenso in dem Viereck $CDMG$

$$\sphericalangle GMD = 2R - \gamma$$

dass also bezw.:

$$\sphericalangle OMH = \beta$$

und $\sphericalangle OMG = \gamma$

ist, und verbindet man M mit R und S, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke MOS und MOR, in welchen:

$$\left.\begin{aligned} \sphericalangle OMS &= \frac{\beta}{2} \\ \text{und} \quad \sphericalangle OMR &= \frac{\gamma}{2} \end{aligned}\right\} \text{(siehe Erkl. 465)}$$

ist. Aus diesen Dreiecken ergeben sich die Relationen:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\overline{OS}}{\overline{MO}} \text{ oder } = \frac{m}{\varrho}$$

und

$$\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{OR}}{\overline{MO}} \text{ oder } = \frac{n}{\varrho}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{c)} \ldots m = \varrho \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

und

$$\text{d)} \ldots n = \varrho \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Substituiert man die Werte für a, m und n aus den Gleichungen b) bis d) in Gleichung a), so erhält man:

$$\frac{\varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}\right)}{\varrho\left(\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)} = \frac{h_a}{h_a - 2\varrho}$$

oder:

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{h_a}{h_a - 2\varrho}$$

Nach Anwendung der in der Erkl. 587 angeführten goniometrischen Formel erhält man hieraus:

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a}{h_a - 2\varrho}$$

Erkl. 585. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In ähnlichen Dreiecken verhalten sich ein paar homologe Seiten wie die zu denselben gehörigen Höhen.“

Erkl. 586. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind in einem Viereck zwei Winkel zusammen $= 2R$, so müssen auch die beiden andern Winkel des Vierecks $= 2R$ sein.“ (Siehe Erkl. 332.)

Erkl. 587. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta} = \operatorname{ctg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\beta$$

(Siehe Formel 176 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 588. Aus den in der Aufgabe 905 vorgeführten Relationen ergeben sich durch einfache Umformung die Relationen:

$$1) \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{h_a-2\varrho}{h_a}$$

$$2) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\frac{h_b-2\varrho}{h_b}$$

und

$$3) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{h_c-2\varrho}{h_c}$$

oder nach der Erkl. 15:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}=\frac{h_a}{h_a-2\varrho}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf ϱ auf, so erhält man:

$$h_a-2\varrho=h_a\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$2\varrho=h_a-h_a\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

oder die Relation:

$$1) \ldots \varrho=\frac{h_a}{2}\left(1-\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

In ganz derselben Weise kann man die beiden andern analogen Relationen 2) und 3) herleiten, wenn man sich in der Figur 355 bezw. die Höhen h_b und h_c gezogen denkt. (Siehe Erkl. 588.)

Aufgabe 906. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises und den Höhen h_a, h_b und h_c die Relation besteht:

$$\frac{1}{\varrho}=\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}$$

Auflösung. Die Richtigkeit nebenstehender Relation kann man wie folgt darthun:

Für den Inhalt F eines Dreiecks hat man nach der Erkl. 34, wenn a, b und c die Seiten und h_a, h_b und h_c die zugehörigen Höhen bedeuten:

$$F=\frac{a\cdot h_a}{2}$$

$$F=\frac{b\cdot h_b}{2}$$

und

$$F=\frac{c\cdot h_c}{2}$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man bezw.:

$$a) \ldots\ldots \frac{1}{h_a}=\frac{a}{2F}$$

$$b) \ldots\ldots \frac{1}{h_b}=\frac{b}{2F}$$

$$c) \ldots\ldots \frac{1}{h_c}=\frac{c}{2F}$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich die Relation:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a}{2F}+\frac{b}{2F}+\frac{c}{2F}$$

oder:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{1}{F}$$

Setzt man in diese Gleichung $\frac{a+b+c}{2}=s$ und nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10):

$$F=s\cdot\varrho$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=s\cdot\frac{1}{s\cdot\varrho}$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduktion die zu beweisende Relation:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

Aufgabe 907. Die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks misst 10,52 m, der derselben gegenüberliegende Winkel α beträgt $40^0\,10'\,20''$; wie gross ist der Radius ϱ des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a = 10{,}52 \text{ m} \\ \alpha = 40^0\,10'\,20'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ des dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Andeutung. Nach der in der Erkl. 539 aufgestellten Relation 1):

$$\text{A)} \ldots \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

kann man in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\beta = 90^0 - \alpha$ ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen.

Erkl. 539. Ist in der Fig. 354 der Winkel γ ein rechter Winkel, also $= 90^0$, ist also das Dreieck ABC ein bei C rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse also c und dessen beide Katheten a und b sind, so gehen die in der Aufgabe 904 vorgeführten Relationen 4) bis 6) bezw. über in:

$$\varrho = \frac{a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin 45^0}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varrho = \frac{b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin 45^0}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

und

$$\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{\beta}{2}}{\cos 45^0}$$

Da nun nach der Erkl. 216:

$$\sin 45^0 = \cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2} \text{ oder } = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot\sqrt{2}} \text{ oder } = \frac{2}{2\cdot\sqrt{2}} \text{ oder } = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist, so erhält man für den Radius ϱ des einem rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises:

$$1) \ldots \varrho = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$2) \ldots \varrho = \frac{b}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

und

$$3) \ldots \varrho = c\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

Aufgabe 908. Man soll den Radius ϱ des einem rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen, wenn die Hypotenuse c des Dreiecks $= 200{,}84$ dm misst und der spitze Winkel $\alpha = 10^0\,20'\,32''$ beträgt.

Gegeben: $\begin{cases} c = 200{,}84 \text{ dm} \\ \alpha = 10^0\,20'\,32'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ des dem gegebenen rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Andeutung. Nach der in der Erkl. 539 aufgestellten Gleichung 3):

$$\text{A)} \ldots \varrho = c\sqrt{2} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

kann man in Rücksicht der für c und α gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\beta = 90^0 - \alpha$ ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer" kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 325. — Seite 625—640. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und **zwar in vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-**naturwissenschaftlichen** Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der **mathematischen, technischen** und **naturwissenschaftlichen** Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung tunlichst berücksichtigt.

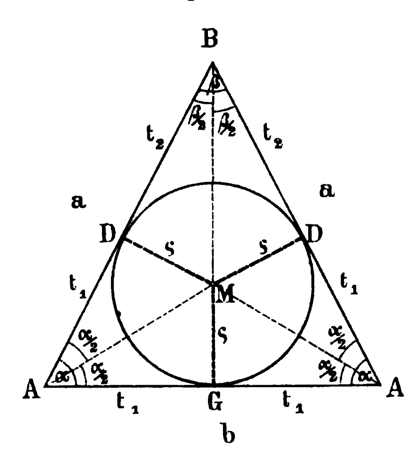
Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Aufgabe 909. Der Schenkel eines gleichschenkligen Dreiecks ist $a = 126{,}45$ m, der Scheitelwinkel desselben ist $\beta = 70^0\ 36'\ 20{,}4''$; man soll den Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 126{,}45 \text{ m} \\ \beta = 70^0\ 36'\ 20{,}4'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ des dem gegeb. gleichschenkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Figur 356.



Andeutung. Aus den rechtwinkligen Dreiecken MDB und MDA der Figur 356 ergeben sich die Relationen:

$$\left.\begin{array}{l} \text{a)} \ldots\ t_2 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \\ \text{und} \\ \text{b)} \ldots\ t_1 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 43)}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$t_1 + t_2 = \varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

oder in Rücksicht, dass, siehe Figur 356:

$$\text{c)} \ldots\ t_1 + t_2 = a$$

ist:

$$a = \varrho\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots\ \varrho = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a und β gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass:

$$2\alpha = 180^0 - \beta$$

$$\text{also} \quad \alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}$$

ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen kann. Siehe auch die Erkl. 540 und 541.

Erkl. 540. Setzt man in nebenstehender Gleichung A):

$$\varrho = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

nach der in der Erkl. 424 vorgeführten goniometrischen Formel:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

so geht dieselbe über in:

$$1) \ldots\ \varrho = \frac{a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AGM der Figur 356 ergibt sich ferner:

$$t_1 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

oder, da, siehe Figur 356:

$$t_1 = \frac{b}{2}$$

ist:

$$\frac{b}{2} = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$2) \ldots\ \varrho = \frac{b}{2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$2\text{a)} \ldots\ \varrho = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Erkl. 541. Ist, siehe Fig. 356, das Dreieck ABC ein gleichseitiges Dreieck, ist also:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} = \frac{60^0}{2} \text{ oder } = 30^0$$

und

$$t_1 = t_2 = \frac{a}{2}$$

wenn a die Seite des gleichseitigen Dreiecks bedeutet, so erhält man z. B. aus dem rechtwinkligen Dreieck MGA:

$$\text{ctg } 30^0 = \frac{a}{2 \cdot \varrho}$$

oder:

$$\varrho = \frac{a}{2 \text{ ctg } 30^0}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 542:

$$1) \ldots \varrho = \frac{a}{2\sqrt{3}}$$

Macht man noch den Nenner rational, so erhält man:

$$\varrho = \frac{a \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}$$

oder:

$$2) \ldots \varrho = \frac{a}{6}\sqrt{3}$$

Erkl. 542. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\text{ctg } 30^0 = \sqrt{3}$$

(Siehe Aufgabe 8 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 910. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 145$ m und die beiden anliegenden Winkel $\beta = 9^0\, 31'\, 38{,}2''$ und $\gamma = 96^0\, 43'\, 58{,}5''$; man soll den Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 145 \text{ m} \\ \beta = 9^0\, 31'\, 38{,}2'' \\ \gamma = 96^0\, 43'\, 58{'}5'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 4):

$$A) \ldots \varrho = \frac{a \cdot \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

kann man in Rücksicht der für a, β und γ gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht dass $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$ ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen.

Aufgabe 911. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. 13,15 und 14 m lang; wie gross ist der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ b = 15 \text{ m} \\ c = 14 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ des einbeschriebenen Kreises

Andeutung. Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 11) ist:

$$A) \ldots \varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

Setzt man in derselben für a, b und c die gegebenen Zahlenwerte und berücksichtigt, dass:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist, so kann man nach dieser Gleichung den gesuchten Radius ϱ berechnen.

Aufgabe 912. Von einem Dreieck kennt man die zwei Seiten $a = 101$ und $b = 29$ m, sowie den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel $\alpha = 43^0\ 36'\ 10{,}1''$; man soll den Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 101\text{ m} \\ b = 29\text{ m} \\ \alpha = 43^0\ 36'\ 10{,}1'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht die Relation:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$$

hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots \sin\beta = \frac{b}{a}\cdot\sin\alpha$$

nach welcher Gleichung man den Winkel β berechnen kann. Ist β hiernach berechnet, so kann man den gesuchten Radius ϱ mittels der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 4):

$$\text{B)} \ldots \varrho = \frac{a\cdot\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

berechnen, indem $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist. Man kann auch, da b gegeben ist, die in Aufgabe 904 vorgeführte Relation 5) benutzen.

Aufgabe 913. Der Umfang eines Dreiecks ist $U = 2720$ m, die zwei Winkel α und β dieses Dreiecks sind bezw. $79^0\ 36'\ 40{,}12''$ und $33^0\ 23'\ 54{,}56''$. Man soll den Radius des einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} U = 2720\text{ m} \\ \alpha = 79^0\ 36'\ 40{,}12'' \\ \beta = 33^0\ 23'\ 54{,}56'' \end{cases}$

Gesucht: ϱ

Andeutung. Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 12) ist:

$$\varrho = s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$s = \frac{a+b+c}{2} \text{ oder } = \frac{U}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\text{A)} \ldots \varrho = \frac{U}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für U, α und β gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen kann.

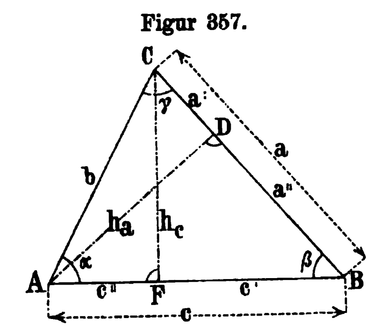
Aufgabe 914. Von einem Dreieck sind gegeben die Seite $a = 15$ m, die zu derselben gehörige Höhe $h_a = 11{,}2$ m und die Seite $b = 13$ m; wie gross ist der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a = 15\text{ m} \\ h_a = 11{,}2\text{ m} \\ b = 13\text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 357, mittels der aus dem recht-

Figur 357.



winkligen Dreieck ADC sich ergebenden Relation:

$$a) \ldots \sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

den Winkel γ.

Ist hiernach γ berechnet, so berechne man, wie in der Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, aus a, b und γ die Winkel α und β.

Sind hiernach auch diese Winkel berechnet, so berechne man den gesuchten Radius ϱ mittels einer der in Aufgabe 904 vorgeführten Relationen 4) und 5).

Aufgabe 915. Die Seite b eines Dreiecks misst 4010 m; die zu den andern Seiten a und c gehörigen Höhen h_a und h_c messen bezw. 3980,488 m und 400 m. Man soll den Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} b = 4010 \text{ m} \\ h_a = 3980{,}488 \text{ m} \\ h_c = 400 \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 357, mittels der aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und AFC sich ergebenden Relationen:

$$a) \ldots \sin\gamma = \frac{h_a}{b}$$

und

$$b) \ldots \sin\alpha = \frac{h_c}{b}$$

die Winkel α und γ. Sind diese Winkel hiernach berechnet, so kann man, in Rücksicht, dass:

$$\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$$

ist, den gesuchten Radius ϱ mittels der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 5):

$$A) \ldots \varrho = \frac{b \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

berechnen.

Aufgabe 916. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 5{,}4 \text{ m}$$
$$\alpha = 52^0\, 40'\, 24''$$

Man soll die Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Mittels der in der Erkl. 539 vorgeführten Relationen 1) bis 3) kann man in Rücksicht, dass $\beta = 90^0 - \alpha$ ist, die gesuchten Seiten des Dreiecks berechnen; man erhält aus jenen Relationen:

$$A) \ldots a = \varrho \sqrt{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

$$B) \ldots b = \varrho \sqrt{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

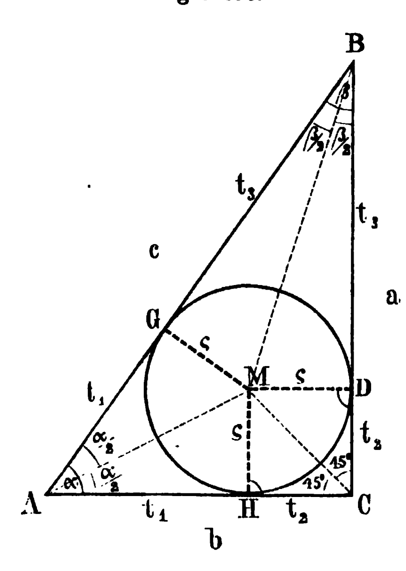
und

$$C) \ldots c = \frac{\varrho \sqrt{2}}{2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}$$

Aufgabe 917. Von einem rechtwinkligen Dreieck sind gegeben die Kathete $a = 10{,}5$ m und der Radius $\varrho = 4{,}08$ m des demselben einbeschriebenen Kreises.

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Figur 358.



Andeutung. In der Figur 358 ist:

$$a = t_2 + t_3$$

und

$$t_2 = \varrho$$

indem die rechtwinkligen Dreiecke *MDC* und *MHC* gleichschenklige Dreiecke sind. Aus diesen Gleichungen ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots a = \varrho + t_3$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck *BDM* die Relation:

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{t_3}{\varrho}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots\ldots t_3 = \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$a = \varrho + \varrho \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots\ldots \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{a - \varrho}{\varrho}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel β berechnen kann. Ist β berechnet, so kann man α mittels der Relation:

$$\text{B)} \ldots\ldots \alpha = 90^0 - \beta$$

und die Seiten b und c mittels der Beziehungen:

$$\text{C)} \ldots c = \frac{a}{\cos\beta}$$

und

$$\text{D)} \ldots b = a \cdot \operatorname{tg}\beta$$

berechnen.

Aufgabe 918. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\alpha = 36^0\,20'\,12''$$
$$\beta = 48^0\,6'\,10''$$
$$\varrho = 20{,}438 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus den in der Aufgabe 904 vorgeführten Relationen 4) bis 6) ergeben sich die Relationen:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{\varrho \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\beta}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{B)} \ldots b = \frac{\varrho \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{C)} \ldots c = \frac{\varrho \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}$$

Setzt man in dieselben die für ϱ, α und β gegebenen Werte und berücksichtigt man, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, so kann man nach diesen Gleichungen die gesuchten Seiten des Dreiecks berechnen. Aus der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 13 ergibt sich die Relation:

$$F = \frac{\varrho^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 15:

$$\text{D)} \ldots F = \varrho^2 \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F direkt aus den gegebenen Stücken des Dreiecks berechnen kann.

Aufgabe 919. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 26^3/_4 \text{ m}$$
$$a = 128^1/_5 \text{ m}$$
$$\beta = 70^0 20' 10{,}6''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

erhält man:

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho} - \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann. Ist γ berechnet, so kann man mittels der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 3):

$$\varrho = \frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

und in Rücksicht, dass $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$ ist, die Seite c berechnen, u. s. f.

Aufgabe 920. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 2{,}409 \text{ dm}$$
$$c = 9{,}008 \text{ dm}$$
$$\alpha = 72^0 36' 40''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Diese Aufgabe kann man in ganz analoger Weise lösen wie die vorhergehende Aufgabe 919; man kann auch wie folgt verfahren:

Aus der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 6):

$$\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

erhält man:

$$\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}} = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{\varrho}$$

Erkl. 543. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $\cos\alpha + \sin\beta =$
$$2\sin\left(45^0 + \frac{\beta-\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

2) . . . $\cos\alpha - \sin\beta =$
$$2\cos\left(45^0 - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cdot\sin\left(45^0 - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

(Siehe die Formeln 225 und 227 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:
$$\frac{\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}} = \frac{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}$$
oder, wenn man in bezug auf den Zähler und den Nenner des Bruches rechts die in der Erkl. 543 vorgeführten goniometrischen Formeln in Anwendung bringt, indem man in denselben
$$\alpha = \frac{\gamma}{2}$$
$$\text{und } \beta = \frac{\beta}{2}$$
setzt:
$$\frac{2\sin\left(45^0 + \frac{\beta-\gamma}{4}\right)\cdot\cos\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right)}{2\cos\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right)\cdot\sin\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right)} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}$$
Durch Umformung erhält man aus dieser Gleichung:
$$\frac{\sin\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right)}{\cos\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right)}\cdot\frac{\cos\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right)}{\sin\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right)} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}$$
$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right) = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}$$
$$\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right) = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}\cdot\frac{1}{\operatorname{ctg}\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{4}\right)}$$
oder
$$\text{A)} \ldots\ \operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}\right) = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2} + \varrho}{c\sin\frac{\alpha}{2} - \varrho}\cdot\operatorname{tg}\left(45^0 - \frac{\gamma+\beta}{2}\right)$$
Nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für α, c und ϱ gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass:
$$\beta + \gamma = 2R - \alpha$$
ist, den Winkel $45^0 - \frac{\gamma-\beta}{4}$ und alsdann auch den Winkel $\gamma - \beta$ berechnen kann. Aus $\gamma + \beta$ und $\gamma - \beta$ kann man leicht die Winkel γ und β selbst bestimmen. Die Seiten a und b kann man im weiteren mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 921. Von einem Dreieck sind gegeben:
$$\varrho = 3{,}68 \text{ m}$$
$$b + c = S = 35{,}08 \text{ m}$$
$$a = 18{,}24 \text{ m}$$
Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Nach der Erkl. 534 besteht zwischen dem Abschnitt t_1 der Seite c oder der Seite b, siehe Figur 359, der halben

Summe s der drei Seiten des Dreiecks, und der Seite a, die Relation:

$$t_1 = s - a$$

oder:

$$t_1 = \frac{a+b+c}{2} - a$$

und hieraus erhält man:

$$t_1 = \frac{b+c-a}{2} \text{ (s. Erkl. 544)}$$

oder, in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe:

$$b + c = S$$

ist:

$$\text{a)} \quad \dots\dots \quad t_1 = \frac{S-a}{2}$$

nach welcher Gleichung man den Abschnitt t_1 berechnen kann.

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AHM, siehe Figur 359, erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{t_1}$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$\text{A)} \quad \dots\dots \quad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{2 \cdot \varrho}{S-a}$$

Nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für $S\,(=b+c)$, a und ϱ gegebenen Zahlenwerte den Winkel α berechnen kann.

Ist der Winkel α hiernach berechnet, so kennt man von dem Dreieck, a, α und $b+c$; man kann also zur Berechnung der übrigen Stücke verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Erkl. 544. Setzt man in den in der Erkl. 534 aufgestellten Relationen 3) bis 5):

$$t_1 = s - a$$
$$t_2 = s - b$$
$$\text{und } t_3 = s - c$$
$$\text{für } s = \frac{a+b+c}{2}$$

und reduziert, so erhält man für die Seitenabschnitte t_1, t_2 und t_3, bezw. die Werte:

$$1) \dots t_1 = \frac{b+c-a}{2}$$

$$2) \dots t_2 = \frac{a+c-b}{2}$$

und

$$3) \dots t_3 = \frac{a+b-c}{2}$$

Aufgabe 922. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 40{,}2 \text{ dm}$$
$$b + c = S = 326{,}6 \text{ dm}$$
$$\alpha = 43^\circ\, 0'\, 10{,}4''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Setzt man in der in der Erkl. 544 aufgestellten Relation:

$$t_1 = \frac{b+c-a}{2}$$

gemäss der Aufgabe:

$$b + c = S$$

und löst alsdann diese Gleichung in bezug auf a auf, so erhält man:

$$\text{a)} \dots a = S - 2\,t_1$$

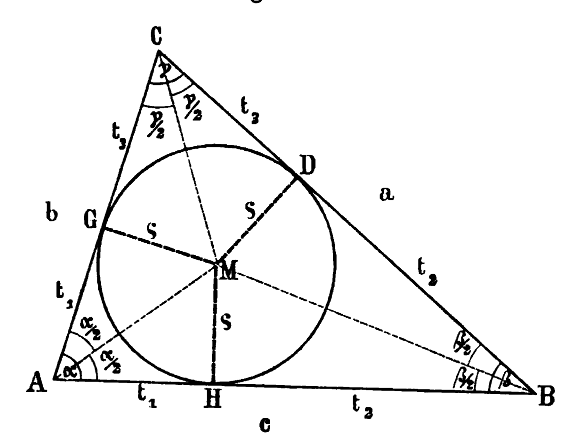
Berücksichtigt man nunmehr, dass sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AHM der Figur 359 die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{t_1}$$

ergibt, und dass hiernach:

$$t_1 = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Figur 859.



oder nach der Erkl. 15:

b) . . . $t_1 = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

ist, so erhält man, wenn man diesen Wert für t_1 in Gleichung a) substituiert:

A) . . . $a = S - 2\varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für $S\,(= b + c)$, ϱ und α gegebenen Zahlenwerte, die Seite a berechnen kann.

Ist a berechnet, so bestimme man die Summe $s = \frac{a+b+c}{2}$ und berücksichtige, dass nach der Relation 10 in Aufgabe 904;

$$F = s \cdot \varrho$$

und dass nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \alpha$$

ist, dass sich also aus diesen Gleichungen die Relation:

$$s \cdot \varrho = \frac{b \cdot c}{2} \cdot \sin \alpha$$

oder die Relation:

B) . . . $b \cdot c = \frac{2 \cdot s \cdot \varrho}{\sin \alpha}$

ergibt. Mittels dieser Gleichung und der gegebenen Gleichung:

C) . . . $b + c = S$

kann man im weiteren leicht die Seiten b und c berechnen.

Aufgabe 923. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 2{,}08 \text{ m}$$
$$b - c = d = 120{,}4 \text{ m}$$
$$a = 98{,}94 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Setzt man in der in der Erkl. 544 aufgestellten Relation:

$$t_3 = \frac{a+b-c}{2}$$

gemäss der Aufgabe:

$$b - c = d$$

so erhält man:

a) . . . $t_3 = \frac{a+d}{2}$

In analoger Weise erhält man aus der in jener Erkl. 544 aufgestellten Relation:

$$t_2 = \frac{a+c-b}{2}$$

$$t_2 = \frac{a-(b-c)}{2}$$

oder:

b) . . . $t_2 = \frac{a-d}{2}$

Berücksichtigt man ferner, dass sich au- den rechtwinkligen Dreiecken MDC und MDB der Figur 359 bezw. die Relation:

$$\text{c)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{t_3}$$

und

$$\text{d)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{t_2}$$

ergeben, so erhält man aus den Gleichungen a und c) die Relation:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\varrho}{a+d}$$

und aus den Gleichungen b) und d) die Relation:

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{2\varrho}{a-d}$$

nach welchen Gleichungen man die Winkel β und γ berechnen kann. Sind hiernach β und γ berechnet, so kann man im weiteren, da die Seite a gegeben ist, aus diesen Stücken die Seiten b und c mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 924. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 0{,}045 \text{ m}$$
$$b - c = d = 0{,}843 \text{ m}$$
$$\beta = 20^0\,36'\,8{,}4''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Formt man die in der Erkl. 544 aufgestellte Relation:

$$t_2 = \frac{a+c-b}{2}$$

wie folgt um:

$$t_2 = \frac{a-(b-c)}{2}$$

und setzt gemäss der Aufgabe:

$$b - c = d$$

so erhält man:

$$\text{a)} \ldots t_2 = \frac{a-d}{2}$$

Ferner erhält man aus dem rechtwinkligen Dreieck MDB der Figur 359:

$$\text{b)} \ldots t_2 = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man in bezug auf a die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{a-d}{2} = \frac{\varrho}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

oder:

$$\frac{a-d}{2} = \varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots a = 2\varrho\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + d$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für ϱ, β und $d\ (= b - c)$ gegebenen Zahlenwerte die Seite a berechnen kann. Ist a berechnet, so kennt man von dem Dreieck a, $b - c$ und β; man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 488 gesagt wurde.

Aufgabe 925. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 208{,}46$$
$$a = 1222{,}08 \text{ m}$$
$$\alpha = 64^0\, 22'\, 3{,}8''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne zunächst die Summe der Seiten b und c wie folgt:

Aus der Figur 359 ergibt sich:

$$b + c = t_1 + t_3 + t_1 + t_2$$

oder:

$$\text{a) } \ldots\ b + c = 2 \cdot t_1 + (t_3 + t_2)$$

Berücksichtigt man, dass, siehe Fig. 359:

$$\text{b) } \ldots\ t_2 + t_3 = a$$

ist und dass sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AHM die Relation:

$$\text{c) } \ldots\ t_1 = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \text{ (siehe Erkl. 48)}$$

ergibt, so geht in Rücksicht der Gleichungen b) und c) die Gleichung a) über in:

$$\text{A) } \ldots\ b + c = 2\varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + a$$

wonach man die Summe $b + c$ bestimmen kann. Ist hiernach $b + c$ berechnet, so kann man im weiteren verfahren entweder wie in der Andeutung zur Aufgabe 922 gesagt wurde, indem man zunächst $s = \frac{b + c + a}{2}$ und dann $b \cdot c$ bestimmt, oder wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 926. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 20{,}36 \text{ dm}$$
$$a + b + c = 248{,}27 \text{ dm}$$
$$\alpha = 62^0\, 3'\, 40''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 7):

$$\varrho = (s - a) \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

in welcher $s = \frac{a + b + c}{2}$ ist, erhält man:

$$s - a = \frac{\varrho}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

$$s - a = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$\text{A) } \ldots\ a = s - \varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man zunächst die Seite a berechnen kann. Ist a berechnet, so kann man leicht $b+c$ bestimmen, und dann im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 922 gesagt wurde, indem man auch das Produkt $b \cdot c$ bestimmt.

Aufgabe 927. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$F = 28{,}934 \text{ qm}$$
$$a = 17{,}029 \text{ m}$$

und

$$\varrho = 1{,}0587 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 901 vorgeführten Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

ergibt sich:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{F}{\varrho}$$

nach welcher Gleichung man s oder $\frac{a+b+c}{2}$ berechnen kann.

Ferner ergibt sich aus der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 7):

$$\varrho = (s-a)\cdot \text{tg}\,\frac{\alpha}{2}$$

die Beziehung:

$$\text{b)} \ldots \text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{s-a}$$

nach welcher Gleichung man, da ϱ und a gegeben und s bereits berechnet wurde, den Winkel α berechnen kann. Im weiteren kann man verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 922 gesagt wurde, indem man zunächst $b+c$ $(=2s-a)$ und $b \cdot c$ bestimmt.

Aufgabe 928. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 10{,}6 \text{ m}$$
$$\alpha = 114^0\,10'\,30''$$
$$t_3 = 51{,}08 \text{ m (siehe Figur 359)}$$

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck MDC der Figur 359 sich ergebenden Relation:

$$\text{A)} \ldots \text{tg}\,\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{t_3}$$

kann man den Winkel γ berechnen.

Berücksichtigt man ferner, dass, siehe Figur 359:

$$b = t_1 + t_3$$

ist, und dass sich aus dem rechtwinkligen Dreieck AGM:

$$\text{tg}\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho}{t_1}$$

oder:

$$t_1 = \varrho \cdot \text{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$$

ergibt, so erhält man hiernach:

B) . . . $b = \varrho \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + t_3$

wonach man die Seite b berechnen kann. Ist hiernach b und γ berechnet, so kennt man von dem Dreieck b, γ und α; man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Auflösung zur Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Aufgabe 929. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 40{,}08 \text{ dm}$$
$$\alpha = 28^0\, 10'\, 43''$$
$$h_c = 96{,}43 \text{ dm}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der zur Seite c gehörigen Höhe h_c und dem gegebenen Winkel α (siehe Figur 357), berechne man nach der aus dem rechtwinkligen Dreieck ACF sich ergebenden Relation:

A) . . . $b = \frac{h_c}{\sin \alpha}$ (siehe Erkl. 42)

zunächst die Seite b.

Ist die Seite b berechnet, so benutze man zur Berechnung des Winkels γ die in Aufgabe 904 vorgeführte Relation 2):

$$\varrho = \frac{b}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}$$

aus derselben erhält man nämlich:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{\varrho}$$

oder:

B) . . . . $\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \frac{b}{\varrho} - \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

nach welcher Gleichung man aus b, ϱ und α den Winkel γ berechnen kann. Sind b und γ berechnet, so kennt man von dem Dreieck die drei Winkel und eine Seite; man kann somit die übrigen Seiten aus diesen Stücken mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 930. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 1{,}46 \text{ m}$$
$$a = 4{,}36 \text{ m}$$
$$h_c = 3{,}80 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe. Man berechne zunächst aus a und h_c, siehe Figur 357, mittels der Relation:

$$\sin \beta = \frac{h_c}{a}$$

den Winkel β. Dann berechne man mittels der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 1), aus ϱ, a und β den Winkel γ, u. s. f.

Aufgabe 931. Von einem Dreieck sind gegeben:

$\varrho = 0{,}64$ m
$c'' = 0{,}86$ m (siehe Figur 357)
$\alpha = 12^0\,13'\,10''$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 357, aus c'' und α die Seite b nach der aus dem rechtwinkligen Dreieck AFC sich ergebenden Relation:

A) . . . $b = \frac{c''}{\cos\alpha}$ (siehe Erkl. 47)

Dann verfahre man weiter, wie in der Andeutung zur Aufgabe 929 gesagt wurde.

Aufgabe 932. Von einem Dreieck sind gegeben:

$\varrho = 120{,}04$ m
$h_c = 208{,}36$ m
$c' = 98{,}27$ m (siehe Figur 357)

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne zunächst aus h_c und c', siehe Figur 357, die Seite a und den Winkel β des rechtwinkligen Dreiecks BFC, verfahre dann weiter, analog wie in der Andeutung zur Aufgabe 929 gesagt wurde.

Aufgabe 933. Von einem Dreieck sind gegeben:

$\varrho = 42{,}003$ m
$h_c = 108{,}42$ m
$c = 300{,}5$ m

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 13) ergibt sich:

a) . . . $F = \frac{\varrho^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

ferner hat man nach der Erkl. 34 die Relation:

b) . . . $F = \frac{c \cdot h_c}{2}$

und aus diesen Relationen folgt zunächst:

c) . . . . $\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{\varrho^2}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

Setzt man in dieser Gleichung nach der in der Erkl. 538 aufgestellten Relation 3):

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{h_c - 2\varrho}{h_c}$$

so erhält man in bezug auf den Winkel $\frac{\gamma}{2}$ die goniometrische Gleichung:

$$\frac{c \cdot h_c}{2} = \frac{\varrho^2}{\frac{h_c - 2\varrho}{h_c} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . . $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{2\varrho^2}{c\,(h_c - 2\varrho)}$

nach welcher Gleichung man den Winkel berechnen kann. Ist γ berechnet, so kennt man von dem Dreieck h, c und γ; im weiteren kann man somit verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gesagt wurde.

Aufgabe 934. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 0{,}89 \text{ m}$$
$$h_c = 3{,}46 \text{ m}$$
$$\gamma = 32^0\, 24'\, 10{,}4''$$

Man soll die nicht gegebenen Stücke dieses Dreiecks berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 933.

Aus der in voriger Aufgabe aufgestellten Gleichung A) ergibt sich:

$$c = \frac{2\varrho^2}{(h_c - 2\varrho)\cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots c = \frac{2\varrho^2}{h_c - 2\varrho}\cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man zunächst die Seite c berechnen kann.

Aufgabe 935. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$F = 1800 \text{ qm}$$
$$h_c = 24 \text{ m}$$
$$\varrho = 11{,}25 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Nach der Erkl. 34 besteht die Relation:

$$F = \frac{c\cdot h_c}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots c = \frac{2\cdot F}{h_c}$$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann. Nach der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10) ist:

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{F}{\varrho}$$

Ferner ist nach der in jener Aufgabe 904 vorgeführten Relation 9):

$$\text{b)} \ldots \varrho = (s - c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung für s und c die Werte aus Gleichung A) und a), so erhält man:

$$\varrho = \left(\frac{F}{\varrho} - \frac{2F}{h_c}\right)\operatorname{tg}\cdot\frac{\gamma}{2}$$

oder:

$$\varrho = \frac{F\cdot h_c - 2\varrho\cdot F}{\varrho\cdot h_c}\cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

$$\varrho = \frac{F(h_c - 2\varrho)}{\varrho\cdot h_c}\cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{B)} \ldots\ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho^2\cdot h_c}{F\cdot(h_c - 2\varrho)}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel γ berechnen kann, u. s. f.

Aufgabe 936. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius ϱ des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, dem Radius r des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises und den Winkeln α, β und γ des Dreiecks die Beziehungen bestehen:

$$1) \ldots \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

und

$$2) \ldots \varrho = \frac{F}{4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 12) ist:

$$a) \ldots \varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

ferner ist nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 10):

$$b) \ldots r = \frac{s}{4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Setzt man den aus Gleichung b) für s sich ergebenden Wert in Gleichung a), so ergibt sich:

$$\varrho = 4r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

oder:

$$\varrho = 4r \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \cdot \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduktion die Relation:

$$1) \ldots \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

B) Beweis der Relation 2):

Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10) ist:

$$a) \ldots \varrho = \frac{F}{s}$$

ferner ist nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 10):

$$b) \ldots r = \frac{s}{4 \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Setzt man den aus dieser Gleichung b) für s sich ergebenden Wert in Gleichung a), so erhält man die Relation:

$$2) \ldots \varrho = \frac{F}{4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$$

Aufgabe 937. Zwei Winkel eines Dreiecks sind $\alpha = 53^0\, 7'\, 48{,}4''$ und $\beta = 46^0\, 23'\, 49{,}9''$, der Radius r des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist $= 225$ m. Man soll den Radius ϱ des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 53^0\, 7'\, 48{,}4'' \\ \beta = 46^0\, 23'\, 49{,}9'' \\ r = 725 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Nach der in Aufgabe 4… vorgeführten Relation 1):

$$A) \ldots \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

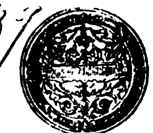
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

327. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 326. — Seite 641—656. Mit 4 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 326. — Seite 641—656. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

kann man in Rücksicht der für r, α und β gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, den gesuchten Radius ϱ berechnen.

Aufgabe 938. Die Winkel α und β eines Dreiecks messen bezw. $11^0\,25'\,16{,}3''$ und $124^0\,58'\,33{,}6''$; wie gross ist der Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises, wenn der Radius ϱ des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises 9,6 m misst?

Gegeben: $\begin{cases} \alpha = 11^0\,25'\,16{,}3'' \\ \beta = 124^0\,58'\,33{,}6'' \\ \varrho = 9.6 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: Radius r

Andeutung. Aus der in voriger Andeutung angeführten Relation erhält man:

$$\text{A)} \ldots r = \frac{\varrho}{4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für ϱ, α und β gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, den gesuchten Radius r berechnen kann.

Aufgabe 939. Zwei Seiten a und b eines Dreiecks messen bezw. 8,12 dm und 9,29 dm; der Radius des diesem Dreieck umbeschriebenen Kreises ist $r = 4{,}70$ dm; wie gross ist der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises?

Gegeben: $\begin{cases} a = 8{,}12 \text{ dm} \\ b = 9{,}29 \text{ dm} \\ r = 4{,}70 \text{ dm} \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ

Andeutung. Aus a und r, bezw. aus b und r berechne man zunächst nach den in Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) und 2) die Winkel α und β; man erhält:

$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = \frac{a}{2r}$$

und

$$\text{B)} \ldots \sin\beta = \frac{b}{2r}$$

Sind hiernach die Winkel α und β berechnet, so kennt man von dem Dreieck α, β und r; man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 937 gesagt wurde.

Aufgabe 940. Von einem Dreieck sind gegeben:

$\varrho = 96$ m
$r = 732{,}25$ m
$a = 101$ m

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots \sin\alpha = \frac{a}{2r}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann. Ist hiernach α berechnet, so kennt man von dem Dreieck α, ϱ und a; man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 925 gesagt wurde.

Aufgabe 941. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho = 192 \text{ m}$$
$$r = 2055{,}125 \text{ m}$$
$$\alpha = 77^0\,19'\,10{,}6''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Man berechne zunächst aus r und α nach der in der Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) die Seite a; man erhält:

$$\text{A)} \ldots a = 2r \sin\alpha$$

Ist hiernach a berechnet, so kennt man von dem Dreieck ϱ, a und α; man kann somit im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 925 gesagt wurde.

Aufgabe 942. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$r = 8125 \text{ m}$$
$$\varrho = 4000 \text{ m}$$
$$\gamma = 59^0\,29'\,23{,}1''$$

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten dieses Dreiecks berechnen.

Erkl. 545. Eine goniometrische Formel heisst:

$$1) \ldots 2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

(Siehe Formel 194 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\beta = \frac{\beta}{2}$$

so erhält man:

$$2) \ldots 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

oder:

$$3) \ldots \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}$$

Andeutung. Aus der in der Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho}{4r\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 545:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}$$

und berücksichtigt man, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{2} = \frac{\varrho}{4r\sin\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2} + \frac{\varrho}{2r\sin\frac{\gamma}{2}}$$

nach welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ $(= 2R - \gamma)$ kann man dann leicht die Winkel α und β berechnen.

Die Dreiecksseiten kann man im weiteren aus den Winkeln und dem Radius ϱ, nach den in der Aufgabe 904 vorgeführten Be-

lationen 4) bis 6) berechnen; man kann sie auch, auf einfachere Weise aus den Winkeln und dem Radius r, nach den in der Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) bis 3) berechnen.

Aufgabe 943. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$$
$$\beta = 67^0\,22'\,48{,}5''$$
$$r + \varrho = S = 121{,}25 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1) ist:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

und nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 4) ist:

$$\text{b)} \ldots \varrho = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$r + \varrho = \frac{a}{2\sin\alpha} + \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe:

$$r + \varrho = S$$

ist:

$$\frac{a}{2\sin\alpha} + \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = S$$

und hieraus ergibt sich:

$$a \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\frac{\alpha}{2}} = S$$

oder:

$$a = \frac{S \cdot \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\sin\alpha}$$

$$a = \frac{S \cdot \sin\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots a = \frac{S \cdot \sin\alpha}{1 + 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

nach welcher Gleichung man die Seite a berechnen kann. Ist hiernach a berechnet, so kann man die übrigen Seiten b und c mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 944. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho : r = V = 1:2$$
$$\gamma = 60^0\,23'\,10{,}4''$$
$$h_c = 15 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Winkel und Seiten des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in der Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho = 4r \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$$

erhält man:

$$4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{r}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\frac{\varrho}{r} = V$$

ist:

$$4 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} = V$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} = \frac{V}{4 \sin\frac{\gamma}{2}}$$

Setzt man nach der Erkl. 545:

$$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2}$$

und berücksichtigt man, dass:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$\frac{\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \sin\frac{\gamma}{2}}{2} = \frac{V}{4 \sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \cos\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{V}{2 \sin\frac{\gamma}{2}} + \sin\frac{\gamma}{2}$$

nach welcher Gleichung man die Winkeldifferenz $\alpha - \beta$ berechnen kann. Aus $\alpha - \beta$ und $\alpha + \beta$ ($= 2R - \gamma$) kann man die Winkel α und β berechnen.

Sind die Winkel α und β berechnet, so kann man im weiteren verfahren, wie in der Andeutung zur Aufgabe 343 gesagt wurde.

Aufgabe 945. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$c : (a + b) = V = 1:2$$
$$r : \varrho = V_1 = 8125 : 4$$
$$h_c = 12 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Nach der in Antwort der Frage 21 aufgestellten Mollweide schen Formel 89 ist:

Erkl. 546. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$$

(Siehe Formel 214 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Erkl. 547. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . $4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma = \sin2\alpha+\sin2\beta+\sin2\gamma$

(Siehe Formel 271 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2};\ \beta = \frac{\beta}{2}$$

und

$$\gamma = \frac{\gamma}{2}$$

so erhält man:

2) . $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma$

Erkl. 548. Aus der nebenstehenden Gleichung:

$$\frac{\sin\gamma}{\frac{1}{V_1}-\sin\gamma} = V$$

erhält man $\sin\gamma$ wie folgt:

$$\sin\gamma = V\cdot\frac{1}{V_1} - V\cdot\sin\gamma$$

$$\sin\gamma + V\cdot\sin\gamma = \frac{V}{V_1}$$

$$\sin\gamma(1+V) = \frac{V}{V_1}$$

oder:

$$\sin\gamma = \frac{V}{V_1(1+V)}$$

$$\frac{c}{a+b} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\frac{c}{a+b} = V$$

ist:

a) . . . . $\frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = V$

Ferner ist, wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 944 gezeigt wurde:

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$\frac{r}{\varrho} = V_1$$

also:

$$\frac{\varrho}{r} = \frac{1}{V_1}$$

ist:

b) . . . $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{4V_1}$

Aus den beiden goniometrischen Gleichungen a) und b) kann man die Winkel wie folgt berechnen:

Aus Gleichung a) ergibt sich nach der Erkl. 546:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta} = V$$

oder in Rücksicht, dass $\alpha+\beta$ und γ Supplementwinkel sind, dass also $\sin(\alpha+\beta) = \sin\gamma$ gesetzt werden kann:

c) . . . $\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta} = V$

und aus Gleichung b) ergibt sich nach der Erkl. 547:

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{4} = \frac{1}{4V_1}$$

oder:

d) . . . $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma = \frac{1}{V_1}$

Setzt man den aus Gleichung d) für $\sin\alpha+\sin\beta$ sich ergebenden Wert:

$$\sin\alpha+\sin\beta = \frac{1}{V_1} - \sin\gamma$$

in Gleichung c), so erhält man in bezug auf $\sin\gamma$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{\sin\gamma}{\frac{1}{V_1}-\sin\gamma} = V$$

und hieraus erhält man nach der Erkl. 548:

A) . . . $\sin\gamma = \frac{V}{V_1(1+V)}$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für V und V_1 gegebenen Zahlenwerte den Winkel γ berechnen kann. In ganz derselben Weise kann man aus den Gleichungen c) und d) den Winkel α, sowie den Winkel β berechnen.

Sind die Winkel berechnet, so kann man die Seiten a und b aus der Höhe h_c und jenen Winkeln berechnen. Die dritte Seite c ergibt sich schliesslich aus der gegebenen Beziehung:

$$c:(a+b) = V$$

Aufgabe 946. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$a:b = V = 13:15$$
$$\varrho : h_c = V_1 = 1:3$$
$$r = 8125 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Nach der Sinusregel besteht die Relation:

$$a:b = \sin\alpha : \sin\beta$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$a:b = V$$

ist, so ergibt sich aus diesen Gleichungen die Relation:

$$\text{a)} \ldots \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = V$$

Nach der in der Aufgabe 904 vorgeführten Relation 6) ist:

$$\varrho = \frac{c \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

ferner ist, wie in der Andeutung zur Aufgabe 349 gezeigt wurde:

$$h_c = \frac{c\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich durch Division:

$$\frac{\varrho}{h_c} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{\sin\gamma}{c\sin\alpha\sin\beta}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 52:

$$\frac{\varrho}{h_c} = \frac{c\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{c \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} \cdot 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

und nach gehöriger Reduktion:

$$\frac{\varrho}{h_c} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\frac{\varrho}{h_c} = V_1$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener Gleichung die Relation:

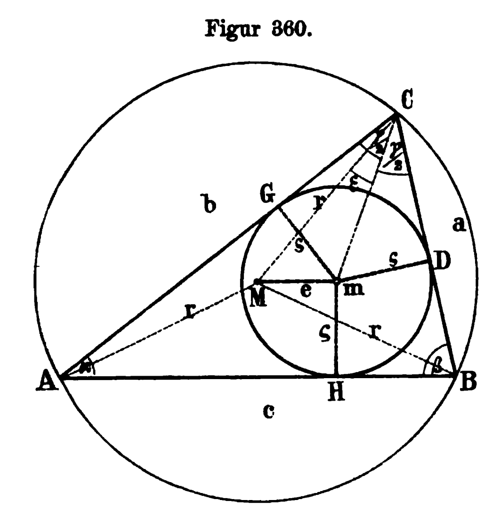
$$\text{b)} \ldots \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} = V_1$$

Aus den beiden goniometrischen Gleichungen a) und b) kann man in Rücksicht, dass $\alpha + \beta + \gamma = 2R$ ist, die Winkel berechnen.

Aufgabe 947. Man soll nachweisen, dass zwischen der Entfernung e des Mittelpunkts des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises von dem Mittelpunkt des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises, und den Radien r und ϱ dieser beiden Kreise die Relation besteht:

$$e^2 = r^2 - 2r \cdot \varrho$$

Figur 360.



Erkl. 549. Aus dem rechtwinkligen Dreieck mDC der Figur 360 ergibt sich die Relation:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\overline{mD}}{\overline{mC}}$$

oder:

$$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho}{\overline{mC}}$$

und hieraus erhält man:

$$\overline{mC} = \frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relation kann man wie folgt darthun:

Ist, siehe Figur 360, M der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises und ist m der Mittelpunkt des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises, und man verbindet M mit C und m und m mit C, so erhält man das schiefwinklige Dreieck MmC; aus demselben ergibt sich nach dem Projektionssatz:

$$\overline{Mm}^2 = \overline{MC}^2 + \overline{mC}^2 - 2\cdot\overline{MC}\cdot\overline{mC}\cdot\cos\varepsilon$$

oder, in Rücksicht, dass:

$$\overline{Mm} = e$$
$$\overline{MC} = r$$
$$\overline{mC} = \frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}} \text{ (siehe Erkl. 549)}$$

und $\varepsilon = \frac{\beta - \alpha}{2}$ (siehe Erkl. 550)

ist:

$$e^2 = r^2 + \frac{\varrho^2}{\sin^2\frac{\gamma}{2}} - 2\cdot r\cdot\frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

Durch Umformung erhält man aus dieser Gleichung:

$$e^2 = r^2 + \frac{2r\cdot\varrho^2}{2r\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}} - 2r\cdot\frac{\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}\cdot\cos\frac{\beta-\alpha}{2}$$

oder:

$$\text{a)}\ .\ e^2 = r^2 - \frac{2\cdot r\cdot\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left[\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \frac{\varrho}{2r\sin\frac{\gamma}{2}}\right]$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der in Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho = 4r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

für:

$$\text{b)} \ldots \frac{\varrho}{2r\sin\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$$

gesetzt werden kann und dass nach der in der Erkl. 545 angeführten goniometrischen Formel:

$$\text{c)} \ldots 2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

ist, so erhält man aus Gleichung a) in Rücksicht dessen:

$$e^2 = r^2 - \frac{2r\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left[\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\right]$$

oder:

$$e^2 = r^2 - \frac{2r\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}}\left[\cos\frac{\beta-\alpha}{2} - \cos\frac{\alpha-\beta}{2} + \cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

Erkl. 550. Verbindet man in der Figur 360 M mit B, so ist nach der Erkl. 450:

$$\sphericalangle BMC = 2\alpha$$

Da ferner das Dreieck BMC ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ist:

$$\sphericalangle MCB \text{ oder } \sphericalangle MBC = \frac{2R - 2\alpha}{2}$$

also:

$$\text{a)} \ldots \sphericalangle MCB = R - \alpha$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\alpha + \beta + \gamma = 2R$$

dass also:

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} = R$$

ist, so erhält man aus Gleichung a), wenn man in derselben für R den Wert aus Gleichung b) substituiert:

$$\sphericalangle MCB = \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2} - \alpha$$

oder:

$$\sphericalangle MCB = \frac{\alpha+\beta+\gamma-2\alpha}{2}$$

mithin:

$$1) \ldots \sphericalangle MCB = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}$$

Da ferner in der Figur 360 die Verbindungslinie mC den Winkel γ halbiert, da also:

$$2) \ldots \sphericalangle mCB = \frac{\gamma}{2}$$

ist, und da in der Figur 360:

$$3) \ldots \sphericalangle MCm = \sphericalangle MCB - \sphericalangle mCB$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen 1) bis 3):

$$\sphericalangle MCm = \frac{\beta+\gamma-\alpha}{2} - \frac{\gamma}{2}$$

oder:

$$4) \ldots \sphericalangle MCm = \frac{\beta-\alpha}{2}$$

Da nun nach der Erkl. 126:

$$\cos\frac{\beta-\alpha}{2} = \cos\left(-\frac{\beta-\alpha}{2}\right) \text{ oder } = \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

ist, und da:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, also:

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden kann, so ergibt sich aus jener Gleichung in Rücksicht dessen und nach gehöriger Reduktion:

$$e^2 = r^2 - \frac{2r\varrho}{\sin\frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$$

oder:

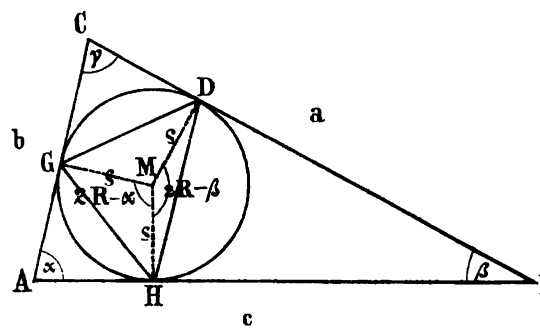
$$1) \ldots\ldots e^2 = r^2 - 2r\varrho$$

womit die Richtigkeit jener Relation bewiesen ist.

Aufgabe 948. Die drei Seiten eines Dreiecks sind $a = 13$ m, $b = 15$ m und $c = 14$ m; wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks, dessen Ecken die Berührungspunkte des jenem Dreieck einbeschriebenen Kreises sind?

Andeutung. Für den gesuchten Inhalt F des Dreiecks DGH, siehe Figur 361, hat man nach der Erkl. 151 und in Rücksicht, dass nach der Erkl. 551 die Winkel HMG, HMD und DMG der drei Dreiecke, in welche das Dreieck DGH durch die Radien ϱ zerlegt wird, bezw. $= 2R - \alpha$, $2R - \beta$ und $2R - \gamma$ sind, die Relation:

Figur 361.



Erkl. 551. Nach der Erkl. 536 ist in dem Viereck $AHMG$ der Figur 361:

$$\alpha + \sphericalangle HMG = 2R$$

hieraus ergibt sich:

1) . . . $\sphericalangle HMG = 2R - \alpha$

In ganz derselben Weise kann man darthun, dass in der Figur 361:

2) . . . $\sphericalangle HMD = 2R - \beta$

und

3) . . . $\sphericalangle DMG = 2R - \gamma$

ist.

Erkl. 552. Bezeichnen α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 269 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

$$F = \frac{\varrho^2}{2}\sin(2R-\alpha) + \frac{\varrho^2}{2}\sin(2R-\beta) + \frac{\varrho^2}{2}\sin(2R-\gamma)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$F = \frac{\varrho^2}{2}[\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma]$$

oder auch nach der Erkl. 552:

a) . . . $F = \frac{\varrho^2}{2}\cdot 4\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

Zwischen den Winkeln α, β und γ des Dreiecks ABC, dessen Inhalt F_1, dem Radius ϱ des demselben einbeschriebenen Kreises und dem Radius r ($= AM$) des diesem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises besteht nach der in Aufgabe 936 vorgeführten Relation 2) die Beziehung:

$$\varrho = \frac{F_1}{4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus erhält man:

b) . . . . $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{F_1}{4r\cdot\varrho}$

Ferner besteht zwischen dem Radius r des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises, dessen Seiten a, b und c und dessen Inhalt F_1 nach der in Aufgabe 868 vorgeführten Relation 1) die Beziehung:

c) . . . $r = \frac{abc}{4F_1}$

Aus den Gleichungen b) und c) ergibt sich:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{F_1}{4\cdot\frac{abc}{4F_1}\cdot\varrho}$$

oder:

d) . . . . $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{F_1^2}{abc\cdot\varrho}$

Setzt man diesen Wert in Gleichung a), so erhält man:

$$F = \frac{\varrho^2}{2}\cdot 4\cdot\frac{F_1^2}{abc\cdot\varrho}$$

oder:

e) . . . $F = \frac{2F_1^2\cdot\varrho}{abc}$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10) zwischen dem Inhalt F_1, des Dreiecks ABC, dem Radius ϱ des demselben einbeschriebenen Kreises und der halben Summe $s = \frac{a+b+c}{2}$ der drei Seiten desselben, die Beziehung besteht:

f) ... $\varrho = \frac{F_1}{s}$

so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung e):

$$F = \frac{2F_1^2}{abc} \cdot \frac{F_1}{s}$$

oder:

A) .... $F = \frac{2F_1^3}{abc \cdot s}$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht, dass nach der Erkl. 170:

A₁) ... $F_1 = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

ist, aus den gegebenen drei Seiten a, b und c des Dreiecks ABC den gesuchten Inhalt F des Dreiecks DGH berechnen kann.

Aufgabe 949. Um und in einem Kreis, dessen Radius ϱ ist, ist je ein Dreieck konstruiert und zwar so, dass die Ecken des dem Kreis einbeschriebenen Dreiecks die Berührungspunkte des dem Kreis umbeschriebenen Dreiecks sind (siehe Figur 361). In welchem Verhältnis stehen die Inhalte beider Dreiecke zu einander, wenn die Winkel des inneren Dreiecks $\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$, $\beta = 67^0\,22'\,48{,}5''$ und $\gamma = 59^0\,29'\,23{,}1''$ sind?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ihrem Wesen nach analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 948.

---

c) Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit den demselben anbeschriebenen Kreisen.

Anmerkung 55. Die einem Kreis anbeschriebenen Kreise nennt man auch die äusseren Berührungskreise des Dreiecks und zwar im Gegensatz zu dem dem Dreieck einbeschriebenen Kreis, welchen man auch den inneren Berührungskreis des Dreiecks nennt. (Siehe Anmerkung 52.)

Je nachdem ein äusserer Berührungskreis die Seite a, oder die Seite b, oder die Seite c und bezw. die Verlängerungen der beiden andern Dreiecksseiten berührt, spricht man auch, der Kürze halber, bezw. von dem äusseren Berührungskreis der Seite a, oder der Seite b oder der Seite c.

Aufgabe 950. Man soll nachweisen, dass zwischen den Seiten a, b, c, bezw. deren halben Summe s, den Winkeln α, β und γ, dem Inhalt F eines Dreiecks und den Radien ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c der drei diesem Dreieck anbeschriebenen Kreise nachfolgende Relationen bestehen:

1) ... $\varrho_a = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

2) ... $\varrho_b = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

3) ... $\varrho_c = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

In Figur 362 sei der Kreis um m_a der dem Dreieck ABC anbeschriebene Kreis, welcher die Seite a und die Verlängerungen der Seiten b und c berührt. Verbindet man den Mittelpunkt m_a mit den drei Ecken A, B und C des Dreiecks, so werden durch diese Verbindungslinien, nach der Erkl. 531 der Winkel α und die Nebenwinkel der Winkel β u. γ halbiert.

4) . . . $\varrho_a = \frac{a \cdot \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

5) . . . $\varrho_b = \frac{b \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

6) . . . $\varrho_c = \frac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

7) . . . $\varrho_a = s \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$

8) . . . $\varrho_b = s \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$

9) . . . $\varrho_c = s \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$

10) . . . $\varrho_a = (s-b)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}$

11) . . . $\varrho_a = (s-c)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}$

12) . . . $\varrho_b = (s-a)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}$

13) . . . $\varrho_b = (s-c)\cdot\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}$

14) . . . $\varrho_c = (s-a)\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$

15) . . . $\varrho_c = (s-b)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\alpha}{2}$

16) . . . $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$

17) . . . $\varrho_b = \frac{F}{s-b}$

18) . . . $\varrho_c = \frac{F}{s-c}$

19) . . . $\varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

20) . . . $\varrho_b = \sqrt{\frac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$

21) . . . $\varrho_c = \sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$

22) . . . $\varrho_a = (s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

23) . . . $\varrho_b = (s-b)\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

24) . . . $\varrho_c = (s-c)\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$

wie in der Figur angedeutet. Fällt man ferner von m_a die Senkrechten auf die drei Seiten a, b und c, bezw. auf deren Verlängerungen, so bestimmen dieselben nach der Erkl. 562 die Berührungspunkte D, G und H der drei Seiten mit dem Kreis; diese Senkrechten sind gleich lang, nämlich je gleich dem Radius ϱ_a des Kreises um m_a. Durch die Berührungspunkte D, G und H werden die drei Seiten in sechs Abschnitte zerlegt, von welchen je zwei einander gleich sind, wie in der Figur 362 durch die Buchstaben t_1, t_2 und t_3 angedeutet ist.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken CDm_a und BDm_a ergeben sich die Relationen:

$$\mathrm{ctg}\left(R - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{t_3}{\varrho_a}$$

und

$$\mathrm{ctg}\left(R - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{t_2}{\varrho_a}$$

aus denselben erhält man:

$$t_3 = \varrho_a \cdot \mathrm{ctg}\left(R - \frac{\gamma}{2}\right)$$

und

$$t_2 = \varrho_a \cdot \mathrm{ctg}\left(R - \frac{\beta}{2}\right)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 19:

a) . . . $t_3 = \varrho_a \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}$

und

b) . . . $t_2 = \varrho_a \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Addition:

$$t_2 + t_3 = \varrho_a \cdot \left(\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

oder in Rücksicht, dass in der Figur 362:

$$t_2 + t_3 = a$$

ist:

$$a = \varrho_a \cdot \left(\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

1) . . . $\varrho_a = \frac{a}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}$

In ganz derselben Weise kann man die Relationen 2) und 3) herleiten, wenn man, siehe Fig. 363, in bezug auf den Kreis um m_b, bezw. in bezug auf den Kreis um m_c dieselbe Betrachtung anstellt als in bezug auf den Kreis um m_a in der Figur 362.

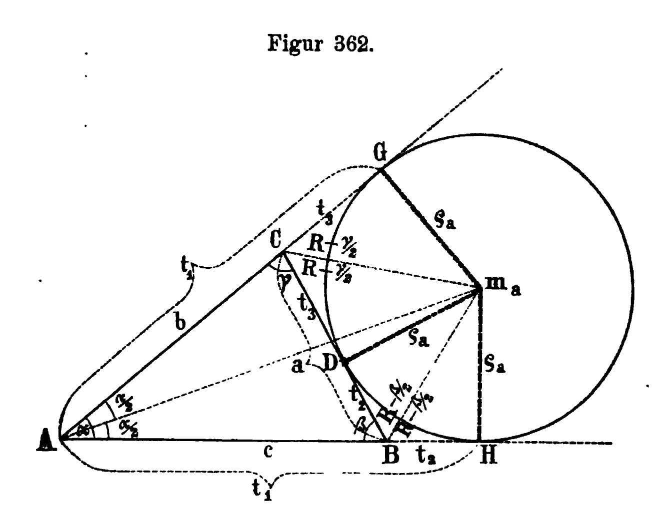
B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Nach der Relation 1) ist:

$$\varrho_a = \frac{a}{\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

Setzt man in derselben nach der in der Erkl. 553 aufgestellten Gleichung 2):

Figur 362.



Erkl. 553. Bezeichnen α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$1) \ldots \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\beta}$$

(Siehe Formel 277 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Berücksichtigt man, dass:

$$\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist, indem die drei Winkel eines Dreiecks zusammen $= 2R$ sind, und dass:

$$\sin\gamma = \sin[2R - (\alpha + \beta)]$$

oder nach der Erkl. 66:

$$\sin\gamma = \sin(\alpha + \beta)$$

ist, so geht jene Relation über in:

$$2) \ldots \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$$

Erkl. 554. In der Figur 362 ist:

$$a = t_2 + t_3$$
$$b = t_1 - t_3$$
$$c = t_1 - t_2$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$$a + b + c = 2\cdot t_1$$

oder:

$$a) \ldots t_1 = \frac{a+b+c}{2}$$

Setzt man, wie gewöhnlich:

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

so ist hiernach:

$$b) \ldots t_1 = s$$

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma}{2}}$$

so erhält man:

$$\varrho_a = \frac{a}{\dfrac{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}}$$

und hieraus ergibt sich, wenn man berücksichtigt, dass:

$$\frac{\beta+\gamma}{2} \text{ und } \frac{\alpha}{2}$$

Komplementwinkel sind, dass also:

$$\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, die Relation:

$$4) \ldots \varrho_a = \frac{a\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

In ganz analoger Weise kann man aus den Relationen 3) und 4) die Relationen 5) und 6) herleiten.

C) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Aus dem rechtwinkligen Dreieck AGm_a der Figur 362 ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{t_1}$$

oder:

$$a) \ldots \varrho_a = t_1\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man nach der Erkl. 554:

$$b) \ldots t_1 = \frac{a+b+c}{2} \text{ oder } = s$$

so ergibt sich aus Gleichung a) die zu beweisende Relation:

$$7) \ldots\ldots \varrho_a = s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 8) und 9) herleiten, wenn man, siehe Figur 363, in bezug auf den Kreis um m_b, bezw. in bezug auf den Kreis um m_a dieselbe Betrachtung anstellt.

D) Beweis der Relationen 10) bis 15):

Aus den rechtwinkligen Dreiecken CDm_a und BDm_a der Figur 362 ergeben sich die Relationen:

$$\operatorname{tg}\left(R - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\varrho_a}{t_3}$$

und

$$\operatorname{tg}\left(R - \frac{\beta}{2}\right) = \frac{\varrho_a}{t_2}$$

oder:

$$\varrho_a = t_3\cdot\operatorname{tg}\left(R - \frac{\gamma}{2}\right)$$

Erkl. 555. In der Figur 362 ist:

a) . . . $t_1 - t_3 = b$

und

b) . . . $t_1 - t_2 = c$

Setzt man in diesen Gleichungen nach der Erkl. 554:

$$t_1 = s$$

so erhält man bezw.

$$s - t_3 = b$$

und

$$s - t_2 = c$$

und hieraus ergeben sich die Relationen:

c) . . . $t_3 = s - b$

und

d) . . . $t_2 = s - c$

und

$$\varrho_a = t_2 \cdot \mathrm{tg}\left(R - \frac{\beta}{2}\right)$$

oder auch in Rücksicht der Erkl. 19:

a) . . . $\varrho_a = t_3 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}$

und

b) . . . $\varrho_a = t_2 \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}$

Setzt man nach der Erkl. 555:

$$t_3 = s - b$$

und

$$t_2 = s - c$$

so erhält man aus den Gleichungen a) und b) bezw. die zu beweisenden Relationen:

10) . . . $\varrho_a = (s - b)\,\mathrm{ctg}\,\frac{\gamma}{2}$

und

11) . . . $\varrho_a = (s - c) \cdot \mathrm{ctg}\,\frac{\beta}{2}$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 12) und 13), ebenso die Relationen 14) und 15) herleiten, wenn man, siehe Figur 363, in bezug auf den Kreis um m_b, bezw. in bezug auf den Kreis um m_c dieselbe Betrachtung anstellt.

E) Beweis der Relationen 16) bis 18):

Aus der Figur 362 ergibt sich die Beziehung:

$$\triangle ABC = \triangle ACm_a + \triangle ABm_a - \triangle CBm_a$$

Betrachtet man $AC\,(= b)$ als Grundlinie des Dreiecks ACm_a, ist also $Gm_a\,(= \varrho_a)$ die zu dieser Grundlinie gehörige Höhe des Dreiecks; betrachtet man ferner $AB\,(= c)$ als Grundlinie des Dreiecks ABm_a, ist also $Hm_a\,(= \varrho_a)$ die zu dieser Grundlinie gehörige Höhe, und betrachtet man $CB\,(= a)$ als Grundlinie des Dreiecks CBm_a, ist also $Dm_a\,(= \varrho_a)$ die zu dieser Grundlinie gehörige Höhe, so hat man nach vorstehender Relation und in Rücksicht der Erkl. 34 für den Inhalt F des Dreiecks ABC:

$$F = \frac{b \cdot \varrho_a}{2} + \frac{c \cdot \varrho_a}{2} - \frac{a \cdot \varrho_a}{2}$$

oder:

$$F = \frac{b + c - a}{2} \cdot \varrho_a$$

oder nach der Erkl. 556:

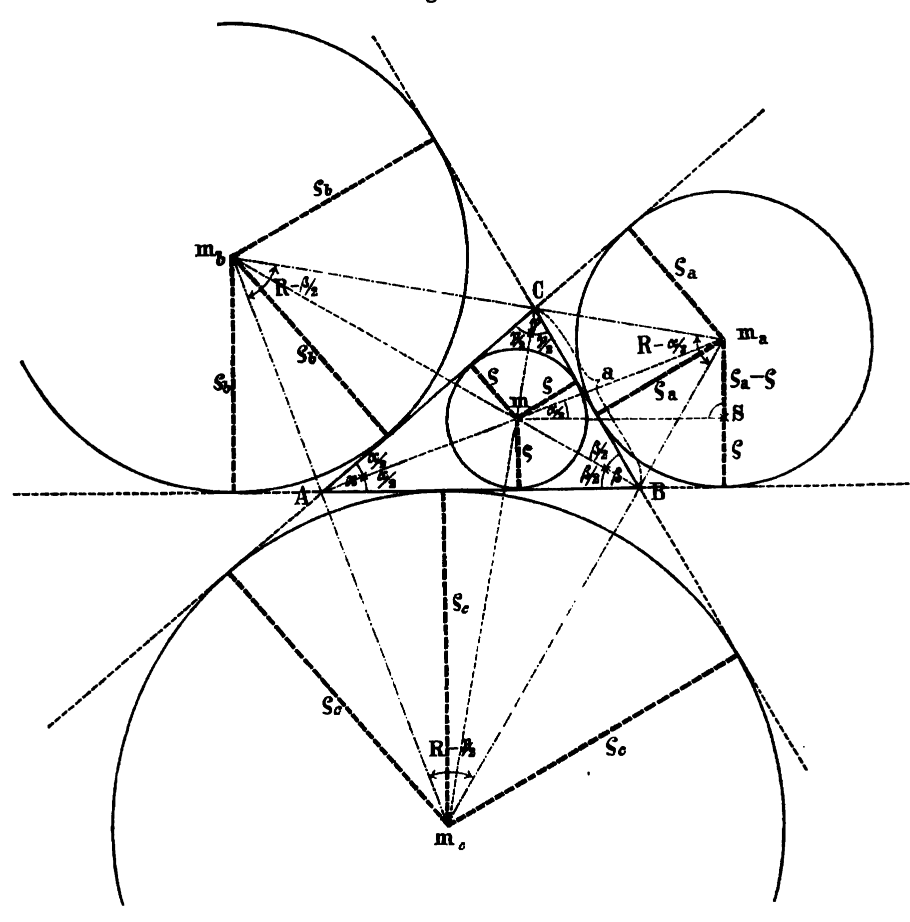
$$F = (s - a) \cdot \varrho_a$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

16) . . . . $\varrho_a = \frac{F}{s - a}$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 17) und 18) herleiten, wenn man, siehe Fig. 363, in bezug auf den Kreis um m_b, bezw. in bezug auf den Kreis um m_c dieselbe Betrachtung anstellt.

Figur 363.



Erkl. 556. Setzt man:

$$1) \dots \frac{a+b+c}{2} = s$$

so ist:

$$\frac{a+b+c}{2} - a = s - a$$

oder:

$$\frac{a+b+c-2a}{2} = s - a$$

oder:

$$2) \dots \frac{b+c-a}{2} = s - a$$

F) Beweis der Relationen 19) bis 21):

Nach der vorhin bewiesenen Relation 16) ist:

$$\varrho_a = \frac{F}{s-a}$$

Setzt man in derselben nach der Erkl. 170

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

so erhält man:

$$\varrho_a = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s-a}$$

oder:

$$\varrho_a = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b((s-c)}}{(s-a)^2}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$19) \dots \varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

In ganz derselben Weise kann man aus den Relationen 17) und 18) die Relationen 20) und 21) herleiten.

G) Beweis der Relationen 23) bis 24):

Durch Multiplikation der in der Aufgabe vorgeführten und vorstehend bewiesenen Relationen 7), 10) und 11) erhält man:

$$\varrho_a^3 = s\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot(s-b)\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}\cdot(s-c)\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$$

oder:

a) . . $\varrho_a^3 = s(s-b)(s-c)\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Aus der in der Aufgabe vorgeführten Relation 19) erhält man ferner:

b) . . . $s(s-b)(s-c) = \varrho_a^2\cdot(s-a)$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\varrho_a^3 = \varrho_a^2\cdot(s-a)\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

22) . . . $\varrho_a = (s-a)\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{ctg}\frac{\gamma}{2}$

In ganz analoger Weise kann man aus den in der Aufgabe vorgeführten Relationen 8,) 12), 13) u. 20), bezw. aus den Relationen 9), 14), 15) und 21) die Relationen 23) und 24) herleiten.

Aufgabe 951. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise, den Seiten a, b und c und der halben Summe s dieser drei Seiten nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . $\varrho\cdot\varrho_a = (s-b)(s-c)$

2) . . . $\varrho\cdot\varrho_b = (s-a)(s-c)$

3) . . . $\varrho\cdot\varrho_c = (s-a)(s-b)$

4) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b = s(s-c)$

5) . . . $\varrho_b\cdot\varrho_c = s(s-a)$

6) . . . $\varrho_c\cdot\varrho_a = s(s-b)$

7) . . . $\varrho\cdot\varrho_a + \varrho_b\cdot\varrho_c = b\cdot c$

8) . . . $\varrho\cdot\varrho_b + \varrho_a\cdot\varrho_c = a\cdot c$

9) . . . $\varrho\cdot\varrho_c + \varrho_a\cdot\varrho_b = a\cdot b$

10) . . . $\varrho\cdot\varrho_a + \varrho\cdot\varrho_b + \varrho\cdot\varrho_c + \varrho_a\cdot\varrho_b + \varrho_a\cdot\varrho_c + \varrho_b\cdot\varrho_c = ab + ac + bc$

11) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b + \varrho_a\cdot\varrho_c + \varrho_b\cdot\varrho_c - \varrho\cdot\varrho_a - \varrho\cdot\varrho_b - \varrho\cdot\varrho_c = \frac{a^2+b^2+c^2}{2}$

12) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b - \varrho\cdot\varrho_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

13) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_c - \varrho\cdot\varrho_b = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}$

14) . . . $\varrho_b\cdot\varrho_c - \varrho\cdot\varrho_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}$

15) . . . $(\varrho_a-\varrho_b)\cdot(\varrho+\varrho_c) = a^2-b^2$

16) . . . $(\varrho_a-\varrho_c)(\varrho+\varrho_b) = a^2-c^2$

17) . . . $(\varrho_b-\varrho_c)(\varrho+\varrho^a) = b^2-c^2$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 8) ist:

a) . . . $\varrho = (s-b)\cdot\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$

und nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 11) ist:

b) . . . $\varrho_a = (s-c)\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\varrho\cdot\varrho_a = (s-b)\cdot(s-c)\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}$$

Da nun nach der Erkl. 15:

$$\mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{1}{\mathrm{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

ist, so ergibt sich hieraus die zu beweisende Relation:

1) . . . $\varrho\cdot\varrho_a = (s-b)(s-c)$

In ganz analoger Weise kann man aus den Relationen 9) und 7) in der Aufgabe 904 und den Relationen 12) und 15) in der Aufgabe 950 die Relationen 2) und 3) herleiten.

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Nach den in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 7) und 13) ist:

$$\varrho_a = s\cdot\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Erkl. 557. Den Ausdruck:

$$(s-b)(s-c)+s(s-a)$$

kann man wie folgt reduzieren:

Da

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

ist, so ist:

$$s-b=\frac{a-b+c}{2}$$

$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$\text{und } s-a=\frac{b+c-a}{2}$$

In Rücksicht dessen erhält man:

$$(s-b)(s-c)+s(s-a)=$$

$$=\frac{a-b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}+\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{b+c-a}{2}$$

$$=\frac{1}{4}[(a-b+c)(a+b-c)+(a+b+c)(b+c-a)]$$

$$=\frac{1}{4}\big[[a-(b-c)]\cdot[a+(b-c)]+[(b+c)+a]\cdot[(b+c)-a]\big]$$

$$=\frac{1}{4}[a^2-(b-c)^2+(b+c)^2-a^2]$$

$$=\frac{1}{4}[(b+c)^2-(b-c)^2]$$

$$=\frac{1}{4}(b^2+2bc+c^2-b^2+2bc-c^2)$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 4bc$$

$$=bc$$

Erkl. 558. Den Ausdruck:

$$s(s-c)-(s-a)(s-b)$$

kann man wie folgt reduzieren:

Da

$$s=\frac{a+b+c}{2}$$

ist, so ist:

$$s-c=\frac{a+b-c}{2}$$

$$s-a=\frac{b+c-a}{2}$$

$$s-b=\frac{a-b+c}{2}$$

und

$$\varrho_b=(s-c)\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

Durch Multiplikation dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$\varrho_a\cdot\varrho_b=s(s-c)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

da nun nach der Erkl. 15:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

ist, so ergibt sich hieraus die zu beweisende Relation:

4) . . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b=s(s-c)$

In ganz analoger Weise kann man aus den Relationen 8) und 9) und den Relationen 1[illegible] und 11) in der Aufgabe 950 die nebenstehenden Relationen 5) und 6) herleiten:

C) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Durch Addition der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 1) und 5) erhält man:

$$\varrho\cdot\varrho_a+\varrho_b\cdot\varrho_c=(s-b)(s-c)+s(s-c)$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion, wie in der Erkl. 557 gezeigt, die zu beweisende Relation:

7) . . . $\varrho\cdot\varrho_a+\varrho_b\cdot\varrho_c=b\cdot c$

In ganz analoger Weise kann man aus den in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 2) und 6), bezw. aus den Relationen 3) und 4) die Relationen 8) und 9) herleiten.

D) Beweis der Relation 10):

Die Relation 10) erhält man durch Addition der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 7) bis 9).

E) Beweis der Relation 11):

Die Relation 11) erhält man dadurch, dass man die in der Aufgabe vorgeführten Relationen 4) bis 6) addiert und davon die Summe der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 1) bis 3) subtrahiert und dann die rechte Seite der somit erhaltenen Gleichung reduziert.

F) Beweis der Relationen 12) bis 14):

Subtrahiert man die in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 4) und 3), so erhält man:

$$\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho\cdot\varrho_c=s(s-c)-(s-a)(s-b)$$

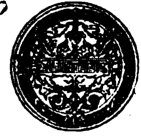
und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 558 die zu beweisende Relation:

12) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b-\varrho\cdot\varrho_c=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

In ganz derselben Weise kann man aus den in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 6) und 2), bezw. 5) und 1) die Relationen 13) und 14) herleiten.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

334. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 327. — Seite 657—672. Mit 3 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 327. — Seite 657—672. Mit 3 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

☛ **Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.**

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie**, des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber auch** die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren **Erledigung** ·lichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

In Rücksicht dessen erhält man:

$s(s-c)-(s-a)(s-b)=$

$=\frac{a+b+c}{2}\cdot\frac{a+b-c}{2}-\frac{b+c-a}{2}\cdot\frac{a-b+c}{2}$

$=\frac{1}{4}[(a+b+c)(a+b-c)-(b+c-a)(a-b+c)]$

$=\frac{1}{4}\Big[[(a+b)+c]\cdot[(a+b)-c]-[c-(a-b)]\cdot$
$\cdot[c+(a-b)]\Big]$

$=\frac{1}{4}\left[(a+b)^2-c^2-[c^2-(a-b)^2]\right]$

$=\frac{1}{4}[a^2+2ab+b^2-c^2-c^2+a^2-2ab+b^2]$

$=\frac{1}{4}(2a^2+2b-2c^2)$

$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}$

G) Beweis der Relationen 15) bis 17):

Subtrahiert man von der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 13) die Relation 14), so erhält man:

$\varrho_a\cdot\varrho_c-\varrho\cdot\varrho_b-\varrho_b\cdot\varrho_c+\varrho\cdot\varrho_a=$
$\frac{a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2}{2}$

$\varrho_a(\varrho+\varrho_c)-\varrho_b(\varrho+\varrho_c)=a^2-b^2$

$(\varrho_a-\varrho_b)(\varrho+\varrho_c)=a^2-b^2$

In ganz analoger Weise kann man aus den in der Aufgabe vorgeführten Relationen 12) bis 14) die Relationen 16) und 17) herleiten.

Aufgabe 952. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreisen, der halben Summe s der drei Seiten und dem Inhalt F nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho_a\cdot\varrho_c+\varrho_b\cdot\varrho_c=s^2$

2) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=F\cdot s\cdot$

3) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=\varrho\cdot s^2$

4) . . . $\varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b=(s-c)\cdot F$

5) . . . $\varrho\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=(s-a)\cdot F$

6) . . . $\varrho\cdot\varrho_c\cdot\varrho_a=(s-b)\cdot F$

7) . . . $\varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c+\varrho\cdot\varrho_c\cdot\varrho_a+$
$\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=2F\cdot s$

8) . . . $\varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=F^2$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Nach den in der Aufgabe 951 vorgeführten Relationen 4) bis 6) ist:

$\varrho_a\cdot\varrho_b=s(s-c)$

$\varrho_a\cdot\varrho_c=s(s-b)$

und $\varrho_b\cdot\varrho_c=s(s-a)$

Durch Addition dieser drei Gleichungen erhält man:

$\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho_a\cdot\varrho_c+\varrho_b\cdot\varrho_c=$
$s(s-c)+s(s-b)+s(s-a)$

oder:

$\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho_a\cdot\varrho_c+\varrho_b\cdot\varrho_c=$
$s[(s-a)+(s-b)+(s-c)]$

$\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho_a\cdot\varrho_c+\varrho_b\cdot\varrho_c=s\cdot[3s-(a+b+c)]$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass:

$a+b+c=2s$

ist, die zu beweisende Relation:

1) . . . $\varrho_a\cdot\varrho_b+\varrho_a\cdot\varrho_c+\varrho_b\cdot\varrho_c=s^2$

B) Beweis der Relation 2):

Multipliziert man die in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 16) bis 18) miteinander, so erhält man:

$$\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=\frac{F^3}{(s-a)(s-b)(s-c)}$$

oder:

$$\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=\frac{s\cdot F^3}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Setzt man nunmehr in diese Gleichung nach der Erkl. 170:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = F^2$$

so erhält man:

$$\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \frac{s \cdot F^3}{F^2}.$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

2) . . . $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = s \cdot F$

C) Beweis der Relation 3):

Setzt man in der vorstehend bewiesenen Relation 2):

$$\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = s \cdot F$$

nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10):

$$F = s \cdot \varrho$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

3) . . . $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \varrho \cdot s^2$

D) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Setzt man in der vorstehend bewiesenen Relation 3):

$$\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \varrho \cdot s^2$$

nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 18:

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c}$$

so erhält man:

$$\frac{F}{s-c} \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b = \varrho \cdot s^2$$

Erkl. 558a. Aus der nebenstehenden Gleichung:

$$\frac{F}{s-c} \cdot \varrho_a \varrho_b = \frac{\varrho \cdot F^2}{\varrho^2}$$

ergibt sich:

$$\frac{\varrho_a \cdot \varrho_b}{s-c} = \frac{F}{\varrho}$$

und hieraus erhält man:

$$\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b = (s-c) F$$

Setzt man hierin nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

für:

$$s^2 = \frac{F^2}{\varrho^2}$$

so erhält man:

$$\frac{F}{s-c} \cdot \varrho_a \varrho_b = \frac{\varrho \cdot F^2}{\varrho^2}$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 558a die zu beweisende Relation:

4) . . . $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b = (s-c) \cdot F$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 5) und 6) herleiten.

E) Beweis der Relation 7):

Addiert man die in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 2) und 4) bis 6) und berücksichtigt man, dass:

$$(s-c)F + (s-a)F + (s-b)F + Fs = F[s + (s-a) + (s-b) + (s-c$$

oder:

$$= F[s + 3s - (a+b+c)]$$

oder: $= F(s + 3s - 2s)$

mithin:

$$= F \cdot 2s$$

ist, so erhält man die Relation 7).

F) Beweis der Relation 8):

Durch Multiplikation der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

mit den in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 16) bis 18) erhält man:

$$\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \frac{F^4}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 170:

$$s(s-a)(s-b)(s-c) = F^2$$

ist, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus jener Gleichung nach gehöriger Reduktion die zu beweisende Relation:

$$8) \ldots \varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$$

Aufgabe 953. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$$

$$2) \ldots \varrho = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_c \varrho_a}$$

$$3) \ldots \varrho_a = \frac{\varrho \varrho_b \varrho_c}{\varrho_b \varrho_c - \varrho \varrho_b - \varrho \varrho_c}$$

$$4) \ldots \varrho_c = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_b}{\varrho_a \varrho_b - \varrho \varrho_a - \varrho \varrho_b}$$

$$5) \ldots \varrho_b = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_c}{\varrho_a \varrho_c - \varrho \varrho_a - \varrho \varrho_c}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Nach der in Aufgabe 952 vorgeführten Relation 1) ist:

$$s^2 = \varrho_a \varrho_b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c$$

ferner ergibt sich aus der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 3):

$$s^2 = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho}$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt die Relation:

$$\varrho_a \varrho_b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho}$$

oder:

$$\varrho \varrho_a \varrho_b + \varrho \varrho_a \varrho_c + \varrho \varrho_b \varrho_c = \varrho_a \varrho_b \varrho_c$$

Dividiert man diese Gleichung durch:

$$\varrho \varrho_a \varrho_b \varrho_c$$

und reduziert gleichzeitig, so erhält man:

$$\frac{1}{\varrho_c} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_a} = \frac{1}{\varrho}$$

und dies ist die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$$

B) Beweis der Relationen 2) bis 5):

Aus der nebenstehenden Relation 1):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$$

erhält man, wenn man die ganze Gleichung mit $\varrho_a \varrho_b \varrho_c$ multipliziert:

$$\frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho} = \varrho_b \varrho_c + \varrho_a \varrho_c + \varrho_a \varrho_b$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$2) \ldots \varrho = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_a \varrho_b + \varrho_a \varrho_c + \varrho_b \varrho_c}$$

In ganz analoger Weise kann man aus jener Relation 1) die Relationen 3) bis 5) ableiten, wenn man dieselben bezw. mit $\varrho \varrho_b \varrho_c$, mit $\varrho \varrho_a \varrho_c$ und $\varrho \varrho_a \varrho_b$ multipliziert und die erhaltenen Gleichungen bezw. in bezug auf ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c auflöst.

Aufgabe 954. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien ϱ, ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c der einem Dreieck ein-, bezw. anbeschriebenen Kreise und dem Inhalt F des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots F = \frac{\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho_b \cdot \varrho_c + \varrho_c \cdot \varrho_a}}$$

$$2) \ldots F = \frac{\varrho \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}{\sqrt{\varrho_b \cdot \varrho_c - \varrho(\varrho_b + \varrho_c)}}$$

$$3) \ldots F = \frac{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho(\varrho_a + \varrho_b)}}$$

$$4) \ldots F = \frac{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_c}{\sqrt{\varrho_a \cdot \varrho_c - \varrho(\varrho_a + \varrho_c)}}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Nach der in Aufgabe 952 vorgeführten Relation 8) ist:

$$\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$$

Setzt man in derselben für ϱ, ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c der Reihe nach die Werte aus den in Aufgabe 953 vorgeführten Relationen 2) bis 5) und reduziert, so erhält man der Reihe nach die zu beweisenden Relationen:

Aufgabe 955. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck ein- und anbeschriebenen Kreise, den Winkeln und Seiten eines Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \varrho_a - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$2) \ldots \varrho_b - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$3) \ldots \varrho_c - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$4) \ldots \varrho_a + \varrho_b = \frac{s \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$5) \ldots \varrho_a + \varrho_c = \frac{s \cdot \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$6) \ldots \varrho_b + \varrho_c = \frac{s \cdot \cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$7) \ldots \varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\ldots \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = abc \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Nach der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 12) ist:

$$a) \ldots \varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Ferner ist nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 7):

$$b) \ldots\ldots \varrho_a = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Subtrahiert man Gleichung a) von Gleichung b), so erhält man:

$$\varrho_a - \varrho = s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - s\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

oder:

$$\varrho_a - \varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 559:

$$1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots\ldots \varrho_a - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

9) . . $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = s \cdot abc \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

10) . . . $\frac{\varrho_a - \varrho}{\varrho_b + \varrho_c} = \mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$

11) . . . $\frac{\varrho_b - \varrho}{\varrho_a + \varrho_c} = \mathrm{tg}^2\frac{\beta}{2}$

12) . . . $\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b} = \mathrm{tg}^2\frac{\gamma}{2}$

Erkl. 559. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $1 - \mathrm{tg}\,\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

(Siehe Formel 162 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

und $\beta = \frac{\gamma}{2}$

so erhält man:

2) . . . $1 - \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

Berücksichtigt man ferner noch, dass, wenn α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks bedeuten, in Gleichung 2) nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen die weitere goniometr. Relation:

3) . . . $1 - \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

in welcher α, β und γ die Winkel eines Dreiecks bedeuten.

Erkl. 560. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$

(Siehe Formel 150 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha = \frac{\alpha}{2}$$

und $\beta = \frac{\beta}{2}$

o erhält man:

2) . . . $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$

Bedeuten α, β und γ die Winkel eines Dreiecks, so kann man in Rücksicht der Erkl. 19 in Gleichung 2):

In ganz analoger Weise kann man aus vorstehender Gleichung a) und den in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 8) und 9) bezw. die nebenstehenden Relationen 2) und 3) herleiten.

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Durch Addition der in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 7) und 8) erhält man:

$$\varrho_a + \varrho_b = s \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + s \cdot \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}$$

oder:

$$\varrho_a + \varrho_b = s \cdot \left(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 560:

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} + \mathrm{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

4) . . . $\varrho_a + \varrho_b = \frac{s \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$

In ganz analoger Weise kann man aus den in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 7) und 9) bezw. 8) und 9) die nebenstehenden Relationen 5) und 6) herleiten.

C) Beweis der Relation 7):

Durch Addition der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 4) und 3) erhält man:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{s \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} + \frac{s \cdot \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

oder:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = s \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2} + \mathrm{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= s \cdot \frac{\cos\frac{\gamma}{2} + \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$= s \cdot \frac{\cos^2\frac{\gamma}{2} + \sin^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 42:

$$\sin^2\frac{\gamma}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} = 1$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener letzten Gleichung die herzuleitende Relation:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$$

setzen, und man erhält die Relation:

$$8)\ \ldots\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

in welcher α, β und γ die Winkel eines Dreiecks bedeuten.

D) Beweis der Relation 8):

Durch Multiplikation der in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 4) bis 6) erhält man:

$$\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=\frac{abc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\beta}{2}\cos^2\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$8)\ \ldots\ \varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=abc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

E) Beweis der Relation 9):

Durch Multiplikation der soeben bewiesenen Relation 8) mit der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 12) erhält man:

$$\varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=abc\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cdot s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

Hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 15 und nach gehöriger Reduktion die zu beweisende Relation:

$$9)\ \ldots\ \varrho\cdot\varrho_a\cdot\varrho_b\cdot\varrho_c=abc\cdot s\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

F) Beweis der Relationen 10) bis 12):

Durch Division der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 1) und 6) erhält man:

$$\frac{\varrho_a-\varrho}{\varrho_b+\varrho_c}=\frac{s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{s\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$\frac{\varrho_a-\varrho}{\varrho_b+\varrho_c}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

und hieraus ergibt sich die Relation:

$$10)\ \ldots\ \frac{\varrho_a-\varrho}{\varrho_b+\varrho_c}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

In ganz analoger Weise kann man aus den in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 2) und 5), bezw. aus den Relationen 3) und 4) die Relationen 11) und 12) herleiten.

Aufgabe 956. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c der drei einem Dreieck anbeschriebenen Kreise, dem Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Winkeln und dem Inhalt des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1)\ \ldots\ \varrho_a=4r\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$2)\ \ldots\ \varrho_b=4r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$3)\ \ldots\ \varrho_c=4r\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Nach der in der Aufgabe 950 vorgeführten Relation 4) ist:

$$a)\ \ldots\ \varrho_a=\frac{a\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

4) . . . $\varrho_a = \frac{F}{4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

5) . . . $\varrho_b = \frac{F}{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

6) . . . $\varrho_c = \frac{F}{4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

Ferner ist nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

b) . . . $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$

Setzt man den aus Gleichung b) für a sich ergebenden Wert:

$$a = 2r\cdot\sin\alpha$$

in Gleichung a) und setzt man ferner nach der Erkl. 52:

$$\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$\varrho_a = \frac{2r\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

1) . . . $\varrho_a = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$

In ganz derselben Weise kann man aus den Relationen 5) und 6) in der Aufgabe 950 und aus den Relationen 2) und 3) in der Aufgabe 842 bezw. die nebenstehenden Relationen 2) und 3) herleiten.

(Man vergleiche mit dieser Aufgabe die Aufgabe 936.)

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 16) ist:

a) . . . $\varrho_a = \frac{F}{s-a}$

Ferner ist nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 11):

b) . . . $s - a = 4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich die Relation:

4) . . . $\varrho_a = \frac{F}{4r\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

In ganz analoger Weise kann man mittels der Relationen 17) und 18) in Aufgabe 950 und der Relationen 12) und 13) in Aufgabe 842 bezw. die nebenstehenden Relationen 5) und 6) herleiten.

Aufgabe 957. Man soll nachweisen, dass zwischen den einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen und den Winkeln des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . $\varrho_a - \varrho = 4r\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$

2) . . . $\varrho_b - \varrho = 4r\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}$

3) . . . $\varrho_c - \varrho = 4r\cdot\sin^2\frac{\gamma}{2}$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Subtrahiert man von der in Aufgabe 956 vorgeführten Relation 1):

4) . . . $\varrho_a + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

5) . . . $\varrho_b + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}$

6) . . . $\varrho_c + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

7) . . . $\varrho_a - \varrho_b = 4r \cdot \cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

8) . . . $\varrho_a - \varrho_c = 4r \cdot \cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}$

9) . . . $\varrho_b - \varrho_c = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$

10) . . . $\varrho_a + \varrho_b = 4r \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$

11) . . . $\varrho_a + \varrho_c = 4r \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}$

12) . . . $\varrho_b + \varrho_c = 4r \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}$

13) . . . $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)$

14) . . . $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$

15) . . . $\frac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_b - \varrho_c} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta-\gamma}{2}$

16) . . . $\frac{\varrho_b + \varrho}{\varrho_a - \varrho_c} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$

17) . . . $\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$\varrho_a = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

die in Aufgabe 936 vorgeführte Relation 1):

$$\varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

so erhält man:

$$\varrho_a - \varrho = 4r \cdot \left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

oder:

$$\varrho_a - \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

Setzt man nach der Erkl. 561:

$$\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

so erhält man:

$$\varrho_a - \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\beta+\gamma}{2}$ und $\frac{\alpha}{2}$ Komplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 19:

$$\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \sin\frac{\alpha}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener Gleichung die zu beweisende Relation:

1) . . . $\varrho_a - \varrho = 4r \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$

In ganz analoger Weise kann man aus den in der Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 2) und 3) und der in Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1) die Relationen 2) und 3) herleiten.

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Addiert man die in der Aufgabe 936 vorgeführte Relation 1) und die in der Aufgabe 956 vorgeführte Relation 1), so erhält man:

$$\varrho_a + \varrho = 4r\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

oder:

$$\varrho_a + \varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

Setzt man nach der Erkl. 225:

$$\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

4) . . . $\varrho_a + \varrho = 4r\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\frac{\beta-\gamma}{2}$

In ganz derselben Weise kann durch Addition der in Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1) und der in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 2) und 3) die Relationen 5) und 6) herleiten.

C) Beweis der Relationen 7) bis 9):

Subtrahiert man die in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) und 2), so erhält man:

$$\varrho_a - \varrho_b = 4r\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right]$$

oder:

$$\varrho_a - \varrho_b = 4r\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

Setzt man nach der Erkl. 232:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} - \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

7) . . . $\varrho_a - \varrho_b = 4r\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

In ganz derselben Weise kann man aus den in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) und 3), bezw. 2) und 3) die Relationen 8) und 9) herleiten.

Erkl. 561. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

(Siehe Formel 43 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:

$$\alpha = \frac{\beta}{2}$$

und $\beta = \frac{\gamma}{2}$

so erhält man:

2) . . . $\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$

D) Beweis der Relationen 10) bis 12):

Durch Addition der in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) und 2) erhält man:

$$\varrho_a + \varrho_b = 4r\cdot\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\right]$$

oder:

$$\varrho_a + \varrho_b = 4r\cos\frac{\gamma}{2}\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right]$$

Setzt man nach der Erkl. 95:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

so erhält man:

$$\varrho_a + \varrho_b = 4r\cdot\cos\frac{\gamma}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\alpha+\beta}{2}$ und $\frac{\gamma}{2}$ Komplementwinkel sind, dass also:

$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen die zu beweisende Relation:

10) . . . $\varrho_a + \varrho_b = 4r\cdot\cos^2\frac{\gamma}{2}$

In ganz analoger Weise kann man durch Addition der in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) und 3), bezw. 2) und 3) die Relationen 11) und 12) herleiten.

Erkl. 562. Bezeichnen α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = 1 + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 298 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

E) Beweis der Relation 13):

Durch Addition der in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) bis 3) erhält man:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

oder in Rücksicht der Erkl. 562:

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 4r\cdot\left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

Erkl. 563. Eine goniometrische Formel heisst:

1) . . . $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \sin^2(\alpha+\beta) =$
$$2[1 + \sin\alpha \sin\beta \cos(\alpha+\beta)]$$

(Siehe Formel 232r in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Setzt man in derselben:
$$\alpha = \frac{\alpha}{2}$$
$$\beta = \frac{\beta}{2}$$
so erhält man:

2) . . . $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \sin^2\frac{\alpha+\beta}{2} =$
$$2\left[1 + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right]$$

Sind α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, sind also:
$$\frac{\alpha+\beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$
Komplementwinkel, und man setzt in Rücksicht dessen nach der Erkl. 19 in Gleichung 2):
$$\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$
und
$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = \sin\frac{\gamma}{2}$$
so erhält man:

3) . . . $\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2} =$
$$2\left[1 + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

Setzt man hierin nach der Erkl. 563:
$$1 + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}}{2}$$
so erhält man die zu beweisende Relation:

13) . . . $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c =$
$$2r\left(\cos^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\beta}{2} + \cos^2\frac{\gamma}{2}\right)$$

F) Beweis der Relation 14):

Addiert man die in Aufgabe 956 vorgeführten Relationen 1) bis 3) und subtrahiert von der hiernach erhaltenen Gleichung die in Aufgabe 936 aufgestellte Gleichung 1), so erhält man:
$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r\cdot\left[\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right]$$

Berücksichtigt man, dass der in der Klammer rechts stehende Ausdruck, nach der in der Erkl. 562 vorgeführten goniometrischen Formel $= 1$ ist, so erhält man in Rücksicht dessen die herzuleitende Relation:

14) . . . $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$

G) Beweis der Relationen 15) bis 17):

Dividiert man die in dieser Aufgabe vorgeführte Relation 4) durch die Relation 9), so erhält man:
$$\frac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_b - \varrho_c} = \frac{4r\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}{4r\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$$
und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

15) . . . $\dfrac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_b - \varrho_c} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\beta-\gamma}{2}$

In ganz derselben Weise kann man aus den nebenstehenden Relationen 5) und 8), bezw. aus den Relationen 6) und 7) die Relationen 16) und 17) herleiten.

Aufgabe 958. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen und den Höhen des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . . $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{\varrho_c}$

2) . . . . $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{1}{\varrho_b}$

3) . . . . $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{1}{\varrho_a}$

Auflösung. Die Richtigkeit nebenstehender Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Für den Inhalt F eines Dreiecks hat man nach der Erkl. 34, wenn a, b und c die Seiten und h_a, h_b und h_c die zugehörigen Höhen bedeuten:

4) .... $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}\right)$

5) .... $\frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_c}\right)$

6) .... $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}\right)$.

$$F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

$$F = \frac{b \cdot h_b}{2}$$

und

$$F = \frac{c \cdot h_c}{2}$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man bezw:

a) .... $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2F}$

b) .... $\frac{1}{h_b} = \frac{b}{2F}$

und

c) .... $\frac{1}{h_c} = \frac{c}{2F}$

Addiert man die beiden ersten dieser Gleichungen und subtrahiert von der somit erhaltenen neuen Gleichung die Gleichung c), so erhält man:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{a}{2F} + \frac{b}{2F} - \frac{c}{2F}$$

oder:

d) .... $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{a+b-c}{2F}$

Setzt man:

$$a + b + c = 2s$$

also:

$$a + b + c - 2c = 2s - 2c$$

oder:

$$a + b - c = 2(s - c)$$

so geht jene Gleichung über in:

f) .... $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{s-c}{F}$

Setzt man nunmehr nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 18):

$$\varrho_c = \frac{F}{s-c}$$

für:

$$F = \varrho_c(s - c)$$

so erhält man schliesslich:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{s-c}{\varrho_c(s-c)}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

1) .... $\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} - \frac{1}{h_c} = \frac{1}{\varrho_c}$.

In ganz derselben Weise kann man aus jenen Gleichungen a) bis c) die nebenstehenden Relationen 2) und 3) herleiten.

B) Beweis der Relationen 4) bis 6):

Nach der Erkl. 84 ist:

$$F = \frac{a \cdot h_a}{2}$$

und hieraus erhält man:

a) .... $\frac{1}{h_a} = \frac{a}{2F}$

Setzt man:

$$a+b+c=2s$$

also:

$$a+b+c-b-c=s-b+s-c$$

oder:

$$a=(s-b)+(s-c)$$

so geht jene Gleichung über in:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{(s-b)+(s-c)}{2F}$$

oder in:

$$\text{b)} \dots \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{s-b}{F}+\frac{s-c}{F}\right)$$

Setzt man nunmehr nach den in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 17) und 18) bezw.:

$$F=(s-b)\cdot\varrho_b$$

$$\text{und}\quad F=(s-c)\cdot\varrho_c$$

so erhält man:

$$\frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{s-b}{(s-b)\cdot\varrho_b}+\frac{s-c}{(s-c)\,\varrho_c}\right)$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$4) \dots \frac{1}{h_a}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_b}+\frac{1}{\varrho_c}\right)$$

In ganz analoger Weise kann man aus den Relationen $F=\frac{b\cdot h_b}{2}$ und $F=\frac{c\cdot h_c}{2}$ bezw. die vorstehenden Relationen 5) und 6) herleiten.

Aufgabe 959. Man soll nachweisen, dass zwischen den Radien der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreisen und den Abschnitten der Höhen des Dreiecks nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \dots h'_a+h'_b+h'_c=2(\varrho+r)$$

$$2) \dots h'_a+h'_b-h'_c=2(\varrho_c-r)$$

$$3) \dots h'_a+h'_c-h'_b=2(\varrho_b-r)$$

$$4) \dots h'_b+h'_c-h'_a=2(\varrho_a-r)$$

Erkl. 564. Sind α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 273 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relation 1):

Aus den in Aufgabe 887 vorgeführten Relationen 1) bis 3) erhält man bezw.:

$$\text{a)} \dots h'_a=2r\cdot\cos\alpha$$

$$\text{b)} \dots h'_b=2r\cdot\cos\beta$$

und

$$\text{c)} \dots h'_c=2r\cdot\cos\gamma$$

Durch Addition dieser drei Gleichungen ergibt sich:

$$h'_a+h'_b+h'_c=2r(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 564:

$$h'_a+h'_b+h'_c=2r\left(1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

oder:

$$\text{d)} \dots h'_a+h'_b+h'_c=2\left(r+4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

Setzt man nunmehr nach der in Aufgabe 936 vorgeführten Relation 1):

$$4r\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\varrho$$

so erhält man aus der Gleichung d) die zu beweisende Relation:

1) . . . $h'_a + h'_b + h'_c = 2(r + \varrho)$

B) Beweis der Relationen 2) bis 4):

Aus den in dem vorstehenden Beweis A) aufgestellten Relationen a) bis c) erhält man:

$$h'_a + h'_b - h'_c = 2r\cdot(\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 565:

$$h'_a + h'_b - h'_c = 2r\left(-1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\right)$$

oder:

f) . . . $h'_a + h'_b - h'_c = 2\left(4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} - r\right)$

Setzt man nunmehr nach der in Aufgabe 956 vorgeführten Relation 3):

$$4r\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} = \varrho_c$$

so erhält man aus Gleichung f) die zu beweisende Relation:

2) . . . $h'_a + h'_b - h'_c = 2(\varrho_c - r)$

In ganz derselben Weise kann man die nebenstehenden Relationen 3) und 4) herleiten.

Erkl. 565. Sind α, β und γ die drei Winkel eines Dreiecks, so besteht die Relation:

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos\gamma = -1 + 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$$

(Siehe Formel 275 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 960. Die Kathete a eines rechtwinkligen Dreiecks misst 40,6 m, der derselben anliegende Winkel β ist 36° 20′ 42″; wie gross ist der Radius ϱ_a des diesem Dreieck anbeschriebenen Kreises, welcher die Seite a direckt berührt?

Gegeben: $\begin{cases} a = 40{,}6\text{ m} \\ \beta = 36^0\,20'\,42'' \end{cases}$

Gesucht: Radius ϱ_a

Andeutung. Nach der in der Erkl. 566 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho_a = \frac{a}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

kann man in Rücksicht der für a und β gegebenen Zahlenwerte den gesuchten Radius ϱ_a berechnen.

Erkl. 566. Sind in den Figuren 362 und 363 die Winkel bei $C = 90^0$, ist also das Dreieck ein bei C rechtwinkliges Dreieck, so gehen die in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 1) bis 6), wenn man in denselben $\gamma = 90^0$ setzt, bezw. über in:

$$\varrho_a = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}45^0}$$

$$\varrho_b = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}45^0}$$

$$\varrho_c = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

$$\varrho_a = \frac{a\cdot\cos\frac{\beta}{2}\cos 45^0}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varrho_b = \frac{b\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos 45^0}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

$$\varrho_c = \frac{c\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{\cos 45^0}$$

Berücksichtigt man, dass:

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{tg} 45^0 = 1 \\ \text{und}\quad &\cos 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{aligned}\right\}$$ (siehe die Aufgabe 9 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie.)

ist, so gehen in Rücksicht dessen, nach gehöriger Reduktion die vorstehenden Gleichungen bezw. über in:

$$1) \ldots \varrho_a = \frac{a}{1 + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

$$2) \ldots \varrho_b = \frac{b}{1 + \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$3) \ldots \varrho_c = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$$

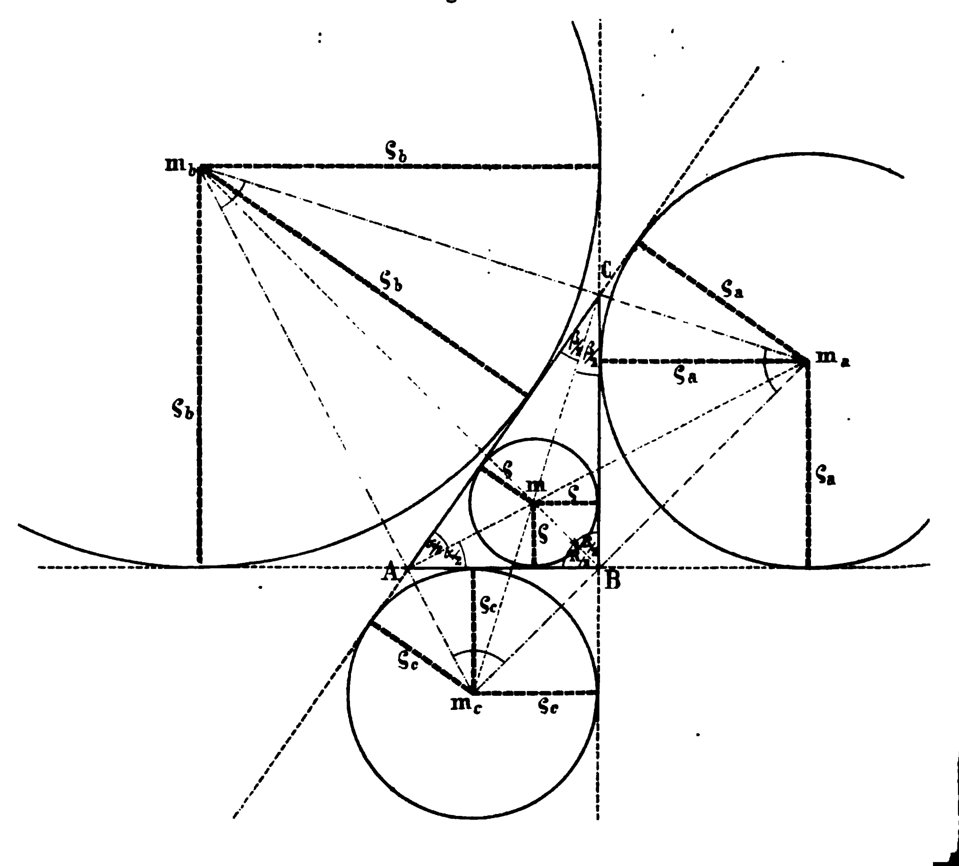
$$4) \ldots \varrho_a = \frac{a}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$5) \ldots \varrho_b = \frac{b}{2}\sqrt{2} \cdot \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

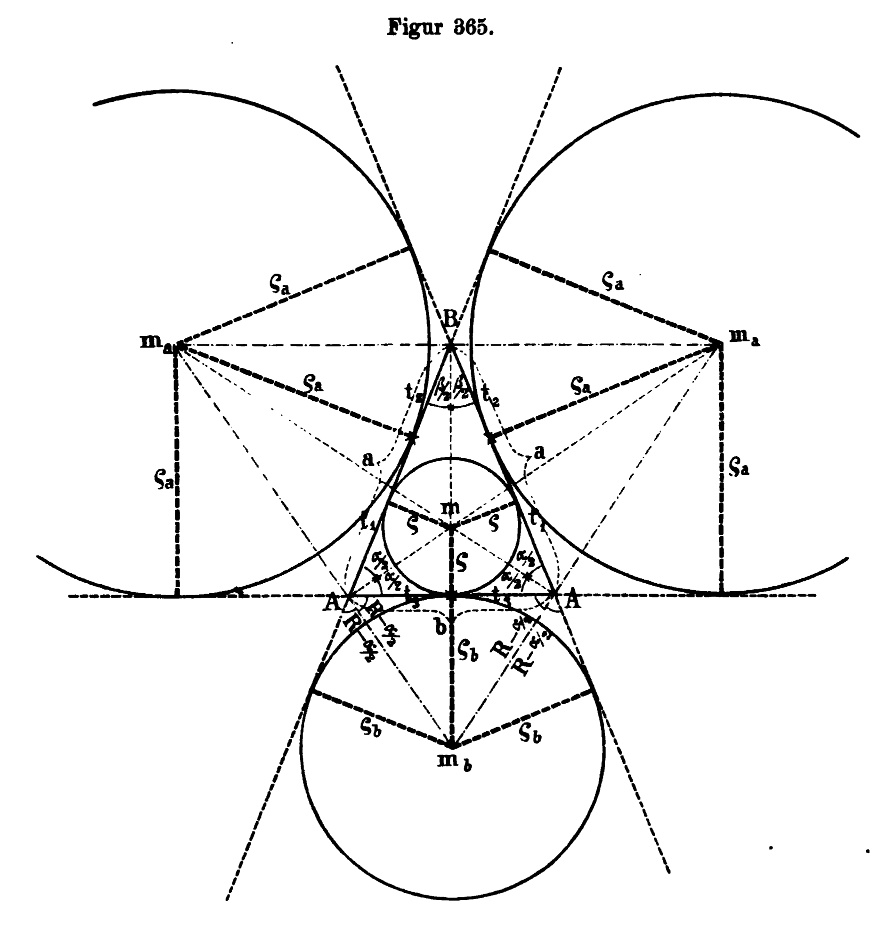
$$6) \ldots \varrho_c = c\sqrt{2} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Diese Relationen kann man auch aus der Figur 364 direkt ableiten, analog wie die Relation 1) in der Aufgabe 950 aus der Figur 362.

Figur 364.



Figur 365.



Erkl. 567. Die Radien ϱ_a und ϱ_b der einem gleichschenkligen Dreieck anbeschriebenen Kreise, siehe Figur 365, kann man wie folgt in die Seiten und Winkel des Dreiecks ausdrücken:

Aus der Figur 365 ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\left(R-\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\varrho_a}{t_1}$$

und

$$\operatorname{tg}\left(R-\frac{\beta}{2}\right)=\frac{\varrho_a}{t_2}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man in Rücksicht der Erkl. 19 und 15:

$$\text{a)} \ldots t_1=\frac{\varrho_a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}} \text{ oder } =\varrho_a\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots t_2=\frac{\varrho_a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}} \text{ oder } =\varrho_a\cdot\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

Addiert man die Gleichungen a) und b), so erhält man:

$$t_1 + t_2 = \varrho_a\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

oder in Rücksicht, dass in der Fig. 365:

$$t_1 + t_2 = a$$

ist:

$$a = \varrho_a\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$$

oder:

1) . . . $\varrho_a = \dfrac{a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

Setzt man nach der Erkl. 560:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}$$

und berücksichtigt hierbei, dass:

$$2\alpha + \beta = 2R$$

$$\alpha + \beta = 2R - \alpha$$

mithin:

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$$

ist, so erhält man:

$$\varrho_a = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

oder, da:

$$\sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\frac{\alpha}{2}$$

ist:

$$\varrho_a = \frac{a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

und hieraus erhält man:

2) . . . $\varrho_a = a \cdot \cos\dfrac{\beta}{2}$

Aus der Figur 365 ergibt sich ferner:

$$\operatorname{tg}\left(R - \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\varrho_b}{t_3}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 19:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_b}{t_3}$$

und hieraus erhält man:

c) . . . $t_3 = \dfrac{\varrho_b}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$

Berücksichtigt man, dass, siehe Figur 365:

$$t_3 = \frac{b}{2}$$

ist, so erhält man:

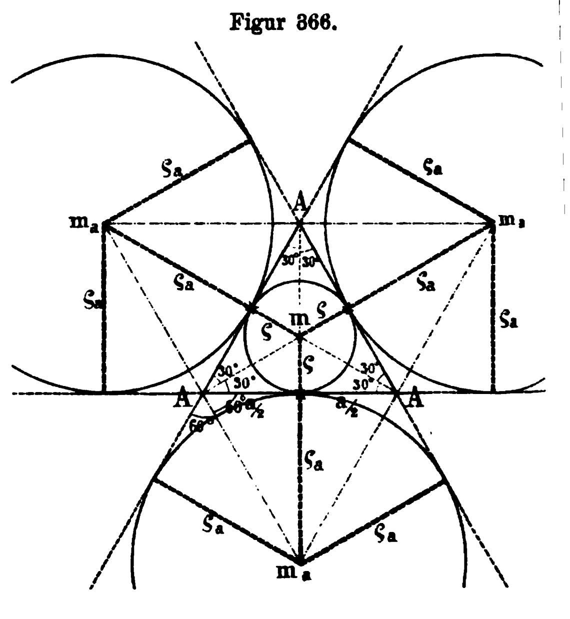
$$\frac{b}{2} = \frac{\varrho_b}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

3) . . . $\varrho_b = \dfrac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$

Die in dieser Erkl. 567 aufgestellten Relationen 1) bis 3) für das **gleichschenklige** Dreieck kann man auch aus den in Aufgabe 950 angeführten Relationen 1) und 2), bezw. 4) und 5) herleiten.

Figur 366.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

335. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 334. — Seite 673—688. Mit 4 Figuren.




Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 334. — Seite 673—688. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das Dreieck in Verbindung mit den demselben anbeschriebenen Kreisen, Fortsetzung. Aufgaben über Vierecke und Vielecke in Verbindung mit den denselben um- und einbeschriebenen Kreisen. Aufgaben über die regulären n-Ecke.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 568. Die Radien ϱ_a der einem gleichseitigen Dreieck anbeschriebenen Kreise kann man wie folgt in die Seite a des Dreiecks ausdrücken:

Aus der Figur 366 ergibt sich:

$$\operatorname{tg} 60^0 = \varrho_a : \frac{a}{2}$$

oder:

$$a) \ldots \varrho_a = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg} 60^0$$

Da nun:

$$\operatorname{tg} 60^0 = \sqrt{3}$$

(s. Aufgabe 8 in Kleyers Lehrbuch der Goniometrie)

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung a):

$$1) \ldots \varrho_a = \frac{a}{2} \sqrt{3}$$

Aufgabe 961. Die drei Seiten a, b und c eines Dreiecks sind bezw. 13, 15 und 14 m lang; wie gross sind die Radien der drei diesem Dreieck anbeschriebenen Kreise?

Gegeben: $\begin{cases} a = 13 \text{ m} \\ b = 15 \text{ m} \\ c = 14 \text{ m} \end{cases}$

Gesucht: ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c

Andeutung. Nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 19:

$$A) \ldots \varrho_a = \sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$$

kann man in Rücksicht, dass a, b und c die gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $s = \frac{a+b+c}{2}$ ist, den Radius ϱ_a berechnen. In ganz derselben Weise kann man aus den in jener Aufgabe vorgeführten Relationen 20) und 21) die gesuchten Radien ϱ_b und ϱ_c berechnen.

Aufgabe 962. Von einem Dreieck kennt man die Seite $a = 14{,}5$ dm und die beiden anliegenden Winkel $\beta = 9^0\,31'\,38{,}2''$ und $\gamma = 96^0\,43'\,58{,}5''$; man soll die Radien der drei diesem Dreieck anbeschriebenen Kreise berechnen.

Gegeben: $\begin{cases} a = 14{,}5 \text{ dm} \\ \beta = 9^0\,31'\,38{,}2'' \\ \gamma = 96^0\,43'\,58{,}5'' \end{cases}$

Gesucht: ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c

Andeutung. Man berechne zunächst, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, aus a, β und γ die Seiten b und c, bilde dann $s = \frac{a+b+c}{2}$ und berechne mittels der in Aufgabe 950 vorgeführten Relationen 7) bis 9) die gesuchten Radien ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c. Man beachte hierbei, dass $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$ ist.

Den Radius ϱ_a kann man auch direkt nach der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 4) aus a, β, γ und α berechnen.

Aufgabe 963. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 120 \text{ m}$$
$$a = 145 \text{ m}$$
$$\beta = 9^0 31' 38{,}2''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 95[illegible] vorgeführten Relation 1):

$$\varrho_a = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

erhält man:

$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho_a}$$

und hieraus ergiebt sich:

$$\text{A)} \ldots . \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{a}{\varrho_a} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a, ϱ_a und $\frac{\beta}{2}$ gegebenen Zahlenwerte den Winkel γ berechnen kann. Ist hiernach γ berechnet, so kennt man auch α $[= 2R - (\beta + \gamma)]$; man kann also die Seiten b und mittels der Sinusregel berechnen.

Aufgabe 964. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 10{,}5 \text{ m}$$
$$b = 15 \text{ m}$$
$$\alpha = 53^0 7' 48{,}4''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 95[illegible] vorgeführten Relation 7):

$$\varrho_a = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{\varrho_a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man diesen Wert für s in die i[illegible] jener Aufgabe vorgeführte Relation 10):

$$\text{b)} \ldots \varrho_a = (s - b) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

so erhält man:

$$\varrho_a = \left(\frac{\varrho_a}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} - b\right) \cdot \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 15:

$$\varrho_a = \left(\varrho_a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - b\right) \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots . \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_a \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - b}{\varrho_a}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für ϱ_a, α und b gegebenen Zahlenwerte den Winkel γ berechnen kann. Ist hiernach γ berechnet, so kann man im weiteren aus b, α, γ und β $[= 2R - (\alpha + \gamma)]$ mittels der Sinusregel die andern Seiten a und c berechnen.

Aufgabe 965. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 340 \text{ dm}$$
$$a = 401 \text{ dm}$$
$$\alpha = 77^0\, 19'\, 10{,}6''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 7):

$$\varrho_a = s \cdot \text{tg}\, \frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$\text{A)} \ldots s = \frac{\varrho_a}{\text{tg}\, \frac{\alpha}{2}}$$

nach welcher Gleichung man die Summe $2s$ $(= a + b + c)$ der drei Seiten des Dreiecks berechnen kann. Ist hiernach diese Summe $a + b + c$ berechnet, so kann man, da a gegeben ist, $b + c$ bestimmen. Aus $b + c$, a und α kann man die übrigen Stücke berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 966. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 300 \text{ m}$$
$$b = 130 \text{ m}$$
$$\beta = 18^0\, 55'\, 28{,}7''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 11):

$$\varrho_a = (s - c) \cdot \text{ctg}\, \frac{\beta}{2}$$

erhält man:

$$s - c = \frac{\varrho_a}{\text{ctg}\, \frac{\beta}{2}}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$s = \frac{a + b + c}{2}$$

mithin:

$$s - c = \frac{a + b - c}{2}$$

ist:

$$\frac{a + b - c}{2} = \varrho_a \cdot \text{tg}\, \frac{\beta}{2}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots a - c = 2\varrho_a \cdot \text{tg}\, \frac{\beta}{2} - b$$

nach welcher Gleichung man die Differenz $a - c$ berechnen kann.

Aus $a - c$, b und β kann man im weiteren die übrigen Stücke berechnen wie in der Andeutung zur Aufgabe 487 gesagt wurde.

Aufgabe 967. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 1{,}2 \text{ m}$$
$$a + b = 1{,}7 \text{ m}$$
$$c = 1{,}5 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks bestimmen.

Andeutung. Da $a + b$ und c gegeben ist, so kann man leicht:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{a + b + c}{2}$$

bestimmen. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 7):

$$\varrho_a = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$\text{b)} \ldots \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a}{s}$$

nach welcher Gleichung man aus ϱ_a und s den Winkel α berechnen kann.

Ferner kann man nach der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 11):

$$\varrho_a = (s - c) \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}$$

und in Rücksicht, dass $s - c$ aus $a + b$ und c leicht bestimmt werden kann, indem:

$$s - c = \frac{a + b + c}{2} - c \text{ oder } = \frac{a + b - c}{2}$$

ist, den Winkel β berechnen. Aus α, β und c kann man im weiteren nach der Sinusregel jede der Seiten a und b berechnen.

Aufgabe 968. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 17 \text{ dm}$$
$$b + c = 22{,}45 \text{ dm}$$
$$\alpha = 77^0\, 19'\, 10{,}6''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks bestimmen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 7) erhält man:

$$\text{a)} \ldots s = \frac{\varrho_a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

nach welcher Gleichung man s oder $\frac{a + b + c}{2}$ berechnen kann. Ist hiernach $2s$ oder $a + b + c$ bestimmt, so kann man leicht, da gemäss der Aufgabe $b + c$ gegeben ist, die Seite a berechnen. Dann kann man weiter verfahren wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 969. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_b = 80 \text{ m}$$
$$a + b = 52 \text{ m}$$
$$\alpha = 53^0\, 7'\, 48{,}4''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 13) erhält man:

$$s - c = \frac{\varrho_b}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$a) \ldots s - c = \varrho_b \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man zunächst $s - c$ berechnen kann. In Rücksicht, dass:

$$s - c = \frac{a + b + c}{2} - c$$

und dass gemäss der Aufgabe $a + b$ gegeben ist, kann man aus dieser Gleichung, und wenn $s - c$, wie angedeutet berechnet ist, die Seite c berechnen; man erhält nämlich:

$$s - c = \frac{a + b - c}{2}$$

oder:

$$b) \ldots c = (a + b) - 2(s - c)$$

Ist hiernach c berechnet, so bestimme man s und berechne nach der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 8):

$$c) \ldots \varrho_b = s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}$$

den Winkel β. Man kann auch, wenn c berechnet ist, die übrigen Stücke aus $a + b$, c und α berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 480 gesagt wurde.

Aufgabe 970. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$F = 1800 \text{ qm}$$
$$\varrho = 11{,}25 \text{ m}$$
$$\varrho_a = 120 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 16):

$$\varrho_a = \frac{F}{s - a}$$

erhält man:

$$a) \ldots s - a = \frac{F}{\varrho_a}$$

Ferner erhält man aus der in Aufgabe 904 vorgeführten Relation 10):

$$\varrho = \frac{F}{s}$$

$$b) \ldots s = \frac{F}{\varrho}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\frac{F}{\varrho} - a = \frac{F}{\varrho_a}$$

und hieraus ergibt sich:

$$A) \ldots a = \frac{F}{\varrho} - \frac{F}{\varrho_a}$$

nach welcher Gleichung man die Seite a berechnen kann.

Berücksichtigt man, dass:

$$2s = a + b + c$$

und somit nach Gleichung b):

$$c) \ldots a+b+c=\frac{2F}{\varrho}$$

ist, und man subtrahiert von dieser Gleichung die Gleichung A), so erhält man:

$$b+c=\frac{2F}{\varrho}-\left(\frac{F}{\varrho}-\frac{F}{\varrho_a}\right)$$

oder:

$$B) \ldots b+c=\frac{F}{\varrho}+\frac{F}{\varrho_a}$$

Nach welcher Gleichung man $b+c$ berechnen kann.

Ferner erhält man aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 7):

$$\varrho_a=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

wenn man in derselben für s den Wert aus vorstehender Gleichung b) substituiert:

$$\varrho_a=\frac{F}{\varrho}\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$C) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\varrho_a\cdot\varrho}{F}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

Aus a, $b+c$ und α kann man die übrigen Seiten berechnen, wie in der Andeutung zur Aufgabe 479 gesagt wurde.

Aufgabe 971. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\alpha = 43^0\, 36'\, 10{,}1''$$
$$\varrho_b = 125 \text{ m}$$
$$\varrho_c = 2400 \text{ m}$$

Man soll den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 950 vorgeführten Relation 17) erhält man:

$$a) \ldots F=(s-b)\cdot\varrho_b$$

Ferner erhält man aus der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 16):

$$(s-b)=\frac{\varrho_c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

oder:

$$b) \ldots (s-b)=\varrho_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich:

$$A) \ldots F=\varrho_b\cdot\varrho_c\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

Nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt berechnen kann.

Aufgabe 972. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a = 12 \text{ m}$$
$$\varrho_b = 4 \text{ m}$$
$$\varrho_c = 33 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten, die Winkel und den Inhalt des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 953 vorgeführten Relation 2):

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{2}{\varrho_c}$$

erhält man:

$$\text{A)} \ldots\ldots \varrho = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_a \varrho_c}$$

[vergleiche Relation 2) in Aufgabe 953]

nach dieser Gleichung berechne man zunächst den Radius ϱ des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

Dann berechne man den Inhalt F des Dreiecks nach der in Aufgabe 952 vorgeführten Relation 8); man erhält aus derselben:

$$\text{B)} \ldots\ldots F = \sqrt{\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c}$$

Sind hiernach F und ϱ berechnet, so berechne man die Seiten a, b und c, ebenso die Winkel, wie in der Andeutung zur Aufgabe 970 gesagt wurde, mittels der Relationen:

$$\text{C)} \ldots a = \frac{F}{\varrho} - \frac{F}{\varrho_a}$$ [siehe Gleichung A) in Aufgabe 970]

$$\text{D)} \ldots b = \frac{F}{\varrho} - \frac{F}{\varrho_b}$$

$$\text{E)} \ldots c = \frac{F}{\varrho} - \frac{F}{\varrho_c}$$

und

$$\text{F)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a \cdot \varrho}{F}$$ [siehe Gleichung C) in Aufgabe 970]

$$\text{G)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\varrho_b \cdot \varrho}{F}$$

$$\text{H)} \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_c \cdot \varrho}{F}$$

Aufgabe 973. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a - \varrho = 6{,}5 \text{ m}$$
$$\alpha = 53^0\,7'\,48{,}4''$$
$$\beta = 67^0\,22'\,48{,}5''$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks berechnen.

Andeutung. Aus der in Aufgabe 957 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho_a - \varrho = 4\,r \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

erhält man:

$$\text{a)} \ldots r = \frac{\varrho_a - \varrho}{4 \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für $\varrho_a - \varrho$ und α gegebenen Zahlenwerte den Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises berechnen kann.

Ist hiernach r berechnet, so berechne man nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

aus welcher sich:

$$\text{b)} \ldots a = 2r\sin\alpha$$

ergibt, die Seite a. Ist hiernach a berechnet, so kann man aus a, α, β und $\gamma\,[= 2R - (\alpha+\beta)]$ mittels der Sinusregel die Seiten b und c berechnen.

Aufgabe 974. Von einem Dreieck sind gegeben:

$$\varrho_a - \varrho = 404 \text{ m}$$
$$a = 1450 \text{ m}$$
$$b = 250 \text{ m}$$

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel des Dreiecks bestimmen.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 957 vorgeführten Relation 1) ist:

$$\text{a)} \ldots \varrho_a - \varrho = 4r\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Ferner ist nach der in Aufgabe 842 vorgeführten Relation 1):

$$r = \frac{a}{2\sin\alpha}$$

Aus letzterer Gleichung erhält man:

$$2r\sin\alpha = a$$

$$2r \cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = a$$

oder:

$$\text{b)} \ldots 4r\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man diesen Wert für $4r\sin\frac{\alpha}{2}$ in Gleichung a), so erhält man:

$$\varrho_a - \varrho = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}} \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

oder:

$$\varrho_a - \varrho = a \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots\ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a - \varrho}{a}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für $\varrho_a - \varrho$ und a gegebenen Zahlenwerte den Winkel α berechnen kann. Ist α berechnet, so kennt man von dem Dreieck a, b und α; man kann somit im weiteren verfahren wie in der Auflösung zur Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Figur 367.

Aufgabe 975. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln eines Dreiecks, dem Radius r des demselben umbeschriebenen Kreises und den Entfernungen der Mittelpunkte der drei dem Dreieck anbeschriebenen Kreise von dem Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . . $\overline{m m_a} = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

2) . . . . $\overline{m m_b} = 4r \cdot \sin\frac{\beta}{2}$

3) . . . . $\overline{m m_c} = 4r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Der Mittelpunkt m des dem Dreieck ABC einbeschriebenen Kreises, siehe Figur 367, liegt auf jeder der drei Halbierungslinien der drei Winkel α, β und γ. Der Mittelpunkt m_a des dem Dreieck ABC anbeschriebenen Kreises, welcher die Seite a direkt berührt, liegt ebenfalls auf der Halbierungslinie des Winkels α und auf jeder der Linien, welche die Aussenwinkel des Dreiecks bei B und C halbieren. Zieht man mS parallel AP, so erhält man das bei S rechtwinklige Dreieck mSm_a, in welchem $\sphericalangle Smm_a = \sphericalangle PAm_a$ oder $= \frac{\alpha}{2}$, in welchem

ferner $Sm_a = Pm_a - PS$ oder $= \varrho_a - \varrho$ ist. Aus diesem Dreieck ergibt sich hiernach:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\varrho_a - \varrho}{\overline{m m_a}}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \overline{m m_a} = \frac{\varrho_a - \varrho}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der in Aufgabe 957 vorgeführten Relation 1):

$$\text{b)} \ldots \varrho_a - \varrho = 4r \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

so erhält man:

$$\overline{m m_a} = \frac{4r \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

$$1) \ldots \overline{m m_a} = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

In ganz derselben Weise kann man an der Hand entsprechender Figuren die nebenstehenden Relationen 2) und 3) herleiten.

Aufgabe 976. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln eines Dreiecks, dem Radius r des demselben umbeschriebenen Kreises und den gegenseitigen Entfernungen der Mittelpunkte der drei dem Dreieck anbeschriebenen Kreise nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \overline{m_a m_b} = 4r\cos\frac{\gamma}{2}$$

$$2) \ldots \overline{m_a m_c} = 4r\cos\frac{\beta}{2}$$

$$3) \ldots \overline{m_b m_c} = 4r\cos\frac{\alpha}{2}$$

Andeutung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Nach den Erkl. 569 bis 571 sind, siehe Figur 367, die Ecken des Dreiecks ABC die Fusspunkte der drei Höhen des Dreiecks $m_a m_b m_c$.

Zwischem dem Winkel γ des Höhendreiecks ABC und dem Winkel $m_b m_c m_a$ besteht, wie in Andeutung zur Aufgabe 650 gezeigt wurde, die Relation:

$$\gamma = 2R - 2 \cdot \sphericalangle m_b m_c m_a$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots \sphericalangle m_b m_c m_a = R - \frac{\gamma}{2}$$

In derselben Weise kann man darthun, dass:

$$\text{b)} \ldots \sphericalangle m_b m_a m_c = R - \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{c)} \ldots \sphericalangle m_a m_b m_c = R - \frac{\beta}{2}$$

ist. Ferner besteht zwischen der Seite AB ($= c$), des Höhendreiecks ABC, der Seite $m_b m_a$ des Dreiecks $m_a m_b m_c$ und dem dieser Seite gegenüberliegenden Winkel $m_b m_c m_a$

Erkl. 569. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Halbierungslinien eines Winkels und dessen Scheitelwinkels liegen in einer Geraden."

Nach diesem Satz liegen in der Figur 367 die Halbierungslinien $\overline{Cm_a}$ und $\overline{Cm_b}$, desgl. $\overline{Bm_a}$ und $\overline{Bm_c}$, desgl. $\overline{Am_b}$ und $\overline{Am_c}$ je in einer geraden Linie.

Erkl. 570. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Halbierungslinien eines Winkels und seines Nebenwinkels stehen senkrecht aufeinander."

Nach diesem Satz ist in der Figur 367:

$$Cm_c \perp m_a m_b$$
$$Bm_b \perp m_a m_c$$
$$Am_a \perp m_b m_c$$

Erkl. 571. Nach den Erkl. 569 und 570 sind die Ecken des Dreiecks ABC die Fusspunkte der drei Höhen $\overline{m_a A}$, $\overline{m_b B}$ und $\overline{m_c C}$ des Dreiecks $m_a m_b m_c$.

dieses Dreiecks, wie in der Erkl. 367 gezeigt wurde, die Relation:

$$\text{d)} \ldots c = \overline{m_a m_b} \cdot \cos \sphericalangle m_b m_c m_a$$

In analoger Weise kann man darthun, dass für:

$$AC = b$$

und

$$BC = a$$

die Relationen:

$$\text{e)} \ldots b = \overline{m_a m_c} \cdot \cos \sphericalangle m_a m_b m_c$$

und

$$\text{f)} \ldots a = \overline{m_b m_c} \cdot \cos \sphericalangle m_b m_a m_c$$

bestehen.

Aus den Relationen d) bis f) erhält man in Rücksicht der Relationen a) bis c) bezw.:

$$\text{g)} \ldots \overline{m_a m_b} = \frac{c}{\cos\left(R - \frac{\gamma}{2}\right)}$$

$$\text{h)} \ldots \overline{m_a m_c} = \frac{b}{\cos\left(R - \frac{\beta}{2}\right)}$$

und

$$\text{i)} \ldots \overline{m_b m_c} = \frac{a}{\cos\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)}$$

In Rücksicht der Erkl. 19 und in Rücksicht, dass nach den in Aufgabe 842 vorgeführten Relationen 1) bis 3):

$$a = 2r \sin\alpha$$
$$b = 2r \sin\beta$$
$$c = 2r \sin\gamma$$

ist, erhält man aus den Gleichungen g) bis i) bezw.:

$$\text{k)} \ldots \overline{m_a m_b} = \frac{2r \sin\gamma}{\sin\frac{\gamma}{2}}$$

$$\text{l)} \ldots \overline{m_a m_c} = \frac{2r \sin\beta}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

und

$$\text{m)} \ldots \overline{m_b m_c} = \frac{2r \sin\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Bringt man nunmehr in bezug auf $\sin\gamma$, $\sin\beta$ und $\sin\alpha$ die in der Erkl. 52 vorgeführte goniometrische Formel $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ in Anwendung und reduziert, so erhält man aus den Gleichungen k) bis m) die zu beweisenden Relationen:

$$1) \ldots \overline{m_a m_b} = 4r \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$$

$$2) \ldots \overline{m_a m_c} = 4r \cdot \cos\frac{\beta}{2}$$

und

$$3) \ldots \overline{m_b m_c} = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$$

Aufgabe 977. Man soll nachweisen, dass zwischen den Entfernungen e_a, e_b und e_c des Mittelpunkts des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises von den Mittelpunkten der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, dem Radius r des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises und den Radien ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c jener dem Dreieck anbeschriebenen Kreise nachfolgende Relationen bestehen:

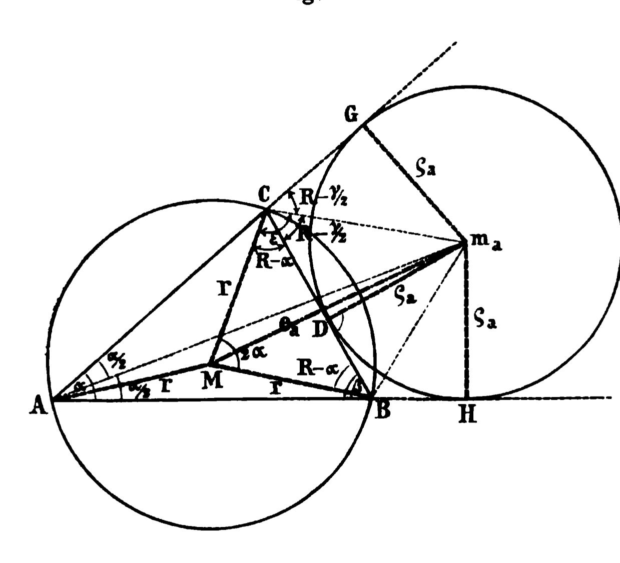
1) . . . $e_a^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_a$

2) . . . $e_b^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_b$

3) . . . $e_c^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_c$

4) . . . $e^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = 12r^2$

Figur 368.



Erkl. 572. Aus dem rechtwinkligen Dreieck CDm_a der Figur 368 ergibt sich die Relation:

$$\sin\left(R - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\varrho_a}{\overline{Cm_a}}$$

oder:

$$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{\varrho_a}{\overline{Cm_a}}$$

und hieraus erhält man:

$$\overline{Cm_a} = \frac{\varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

In Figur 368 sei m_a der Mittelpunkt des dem Dreieck ABC anbeschriebenen Kreises, welcher die Seite a direkt berührt, und es sei M der Mittelpunkt des Kreises, welcher durch die drei Ecken des Dreiecks geht.

Verbindet man M mit m_a und C mit M und m_a, so erhält man das Dreieck CMm_a, aus demselben ergibt sich nach dem Projektionssatz:

a) . . . $\overline{Mm_a}^2 = \overline{CM}^2 + \overline{Cm_a}^2 - 2 \cdot \overline{CM} \cdot \overline{Cm_a} \cdot \cos \sphericalangle MCm_a$

Berücksichtigt man, dass:

$$\overline{Mm_a} = e_a$$

$$\overline{CM} = r$$

$$\overline{Cm_a} = \frac{\varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \text{ (siehe Erkl. 572)}$$

und dass:

$$\sphericalangle MCm_a = \varepsilon = R - \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ (siehe Erkl. 573)}$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener Relation a):

$$e_a^2 = r^2 + \frac{\varrho^2_a}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} - 2 \cdot r \cdot \frac{\varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \cos\left(R - \frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

oder nach der Erkl. 19:

$$e_a^2 = r^2 + \frac{\varrho^2_a}{\cos^2\frac{\gamma}{2}} - \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$e_a^2 = r^2 + \frac{2r \cdot \varrho^2_a}{2r \cos^2\frac{\gamma}{2}} - \frac{2r\varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$e_a^2 = r^2 - \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}}\left[\sin\frac{\alpha - \beta}{2} - \frac{\varrho_a}{2r\cos\frac{\gamma}{2}}\right]$$

Setzt man nunmehr nach der in Aufgabe 956 vorgeführten Relation 1):

$$\varrho_a = 4r\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

für:

$$\frac{\varrho_a}{2r\cos\frac{\gamma}{2}} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

Erkl 578. In der Figur 368 ist:

a) . . . $\sphericalangle MCB = \frac{2R - 2\alpha}{2}$ oder $= R - \alpha$

[denn das Dreieck BMC ist ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Scheitelwinkel BMC nach der Erkl. 450 $= 2\alpha$ ist]

ferner ist:

b) . . . $\sphericalangle BCm_a = R - \frac{\gamma}{2}$

Da nun:

$\sphericalangle MCm_a$ (oder ε) $= \sphericalangle MCB + \sphericalangle BCm_a$

ist, so ist nach den Gleichungen a) und b):

c) . . . $\varepsilon = R - \alpha + R - \frac{\gamma}{2}$

Berücksichtigt man, dass $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$ ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung c):

$$\varepsilon = R - \alpha + R - \frac{2R - (\alpha + \beta)}{2}$$

$$\varepsilon = 2R - \alpha - \frac{2R - (\alpha + \beta)}{2}$$

$$\varepsilon = 2R - \alpha - R + \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2}$$

oder:

d) . . . . $\varepsilon = R - \frac{\alpha - \beta}{2}$ (vergl. die Erkl. 550)

so erhält man:

$$e_a^2 = r^2 - \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}}\left[\sin\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\right]$$

Setzt man in dieser Gleichung nach der Erkl. 510:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} = \sin\frac{\alpha + \beta}{2} + \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$$

so erhält man:

$$e_a^2 = r^2 - \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}}\left[\sin\frac{\alpha - \beta}{2} - \sin\frac{\alpha + \beta}{2} - \sin\frac{\alpha - \beta}{2}\right]$$

oder:

$$e_a^2 = r^2 - \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot - \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$e_a^2 = r^2 + \frac{2r \cdot \varrho_a}{\cos\frac{\gamma}{2}} \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass:

$$\frac{\alpha + \beta}{2} \text{ und } \frac{\gamma}{2}$$

Komplementwinkel sind, dass also:

$$\sin\frac{\alpha + \beta}{2} = \cos\frac{\gamma}{2}$$

ist, die herzuleitende Relation:

1) . . . $e_a^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_a$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 2) und 3) herleiten.

B) Beweis der Relation 4):

Durch Addition der in Aufgabe 947 vorgeführten Relation:

a) . . . $e^2 = r^2 - 2r\varrho$

und der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 1) bis 3) erhält man:

$$e^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = r^2 - 2r\varrho + r^2 + 2r \cdot \varrho_a + r^2 + 2r \cdot \varrho_b + r^2 + 2r \cdot \varrho_c$$

oder:

$$e^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = 4r^2 + 2r(\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho)$$

Setzt man hierin nach der in Aufgabe 957 vorgeführten Relation 14):

$$\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$$

so erhält man:

$$e^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = 4r^2 + 8r^2$$

und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

4) . . . $e^2 + e_a^2 + e_b^2 + e_c^2 = 12r^2$



14). Aufgaben über Vierecke und Vielecke in Verbindung mit den denselben um- und einbeschriebenen Kreisen.

Anmerkung 56. Die wichtigsten der Aufgaben, welche sich auf Vierecke und Vielecke in Verbindung mit den denselben um- und einbeschriebenen Kreisen beziehen, sind:

a) Aufgaben über die regulären n-Ecke, Vielecke oder Polygone (siehe Anmerkung 4 im Abschnitt 11a),
b) Aufgaben über das Sehnenviereck
c) Aufgaben über das Tangentenviereck } (siehe Anmerkung 33 im Abschnitt 10f).
und d) Aufgaben über das Kreisviereck (siehe Anmerkung 30 in Abschnitt 10g).

a) Aufgaben über die regulären n-Ecke, Vielecke oder Polygone.

Anmerkung 57. Dem Studierenden wird empfohlen, denjenigen Aufgaben besondere Aufmerksamkeit zu widmen, in welchen die Herleitung, bezw. der Nachweis der Richtigkeit gegebener Relationen verlangt wird.

Anmerkung 58. Da, wie in den Lösungen und Andeutungen zu nachstehenden Aufgaben gezeigt wird, die Berechnung eines jeden regulären n-Ecks im allgemeinen auf die Berechnung des Bestimmungsdreiecks desselben zurückgeführt wird (siehe Erkl. 576), und da das Bestimmungsdreieck eines regulären n-Ecks stets ein gleichschenkliges Dreieck ist, so ergibt sich hieraus, dass sich die Berechnung regulärer n-Ecke an die Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks, also an den Abschnitt 3) dieses Lehrbuches anschliessen kann.

Anmerkung 59. Da, wie in voriger Anmerkung erwähnt, die Berechnung eines regulären n-Ecks auf die Berechnung eines gleichschenkligen Dreiecks zurückgeführt wird und ein gleichschenkliges Dreieck im allgemeinen durch zwei von einander unabhängige Stücke desselben vollkommen bestimmt ist, so sind zur Berechnung eines regulären n-Ecks ebenfalls nur zwei Bestimmungsstücke erforderlich.

Berücksichtigt man, dass eines dieser Bestimmungsstücke, nämlich der sog. Centriwinkel des betreff. n-Ecks, d. i. der Scheitelwinkel von dessen Bestimmungsdreieck nach der Erkl. 577 mit der Anzahl n der Seiten des n-Ecks gegeben ist, so folgt hieraus dass, abgesehen von diesem stets indirekt gegebenen Bestimmungsstück, zur Berechnung eines regulären n-Ecks nur ein Bestimmungsstück erforderlich ist; dieses Bestimmungsstück kann sein:

a) die Seite des n-Ecks, oder auch dessen Umfang;
b) der Radius des dem regulären n-Eck umbeschriebenen Kreises (siehe Erkl. 575) oder auch der Inhalt oder der Umfang dieses Kreises;
c) der Radius des dem regulären n-Eck einbeschriebenen Kreises (siehe Erkl. 578) oder auch der Inhalt oder der Umfang dieses Kreises;
und d) der Inhalt des n-Ecks oder des Bestimmungsdreiecks desselben.

Aufgabe 978. Man soll nachweisen, dass zwischen der Seite s eines regulären n-Ecks, der Anzahl n der Seiten des n-Ecks, den Radien R und r der demselben um- und einbeschriebenen Kreise und dem Inhalt F desselben nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots R = \frac{s}{2\cdot\sin\frac{180^0}{n}}$$

$$2) \ldots s = 2R\cdot\sin\frac{180^0}{n}$$

$$3) \ldots r = \frac{s}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}$$

$$4) \ldots s = 2r\cdot\operatorname{tg}\frac{180^0}{n}$$

$$5) \ldots r = R\cdot\cos\frac{180^0}{n}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) und 2):

Stellt, siehe Figur 369, $ABCD\cdots$ ein ganz beliebiges reguläres n-Eck dar, siehe Erkl. 574 und man verbindet den Mittelpunkt M des demselben umbeschriebenen Kreises, siehe Erkl. 575, mit den Ecken $ABC\cdots$ des n-Eks, so wird dasselbe nach der Erkl. 576 durch diese Verbindungslinien, d. s. Radien jenes Kreises, in n kongruente gleichschenklige Dreiecke zerlegt.

6) . . . $R = \frac{r}{\cos\frac{180^0}{n}}$

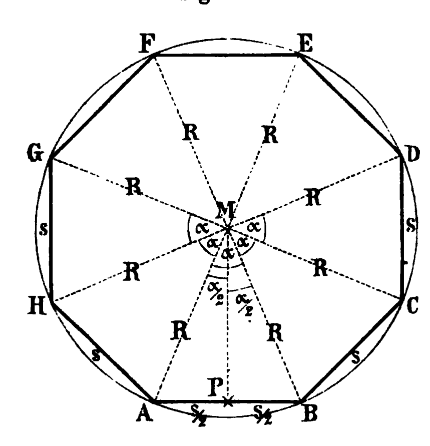
7) . . . $F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$

8) . . . $F = \frac{n \cdot s^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{n}$

9) . . . $F = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot \sin\frac{360^0}{n}$

10) . . . $F = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg}\frac{180^0}{n}$

Figur 369.



Erkl. 574. Ein reguläres n-Eck ist eine solche geradlinige ebene Figur, allgemein mit n-Seiten, in welcher alle Seiten und alle Winkel bezw. einander gleich sind.

Jene gedachte geradlinige ebene Figur kann ein Dreieck, oder ein Viereck, oder ein Fünfeck, oder sonst irgend ein Vieleck sein.

Statt reguläres n-Eck sagt man oft reguläres Polygon, obgleich man unter Polygon oder Vieleck im gewöhnlichen Sinn nur solche geradlinige Figuren versteht, die im allgemeinen mehr als vier, bezw. mehr als drei Seiten haben.

Erkl. 575. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Um jedes reguläre n-Eck lässt sich eine Kreislinie ziehen, welche durch die sämtlichen Ecken des n-Ecks geht."

Diese Kreislinie, bezw. die durch dieselbe begrenzte Figur, nennt man den dem n-Eck umbeschriebenen Kreis. Den Radius desselben nennt man den grossen Radius (siehe Erkl. 578).

In jedem solchen gleichschenkligen Dreieck, Bestimmungsdreieck des regulären n-Ecks genannt, sind die Schenkel, wie in der Figur 369 angedeutet, gleich dem Radius R des demselben umbeschriebenen Kreises; die Grundlinie eines jeden desselben ist gleich der Seite s des n-Ecks, und der Scheitelwinkel α eines jeden dieser Dreiecke, kurzweg Centriewinkel des n-Ecks genannt, enthält nach der Erkl. 577 $= \frac{360}{n}$ Grad.

Fällt man, siehe Figur 369, in einem jener Bestimmungsdreiecke, z. B. in dem Dreieck ABM die zur Seite AB $(=s)$ gehörige Höhe MP, so wird durch dieselbe, da das Dreieck ABM ein gleichschenkliges ist, die Seite s, dessgleichen der Centriewinkel α halbiert. Aus dem rechtwinkligen Dreieck APM ergibt sich die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : R$$

oder:

a) . . . $R = \frac{s}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

Berücksichtigt man, dass, wie vorstehend erwähnt, allgemein:

$$\alpha = \frac{360}{n} \text{ Grad}$$

also:

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{360}{2 \cdot n} \text{ Grad}$$

oder:

b) . . . . $\frac{\alpha}{2} = \frac{180}{n}$ Grad

enthält, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus Gleichung a) die zu beweisende Relation:

1) . . . $R = \frac{s}{2 \cdot \sin\frac{180^0}{n}}$

und aus dieser Gleichung ergibt sich sofort die zu beweisende Relation:

2) . . . $s = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{n}$

B) Beweis der Relationen 3) und 4):

Fällt man, siehe Figur 370, von dem Mittelpunkt M des dem regulären n-Eck $ABC \cdots$ umbeschriebenen Kreises auf die Seiten des n-Ecks die Perpendikel MP, MP_1 $MP_2 \cdots$, so sind diese Perpendikel als homologe Höhen kongruenter Dreiecke alle einander gleich; diese Perpendikel sind, siehe die Erkl. 578 und 579, alle gleich dem Radius r des dem regulären n-Eck einbeschriebenen Kreises.

Aus jedem der rechtwinkligen Dreiecke, in welche z. B. das Bestimmungsdreieck AMB durch dessen Höhe MP $(= r)$ zerlegt wird, ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = r : \frac{s}{2}$$

Erkl. 576. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

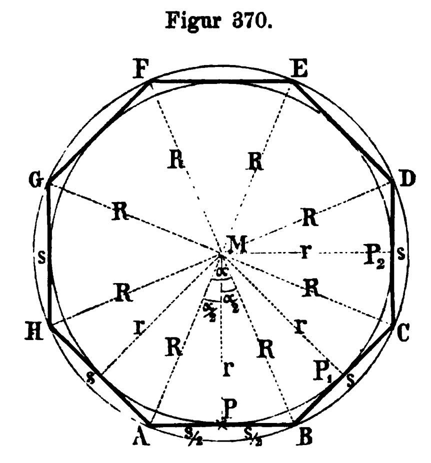
„Verbindet man die Ecken eines regulären n-Ecks mit dem Mittelpunkt des demselben umbeschriebenen Kreises, so wird das Polygon in soviel kongruente Dreiecke zerlegt, als das n-Eck Seiten hat."

Da hiernach das n-Eck durch eines jener n kongruenten Dreiecke vollkommen bestimmt ist, so nennt man ein solches Dreieck das Bestimmungsdreieck des regulären n-Ecks.

Erkl. 577. Die n-Dreiecke, in welche ein reguläres n-Eck durch die nach den Ecken gezogenen Radien des dem n-Eck umbeschriebenen Kreises zerlegt wird, sind nach der Erkl. 576 kongruente gleichschenklige Dreiecke.

Aus der Kongruenz dieser Dreiecke ergibt sich, dass die Scheitelwinkel dieser Dreiecke einander gleich sind. Da nun diese Scheitelwinkel Centriewinkel des Kreises um M sind und als Winkel um einen Punkt herum zusammen $4R$ oder 360^0 betragen, so muss der Scheitelwinkel eines jeden jener n kongruenten gleichschenkligen Dreiecke $= \frac{360}{n}$ Grad enthalten.

Figur 370.



oder:

$$c) \dots r = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$$

Berücksichtigt man, dass nach vorstehender Gleichung b):

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{180}{n} \text{ Grade}$$

ist, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus Gleichung c) die zu beweisende Relation:

$$3) \dots r = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$$

Aus dieser Relation ergibt sich:

$$s = \frac{2r}{\operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}}$$

Berücksichtigt man die Erkl. 15, so erhält man hieraus die zu beweisende Relation:

$$4) \dots s = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

C) Beweis der Relationen 5) und 6):

Aus dem rechtwinkligen Dreieck APM der Figur 370 ergibt sich:

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{R}$$

oder:

$$r = R \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$$

Berücksichtigt man, dass nach vorstehender Gleichung b):

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{180}{n} \text{ Grade}$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus jener Gleichung die zu beweisende Relation:

$$5) \dots r = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}$$

Aus dieser Relation ergibt sich direkt die zu beweisende Relation:

$$6) \dots R = \frac{r}{\cos \frac{180^0}{n}} \text{ (Siehe die Erkl. 580.)}$$

D) Beweis der Relation 7):

Der Inhalt F eines regulären n-Ecks ist gleich dem n-fachen Inhalt seines Bestimmungsdreiecks. Da nun nach der Erkl. 34 der Inhalt des Bestimmungsdreiecks MAB, siehe Figur 370 $= \frac{s \cdot r}{2}$ ist, so ergibt sich hieraus die zu beweisende Relation:

$$7) \dots F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$$

E) Beweis der Relation 8):

Setzt man in der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 7):

$$F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

[redacted]

336. Heft. | Preis des Heftes **25 Pf.** | **Ebene Trigonometrie.** Forts. v. Heft 335. — Seite 689—704. Mit 4 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 335. — Seite 689—704. Mit 4 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

☛ **Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.**

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich **in 3—4** Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) **des** Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den **Schulunterricht** benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des **Lehrers** erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

nach der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 3):

$$r = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$$

so erhält man:

$$F = \frac{n \cdot s}{2} \cdot \frac{s}{2} \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$8) \ldots F = \frac{n \cdot s^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$$

F) Beweis der Relation 9):

Setzt man in der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 7):

$$F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$$

nach den in dieser Aufgabe vorgeführten Relationen 2) und 5) bezw.:

$$s = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}$$

und

$$r = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}$$

so erhält man:

$$F = \frac{n}{2} \cdot 2R \sin \frac{180^0}{n} \cdot R \cos \frac{180^0}{n}$$

oder:

$$F = \frac{nR^2}{2} \cdot 2 \sin \frac{180^0}{n} \cos \frac{180^0}{n}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht, dass nach der Erkl. 52:

$$2 \sin \frac{180^0}{n} \cos \frac{180^0}{n} = \sin \frac{2 \cdot 180^0}{n}$$

$$\text{oder} = \sin \frac{360^0}{n}$$

gesetzt werden kann, die zu beweisende Relation:

$$9) \ldots F = \frac{nR^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{n}.$$

G) Beweis der Relation 10):

Setzt man in der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 7):

$$F = \frac{n \cdot s \cdot r}{n}$$

nach der in dieser Aufgabe vorgeführten Relation 4):

$$s = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

so erhält man:

$$F = \frac{n}{2} \cdot r \cdot 2r \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$10) \ldots F = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

Erkl. 578. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedes reguläre n-Eck lässt sich eine Kreislinie zeichnen, welche die sämtlichen Seiten des n-Ecks berührt.“

Diese Kreislinie, bezw. die durch dieselbe begrenzte **Figur**, nennt man den dem n-Eck **einbeschriebenen Kreis**. Den Radius desselben nennt man den **kleinen Radius**.

Erkl. 579. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Mittelpunkt des einem regulären n-Eck **umbeschriebenen Kreises** fällt mit dem Mittelpunkt des demselben **einbeschriebenen Kreises** zusammen.“

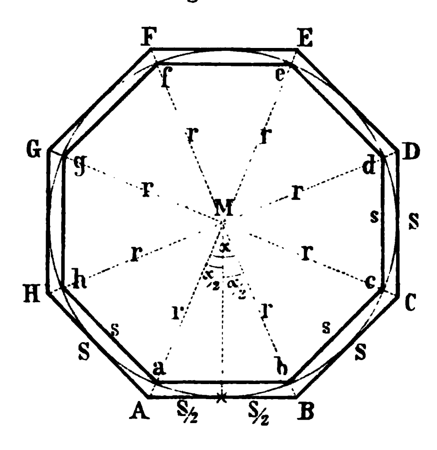
Erkl. 580. Die in Aufgabe 978 vorgeführten Relationen 5) und 6) kann man auch aus den in der Aufgabe 978 vorgeführten Relationen 2) und 3), bezw. 1) und 4) herleiten.

Aufgabe 979. Man soll nachweisen, dass zwischen der Seite S des einem Kreis umbeschriebenen regulären n-Ecks, der Seite s des demselben Kreis einbeschriebenen regulären n-Ecks und der Anzahl n der Seiten eines jener n-Ecke, die Relationen bestehen:

$$1) \ldots s = S \cdot \cos \frac{180^0}{n}$$

$$2) \ldots S = \frac{s}{\cos \frac{180^0}{n}}$$

Figur 371.



Erkl. 581. Die Seite des einem Kreis einbeschriebenen regulären n-Ecks nennt man in bezug auf die Seite des demselben Kreis umbeschriebenen regulären n-Ecks die kleine Seite, letztere die grosse Seite. (Vergl. hiermit die Erkl. 575 und 578.)

Die kleine Seite bezeichnet man allgemein mit s, die grosse Seite mit S (siehe Erkl. 582).

Erkl. 582. Spricht man von einem Kreis, welcher einem regulären n-Eck ein- oder umbeschrieben ist, so bezeichnet man den Radius eines solchen Kreises bezw. mit r oder R (siehe die Erkl. 575 und 578). Spricht man von einem regulären n-Eck, welches einem Kreis ein- oder umbeschrieben ist, so bezeichnet man die Bestimmungsstücke eines solchen n-Ecks, wie z. B. die Seite, den Umfang und Inhalt mit s, u und f, bezw. mit S, U und F.

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

In der Figur 371 ist der Kreis um M, dessen Radius mit r bezeichnet ist, der dem regulären n-Eck $ABCD\cdots$ einbeschriebene Kreis. Nach der in Aufg. 978 vorgeführten Relation 4) besteht zwischen der nach der Erkl. 581 mit S bezeichneten Seite dieses n-Ecks, dem Radius r des demselben einbeschriebenen Kreises und der Anzahl n der Seiten des n-Ecks die Relation:

$$a) \ldots S = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$$

Ferner ist in der Figur 371 der Kreis um M, dessen Radius r ist, der dem regulären n-Eck $abc\cdots$ umbeschriebene Kreis. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) besteht zwischen der nach der Erkl. 581 mit s bezeichneten Seite dieses n-Ecks, dem Radius r des demselben umbeschriebenen Kreises und der Anzahl n der Seiten des n-Ecks die Relation:

$$b) \ldots s = 2r \cdot \sin \frac{180^0}{n}$$

Dividiert man die Gleichung a) in Gleichung b), so erhält man:

$$\frac{s}{S} = \frac{2r \cdot \sin \frac{180^0}{n}}{2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}}$$

oder:

$$\frac{s}{S} = \sin \frac{180^0}{n} \cdot \frac{\cos \frac{180^0}{n}}{\sin \frac{180^0}{n}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots . s = S \cdot \cos \frac{180^0}{n}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich direkt die zu beweisende Relation:

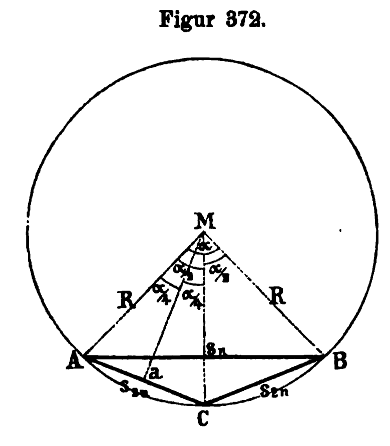
$$2) \ldots . S = \frac{s}{\cos \frac{180^0}{n}}$$

Aufgabe 980. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius R eines Kreises, der Seite s_n des diesem Kreis einbeschriebenen regulären n-Ecks und der Seite s_{2n} des diesem Kreis einbeschriebenen $2n$-Ecks die Relation besteht:

$$s_n = \frac{s_{2n}}{R} \sqrt{4R^2 - s_{2n}}$$

Auflösung. Stellt, siehe Figur 372, MAB das Bestimmungsdreieck des dem Kreis um M einbeschriebenen regulären n-Ecks dar und ist MC die Halbierungslinie des zu diesem

Figur 372.



Erkl. 583. Löst man die in Aufgabe 980 vorgeführte Relation:

$$1) \ldots s_n = \frac{s_{2n}}{R} \sqrt{4R^2 - s_{2n}^2}$$

in bezug auf s_{2n} auf, so erhält man die aus der Planimetrie bekannte Formel:

$$2) \ldots s_{2n} = \sqrt{2R \cdot \left(R - \sqrt{R^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$$

Jene Relation 1) kann man auch ohne Zuhilfenahme goniometr. Funktionen herleiten. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Dreieck gehörigen Centriewinkels α, so stellt jedes der Dreiecke MAC und MBC das Bestimmungsdreieck des dem Kreis um M einbeschriebenen regulären $2n$-Ecks dar.

Nach der Auflösung der Aufgabe 797 ergibt sich aus dem Dreieck ABM die Relation:

$$a) \ldots s_n = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

und aus dem Dreieck ACM die Relation:

$$b) \ldots s_{2n} = 2R \cdot \sin\frac{\alpha}{4}$$

Setzt man in Gleichung a) nach der Erkl. 52:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{4} \cdot \cos\frac{\alpha}{4}$$

und dividiert alsdann diese somit erhaltene Gleichung durch die Gleichung b), so erhält man:

$$c) \ldots \frac{s_n}{s_{2n}} = 2 \cdot \cos\frac{\alpha}{4}$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck MaA ergibt sich ferner:

$$\cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\overline{Ma}}{\overline{MA}}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$\overline{MA} = R$$

ist, und dass sich aus diesem rechtwinkligen Dreieck für:

$$\overline{Ma} = \sqrt{R^2 - \left(\frac{s_{2n}}{2}\right)^2}$$

ergibt:

$$d) \ldots \cos\frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{s_{2n}}{2}\right)^2}}{R}$$

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man nunmehr:

$$s_n = 2 \cdot s_{2n} \cdot \frac{\sqrt{R^2 - \left(\frac{s_{2n}}{2}\right)^2}}{R}$$

oder:

$$s_n = \frac{2 \cdot s_{2n}}{R} \cdot \sqrt{\frac{4R^2 - s_{2n}^2}{4}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$s_n = \frac{s_{2n}}{R} \cdot \sqrt{4R^2 - s_{2n}^2} \quad \text{(siehe die Erkl. 583)}$$

Aufgabe 981. Die Seite s_8 eines regulären 8-Ecks misst 20 m; wie gross ist der Radius R_8 des demselben umbeschriebenen Kreises?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 1) hat man für ein reguläres 8-Eck:

$$\text{A)} \ldots R_8 = \frac{s_8}{2\cdot\sin\frac{180^0}{8}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s_8 gegebenen Zahlenwerts und in Rücksicht, dass:

$$\frac{180^0}{8} = 22^0\,30'$$

ist (siehe Erkl. 584), den gesuchten Radius R_8 berechnen kann.

Erkl. 584. Den durch $\frac{180^0}{8}$ dargestellten und in Grad ausgedrückten halben Centriewinkel eines regulären 8-Ecks kann man wie folgt in Grade und Minuten ausdrücken:

$$\frac{180^0}{8} = 22\frac{4}{8} \text{ oder } = 22\frac{1}{2} \text{ Grad}$$

$$= 22^0 + \frac{1}{2} \text{ Grad}$$

$$= 22^0 + \frac{1\cdot 60'}{2}$$

$$= 22^0 + 30'$$

mithin ist:

$$\frac{180^0}{8} = 22^0\,30'$$

Aufgabe 982. Die Seite s_7 eines regulären 7-Ecks misst 10 dm, wie gross ist der Radius R_7 des demselben umbeschriebenen Kreises?

Erkl. 585. Den durch $\frac{180^0}{7}$ dargestellten und in Grad ausgedrückten halben Centriewinkel eines regulären 7-Ecks kann man wie folgt in Grad, Minuten und Sekunden ausdrücken:

$$\frac{180^0}{7} = 25\frac{5}{7} \text{ oder } = 25^0 + \frac{5^0}{7}$$

$$= 25^0 + \frac{5\cdot 60'}{7}$$

$$= 25^0 + \frac{300'}{7}$$

$$= 25^0 + 42\frac{6}{7} \text{ Minuten}$$

$$= 25^0 + 42' + \frac{6'}{7}$$

$$= 25^0 + 42' + \frac{6\cdot 60''}{7}$$

$$= 25^0 + 42' + \frac{360''}{7}$$

$$= 25^0 + 42' + 51{,}4285\cdots \text{Sekunden}$$

mithin ist:

$$\frac{180^0}{7} = 25^0\,42'\,51{,}4285\cdots''$$

oder abgerundet, also annähernd (aber für jede trigonometrische Berechnung genau genug):

$$\frac{180^0}{7} = 25^0\,42'\,51{,}43''$$

Andeutung. Nach der in Aufgabe 97. vorgeführten Relation 1) hat man für ein reguläres 7-Eck:

$$\text{A)} \ldots R_7 = \frac{s_7}{2\cdot\sin\frac{180^0}{7}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s_7 gegebenen Zahlenwerts und in Rücksicht, dass:

$$\frac{180^0}{7} \text{ annähernd } = 25^0\,42'\,51{,}43''$$

ist (siehe Erkl. 585), den gesuchten Radius R_7 berechnen kann.

Aufgabe 983. Wie gross ist der Umfang eines regulären 15-Ecks, welches einem Kreis einbeschrieben ist, dessen Halbmesser $R_{15} = 1{,}25$ m misst?

Andeutung. Nach der Erkl. 586 hat man für den gesuchten Umfang u_{15} des regulären 15-Ecks:

$$\text{a)} \ldots u_{15} = 15\cdot s_{15}$$

Ferner hat man nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) für die Seite s_{15} jenes 15-Ecks:

$$\text{b)} \ldots s_{15} = 2 \cdot R_{15} \cdot \sin \frac{180^0}{15}$$

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man:

$$\text{A)} \ldots u_{15} = 30 \cdot R_{15} \cdot \sin 12^0$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für R_{15} gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Umfang berechnen kann.

Erkl. 586. Unter dem **Umfang** eines regulären n-Ecks versteht man die Summe der Masszahlen aller seiner Seiten. Da die n-Seiten eines regulären n-Ecks alle einander gleich sind, so ist der Umfang gleich dem n-fachen der Masszahl einer seiner Seiten. In Rücksicht der in der Erkl. 582 erwähnten Bezeichnungsweisen, hat man für den Umfang eines regulären n-Ecks, welches einem Kreis einbeschrieben ist:

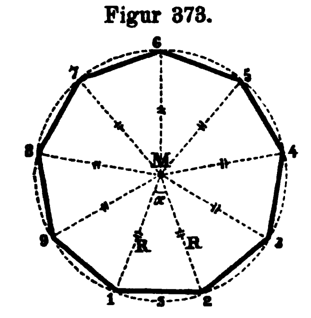
$$1) \ldots u_n = n \cdot s_n$$

und für den Umfang eines regulären n-Ecks, welches einem Kreis umbeschrieben ist:

$$2) \ldots U_n = n \cdot S_n$$

Aufgabe 984. In einem Kreis, dessen Radius 15,4 m lang, ist ein reguläres 9-Eck konstruiert, wie gross ist dessen Seite?

Figur 373.



Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) hat man für ein reguläres 9-Eck, das einem Kreis einbeschrieben ist:

$$s_9 = 2 R_9 \cdot \sin \frac{180^0}{9}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots s_9 = 2 R_9 \cdot \sin 20^0$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für R_9 gegebenen Zahlenwerts die gesuchte Seite s_9 berechnen kann.

Aufgabe 985. Der Radius eines Kreises ist 22,4 dm lang; wie gross ist die Seite des demselben einbeschriebenen regulären 5-Ecks?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) hat man für ein reguläres 5-Eck:

$$s_5 = 2 R_5 \cdot \sin \frac{180^0}{5}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots s_5 = 2 R_5 \cdot \sin 36^0$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für R_5 gegebenen Zahlenwerts die gesuchte 5-Eckseite berechnen kann.

Aufgabe 986. Der Durchmesser eines Kreises ist $2r = 1$ m; wie gross sind die Umfänge der diesem Kreis um- und einbeschriebenen 192-Ecken?

Auflösung. Nach der Erkl. 586 hat man für den Umfang des dem Kreis einbeschriebenen regulären 192-Ecks:

$$\text{a)} \ldots u_{192} = 192 \cdot s_{192}$$

und für den Umfang des dem Kreis umbeschriebenen regulären 192-Ecks:

$$\text{b)} \ldots U_{192} = 192 \cdot S_{192}$$

Ferner hat man in Rücksicht der Erkl. 582 und in Rücksicht, dass der Radius jenes

Erkl. 587. Den durch $\frac{180^0}{192}$ dargestellten und in Grad ausgedrückten halben Centriewinkel des regulären 192-Ecks kann man wie folgt in Minuten und Sekunden ausdrücken:

$$\frac{180^0}{192} = \frac{180 \cdot 60'}{192}$$
$$= \frac{10800}{192} \text{ Minuten}$$
$$= 56\frac{48}{192} \text{ oder } = 56\frac{1}{4} \text{ Minut.}$$
$$= 56' + \frac{1'}{4}$$
$$= 56' + \frac{60''}{4}$$
$$= 56' + 15''$$

mithin ist:

$$\frac{180^0}{192} = 56'\,15''$$

Hülfsrechnung 1.

Aus nebenstehender Gleichung 1) kann man u_{192} wie folgt berechnen:

$$\log u_{192} = \log 192 + \log \sin 56'\,15''$$

Nun ist:

$$\log 192 = \quad 2{,}2833012$$
$$+ \log \sin 56'\,15'' = + 8{,}2138293 - 10^{*})$$
$$\log u_{192} = 10{,}4971305 - 10$$

oder: $= 0{,}4971305$

1232
73
69,5
3,5
2,8

mithin ist:

numlog u_{192} oder $u_{192} = 3{,}141452$

Hülfsrechnung 2.

Aus nebenstehender Gleichung 2) kann man U_{192} wie folgt berechnen:

$$\log U_{192} = \log 192 + \log \operatorname{tg} 56'\,15''$$

Nun ist:

$$\log 192 = 2{,}2833012$$
$$+ \log \operatorname{tg} 56'\,15'' = 8{,}2138874 - 10^{*})$$
$$\log U_{192} = 10{,}4971886 - 10$$

oder: $= 0{,}4971886$

1785
101
97,3
3,7
2,8

mithin ist:

numlog U_{192} oder $U_{192} = 3{,}141872$

*) Die Logarithmen von sin 56′ 15″ und tg 56′ 15″ wurden einer log.-trig. Tafel entnommen, welche die Logarithmen der goniometr. Funktionen bis auf Sekunden genau enthält.

Erkl. 588. Die in nebenstehender Auflösung in A_1) und B_1) verzeichneten Werte für die Umfänge der in der Aufgabe 986 erwähnten 192-Ecke stimmen mit der irrationalen Zahl $\pi = 3{,}14159265\cdots$, welche die Masszahl für den Umfang eines Kreises darstellt, dessen Durchmesser ($2r$) gleich der Längeneinheit ist, bis auf 3 Dezimalen überein.

Kreises $= r$ ist, nach der in Aufgabe 97. vorgeführten Relation 2) für die Seite s_{192} des dem Kreis einbeschriebenen regulären 192-Ecks:

$$\text{c)} \ldots s_{192} = 2r \cdot \sin \frac{180^0}{192}$$

und nach der in jener Aufgabe vorgeführten Relation 4) für die Seite S_{192} des jenem Kreis umbeschriebenen regulären 192-Ecks:

$$\text{d)} \ldots S_{192} = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{192}$$

Aus den Gleichungen a) und c), bezw. aus den Gleichungen b) und d) erhält man:

$$\text{A)} \ldots u_{192} = 192 \cdot 2r \cdot \sin \frac{180^0}{192}$$

und

$$\text{B)} \ldots U_{192} = 192 \cdot 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{192}$$

Berücksichtigt man, dass gemäss der Aufgabe:

$$2r = 1 \text{ m}$$

und dass nach der Erkl. 587:

$$\frac{180^0}{192} = 56'\,15''$$

ist, so erhält man bezw.:

$$1) \ldots u_{192} = 192 \cdot \sin 56'\,15''$$

und

$$2) \ldots U_{192} = 192 \cdot \operatorname{tg} 56'\,15''$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich nach den Hülfsrechnungen 1) und 2) bezw.:

$$A_1) \ldots u_{192} = 3{,}141452 \text{ Meter}$$

und

$$B_1) \ldots U_{192} = 3{,}141872 \text{ Meter}$$

(Siehe die Erkl. 588)

Aufgabe 987. Man berechne den Inhalt eines regulären 9-Ecks, dessen umbeschriebener Kreis einen Radius R_9 von 16,45 m Länge hat.

Hülfsrechnung.

Aus nebenstehender Gleichung:

$$F_9 = \frac{9 \cdot 16{,}45^2}{2} \cdot \sin 40^0$$

erhält man F_9 wie folgt:

$\log F_9 = \log 9 + 2 \cdot \log 16{,}45 + \log \sin 40^0 - \log 2$

Nun ist:

$$\begin{aligned}
\log 9 &= 0{,}9542425 \\
2 \cdot \log 16{,}45 = 2 \cdot 1{,}2161659 &= 2{,}4323318 \\
+ \log \sin 40^0 &= 9{,}8080675 - 10 \\
&\overline{13{,}1946418 - 10} \\
\text{oder:} \quad &= 3{,}1946418 \\
- \log 2 &= -0{,}3010300 \\
\log F_9 &= 2{,}8936118 \\
&\quad 6064 \\
&\quad\quad 54 \\
&\quad\quad 50,
\end{aligned}$$

mithin:

$$\text{numlog}\, F_9 = 782{,}729$$

Auflösung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) hat man für ein reguläres 9-Eck:

$$F_9 = \frac{9 \cdot R_9^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{9}$$

oder:

A) .... $F_9 = \frac{9 \cdot R_9^2}{2} \cdot \sin 40^0$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für R_9 gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt berechnen kann; man erhält:

$$F_9 = \frac{9 \cdot 16{,}45^2}{2} \cdot \sin 40^0$$

und hieraus ergibt sich nach nebenstehender Hülfsrechnung:

1) ... $F_9 = 782{,}729$ qm

Aufgabe 988. Man soll den Inhalt eines regulären 5-Ecks berechnen, dessen Seite 2,45 m lang ist.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für ein reguläres 5-Eck:

$$F_5 = \frac{5 \cdot s_5^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{5} .$$

oder:

A) .... $F_5 = \frac{5 \cdot s_5^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 36^0$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 989. Wie gross ist der Inhalt eines regulären 7-Ecks, dessen Seite 21,438 dm misst?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für ein reguläres 7-Eck:

$$F_7 = \frac{7 \cdot s_7^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{7}$$

oder nach der Erkl. 585:

A) .... $F_7 = \frac{7 \cdot s_7^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 25^0\, 42'\, 51{,}43''$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 990. Wenn der Inhalt eines regulären 9-Ecks 4068,42 qdm beträgt; wie gross ist alsdann dessen Seite?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für ein reguläres 9-Eck:

$$F_9 = \frac{9 \cdot s_9^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{9}$$

Löst man diese Gleichung in bezug auf s_9 auf, so erhält man:

$$s_9 = \sqrt{\frac{4 F_9}{9 \cdot \operatorname{ctg} 20^0}}$$

oder nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht der Erkl. 15:

$$\text{A)} \; \ldots \; s_9 = \frac{2}{3} \sqrt{F_9 \cdot \operatorname{tg} 20^0}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für F_9 gegebenen Zahlenwerts die gesuchte Seite s_9 berechnen kann.

Aufgabe 991. Wie gross ist der Radius des einem solchen regulären 12-Eck umbeschriebenen Kreises, dessen Inhalt 192 qm beträgt?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) hat man für ein reguläres 12-Eck:

$$F_{12} = \frac{12 \cdot R_{12}^2}{2} \sin \frac{360^0}{12}$$

oder:

$$F_{12} = 6 R_{12}^2 \cdot \sin 30^0$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \; \ldots \; R_{12} = \sqrt{\frac{F_{12}}{6 \sin 30^0}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für F_{12} gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Radius R_{12} berechnen kann.

Aufgabe 992. Wie gross ist die Seite des einem Kreis einbeschriebenen regelmässigen 12-Ecks, wenn die Seite des diesem Kreis umbeschriebenen regulären 12-Ecks $= 25$ m misst?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 979 vorgeführten Relation 1) hat man für ein reguläres 12-Eck:

$$s_{12} = S_{12} \cdot \cos \frac{180^0}{12}$$

oder:

$$\text{A)} \; \ldots \; s_{12} = S_{12} \cdot \cos 15^0$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für S_{12} gegebenen Zahlenwerts die gesuchte Seite s_{12} berechnen kann.

Aufgabe 993. In und um einen Kreis, dessen Radius $r = 5$ dm misst, ist ein reguläres 8-Eck konstruiert; wie gross ist der Unterschied ihrer Umfänge und der ihrer Inhalte?

Figur 874.

Andeutung. Nach der Erkl. 586 und in Rücksicht nach der in der Erkl. 582 erwähnten Bezeichnungsweise hat man für den gesuchten Unterschied der auf den gegebenen Kreis sich beziehenden regulären 8-Ecke:

$$U_8 - u_8 = 8 \cdot S_8 - 8 \cdot s_8$$

oder:

$$\text{a) } \ldots \; U_8 - u_8 = 8\,(S_8 - s_8)$$

Die Seiten S_8 und s_8, siehe Figur 374, kann man wie folgt bestimmen:

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 4) hat man in Rücksicht der Erkl. 582:

$$\text{b) } \ldots \; S_8 = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{8}$$

und nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) hat man in Rücksicht der Erkl. 582:

$$\text{c) } \ldots \; s_8 = 2r \cdot \sin \frac{180^0}{8}$$

Aus den Gleichungen a) bis c) folgt in Rücksicht der Erkl. 584:

$$U_8 - u_8 = 8\,[2r \cdot \operatorname{tg} 22^0\,30' - 2r \cdot \sin 22^0\,30']$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A) } \ldots \; U_8 - u_8 = 16r\,[\operatorname{tg} 22^0\,30' - \sin 22^0\,30']$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für r gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Unterschied der Umfänge berechnen kann.

Ferner hat man in Rücksicht der Erkl. 582 nach den in Aufgabe 978 vorgeführten Relationen 10) und 9):

$$\text{d) } \ldots \; F_8 = 8 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{8}$$

und

$$\text{e) } \ldots \; f_8 = \frac{8 \cdot r^2}{2} \sin \frac{360^0}{8}$$

für den Unterschied der Inhalte erhält man hiernach und in Rücksicht der Erkl. 584:

$$F_8 - f_8 = 8r^2 \cdot \operatorname{tg} 22^0\,30' - 4r^2 \cdot \sin 22^0\,30'$$

oder:

$$\text{B) } . \; F_8 - f_8 = 4r^2\,[2 \cdot \operatorname{tg} 22^0\,30' - \sin 22^0\,30']$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für r gegebenen Zahlenwerts, den gesuchten Unterschied der Inhalte berechnen kann.

Aufgabe 994. Um einen Kreis, dessen Radius $r = 26{,}57$ dm misst, ist ein reguläres 80-Eck konstruiert, und in diesen Kreis ist ein reguläres 160-Eck beschrieben; wie gross ist die Fläche, welche zwischen beiden Polygonen liegt?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 10) hat man für den

Inhalt des dem Kreis **umbeschriebenen** regulären 80-Ecks:

$$\text{a)} \ldots F_{80} = 80 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{80}$$

ferner hat man nach der in jener Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) und in Rücksicht der Erkl. 582 für den Inhalt des dem Kreis **einbeschriebenen** regulären 160-Ecks:

$$\text{b)} \ldots f_{160} = \frac{160 \cdot r^2}{2} \sin \frac{360^0}{160}$$

Da nun der gesuchte Inhalt F des Flächenstücks, welches zwischen den Umfängen jener regulären Polygone liegt:

$$\text{c)} \ldots F = F_{80} - f_{160}$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen für den gesuchten Inhalt F aus den Gleichungen a) bis c):

$$F = 80 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{80} - 80 \cdot r^2 \cdot \sin \frac{360^0}{160}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots F = 80 r^2 (\operatorname{tg} 2^0\,15' - \sin 2^0\,15')$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für r gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 995. Wie gross ist der Inhalt des einem Kreis umbeschriebenen regulären 72-Ecks, wenn der Kreis $F = 1800$ qm Inhalt hat?

Auflösung. Bezeichnet man den Radius des Kreises mit r, so hat man nach der Erkl. 487 die Relation:

$$r^2 \cdot \pi = F$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots r^2 = \frac{F}{\pi}$$

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 10) hat man ferner für das dem Kreis **umbeschriebene** reguläre 72-Eck:

$$\text{b)} \ldots F_{72} = 72 \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{72}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\text{A)} \ldots F_{72} = \frac{72 \cdot F}{\pi} \cdot \operatorname{tg} 2^0\,30'$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für F gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt des jenem Kreis **umbeschriebenen** regulären 72-Ecks berechnen kann. Nach nebenstehender Hülfsrechnung erhält man:

$$1) \ldots F = 1801{,}143 \text{ qm}$$

Hülfsrechnung.

Setzt man in nebenstehender Gleichung A) für:

$$F = 1800$$

so erhält man:

$$F_{72} = \frac{72 \cdot 1800}{\pi} \cdot \operatorname{tg} 2^0\,30'$$

und hieraus ergibt sich F_{72} wie folgt:

$$\log F_{72} = \log 72 + \log 1800 + \log \operatorname{tg} 2^0\,30' - \log \pi$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl}
\log 72 = & 1{,}8573325 \\
+ \log 1800 = & 3{,}2552725 \\
+ \log \operatorname{tg} 2^0\,30' = & 8{,}6400931 - 10 \\
\hline
& 13{,}7526981 - 10 \\
- \log \pi = & - 0{,}4971499 \\
\hline
\log F_{72} = & 13{,}2555482 - 10 \\
\text{oder} \quad = & 3{,}2555482 \\
& 5378 \\
\hline
& 104 \\
& 96{,}4 \\
\hline
& 7{,}6 \\
& 7{,}2
\end{array}$$

mithin:

$$\operatorname{numlog} F_{72} \text{ oder } F_{72} = 1801{,}143$$

Aufgabe 996. Der Inhalt F eines Kreises beträgt 40,60 qm; wie gross ist der Inhalt des diesem Kreis einbeschriebenen regulären 18-Ecks?

Andeutung. Man berechne zunächst aus dem gegebenen Inhalt F dieses Kreises den Radius r desselben mittels der Relation:

a) . . . $F = r^2\pi$ (siehe Erkl. 487)

Dann beachte man, dass nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) für das reguläre 18-Eck die Relation besteht:

b) . . . $f_{18} = \frac{18 \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{18}$

und dass man nach dieser Gleichung in Rücksicht, dass R gleich dem aus Gleichung a) für r sich ergebenden Wert ist, den gesuchten Inhalt f_{18} berechnen kann.

Aufgabe 997. Der Umfang U eines Kreises beträgt 150 m; wie gross ist der Umfang des diesem Kreis umbeschriebenen regulären 100-Ecks?

Andeutung. Aus der Relation:

$U = 2r \cdot \pi$ (siehe Erkl. 460)

erhält man zunächst für den Radius r des Kreises:

a) . . . $r = \frac{U}{2\pi}$

Dann beachte man, dass nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 4) und in Rücksicht der Erkl. 582 für ein reguläres 100-Eck die Relation besteht:

b) . . . $S_{100} = 2r \cdot \text{tg} \frac{180^0}{100}$

Aus Gleichung a) und b) folgt:

$$S_{100} = 2 \cdot \frac{U}{2\pi} \cdot \text{tg}\, 1^0 48'$$

oder:

c) . . . $S_{100} = \frac{U}{\pi} \cdot \text{tg}\, 1^0 48'$

Da ferner nach der Erkl. 586:

d) . . . $U_{100} = 100 \cdot S_{100}$

ist, so folgt aus den Gleichungen c) und d):

A) . . . $U_{100} = \frac{100 \cdot U}{\pi} \cdot \text{tg}\, 1^0 48'$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für U gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Umfang des dem Kreis umbeschriebenen regulären 100-Ecks berechnen kann.

Aufgabe 998. Der Inhalt eines regulären 5-Ecks beträgt 540,06 qm; wie gross ist der Inhalt und der Umfang des diesem 5-Eck umbeschriebenen Kreises:

Andeutung. Man berechne zunächst den Radius R des dem regulären 5-Eck umbeschriebenen Kreises; dies kann man wie folgt:

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) hat man für ein reguläres 5-Eck:

$$f_5 = \frac{5 \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{5}$$

oder:

$$f_5 = \frac{5 \cdot R^2}{2} \cdot \sin 72^0$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{a)} \ldots R = \sqrt{\frac{2 f_5}{5 \cdot \sin 72^0}}$$

Bezeichnet man nunmehr den gesuchten Inhalt des Kreises mit F, dessen gesuchten Umfang mit U, so hat man nach den Erkl. 487 und 460:

$$\text{b)} \ldots F = R^2 \cdot \pi$$

und

$$\text{c)} \ldots U = 2 R \cdot \pi$$

Setzt man in diesen Gleichungen den Wert für R aus Gleichung a), so erhält man die Gleichungen:

$$\text{A)} \ldots F = \frac{2 f_5 \cdot \pi}{5 \cdot \sin 72^0}$$

und

$$\text{B)} \ldots U = 2\pi \sqrt{\frac{2 f_5}{5 \cdot \sin 72^0}}$$

nach welchen Gleichungen man in Rücksicht des für f_5 gegebenen Zahlenwerts und des bekannten Werts 3,141 ⋯ der irrationalen Zahl π, F und U berechnen kann.

Aufgabe 999. Der Umfang eines regulären 9-Ecks beträgt 540,608 dm; wie gross ist der Inhalt des demselben einbeschriebenen Kreises?

Andeutung. Man berechne zunächst den Radius r des dem regulären 9-Eck einbeschriebenen Kreises; dies kann man wie folgt:

Zwischen dem gegebenen Umfang U_9 und der Seite S_9 des regulären 9-Ecks besteht nach der Erkl. 586 die Relation:

$$9 \cdot S_9 = U_9$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots S_9 = \frac{U_9}{9}$$

Ferner hat man nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 3) für den Radius r des dem 9-Eck einbeschriebenen Kreises:

$$\text{b)} \ldots r_9 = \frac{S_9}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{9}$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich:

$$1) \ldots r_9 = \frac{U_9}{18} \cdot \operatorname{ctg} 20^0$$

Nach der Erkl. 487 hat man somit für den gesuchten Inhalt F des Kreises:

$$\text{A)} \ldots F = \left(\frac{U_9}{18} \cdot \operatorname{ctg} 20^0\right)^2 \cdot \pi$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für U_9 gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt F des dem regulären 9-Eck einbeschriebenen Kreises berechnen kann.

Aufgabe 1000. Die Seite s_9 eines regulären 9-Ecks ist 12,045 m lang; wie gross ist der Radius des einem regulären 20-Eck umbeschriebenen Kreises, dessen Inhalt gleich dem Inhalt jenes 9-Ecks ist?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für den Inhalt eines regulären 9-Ecks:

$$F_9 = \frac{9 \cdot s_9^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{9}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots F_9 = \frac{9 \cdot s_9^2}{4} \operatorname{ctg} 20^0$$

Ferner hat man nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) für den Inhalt eines regulären 20-Ecks, in den Radius R des demselben umbeschriebenen Kreises ausgedrückt:

$$F_{20} = \frac{20 \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{20}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots F_{20} = 10 \cdot R^2 \cdot \sin 18^0$$

Da zwischen jenem 9-Eck und diesem 20-Eck die Beziehung bestehen soll, dass deren Inhalte einander gleich sind, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus den Gleichungen a) und b) für R die Bestimmungsgleichung:

$$10 \cdot R^2 \sin 18^0 = \frac{9 \cdot s_9^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} 20^0$$

und hieraus erhält man:

$$R = \sqrt{\frac{9 \cdot s_9^2 \cdot \operatorname{ctg} 20^0}{4 \cdot 10 \cdot \sin 18^0}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots\ldots R = \frac{3 s_9}{2} \sqrt{\frac{\operatorname{ctg} 20^0}{10 \cdot \sin 18^0}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s_9 gegebenen Zahlenwerts, den gesuchten Radius R berechnen kann.

Aufgabe 1001. Ein reguläres 8-Eck hat mit einem regulären 20-Eck gleichen Umfang, wie verhalten sich die Inhalte beider Figuren zu einander?

Andeutung. Zwischen den Umfängen des regulären 8-Ecks und des regulären 20-Ecks besteht gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 586 die Relation:

$$\text{a)} \ldots 8 \cdot s_8 = 20 \cdot s_{20}$$

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für die Inhalte F_8 und F_{20} dieser regulären Polygone bezw.:

$$F_8 = \frac{8\cdot s_8^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{8}$$

und

$$F_{20} = \frac{20\cdot s_{20}^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{20}$$

oder:

$$\text{c)}\ \dots\ F_8 = 2 s_8^2\cdot \operatorname{ctg} 22^0\, 30'$$

und

$$\text{d)}\ \dots\ F_{20} = 5 s_{20}^2\cdot \operatorname{ctg} 9^0$$

Für das Verhältnis der Flächeninhalte F_8 und F_{20} ergibt sich aus den Gleichungen c) und d):

$$\text{e)}\ \dots\ \frac{F_8}{F_{20}} = \frac{2\cdot s_8^2 \operatorname{ctg} 22^0\, 30'}{5\cdot s_{20}^2 \operatorname{ctg} 9^0}$$

Setzt man in dieser Gleichung nach Gleichung a) für:

$$s_8 = \frac{20\cdot s_{20}}{8}$$

oder:

$$s_8 = \frac{5\cdot s_{20}}{2}$$

so erhält man:

$$\frac{F_8}{F_{20}} = \frac{2\cdot 25\cdot s_{20}^2\cdot \operatorname{ctg} 22^0\, 30'}{5\cdot 4\cdot s_{20}^2\cdot \operatorname{ctg} 9^0}$$

oder:

$$\text{A)}\ \dots\ \frac{F_8}{F_{20}} = \frac{5\cdot \operatorname{ctg} 22^0\, 30'}{2\cdot \operatorname{ctg} 9^0}$$

nach welcher Gleichung man das gesuchte Verhältnis $F_8 : F_{20}$ berechnen kann.

Aufgabe 1002. Ein reguläres 11-Eck hat mit einem regulären 13-Eck gleichen Umfang, der Inhalt des letzteren übertrifft den des ersteren um 40 qm; wie gross sind die Seiten dieser Figuren?

Erkl. 589. Setzt man den aus nebenstehender Gleichung 1) für s_{13} sich ergebenden Wert:

$$\text{a)}\ \dots\ s_{13} = \frac{11\cdot s_{11}}{13}$$

in nebenstehende Gleichung 2), so erhält man:

$$\frac{13\cdot 11^2\cdot s_{11}^2}{4\cdot 13^2} \operatorname{ctg} 13^0\, 50'\, 46{,}15'' = 40 + \frac{11\cdot s_{11}^2}{4} \operatorname{ctg} 16^0\, 21'\, 49{,}09''$$

oder:

$$s_{11}^2\cdot\left[\frac{11^2}{4\cdot 13} \operatorname{ctg} 13^0\, 50'\, 46{,}15'' - \frac{11}{4} \operatorname{ctg} 16^0\, 21'\, 49{,}09''\right] = 40$$

$$s_{11}^2\cdot\frac{11}{4}\left[\frac{11}{13} \operatorname{ctg} 13^0\, 50' 46{,}15'' - \operatorname{ctg} 16^0\, 21'\, 49{,}09''\right] = 40$$

$$s_{11}^2 = \frac{160}{11} : \left(\frac{11}{13} \operatorname{ctg} 13^0\, 50'\, 46{,}15'' - \operatorname{ctg} 16^0\, 21'\, 49{,}09''\right)$$

Andeutung. Zwischen den Umfängen des regulären 11-Ecks und des regulären 13-Ecks besteht gemäss der Aufgabe und nach der Erkl. 586 die Relation:

$$1)\ \dots\ 11\cdot s_{11} = 13\cdot s_{13}$$

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für die Inhalte F_{11} und F_{13} dieser regulären Polygone bezw.:

$$F_{11} = \frac{11\cdot s_{11}^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{11}$$

und

$$F_{13} = \frac{13\cdot s_{13}^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{13}$$

oder:

$$\text{a)}\ \dots\ F_{11} = \frac{11\cdot s_{11}^2}{4} \operatorname{ctg} 16^0 21'\, 49{,}09''$$

und

$$\text{b)}\ \dots\ F_{13} = \frac{13\cdot s_{13}^2}{4}\cdot \operatorname{ctg} 13^0 50' 46{,}15''$$

Da gemäss der Aufgabe zwischen F_{11} und F_{13} die Beziehung besteht:

$$\text{c)}\ \dots\ F_{13} = F_{11} + 40$$

mithin:

$$b) \ldots s_{11} = \sqrt{\frac{160}{11\cdot\left(\frac{11}{13}\operatorname{ctg} 13^0 50' 46{,}15'' - \operatorname{ctg} 16^0 21' 49{,}09''\right)}}$$

so ergibt sich aus den Gleichungen a) bis c) für s_{11} und s_{13} die weitere Bestimmungsgleichung:

$$2) \ldots \frac{13\cdot s_{13}^2}{4}\cdot \operatorname{ctg} 13^0 50' 46{,}15'' = \frac{11\cdot s_{11}^2}{4}\operatorname{ctg} 16^0 21' 49{,}09'' + 40$$

Die Gleichungen 1) und 2) enthalten die zu berechnenden Seiten s_{11} und s_{13}; man hat somit zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, aus welchen man jede der Unbekannten berechnen kann.

Nach der Erkl. 589 erhält man aus diesen Gleichungen z. B. für:

$$A) \ldots s_{11} = \sqrt{\frac{160}{11\cdot\left(\frac{11}{13}\operatorname{ctg} 13^0 50' 46{,}15'' - \operatorname{ctg} 16^0 21' 49{,}09''\right)}}$$

wonach s_{11} berechnet werden kann.

Aufgabe 1003. Ein reguläres 7-Eck und ein reguläres 9-Eck haben je die Seite $a = 12$ m; man soll den Unterschied der Umfänge, sowie den Unterschied der Inhalte beider regulärer Polygone berechnen.

Andeutung. Gemäss der Aufgabe ist:

$$1) \ldots s_7 = s_9 = a$$

Nach der Erkl. 586 ist:

$$u_7 = 7\cdot s_7$$

und

$$u_9 = 9\cdot s_9$$

für die gesuchte Differenz der Umfänge hat man somit:

$$a) \ldots u_9 - u_7 = 9\cdot s_9 - 7\cdot s_7$$

hieraus erhält man in Rücksicht der Gleichung 1):

$$A) \ldots u_9 - u_7 = (9-7)\cdot a \text{ oder } = 2a$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für a gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Unterschied der beiden Umfänge berechnen kann.

Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man ferner bezw.:

$$F_7 = \frac{7\cdot s_7^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{7}$$

und

$$F_9 = \frac{9\cdot s_9^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{9}$$

Für die gesuchte Differenz der Inhalte hat man somit:

$$F_9 - F_7 = \frac{9\cdot s_9^2}{4}\cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{9} - \frac{7\cdot s_7^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^0}{7}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Gleichung 1), sowie der Erkl. 585 und nach gehöriger Reduktion:

$$A) \ldots F_9 - F_7 = \frac{a^2}{4}(9 \cdot \operatorname{ctg} 20^0 - 7 \cdot \operatorname{ctg} 25^0 42' 51{,}43'')$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für a gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Unterschied der beiden Inhalte berechnen kann.

Aufgabe 1004. Der Flächeninhalt eines regulären 7-Ecks beträgt 200 qm; wie gross ist der Inhalt des regulären 8-Ecks, welches man in den jenem 7-Eck umbeschriebenen Kreis konstruieren kann?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 9) hat man für die Inhalte der einem Kreis mit dem Radius R einbeschriebenen 7- und 8-Ecke, bezw.:

$$a) \ldots F_7 = \frac{7 \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{7}$$

und

$$b) \ldots F_8 = \frac{8 \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{8}$$

Aus Gleichung a) erhält man:

$$d) \ldots R^2 = \frac{2 \cdot F_7}{7 \cdot \sin \frac{360^0}{7}}$$

Setzt man diesen Wert für R^2 in Gleichung b), so erhält man für den gesuchten Inhalt F_8:

$$F_8 = \frac{8 \cdot 2 \cdot F_7}{2 \cdot 7 \cdot \sin \frac{360^0}{7}} \cdot \sin \frac{360^0}{8}$$

oder:

$$A) \ldots F_8 = \frac{8 \cdot F_7 \cdot \sin \frac{360^0}{8}}{7 \cdot \sin \frac{360^0}{7}}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für F_7 gegebenen Zahlenwerts F_8 berechnen kann.

Aufgabe 1005. Der Inhalt eines regulären 22-Ecks ist $F = 48{,}6793$ qm; wie gross ist der Inhalt des regulären 7-Ecks in demselben Kreis?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist ganz analog der Auflösung der Aufgabe 1004.

Aufgabe 1006. Der Umfang eines regulären 9-Ecks beträgt 94,5 m; wie gross ist der Umfang des regulären 15-Ecks in demselben Kreis?

Andeutung. Nach der Erkl. 586 ist:

$$u_9 = 9 \cdot s_9$$

und

$$u_{15} = 15 \cdot s_{15}$$

hieraus ergibt sich bezw.:

$$a) \ldots s_9 = \frac{u_9}{9}$$

und

$$b) \ldots s_{15} = \frac{u_{15}}{15}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



337. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 336. — Seite 705—720. Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 336. — Seite 705—720. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über die regulären n-Ecke, Vielecke oder Polygone, Fortsetzung. — Aufgaben über das Sehnenviereck.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Ferner bestehen in bezug auf denselben Kreis mit dem Radius R, nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) und in Rücksicht der Gleichungen a) und b), die Relationen:

$$\text{c)} \ldots \quad \frac{u_9}{9} = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{9}$$

und

$$\text{d)} \ldots \quad \frac{u_{15}}{15} = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{15}$$

Setzt man den aus Gleichung c) für R sich ergebenden Wert:

$$R = \frac{u_9}{2 \cdot 9 \cdot \sin\frac{180^0}{9}}$$

in Gleichung d), so erhält man für u_{15} die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{u_{15}}{15} = 2 \cdot \frac{u_9}{2 \cdot 9 \cdot \sin\frac{180^0}{9}} \cdot \sin\frac{180^0}{15}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots \quad u_{15} = \frac{15 \cdot u_9 \cdot \sin 12^0}{9 \cdot \sin 20^0}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für u_9 gegebenen Zahlenwerts, den gesuchten Umfang u_{15} berechnen kann.

Aufgabe 1007. Wie gross ist der Inhalt des regulären 10-Ecks, dessen Umfang gleich dem Umfang eines Sektors ist, von dem der Centriewinkel $\alpha = 36^0$ und der zugehörige Bogen $= \pi$ oder 3,141956 m beträgt?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) hat man für ein reguläres 10-Eck:

$$\text{A)} \ldots \quad F_{10} = \frac{10 \cdot s_{10}^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{10}$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F_{10} berechnen könnte, wenn die Seite s_{10} bekannt wäre; diese Seite kann man aber wie folgt berechnen:

Für den Umfang u_{10} des regulären 10-Ecks hat man nach der Erkl. 586:

$$1) \ldots \quad u_{10} = 10 \cdot s_{10}$$

Ferner hat man für den Umfang U eines Kreissektors, dessen Radius mit r_1 bezeichnet sei und dessen Centriewinkel α ist:

$$\text{a)} \ldots \quad U = \operatorname{bog}\alpha + 2 \cdot r_1$$

Da nun gemäss der Aufgabe:

$$\text{b)} \ldots \quad \operatorname{bog}\alpha = \pi$$

und da nach der Erkl. 461:

$$\operatorname{bog}\alpha = r_1 \cdot \pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$$

ist, und sich hieraus:

$$\text{c)} \ldots \quad r_1 = \frac{\operatorname{bog}\alpha}{\pi} \cdot \frac{180^0}{\alpha^0}$$

ergibt, so erhält man in Rücksicht der Gleichungen b) und c) aus Gleichung a):

$$U = \pi + 2 \cdot \frac{\pi}{\pi} \cdot \frac{180^0}{\alpha^0}$$

oder:

$$2) \ldots U = \pi + \frac{360^0}{\alpha^0}$$

Da ferner gemäss der Aufgabe die Beziehung besteht:

$$3) \ldots u_{10} = U$$

so ergibt sich in Rücksicht dessen aus den Gleichungen 1) und 2) die Relation:

$$10 \cdot s_{10} = \pi + \frac{360^0}{\alpha^0}$$

und hieraus erhält man:

$$B) \ldots s_{10} = \frac{\pi + \frac{360^0}{\alpha^0}}{10}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für α gegebenen Zahlenwerts die Seite des regulären 10-Ecks berechnen kann.

Aufgabe 1008. Man soll die Seite eines regulären 18-Ecks berechnen, dessen Inhalt gleich dem eines Kreises ist, in welchem zu einer Sehne von $a = 22$ m ein Centriewinkel von $\alpha = 36^0\,20'$ gehört.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 97.. vorgeführten Relation 8) hat man für ein reguläres 18-Eck:

$$F_{18} = \frac{18 \cdot s_{18}^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{18}$$

und hieraus erhält man:

$$s_{18} = \sqrt{\frac{4 F_{18}}{18 \cdot \operatorname{ctg} 10^0}}$$

oder:

$$1) \ldots s_{18} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{F_{18}}{2} \cdot \operatorname{tg} 10^0}$$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Seite s_{18} berechnen könnte, wenn F_{18} bekannt wäre. Diesen Inhalt kann man aber wie folgt berechnen:

Zwischen dem Inhalt F_{18} und dem Inhalt F des gedachten Kreises besteht gemäss der Aufgabe die Relation:

$$F_{18} = F$$

oder, wenn man den Radius des gedachten Kreises mit r_1 bezeichnet und die Erkl. 45. berücksichtigt, die Relation:

$$a) \ldots F_{18} = r_1^2 \cdot \pi$$

Da nun nach der in Andeutung zur Aufgabe 798 aufgestellten Gleichung A) zwischen dem Radius r_1 des Kreises, der gegebenen Sehne a und dem zu derselben gehörigen und gegebenen Centriewinkel α die Relation besteht:

$$b) \ldots r_1 = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

so erhält man hiernach aus Gleichung a) für den Inhalt F_{18}:

$$2) \ldots F_{18} = \frac{a^2 \cdot \pi}{4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) ergibt sich:

$$s_{18} = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{a^2 \cdot \pi \cdot \operatorname{tg} 10^0}{2 \cdot 4 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}}}$$

oder:

$$A) \ldots\ldots s_{18} = \frac{a}{3\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot \operatorname{tg} 10^0}{2}}$$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Seite s_{18} aus den gegebenen Stücken a und α berechnen kann.

Aufgabe 1009. Der Radius eines Kreises misst 20 m; in diesen Kreis ist ein reguläres Polygon konstruiert, welches 405 Diagonalen hat; man soll die Seite dieses regulären Polygons berechnen.

Erkl. 589 a. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Anzahl sämtlicher Diagonalen eines n-Ecks ist $= \frac{n(n-3)}{2}$."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Andeutung. Man berechne zunächst die Seitenzahl des regulären Polygons. Bezeichnet man dieselbe durch n, so hat man nach der Erkl. 589 a für n die Bestimmungsgleichung:

$$a) \ldots\ldots \frac{n(n-3)}{2} = 405$$

Hat man aus dieser Gleichung n berechnet, so beachte man im weiteren, dass nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 2) die Beziehung besteht:

$$b) \ldots\ldots s_n = 2R \cdot \sin\frac{180^0}{n}$$

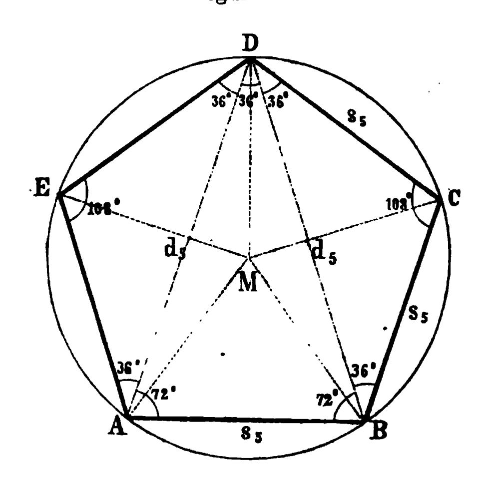
nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für R gegebenen und des aus Gleichung a) für n gefundenen Werts die gesuchte Seite s_n berechnen kann.

Aufgabe 1010. Man soll nachweisen, dass zwischen der Masszahl d_5 einer Diagonale eines regulären 5-Ecks und der Masszahl s_5 einer Seite desselben die Relation besteht:

$$d_5 : s_5 = 2\sin 54^0 : 1$$

Auflösung. Die Diagonale BD und die Seiten BC und CD, des durch die Figur 375 dargestellten regulären 5-Ecks, siehe Erkl. 590, bilden das gleichschenklige Dreieck BCD. Der Scheitelwinkel BCD dieses gleichschenkligen Dreiecks ist nach der Erkl. 591 $= \frac{6}{5}R$ oder $= 108^0$, jeder der Basiswinkel dieses Dreiecks ist somit:

Figur 375.



$$= \frac{1}{2} \cdot (180^0 - 108^0)$$

oder: $= 36^0$

wie in der Figur 375 angedeutet.

Nach der in Aufgabe 64 aufgestellten Formel 58 besteht zwischen dem Schenkel s_5, der Basis d_5 und dem Scheitelwinkel 108^0 des gleichschenkligen Dreiecks BCD die Relation:

$$d_5 = 2 \cdot s_5 \cdot \sin \frac{108^0}{2}$$

oder:

1) . . $d_5 = 2 \cdot s_5 \cdot \sin 54^0$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

A) . . . $d_5 : s_5 = 2 \sin 54^0 : 1$

Erkl. 590. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die sämtlichen Diagonalen eines regulären 5-Ecks sind einander gleich."

Erkl. 591. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem regulären n-Eck ist jeder Winkel desselben $= \frac{2 \cdot n - 4}{n} R$ oder $= \frac{2 \cdot n - 4}{n} \cdot 90^0$."

(Siehe die Erkl. 592 und 574.)

Nach diesem Satz ist jeder Winkel eines regulären 5-Ecks $= \frac{2 \cdot 5 - 4}{5} R$ oder $= \frac{6}{5} R$ oder $= \frac{6}{5} \cdot 90^0$ oder $= 108^0$.

Erkl. 592. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem n-Eck ist die Summe aller Winkel $= (2 \cdot n - 4) R$ oder $= (2 \cdot n - 4) \cdot 90^0$."

Aufgabe 1011. Die Diagonale eines regulären 5-Ecks ist 20,56 dm lang; wie gross ist der Inhalt desselben?

Andeutung. Aus der in Aufgabe 1010 vorgeführten Relation ergibt sich:

a) . . . $s_5 = \frac{d_5}{2 \cdot \sin 54^0}$

Ferner hat man nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) für ein reguläres 5-Eck:

b) . . . $F_5 = \frac{5 \cdot s_5^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{5}$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$F_5 = \frac{5 \cdot d_5^2}{4 \cdot 4 \sin^2 54^0} \cdot \operatorname{ctg} 36^0$$

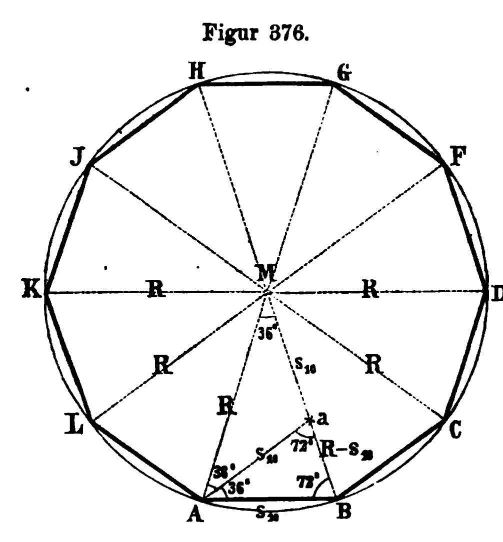
oder:

$$\text{A)} \ldots\ldots F_5 = 5 \cdot \operatorname{ctg} 36^0 \cdot \left(\frac{d_5}{4 \cdot \sin 54^0}\right)^2$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für d_5 gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt berechnen kann.

Aufgabe 1012. Die Seite eines regulären 10-Ecks misst 14,05 dm; wie gross ist der Radius des demselben umbeschriebenen Kreises?

Figur 376.



Andeutung. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 1) hat man für ein reguläres 10-Eck:

$$R = \frac{s_{10}}{2 \cdot \sin \frac{180^0}{10}}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots R = \frac{s_{10}}{2 \cdot \sin 18^0}$$

nach welcher Gleichung man in Rücksicht des für s_{10} gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Radius berechnen kann.

Man kann auch den in der Erkl. 593 angeführten planimetrischen Satz benutzen; nach demselben ist:

$$R : s_{10} = s_{10} : (R - s_{10})$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 594:

$$\text{B)} \ldots R = \frac{s_{10}}{2}\left(1 + \sqrt{5}\right)$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Radius ohne goniometr. Funktion berechnen kann.

Erkl. 593. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Seite des einem Kreis einbeschriebenen regulären 10-Ecks ist die mittlere geometrische Proportionale zwischen dem Radius und der Differenz des Radius und der 10-Eckseite.“

Nach diesem Satz besteht die Proportion:

$$1) \ldots R : s_{10} = s_{10} : (R - s_{10})$$

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich aus der Aehnlichkeit der Dreiecke MAB und ABa in der Figur 376. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über die Planimetrie handeln.)

Erkl. 594. Aus der Proportion:

$$1) \ldots R : s_{10} = s_{10} : (R - s_{10})$$

erhält man R wie folgt:

$$R^2 - R \cdot s_{10} = s_{10}^2$$

$$R^2 - R \cdot s_{10} + \left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2 = s_{10}^2 + \left(\frac{s_{10}}{2}\right)^2$$

$$\left(R - \frac{s_{10}}{2}\right)^2 = s_{10}^2 + \frac{s_{10}^2}{4}$$

$$R - \frac{s_{10}}{2} = \pm\sqrt{\frac{5 \cdot s_{10}^2}{4}}$$

$$R = \frac{s_{10}}{2} \pm \frac{s_{10}}{2} \sqrt{5}$$

mithin:

2) . . . $R = \frac{s_{10}}{2}(1 + \sqrt{5})$

---

b) Aufgaben über das Sehnenviereck.

Aufgabe 1013. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln α, β, γ und δ eines Sehnenvierecks und den vier Seiten a, b, c und d desselben folgende Relationen bestehen:

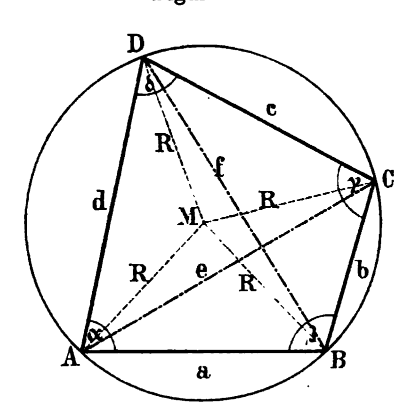
1) . . . $\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$

2) . . . $\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

3) . . . $\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(bc + ad)}$

4) . . . $\cos\delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(cd + ab)}$

Figur 877.



Erkl. 595. Unter einem „Sehnenviereck" versteht man ein solches Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises sind.

Hat hiernach ein Viereck die Eigenschaft, dass man um dasselbe einen Kreis konstruieren kann, oder besser gesagt, dass man einen Kreis konstruieren kann, dessen Peripherie durch die Ecken jenes Vierecks geht, so ist jenes Viereck ein Sehnenviereck.

Erkl. 596. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Sehnenviereck beträgt die Summe je zweier gegenüberliegender Winkel $2R$ oder 180^0."

Erkl. 597. Aus der Analogie der in der Aufgabe 1013 vorgeführten Relationen kann man den Satz ableiten:

„In jedem Sehnenviereck ist der Kosinus irgend eines Winkels gleich der Summe

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

In Figur 877 stellt $ABCD$ ein dem Kreis um M einbeschriebenes, im übrigen beliebiges Viereck dar. Dieses Viereck ist nach der Erkl. 595 ein sog. Sehnenviereck. Zieht man in demselben die Diagonale BD $(= f)$, so ergibt sich für diese Diagonale f nach dem Projektionssatz aus dem Dreieck ABD:

a) . . . $f^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha$

und aus dem Dreieck BCD:

b) . . . $f^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst

c) . $a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\gamma$

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 596:

$$\alpha + \gamma = 2R$$

mithin:

d) . . . $\gamma = 2R - \alpha$

ist, dass also hiernach:

e) . . . $\cos\gamma = \cos(2R - \alpha)$

und dass nach der Erkl. 94:

f) . . . $\cos(2R - \alpha) = -\cos\alpha$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung c):

$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 - 2bc \cdot -\cos\alpha$

oder:

$a^2 + d^2 - 2ad \cdot \cos\alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cdot \cos\alpha$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

1) . . . $\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 2) bis 4) herleiten. (Siehe die Erkl. 597.)

der Quadrate der ihn einschliessenden Seiten, weniger der Summe der Quadrate der Gegenseiten, dividiert durch die doppelte Summe der Produkte, gebildet je aus den einschliessenden und den gegenüberliegenden Seiten."

Aufgabe 1014. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln α, β, γ und δ eines Sehnenvierecks, den Seiten a, b, c und d sowie der halben Summe s dieser Seiten nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$$

$$2) \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}$$

$$3) \ldots \sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc+ad}}$$

$$4) \ldots \sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{cd+ab}}$$

$$5) \ldots \cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$$

$$6) \ldots \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}}$$

$$7) \ldots \cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{bc+ad}}$$

$$8) \ldots \cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{cd+ab}}$$

Erkl. 598. Die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung e) kann man wie folgt reduzieren:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2(ad+bc)+a^2+d^2-b^2-c^2}{4(ad+bc)}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{4(ad+bc)}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a^2+2ad+d^2)-(b^2-2bc+c^2)}{4(ad+bc)}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{4(ad+bc)}}$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{[(a+d)+(b-c)]\cdot[(a+d)-(b-c)]}{4(ad+bc)}}$$

Setzt man nunmehr:

$a+b+c+d=2s$

also:

$a+b-c+d=2s-2c$ oder $=2(s-c)$

und

$a-b+c+d=2s-2b$ oder $=2(s-b)$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 4):

Nach der in der Erkl. 227 angeführten goniometrischen Formel ist:

$$a) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

Setzt man in dieser Relation nach der in Aufgabe 1013 vorgeführten Relation 1):

$$b) \ldots \cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

so erhält man:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}}{2}}$$

oder:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2(ad+bc)-(a^2+d^2-b^2-c^2)}{4(ad+bc)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2ad+2bc-a^2-d^2+b^2+c^2}{4(ad+bc)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b^2+2bc+c^2)-(a^2-2ad+d^2)}{4(ad+bc)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(b+c)^2-(a-d)^2}{4(ad+bc)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{[(b+c)+(a-d)]\cdot[(b+c)-(a-d)]}{4(ad+bc)}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+b+c-d)\cdot(-a+b+c+d)}{4(ad+bc)}}$$

Setzt man nunmehr:

$a+b+c+d=2s$

also:

$a+b+c-d=2s-2d$ oder $=2(s-d)$

und

$-a+b+c+d=2s-2a$ oder $=2(s-a)$

so erhält man aus jener Gleichung:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{2(s-d)\cdot 2(s-a)}{4(ad+bc)}}$$

und hieraus ergibt sich die herzuleitende Relation:

$$1) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 2) bis 4) herleiten.

so erhält man:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{4(ad+bc)}}$$

oder:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{ad+bc}}$$

B) Beweis der Relationen 5) bis 8):

Nach der in der Erkl. 226 angeführten goniometrischen Formel ist:

$$\text{e)} \ldots \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

Setzt man in diese Relation nach der in Aufgabe 1013 vorgeführten Relation 1):

$$\text{d)} \ldots \cos\alpha=\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}$$

so erhält man:

$$\text{e)} \ldots \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}}{2}}$$

und hieraus ergibt sich nach gehöriger Reduktion, siehe die Erkl. 598, die zu beweisende Relation:

$$5) \ldots \cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{ad+bc}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 7) und 8) herleiten.

Aufgabe 1015. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln α, β, γ und δ, den vier Seiten a, b, c und d, sowie der halben Summe s dieser Seiten nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{(s-b)\,(s-c)}}$$

$$2) \ldots \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)}{(s-c)\,(s-d)}}$$

$$3) \ldots \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{(s-a)\,(s-d)}}$$

$$4) \ldots \operatorname{tg}\frac{\delta}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)\,(s-d)}{(s-a)\,(s-b)}}$$

$$5) \,.\, \sin\alpha=\frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$6) \,.\, \sin\beta=\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$7) \,.\, \sin\gamma=\frac{2}{bc+ad}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$8) \,.\, \sin\delta=\frac{2}{cd+ab}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 4):

Dividiert man die in Aufgabe 1014 vorgeführten Relationen 1) und 5) ineinander, so erhält man:

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{ad+bc}}:\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{ad+bc}\cdot\frac{ad+bc}{(s-b)\,(s-c)}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{(s-b)\,(s-c)}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relationen 2) bis 4) herleiten.

B) Beweis der Relationen 5) bis 8):

Nach der in der Erkl. 52 angeführten goniometrischen Formel ist:

$$\text{a)} \ldots \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}$$

Setzt man in dieser Gleichung die Werte für $\sin\frac{\alpha}{2}$ und $\cos\frac{\alpha}{2}$ aus den in Aufgabe 1014 vorgeführten Relationen 1) und 5), so erhält man:

$$\sin\alpha = 2\cdot\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)}{ad+bc}}\cdot\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$$

oder:

$$\sin\alpha = 2\cdot\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-d)\,(s-b)\,(s-c)}{(ad+bc)^2}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$5)\;\ldots\;\sin\alpha = \frac{2}{ad+bc}\cdot\sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$$

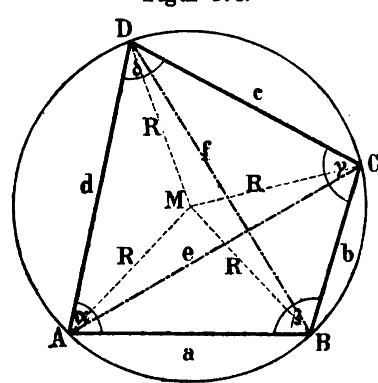
In ganz analoger Weise kann man die Relationen 6) bis 8) herleiten.

Aufgabe 1016. Man soll nachweisen, dass zwischen den Diagonalen e und f eines Sehnenvierecks und den Seiten a, b, c und d die Relationen bestehen:

$$1)\;\ldots\; e = \sqrt{\frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{ab+cd}}$$

$$2)\;\ldots\; f = \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}}$$

Figur 378.



Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

Aus dem Dreieck ABC der Figur 378 erhält man nach dem Projektionssatz:

$$a)\;\ldots\; e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\beta$$

ferner ist nach der in Aufgabe 1013 vorgeführten Relation 2):

$$b)\;\ldots\;\cos\beta = \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$e^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2\,(ab+cd)}$$

oder:

$$e^2 = \frac{(a^2+b^2)\cdot 2(ab+cd)-2ab\,(a^2+b^2-c^2-d^2)}{2\,(ab+cd)}$$

$$e^2 = \frac{2ab(a^2+b^2)+2cd(a^2+b^2)-2ab\,(a^2+b^2)-2ab\cdot(-c^2-d^2)}{2\,(ab+cd)}$$

$$e^2 = \frac{2cd\,(a^2+b^2)+2ab\,(c^2+d^2)}{2\,(ab+cd)}$$

$$e^2 = \frac{cd\,(a^2+b^2)+ab\,(c^2+d^2)}{ab+cd}$$

$$e^2 = \frac{a^2cd+b^2cd+abc^2+abd^2}{ab+cd}$$

$$e^2 = \frac{(a^2cd+abc^2)+(abd^2+b^2cd)}{ab+cd}$$

$$e^2 = \frac{ac\,(ad+bc)+bd\,(ad+bc)}{ab+cd}$$

$$e^2 = \frac{(ad+bc)\cdot(ac+bd)}{ab+cd}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1)\;\ldots\; e = \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}}$$

In ganz analoger Weise kann man die Relation 2) herleiten. (Siehe die Erkl. 599 und 600.)

Erkl. 599. Multipliziert man die in der Aufgabe 1016 vorgeführten Relationen 1) und 2), so erhält man:

$$e\cdot f = \sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ad+bc)}{ab+cd}}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}}$$

oder:

$$e\cdot f = \sqrt{\frac{(ac+bd)^2\cdot(ad+bc)\,(ab+cd)}{(ab+cd)\cdot(ad+bc)}}$$

$$e\cdot f = \sqrt{(ac+bd)^2}$$

mithin:

$$1)\;\ldots\; e\cdot f = a\cdot c+b\cdot d$$ (siehe Erkl. 600)

d. h.:

„Das Rechteck, gebildet aus den beiden Diagonalen eines Sehnenwinkels, ist gleich der Summe der Rechtecke, gebildet aus je zwei gegenüberliegenden Seiten desselben.“

Dieser Satz ist in der Planimetrie unter dem Namen der „Ptolemäische Satz“ bekannt.

Erkl. 600. Dividiert man die in der Aufgabe 1016 vorgeführten Relationen ineinander, so erhält man:

$$\frac{e}{f} = \frac{\sqrt{\frac{(ac+bd).(ad+bc)}{ab+cd}}}{\sqrt{\frac{(ac+bd)\,(ab+cd)}{ad+bc}}}$$

oder:

$$\frac{e}{f} = \sqrt{\frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{(ab+cd)} \cdot \frac{(ad+bc)}{(ac+bd)\,(ab+cd)}}$$

$$\frac{e}{f} = \sqrt{\frac{(ad+bc)^2}{(ab+cd)^2}}$$

mithin:

$$1) \ldots \frac{e}{f} = \frac{ad+bc}{ab+cd}$$

durch welche Proportion eine aus der Planimetrie bekannte Beziehung zwischen den Diagonalen und den Seiten eines Sehnenvierecks ausgedrückt wird.

Aufgabe 1017. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Radius R des einem Sehnenviereck umbeschriebenen Kreises, den Diagonalen e und f, sowie den Seiten a, b, c und d bezw. deren halben Summe s und den Winkeln α, β, γ und δ desselben nachfolgende Relationen bestehen:

$$1) \ldots R = \frac{e}{2\sin\beta} \text{ oder } = \frac{e}{2\sin\delta}$$

$$2) \ldots R = \frac{f}{2\sin\alpha} \text{ oder } = \frac{f}{2\sin\gamma}$$

$$3) \ldots R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}$$

Figur 379.

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 2):

Aus dem gleichschenkligen Dreieck AMC der Figur 379 ergibt sich nach der in Auflösung der Aufgabe 64 aufgestellten Formel 58, und in Rücksicht, dass die Schenkel AM und CM dieses Dreiecks $= R$, die Basis $AC = e$ und nach der Erkl. 450 der Scheitelwinkel $AMC = 2\delta$ ist, die Relation:

$$e = 2R\cdot\sin\frac{2\delta}{2}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots R = \frac{e}{2\sin\delta}$$

Da in der Figur 379 δ und β Supplementwinkel sind, so kann man auch nach der Erkl. 65:

$$1\,a) \ldots R = \frac{e}{2\sin\beta}$$

setzen.

In ganz derselben Weise kann man die Relation 2) herleiten.

B) Beweis der Relation 3):

Nach der nebenstehenden Relation 1) ist:

$$a) \ldots R = \frac{e}{2\sin\beta}$$

Setzt man in derselben nach der in Aufgabe 1016 vorgeführten Relation 1):

b) . . . $e = \sqrt{\frac{(ac+bd)\cdot(ad+bc)}{ab+cd}}$

und nach der in Aufgabe 1015 vorgeführten Relation 6):

c) . $\sin\beta = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

so erhält man:

$$R = \frac{\sqrt{\frac{(ac+bd).(ad+bc)}{ab+cd}}}{2\cdot\frac{2}{ab+cd}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$$

oder:

$$R = \frac{ab+cd}{4}\cdot\sqrt{\frac{(ac+bd)\,ad+bc)}{(ab+cd)\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}$$

$$R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)^2\cdot(ac+bd)\,(ad+bc)}{(ab+cd)\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

3) . . . $R = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}}$

Aufgabe 1018. Man soll nachweisen, dass zwischen dem Inhalt F eines **Sehnenvierecks**, dessen Winkeln α, β, γ und δ, dessen Seiten a, b, c und d und der halben Summe s dieser Seiten die Relationen bestehen:

1) . . . $F = \frac{a\cdot b+c\cdot d}{2}\cdot\sin\beta$

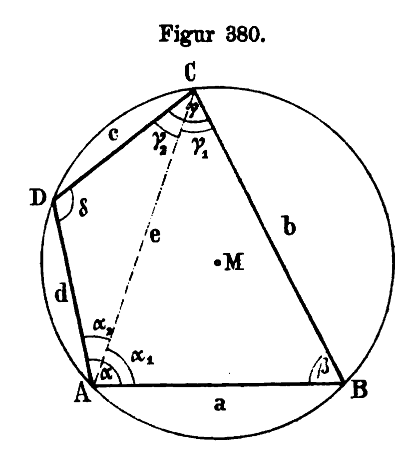
2) . . . $F = \frac{a\cdot b+c\cdot d}{2}\cdot\sin\delta$

3) . . . $F = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{2}\cdot\sin\alpha$

4) . . . $F = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{2}\cdot\sin\gamma$

5) . . . $F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$

Figur 380.



Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 4):

Zieht man, siehe Figur 380, eine der Diagonalen, z. B. die Diagonale AC ($= e$), so wird das Viereck hierdurch in die Dreiecke ABC und ACD zerlegt. Für den Inhalt F des Sehnenvierecks hat man somit nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{a\cdot b}{2}\sin\beta + \frac{c\cdot d}{2}\cdot\sin\delta$$

oder in Rücksicht, dass nach der Erkl. 596:

$$\beta + \delta = 2R$$

oder:

a) . . . . . $\delta = 2R - \beta$

ist:

$$F = \frac{a\cdot b}{2}\sin\beta + \frac{c\cdot d}{2}\sin(2R-\beta)$$

und hieraus ergibt sich, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 66:

$$\sin(2R-\beta) = \sin\beta$$

gesetzt werden kann, die zu beweisende Relation:

1) . . . $F = \frac{a\cdot b+c\cdot d}{2}\cdot\sin\beta$

In ganz derselben Weise kann man die analogen Relationen 2) bis 4) herleiten.

B) Beweis der Relation 5):

Die Relation 5) kann man aus einer der Relationen 1) bis 4) ableiten, z. B. aus der Relation 1):

$$F = \frac{a \cdot b + c \cdot d}{2} \cdot \sin\beta$$

indem man $\sin\beta$ eliminiert.

Um aus dieser Gleichung $\sin\beta$ zu eliminieren, benutze man die in Aufgabe 1015 vorgeführte Relation 6), oder man verfahre wie folgt:

Aus den Dreiecken ABC und ACD ergibt sich nach dem Projektionssatz:

$$e^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta$$

und

$$e^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt zunächst:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd \cdot \cos\delta$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass nach Gleichung a)

$$\delta = 2R - \beta$$

also:

$$\cos\delta = \cos(2R - \beta)$$

und hiernach und nach der Erkl. 94:

$$\cos\delta = \cos(2R - \beta) \text{ oder } = -\cos\beta$$

ist:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd \cdot -\cos\beta$$

oder:

$$a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\beta = c^2 + d^2 + 2cd \cdot \cos\beta$$

und hieraus ergibt sich:

$$\alpha) \ldots \cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$$

[siehe auch die Relation 2) in Aufgabe 1013].

Berücksichtigt man nunmehr, dass nach der Erkl. 52:

$$\beta) \ldots \sin\beta = 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}$$

nach den Erkl. 227 und 226:

$$\gamma) \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}}$$

und

$$\delta) \ldots \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}}$$

ist, dass also:

$$\sin\beta = 2\sqrt{\frac{1 - \cos\beta}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\beta}{2}}$$

oder:

$$\sin\beta = 2\sqrt{\frac{(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta)}{4}}$$

mithin:

$$\sin\beta = \sqrt{(1 - \cos\beta)(1 + \cos\beta)}$$

ist, so erhält man aus letzterer Gleichung in Rücksicht der Gleichung α):

$$\varepsilon) \ldots \sin\beta = \sqrt{\left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right) \cdot \left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}\right)}$$

oder nach der Erkl. 601:

$$2) \ldots \sin\beta = \frac{1}{2(ab + cd)} \cdot \sqrt{(a+b+c-d) \cdot (a+b-c+d) \cdot (a-b+c+d) \cdot (-a+b+c+d)}$$

Erkl. 601. Die nebenstehende Gleichung ε) kann man wie folgt umformen:

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{2(ab + cd) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2(ab + cd)}} \cdot \sqrt{\frac{2(ab + cd) + (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)}{2(ab + cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{2ab + 2cd - a^2 - b^2 + c^2 + d^2}{2(ab + cd)}} \cdot \sqrt{\frac{2ab + 2cd + a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{(c^2 + 2cd + d^2) - (a^2 - 2ab + b^2)}{2(ab + cd)}} \cdot \sqrt{\frac{(a^2 + 2ab + b^2) - (c^2 - 2cd + d^2)}{2(ab + cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{(c+d)^2 - (a-b)^2}{2(ab + cd)} \cdot \frac{(a+b)^2 - (c-d)^2}{2(ab + cd)}}$$

$$\sin\beta = \sqrt{\frac{[(c+d)^2 - (a-b)^2] \cdot [(a+b)^2 - (c-d)^2]}{2^2(ab + cd)^2}}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2(ab+cd)} \cdot \sqrt{[(c+d)+(a-b)] \cdot [(c+d)-(a-b)]} \cdot \sqrt{[(a+b)+(c-d)] \cdot [(a+b)-(c-d)]}$$

$$\sin\beta = \frac{1}{2(ab + cd)} \cdot \sqrt{(a - b + c + d) \cdot (-a + b + c + d)} \cdot \sqrt{(a + b + c - d)(a + b - c + d)}$$

oder:

$$\sin\beta = \frac{1}{2(ab + cd)} \cdot \sqrt{(a + b + c - d) \cdot (a + b - c + d)} \cdot \sqrt{(a - b + c + d)(-a + b + c + d)}$$

Setzt man noch:

3) .... $a+b+c+d=2s$

also:

3a) .. $a+b+c-d=2s-2d$ od. $=2(s-d)$

3b) ... $a+b-c+d=2(s-c)$

3c) ... $a-b+c+d=2(s-b)$

und

3d) ... $-a+b+c+d=2(s-a)$

so erhält man aus Gleichung 2):

$$\sin\beta=\frac{2}{2(ab+cd)}\sqrt{2(s-d)\cdot 2(s-c)\cdot 2(s-b)\cdot 2(s-a)}$$

oder:

$$\sin\beta=\frac{1}{2(ab+cd)}\cdot\sqrt{16\cdot(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

$$\sin\beta=\frac{4}{2(ab+cd)}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

mithin:

2a) $\sin\beta=\frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

[vergleiche hiermit die Relation 6) in Aufg. 1015]

Aus den Gleichungen 1) und 2a) folgt nunmehr:

$$F=\frac{ab+cd}{2}\cdot\frac{2}{ab+cd}\cdot\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

5) ... $F=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Aufgabe 1019. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$a=9$ dm
$b=10$ dm
$c=17$ dm
und $d=14$ dm

wie gross ist dessen Inhalt?

Andeutung. Nach der in Aufgabe 1018 vorgeführten Relation 5) ist:

A) .. $F=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Nach welcher Gleichung man in Rücksicht der für a, b, c und d gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass:

A_1) ... $s=\frac{a+b+c+d}{2}$

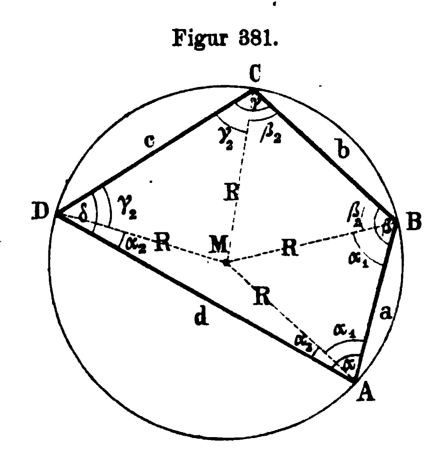
ist, den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Aufgabe 1020. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$a=11{,}2$ m
$b=6{,}6$ m
$c=3{,}2$ m
und $R=6{,}5$ m

man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Aus den gleichschenkligen Dreiecken MAB, MBC und MCD der Figur 381 ergeben sich bezw. die Relationen:



Figur 381.

a) ... $\sin\alpha_1 = \frac{a}{2R}$

b) ... $\sin\beta_2 = \frac{b}{2R}$

und

c) ... $\sin\gamma_2 = \frac{c}{2R}$

nach welchen drei Gleichungen man bezw. die Winkel α_1, β_2 und γ_2 berechnen kann.

Sind hiernach diese Winkel berechnet, so kann man nach den aus der Figur 381 sich ergebenden Beziehungen:

d) ... $\beta = \alpha_1 + \beta_2$

e) ... $\gamma = \gamma_2 + \beta_2$

f) ... $\alpha = 2R - \gamma$

und (siehe Erkl. 596)

g) ... $\delta = 2R - \beta$

die Winkel des Vierecks berechnen. Schliesslich kann man mittels der aus dem gleichschenkligen Dreieck MAD sich ergebenden Relation:

h) ... $\cos\alpha_2 = \frac{d}{2R}$

und in Rücksicht, dass:

i) ... $\alpha_2 = \alpha - \alpha_1$

ist, die gesuchte vierte Seite d berechnen.

Aufgabe 1021. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$a = 1680$ m
$b = 260$ m
$\alpha = 34^0\, 50'\, 16{,}4''$
$R = 850$ m

Man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1020.

Aufgabe 1022. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$a = 1{,}4$ dm
$c = 1{,}3$ dm
$\alpha = 102^0\, 12'\, 4{,}8''$
$R = 0{,}8$ dm

man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung zu Aufgabe 1020.

Aufgabe 1023. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$a = 4{,}6$ m
$b = 4{,}2$ m
$e = 5$ m
$f = 5{,}2$ m

man soll die nicht gegebenen Seiten des Dreiecks berechnen.

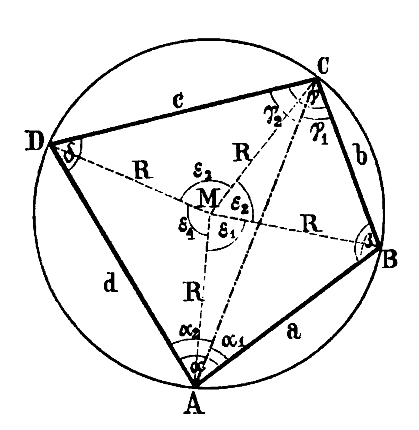
Andeutung. Man benutze die in der Erkl. 599 und 600 für $e \cdot f$ und $e:f$ aufgestellten Relationen; oder man berechne zunächst, wie in der Auflösung zur Aufgabe 11.. gezeigt wurde, aus a, b und e, siehe Figur 379, die Winkel des Dreiecks ABC, u. s. f.

Aufgabe 1024. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$$a = 18 \text{ m}$$
$$b = 30 \text{ m}$$
$$\alpha = 86^0\, 40'\, 10''$$
$$\text{und } \beta = 84^0\, 0'\, 24''$$

man soll die nicht gegebenen Stücke dieses Vierecks berechnen.

Figur 382.



Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 382, aus a, b und β die Winkel α_1 und γ_1 des Dreiecks ABC, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

Dann bestimme man mittels der aus dem gleichschenkligen Dreieck MAB sich ergebenden Relation:

$$\text{a)} \ldots R = \frac{a}{2 \sin \varepsilon_1}$$

in Rücksicht, dass nach der Erkl. 450:

$$\text{b)} \ldots \varepsilon_1 = 2\gamma_1$$

ist, den Radius R.

Hierauf bestimme man mittels der aus dem gleichschenkligen Dreieck MCD sich ergebenden Relation:

$$\text{c)} \ldots R = \frac{c}{2 \sin \varepsilon_3}$$

in Rücksicht des für R nach Gleichung a) gefundenen Wertes und in Rücksicht, dass:

$$\text{d)} \ldots \varepsilon_3 = 2\alpha_2 \text{ oder } = 2(\alpha - \alpha_1)$$

ist, die Seite c. In derselben Weise kann man aus dem gleichschenkligen Dreieck AMD die Seite d bestimmen.

Zur Berechnung der Winkel γ und δ benutze man die Relationen:

$$\text{e)} \ldots \gamma = 2R - \alpha$$

und

$$\text{f)} \ldots \delta = 2R - \beta$$

Aufgabe 1025. In einem Sehnenviereck verhält sich, siehe Figur 379:

$$e : f : R = 3 : 2 : 1{,}2$$

man soll die Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Aus den in Aufgabe 1017 vorgeführten Relationen 1) und 2) erhält man:

$$\text{a)} \ldots \sin\beta = \frac{e}{2R}$$

$$\text{b)} \ldots \sin\delta = \frac{e}{2R}$$

$$\text{c)} \ldots \sin\alpha = \frac{f}{2R}$$

und

$$\text{d)} \ldots \sin\gamma = \frac{f}{2R}$$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für $e:R$ und $f:R$ gegebenen Verhältnisse $3:1{,}2$ und $2:1{,}2$, die Winkel des Vierecks berechnen kann.

Aufgabe 1026. Von einem Sehnenviereck sind gegeben:

$$a:b:c:d = 5:6:7:9$$
$$F = 100 \text{ qm}$$

man soll die Seiten und Winkel, sowie den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises berechnen.

Andeutung. Nach der in Aufgabe 101[8] vorgeführten Relation 5) hat man:

a) . . . $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

in welcher Gleichung:

b) . . . $s = \frac{a+b+c+d}{2}$

bedeutet.

Gemäss der Aufgabe ist ferner:

$$a:b:c:d = 5:6:7:9$$

oder nach der Erkl. 88:

c) . . . . $\frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{d}{9}$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

d) . $\frac{a+b+c+d}{5+6+7+9} = \frac{a}{5} \text{ od.} = \frac{b}{6} \text{ od.} = \frac{c}{7} \text{ od.} = \frac{d}{9}$

Setzt man in Rücksicht der Gleichung b) in dieser Proportion:

$$a+b+c+d = 2s$$

so geht dieselbe über in:

e) . . $\frac{2s}{27} = \frac{a}{5} \text{ od.} = \frac{b}{6} \text{ od.} = \frac{c}{7} \text{ od.} = \frac{d}{9}$

und hieraus ergibt sich:

f) . . . $a = \frac{10 \cdot s}{27}$

g) . . . $b = \frac{12 \cdot s}{27}$

h) . . . $c = \frac{14 \cdot s}{27}$

und

i) . . . $d = \frac{18 \cdot s}{27}$

Substituiert man diese Werte für a, b, c und d in Gleichung a), so erhält man nach der Erkl. 602:

A) . . . $s = 27 \cdot \sqrt{\frac{F}{\sqrt{17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 19}}}$

nach welcher Gleichung man s berechnen kann. Ist s hiernach berechnet, so kann man nach den Gleichungen f) bis i) mittels dieses berechneten Werts für s, jede der Seiten a, b, c und d berechnen.

Sind hiernach die Seiten berechnet, so kann man aus denselben die Winkel mittels den in Aufgabe 1014 vorgeführten Relationen 1) bis 4) berechnen.

Den gesuchten Radius R kann man schliesslich nach der in Aufgabe 1017 vorgeführten Relation 3) bestimmen.

Erkl. 602. Aus den nebenstehenden Gleichungen a) und f) bis i) ergibt sich:

$$F = \sqrt{\left(s-\frac{10 \cdot s}{27}\right)\left(s-\frac{12 s}{27}\right)\left(s-\frac{14 \cdot s}{27}\right)\left(s-\frac{18 \cdot s}{27}\right)}$$

$$F = \sqrt{\frac{27s-10s}{27} \cdot \frac{27s-12s}{27} \cdot \frac{27s-14s}{27} \cdot \frac{27s-18s}{27}}$$

$$F = \sqrt{\frac{17s}{27} \cdot \frac{15s}{27} \cdot \frac{13s}{27} \cdot \frac{9s}{27}}$$

$$F = \sqrt{\frac{s^4}{27^4} \cdot 17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 9}$$

$$F = \frac{s^2}{27^2} \sqrt{17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 9}$$

und hieraus erhält man:

$$s^2 = \frac{27^2 \cdot F}{\sqrt{17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 9}}$$

oder:

$$s = 27 \cdot \sqrt{\frac{F}{\sqrt{17 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 9}}}$$

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

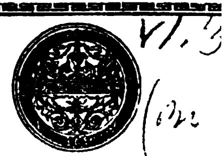
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

344. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 337. — Seite 721—736. Mit 14 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. **sphärischen** Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 337. — Seite 721—736. Mit 14 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über das Sehnenviereck, Fortsetzung. — Aufgaben über das Tangentenviereck. — Aufgaben über das Kreisviereck.— Aufgaben über den Kreis in Verbindung mit einem oder zwei anderen Kreisen.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Aufgabe 1027. In einem Kreis schneiden sich zwei Durchmesser unter einem Winkel $\varepsilon = 36^0\,21'\,40''$. Verbindet man ihre Endpunkte, so ist eine der Verbindungslinien um $d = 409$ m grösser, als eine der andern. Wie gross ist der Durchmesser des Kreises und wie gross sind die Sehnen?

Figur 383.

Andeutung. Sind, siehe Figur 383, AC und BD zwei unter dem gegebenen Winkel ε sich schneidende Durchmesser des Kreises um M, und man verbindet die Endpunkte dieser Durchmesser, so erhält man das Sehnenviereck $ABCD$, welches nach den Erkl. 452 und 380 ein Rechteck ist. Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man gemäss der Aufgabe:

$$a - b = d$$

und

$$\sphericalangle BAC = \frac{\varepsilon}{2}$$

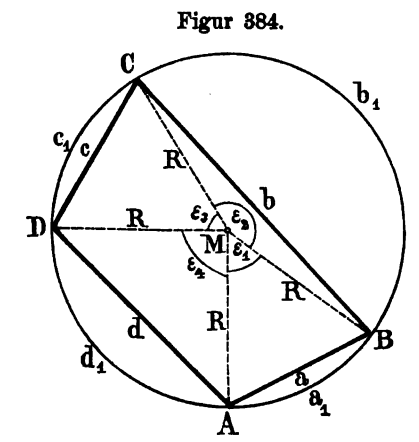
indem $\sphericalangle BMC$ $(= \varepsilon)$ als Aussenwinkel des gleichschenkligen Dreiecks AMB doppelt so gross ist als jeder der Basiswinkel MAB und MBA. In Rücksicht der für $a-b$ und ε gegebenen Werte kann man hiernach die Hypotenuse AC, d. i. der gesuchte Durchmesser $2R$ des Kreises um M, berechnen wie in Andeutung zur Aufgabe 208 gesagt wurde.

Aufgabe 1028. Die Peripherie eines Kreises, dessen Radius $R = 20{,}54$ misst, ist so in die vier Teile a_1, b_1, c_1 und d_1 geteilt, dass sich:

$$a_1 : b_1 = 1 : 5$$
$$a_1 : c_1 = 2 : 3$$
$$d_1 : c_1 = 5 : 2$$

verhalten. Man soll den Inhalt des durch jene Teilpunkte bestimmten Sehnenvierecks berechnen.

Figur 384.



Andeutung. Für den gesuchten Inhalt F des Sehnenvierecks hat man, siehe Figur 384, nach der Erkl. 151:

$$F = \frac{R^2}{2} \cdot \sin\varepsilon_1 + \frac{R^2}{2} \cdot \sin\varepsilon_2 + \frac{R^2}{2} \cdot \sin\varepsilon_3 + \frac{R^2}{2} \cdot \sin\varepsilon_4$$

oder:

$$\text{A)} \ldots F = \frac{R^2}{2}\left[\sin\varepsilon_1 + \sin\varepsilon_2 + \sin\varepsilon_3 + \sin\varepsilon_4\right]$$

Nach welcher Gleichung man den gesuchten Inhalt F aus dem für R gegebenen Zahlenwert und den Centriewinkeln ε_1, ε_2, ε_3 und ε_4 berechnen könnte, wenn letztere bekannt wären. Diese Winkel kann man aber wie folgt berechnen:

Bildet man aus den in der Aufgabe gegebenen Proportionen eine laufende Proportion, so erhält man nach der Erkl. 603:

$$\text{a)} \ldots \frac{a_1}{1} = \frac{b_1}{5} = \frac{c_1}{\frac{3}{2}} = \frac{d_1}{\frac{15}{4}}$$

Nach dem in der Erkl. 234 angeführten Summensatz ergibt sich hieraus:

Erkl. 603. Die in der Aufgabe 1028 gegebenen Proportionen:

a) . . . $a_1 : b_1 = 1 : 5$

b) . . . $a_1 : c_1 = 2 : 3$

c) . . . $d_1 : c_1 = 5 : 2$

kann man, wie folgt in eine laufende Proportion umwandeln:

Angenommen, dem Bogenstück a_1 entspreche die Masszahl 1, so entspricht nach der Proportion a) dem Bogenstück b_1 die Masszahl 5. Aus der Proportion b) ergibt sich, dass dann dem Bogenstück c_1 die Masszahl $\frac{3}{2}$ entspricht. Ferner ergibt sich, in Rücksicht dass dem Bogenstück c_1 die Masszahl $\frac{3}{2}$ entspricht, aus der Proportion c), dass dem Bogenstück d_1 die Masszahl $\frac{15}{4}$ entspricht.

In Rücksicht jener Annahme besteht also die laufende Proportion:

$$\frac{a_1}{1} = \frac{b_1}{5} = \frac{c_1}{\frac{3}{2}} = \frac{d_1}{\frac{15}{4}}$$

Erkl. 604. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der zu einem Bogenstück eines Kreises gehörige Centriewinkel ist, im Winkelmass ausgedrückt, das Mass jenes Bogenstücks.“

$$\frac{a_1+b_1+c_1+d_1}{1+5+\frac{3}{2}+\frac{15}{4}} = \frac{a_1}{1} \text{ oder } = \frac{b_1}{5} \text{ oder } = \frac{c_1}{\frac{3}{2}} \text{ oder } = \frac{d_1}{\frac{15}{4}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass die Summe der Bogenstücke a_1, b_1, c_1 und d_1 im Winkelmass ausgedrückt $= 360^0$ ist, und dass:

$$1+5+\frac{3}{2}+\frac{15}{4} = \frac{45}{4}$$

ist, so erhält man:

$$\frac{360^0}{\frac{45}{4}} = \frac{a_1}{1} \text{ oder } = \frac{b_1}{5} \text{ od. } = \frac{c_1}{\frac{3}{2}} \text{ od. } = \frac{d_1}{\frac{15}{4}}$$

und hieraus ergibt sich:

a) . . . $a_1 = \frac{4 \cdot 360}{45}$ Grad oder $= 32^0$

b) . . . $b_1 = \frac{20 \cdot 360}{45}$ Grad oder $= 160^0$

c) . . . $c_1 = \frac{4 \cdot 360 \cdot 3}{45 \cdot 2}$ Grad oder $= 48^0$

und

d) . . . $d_1 = \frac{4 \cdot 360 \cdot 15}{45 \cdot 4}$ Grad oder $= 120^0$

Nach der Erkl. 604 sind somit die Centriewinkel ε_1, ε_2, ε_3 und ε_4, siehe Figur 384, bezw.:

$$\text{B)} \ldots \left\{ \begin{aligned} \varepsilon_1 &= 32^0 \\ \varepsilon_2 &= 160^0 \\ \varepsilon_3 &= 48^0 \\ \text{und } \varepsilon_4 &= 120^0 \end{aligned} \right.$$

Nach der Gleichung A) kann man in Rücksicht der Gleichungen unter B) den gesuchten Inhalt F berechnen.

Aufgabe 1029. Die Peripherie eines Kreises, dessen Radius $r = 10$ m misst, ist durch vier Punkte im Verhältnis von $1:2:3:4$ geteilt. Man soll den Inhalt des durch diese vier Teilpunkte bestimmten Sehnenvierecks berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1028.

---

c) Aufgaben über das Tangentenviereck.

Aufgabe 1030. Man soll nachweisen, dass zwischen den Seiten a, b, c und d, den Winkeln α, β, γ und δ eines Tangentenvierecks, dem Radius r des demselben einbeschriebenen Kreises, der halben Summe s jener vier Seiten und dem Inhalt F nachfolgende Relationen bestehen:

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 3):

Verbindet man, siehe Figur 385, den Mittelpunkt M des Tangentenvierecks $ABCD$ (siehe

$$1) \ldots r = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

$$2) \ldots r = \frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$3) \ldots r = \frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}}$$

$$4) \ldots r = \frac{d}{\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$$

$$5) \ldots r = \frac{a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

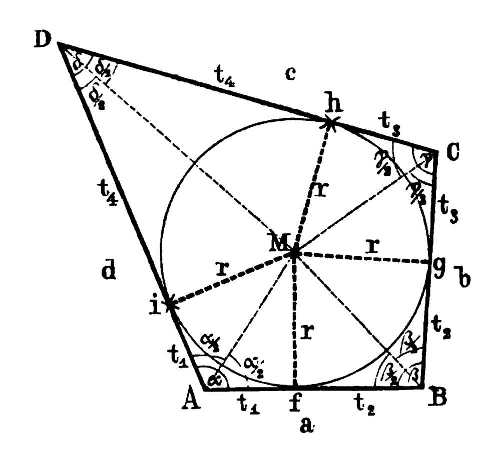
$$6) \ldots r = \frac{b \cdot \sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta+\gamma}{2}}$$

$$7) \ldots r = \frac{c \cdot \sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\gamma+\delta}{2}}$$

$$8) \ldots r = \frac{d \cdot \sin\frac{\delta}{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\delta+\alpha}{2}}$$

$$9) \ldots F = r \cdot s$$

Figur 385.



Erkl. 605) mit den Ecken desselben, so werden durch diese Verbindungslinien, nach der Erkl. 531, die Winkel des Vierecks halbiert, wie in der Figur 385 angedeutet ist.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken MfA und MfB ergeben sich bezw. die Relationen:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \frac{t_1}{r}$$

und

$$\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{t_2}{r}$$

oder:

$$a) \ldots t_1 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

und

$$b) \ldots t_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$t_1 + t_2 = r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + r \cdot \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$$

oder:

$$c) \ldots t_1 + t_2 = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass:

$$d) \ldots t_1 + t_1 = a$$

ist, so erhält man in Rücksicht dessen aus Gleichung c):

$$a = r\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\right)$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

$$1) \ldots r = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

In ganz derselben Weise kann man die Relationen 2) bis 4) herleiten.

B) Beweis der Relationen 5) bis 8):

Setzt man in der vorstehend bewiesenen Relation:

$$r = \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

nach der in der Erkl. 424 angeführten goniometr. Formel für:

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}$$

so ergibt sich aus derselben die zu beweisende Relation:

$$5) \ldots r = \frac{a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$$

In ganz derselben Weise kann man aus den Relationen 2) bis 4) die Relationen 6) bis 8) herleiten.

Erkl. 605. Unter einem „Tangentenviereck“ versteht man im allgemeinen ein solches Viereck, dessen Seiten Tangenten an einem Kreis sind.

Man kann hierbei zwei Arten von Tangentenvierecken unterscheiden, nämlich:

a) solche, deren Seiten Tangenten eines Kreises sind, wie die Figur 385 zeigt;

und

b) solche, bei welchen die Verlängerungen der Seiten Tangenten eines Kreises sind, wie z. B. die Figur 386 zeigt.

Hat hiernach ein Viereck die Eigenschaft, dass man in- oder an dasselbe einen Kreis konstruieren kann, oder besser gesagt, dass man einen Kreis konstruieren kann, dessen Peripherie die Seiten oder die Verlängerungen der Seiten berührt, so ist dieses Viereck ein Tangentenviereck.

C) Beweis der Relation 9):

Aus der Figur 385 ergibt sich, dass der Inhalt F des Tangentenvierecks gleich der Summe der Inhalte der vier Dreiecke MAB, MBC, MCD und MDA ist; in Rücksicht der Erkl. 34 ergibt sich somit aus der Figur:

$$F = \frac{a \cdot r}{2} + \frac{b \cdot r}{2} + \frac{c \cdot r}{2} + \frac{d \cdot r}{2}$$

oder:

a) . . . $F = r \cdot \frac{a+b+c+d}{2}$

Setzt man hierin:

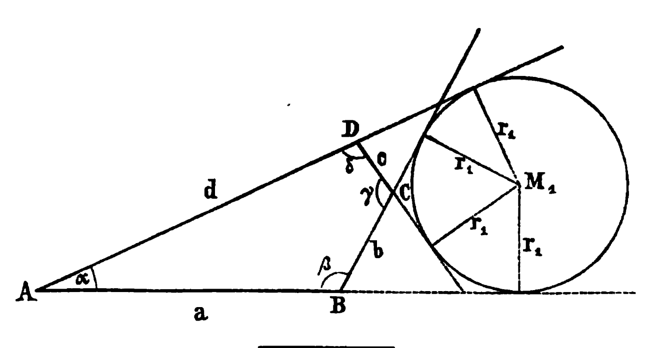
$$\frac{a+b+c+d}{2} = s$$

so erhält man die zu beweisende Relation:

9) . . . . $F = r \cdot s$



Figur 386.



Aufgabe 1031. Von einem Tangentenviereck sind gegeben:

$a = 4{,}48$ m
$b = 2{,}1$ m
und $\beta = 64^0\, 32'\, 8{,}4''$
und $r = 1{,}2$ m

man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Mittels der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relationen 1) und 2) kann man aus r, a und β, bezw. aus r, b und β die Winkel α und γ berechnen und hiernach den vierten Winkel δ mittels der Relation:

$$\delta = 4R - (\alpha + \beta + \gamma)$$

bestimmen. Dann kann man mittels der in jener Aufgabe vorgeführten Relationen 7) und 8) aus r und den berechneten Winkeln die Seiten c und d bestimmen.

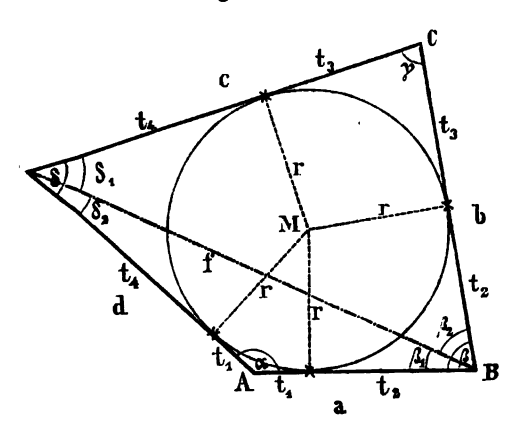
Aufgabe 1032. Von einem Tangentenviereck sind gegeben:

$a = 2{,}2$ m
$\alpha = 115^0\, 20'\, 10''$
$f = 3{,}7$ m
$r = 1$ m

man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Von dem Dreieck ABD, siehe Figur 387, kennt man gemäss der An-

Figur 387.



gabe a, f und α; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 121 gezeigt wurde, die Seite d und die Winkel δ_2 und β_1 dieses Dreiecks berechnen. Ferner kann man die Winkel β und δ mittels der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relationen 1) und 4) aus r, a und α, bezw. aus d, r und α berechnen und den vierten Winkel γ mittels der Relation:

$$\gamma = 4R - (\alpha + \beta + \delta)$$

bestimmen.

Die Seiten b und c kann man schliesslich, wenn die Winkel berechnet sind, mittels der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relationen 2) und 3) bestimmen.

Aufgabe 1033. Von einem Tangentenviereck sind gegeben:

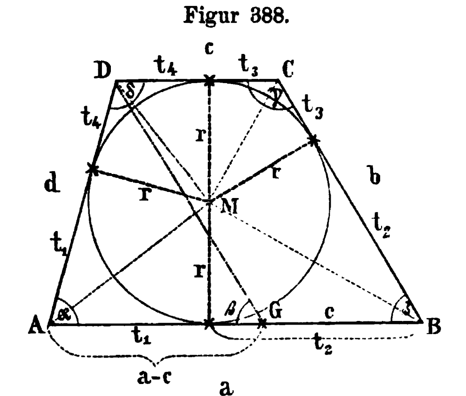
$$b = 9{,}8 \text{ m}$$
$$d = 3{,}02 \text{ m}$$

und

$$r = 4{,}75 \text{ m}$$

wie gross sind die Winkel dieses Tangentenvierecks und wie gross sind die beiden anderen Seiten desselben, unter der Voraussetzung, dass dieselben parallel sind, dass also das Tangentenviereck zugleich ein Trapez ist?

Figur 388.



Andeutung. Aus der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relation 8) ergibt sich:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{\sin\frac{\delta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{\delta+\alpha}{2}} = \frac{r}{d}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass das Tangentenviereck, siehe Figur 388, ein Trapez ist, dass also:

$$\alpha + \delta = 2R$$

ist, mithin:

$$\frac{\alpha+\delta}{2} = R$$

und

$$\frac{\delta}{2} = R - \frac{\alpha}{2}$$

ist, so erhält man aus jener Gleichung:

$$\frac{\sin\left(R - \frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin R} = \frac{r}{d}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 19 und 99:

$$\cos\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d}$$

oder:

$$2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{2r}{d}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 52:

$$\text{A)} \ldots\ldots \sin\alpha = \frac{2r}{d}$$

Erkl. 606. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„In jedem Tangentenviereck ist die Summe zweier gegenüberliegender Seiten gleich der Summe der beiden andern Seiten."

In Figur 387 z. B. ist nach der Erkl. 465:

$$a = t_1 + t_2$$
$$c = t_3 + t_4$$

also:

a) . . . $a + c = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

ferner ist in dieser Figur:

$$d = t_1 + t_4$$
$$b = t_2 + t_3$$

also:

b) . . . $b + d = t_1 + t_2 + t_3 + t_4$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich:

1) . . . $a + c = b + d$

welche Beziehung durch vorstehenden Lehrsatz ausgesprochen ist.

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

Man kann Gleichung A) auch direkt aus der Figur 388 ableiten.

In ganz derselben Weise kann man die Gleichung:

B) . . . . . $\sin\beta = \frac{2r}{b}$

herleiten, nach welcher man β berechnen kann. Zur Berechnung der Seiten a und c beachte man, dass nach der Erkl. 606:

C) . . . . . $a + c = b + d$

ist, und dass sich ferner, wenn man in der Figur 388 DG BC zieht, aus dem hierdurch entstandenen Dreieck AGD, in Rücksicht, dass in demselben:

$$AG = a - c$$

und

$$\sphericalangle ADG = 2R - (\alpha + \beta)$$

ist, nach der Sinusregel die Relation:

$$\frac{a-c}{d} = \frac{\sin[2R - (\alpha + \beta)]}{\sin\beta}$$

oder:

D) . . . $a - c = \frac{d \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$

ergibt, aus welchen Gleichungen man leicht die Seiten a und c bestimmen kann.

---

d) Aufgaben über das Kreisviereck.

Aufgabe 1034. Man soll nachweisen, dass zwischen den Winkeln, den Seiten und dem Inhalt eines **Kreisvierecks**, sowie dem Radius r des demselben einbeschriebenen Kreises nachfolgende Relationen bestehen:

1) . . . $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$ oder $= \frac{1}{ad}\sqrt{abcd}$

2) . . . $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$ oder $= \frac{1}{ab}\sqrt{abcd}$

3) . . . $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$ oder $= \frac{1}{bc}\sqrt{abcd}$

4) . . . $\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$ oder $= \frac{1}{cd}\sqrt{abcd}$

5) . . . $F = \sqrt{abcd}$

6) . . . $r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ oder $= \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}$

Auflösung. Die Richtigkeit der in der Aufgabe vorgeführten Relationen kann man wie folgt darthun:

A) Beweis der Relationen 1) bis 4):

Nach der in der Aufgabe 1015 vorgeführten Relation 1) hat man, da das Kreisviereck ein **Sehnenviereck** ist, siehe die Erkl. 607 und die Figur 389:

a) . . . $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$

Ferner hat man nach der Erkl. 606, da das Kreisviereck auch ein **Tangentenviereck** ist, die weitere Relation:

b) . . . $a + c = b + d$

Berücksichtigt man, dass in Gleichung a):

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

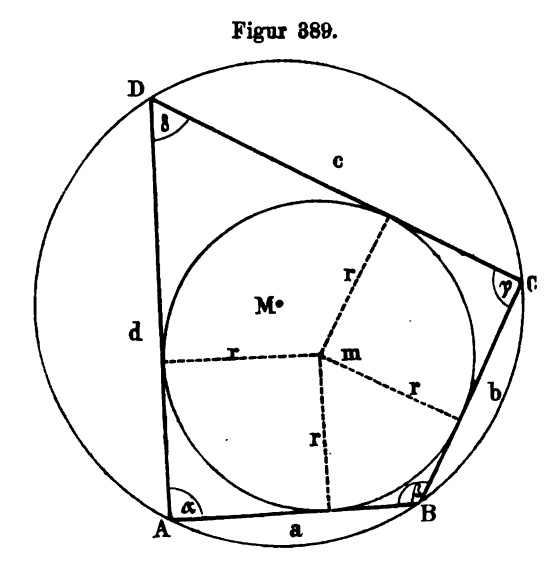
mithin:

c) . . . $a + b + c + d = 2s$

ist, so ergibt sich aus den Gleichungen b) und c), dass:

c) . . . $a + c = s$

Figur 389.



Erkl. 607. Unter einem „Kreisviereck" versteht man, siehe Figur 389, ein solches Viereck, dessen Seiten Sehnen eines Kreises und zugleich Tangenten eines andern Kreises sind. Das Kreisviereck hat somit im allgemeinen die sämtlichen Eigenschaften des Sehnenvierecks und auch des Tangentenvierecks.

(Siehe die Erkl. 595 und 596 und die Erkl. 605 und 606.)

In vielen Lehrbüchern wird irrtümlicherweise das Sehnenviereck als Kreisviereck bezeichnet.

und dass:

d) . . . $b + d = s$

ist. Aus den Gleichungen a), c) und d) erhält man also für ein Kreisviereck:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(a+c-a)\,(b+d-d)}{(b+d-b)\,(a+c-c)}}$$

oder:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{b\cdot c}{a\cdot d}}$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{bc}{ad}}} \text{ oder } = \sqrt{\frac{1}{\frac{bc}{ad}}}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

1) . . . . $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$

In ganz derselben Weise kann man die Relationen 2) bis 4) herleiten.

B) Beweis der Relation 5):

Setzt man in der in Aufgabe 1018 vorgeführten Relation 5):

$$F = \sqrt{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)\,(s-d)}$$

in Rücksicht, dass ein Kreisviereck zugleich Sehnen- und Tangentenviereck ist, nach vorstehenden Gleichungen c) und d) für:

$$s = a + c$$

bezw. für:

$$s = b + d$$

so erhält man:

$$F = \sqrt{(a+c-a)(b+d-b)(a+c-c)(b+d-d)}$$

und hieraus ergibt sich die zu beweisende Relation:

5) . . . $F = \sqrt{abcd}$

C) Beweis der Relation 6):

Nach der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relation 8) hat man, in Rücksicht, dass das Kreisviereck ein Tangentenviereck ist, für den Inhalt F des Kreisvierecks:

$$F = r \cdot s$$

und hieraus ergibt sich zunächst:

$$r = \frac{F}{s}$$

Setzt man in derselben nach den vorstehenden Gleichungen c) und d):

$$s = a + c$$

oder:

$$s = b + d$$

und berücksichtigt die unter B) bewiesene Relation 5), so erhält man die zu beweisende Relation:

6) . . . $r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ oder $= \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}$

Aufgabe 1035. Drei der Seiten eines Kreisvierecks sind bezw.:

$$a = 22{,}4 \text{ m}$$
$$b = 18{,}9 \text{ m}$$
und
$$c = 7 \text{ m}$$

man soll die Winkel und den Inhalt desselben sowie den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises berechnen.

Andeutung. Man benutze die in Aufgabe 1034 vorgeführten Relationen.

Aufgabe 1036. Von einem Kreisviereck sind gegeben:

$$a = 531 \text{ m}$$
$$\alpha = 110^0\,20'\,40''$$
$$\beta = 22^0\,8'\,10''$$

man soll die nicht gegebenen Seiten und Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Da das Kreisviereck ein Sehnenviereck ist, so findet man die Winkel γ und δ nach der Erkl. 596 mittels der Beziehungen:

A) . . . $\gamma = 180^0 - \alpha$

B) . . . $\delta = 180^0 - \beta$

Da ferner das Kreisviereck ein Tangentenviereck ist, so kann man zunächst mittels der in Aufgabe 1030 vorgeführten Relation 1) aus a, α und β den Radius r des einbeschriebenen Kreises berechnen. Dann kann man aus r und den Winkeln mittels der in jener Aufgabe vorgeführten Relationen 6) bis 8) die Seiten b, c und d berechnen. Zur Kontrolle muss nach der Erkl. 606:

$$a + c = b + d$$

sein.

Aufgabe 1037. Von einem Kreisviereck sind gegeben:

$$a = 11{,}2 \text{ m}$$
$$r = 3 \text{ m}$$
und
$$F = 176{,}4 \text{ qm}$$

man soll die nicht gegebenen Seiten und die Winkel desselben berechnen.

Andeutung. Nach den in Aufgabe 1034 vorgeführten Relationen 5) und 6) ist:

$$\sqrt{abcd} = F$$

und

$$\sqrt{abcd} = (a + c) \cdot r$$

Aus diesen beiden Gleichungen ergibt sich in bezug auf c die Bestimmungsgleichung:

$$(a + c) \cdot r = F$$

und hieraus erhält man:

A) . . . $c = \frac{F}{r} - a$

nach welcher Gleichung man die Seite c berechnen kann.

Ist hiernach c berechnet, so kann man leicht $b + d$ bestimmen, da nach der Erkl. 606:

a) . . . $b + d = a + c$

ist. Ferner kann man nach der aus der Relation 6) in Aufgabe 1034 sich ergebenden Gleichung:

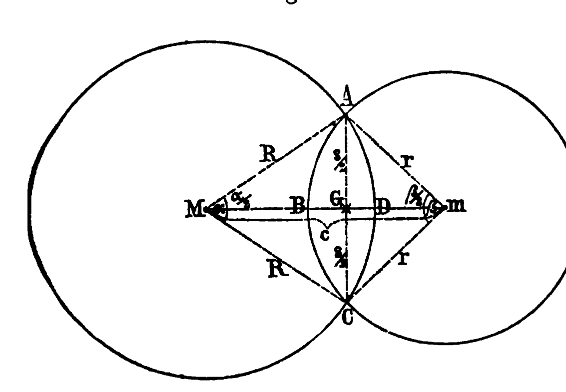
$$\text{b)} \ldots b \cdot d = \frac{r^2 (b+d)^2}{ac}$$

in Rücksicht, dass $b + d = a + c$ ist, das Produkt $b \cdot d$ bestimmen; alsdann kann man aus den Gleichungen a) und b) die Seiten b und d berechnen. Aus den Seiten kann man schliesslich mittels der in Aufgabe 1034 vorgeführten Relationen 1) bis 4) die Winkel berechnen, wobei man allerdings nur zwei einander nicht gegenüberliegende zu berechnen braucht, da das Kreisviereck ein Sehnenviereck ist (siehe Erkl. 596).

15). Aufgaben über den Kreis in Verbindung mit einem oder zwei anderen Kreisen.

Aufgabe 1038. Die Centrallinie c zweier sich schneidenden Kreise, deren Radien R und r bezw. $= 1{,}4$ und $1{,}3$ m messen, ist $1{,}5$ m lang; wie gross ist das beiden Kreisen gemeinsame Flächenstück?

Figur 390.



Erkl. 608. Unter der „Centrallinie oder der Centralen zweier Kreise" versteht man im allgemeinen Sinn die gerade Linie, welche durch die Mittelpunkte der beiden Kreise geht; im engeren Sinn versteht man darunter die Strecke, welche die Mittelpunkte verbindet.

Andeutung. Sind, siehe Figur 390, die Kreise um M und m die gegebenen, so stellt das Flächenstück $ABCD$ das zu berechnende dar.

Dieses Flächenstück $ABCD$ besteht aus dem Segment ACB des Kreises um m und aus dem Segment ACD des Kreises um M.

Bezeichnet man die Centriewinkel AMC und AmC bezw. mit α und β, so hat man nach der Erkl. 491:

$$\text{a)} \ . \ \text{Sgt.}\ ACB = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\beta^0}{180^0} - \sin\beta\right)$$

und

$$\text{b)} \ . \ \text{Sgt.}\ ACD = \frac{R^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

Die unbekannten Centriewinkel α und β kann man in Rücksicht, dass, siehe die Erkl. 608 und 609, dieselben durch die Centrallinie Mm ($= c$) halbiert werden, aus einem der kongruenten Dreiecke MmA und MmC bestimmen und zwar, da von jedem dieser Dreiecke gemäss der Aufgabe die drei Seiten R, r und c gegeben sind, wie in der Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Sind hiernach diese Winkel α und β berechnet und berücksichtigt man, dass sich nach Vorstehendem aus den Gleichungen a) und b) für den gesuchten Flächeninhalt F:

$$F = \frac{r^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\beta^0}{180^0} - \sin\beta\right) + \frac{R^2}{2}\left(\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$$

oder:

$$F = r^2\pi \cdot \frac{\beta^0}{360^0} - \frac{r^2 \cdot \sin\beta}{2} + R^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0} - \frac{R^2 \cdot \sin\alpha}{2}$$

oder, wenn α und β in Grade ausgedrückt sind:

$$\text{A)} \;.\;.\; F = \frac{(R^2 \cdot \alpha + r^2 \cdot \beta) \cdot \pi}{360} - \frac{R^2 \cdot \sin\alpha + r^2 \sin\beta}{2}$$

ergibt, so kann man nach dieser Gleichung in Rücksicht der für R und r gegebenen und in Rücksicht der für α und β berechneten und in Grade ausgedrückten Werte den gesuchten Inhalt F berechnen.

Erkl. 609. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Centrallinie zweier sich schneidenden Kreise steht senkrecht auf der gemeinschaftlichen Sehne beider Kreise und halbiert dieselbe.“

Nach diesem Satz ergibt sich, dass in der Figur 390

$$\triangle MAG \cong \triangle MCG$$

dass desgleichen

$$\triangle mAG \cong \triangle mCG$$

ist, woraus sich ergibt, dass:

$$\sphericalangle AMG = \sphericalangle CMG \text{ oder } = \frac{\alpha}{2}$$

und dass ebenso:

$$\sphericalangle AmG = \sphericalangle CmG \text{ oder } = \frac{\beta}{2}$$

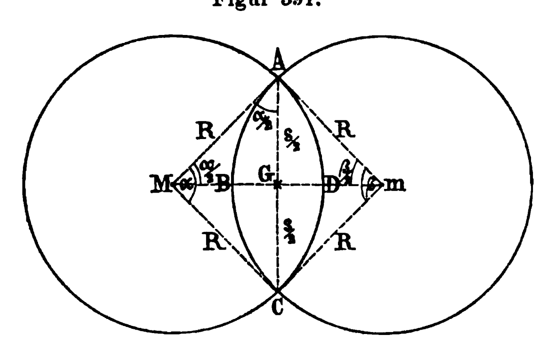
ist.

Aufgabe 1039. Zwei Kreise, deren Radien R und r bezw. 9 und 4,6 dm lang sind, schneiden sich so, dass die gemeinschaftliche Sehne s beider Kreise 3,14 dm lang ist, welchen Inhalt hat das beiden Kreisen gemeinsame Flächenstück?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1038. Die halben Centriewinkel $\frac{\alpha}{2}$ und $\frac{\beta}{2}$, siehe Figur 390, bestimme man bezw. aus den rechtwinkligen Dreiecken AGM und AGm. Von diesen Dreiecken sind gemäss der Aufgabe die Hypotenusen MA (= R) und mA (= r), sowie die gemeinschaftliche Kathete $AG\left(=\frac{AC}{2}\text{ oder } = \frac{s}{2}\right)$ bekannt.

Aufgabe 1040. Von zwei Kreisen schneidet der eine den andern rechtwinklig; wie gross ist der Inhalt des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstücks, wenn die gemeinschaftliche Sehne s beider Kreise gleich der Centrallinie der Kreise ist?

Figur 391.



Auflösung. Sind, siehe Figur 391, die Kreise um M und m zwei beliebig sich schneidende Kreise, so hat man nach der in Andeutung zur Aufgabe 1038 aufgestellten Gleichung A) für den Inhalt F des beiden Kreisen gemeinsamen Flächenstücks $ABCD$ die Relation:

$$\text{a)} \;.\;.\; F = \frac{R^2 \cdot \alpha + r^2 \cdot \beta}{360} \cdot \pi - \frac{R^2 \cdot \sin\alpha + r^2 \sin\beta}{2}$$

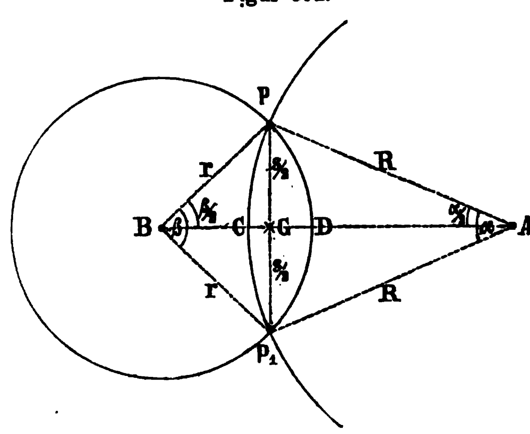
Schneidet nun z. B. der Kreis um m den Kreis um M rechtwinklig, wie in der Aufgabe erwähnt, so muss in der Figur 391 der Centriewinkel AMC oder

$$\text{b)} \;.\;.\;.\; \alpha = 90^0$$

sein, indem nach der Erkl. 610 der Bogen ADC = ein Vierteil der Peripherie des Kreises um M, also im Winkelmass ausgedrückt = 90^0 ist.

Erkl. 610. Man sagt, ein Kreis A, siehe Figur 392, schneidet einen andern Kreis B rechtwinklig, wenn die Peripherie des Kreises A durch solche Punkte p und p_1 der Peripherie des Kreises B geht, welche die Endpunkte eines Viertels (eines Quadranten) der Peripherie dieses Kreises B sind.

Figur 392.



Erkl. 611. Nach der Erkl. 609 ist in der Figur 392:

$$\sphericalangle AMG = \sphericalangle CMG \text{ oder } = \frac{\alpha}{2}$$

Da nun:

$$\alpha = 90^0$$

also:

$$\frac{\alpha}{2} = 45^0$$

ist, und da das Dreieck AGM nach der Erkl. 609 ein bei G rechtwinkliges ist, so muss auch:

$$\sphericalangle MAG = \frac{\alpha}{2} \text{ oder } = 45^0$$

sein, d. h. das Dreieck AGM ist ein rechtwinklig-gleichschenkliges Dreieck, mithin:

$$\overline{AG} = \overline{MG}$$

Erkl. 612. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Sind die Diagonalen eines Vierecks gleich lang und halbieren sich dieselben und stehen auch senkrecht aufeinander, so ist das Viereck ein Quadrat."

Erkl. 613. Schneidet ein Kreis einen andern Kreis rechtwinklig (siehe Erkl. 610) und die Radien beider Kreise sind einander gleich, so durchschneiden sich beide Kreise gegenseitig rechtwinklig.

Da ferner gemäss der Aufgabe:

$$\overline{AC} = \overline{Mm}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 609:

$$\alpha) \ldots 2 \cdot \overline{AG} = \overline{MG} + \overline{mG}$$

und nach der Erkl. 611:

$$\beta) \ldots \overline{AG} = \overline{MG}$$

ist, so muss nach diesen Gleichungen α) und β) auch:

$$\gamma) \ldots \overline{AG} = \overline{mG}$$

sein, d. h. das Viereck $AMCm$ muss nach der Erkl. 612 ein Quadrat sein. Hieraus ergibt sich, dass auch der Centriewinkel AmC oder:

c) ... $\beta = 90^0$

und dass:

d) ... $r = R$ (siehe Erkl. 613)

sein muss.

Aus den Gleichungen a) bis d) folgt:

$$F = \frac{R^2 \cdot 90 + R^2 \cdot 90}{360} \cdot \pi - \frac{R^2 \cdot \sin 90^0 + R^2 \sin 90^0}{2}$$

oder, nach gehöriger Reduktion und in Rücksicht der Erkl. 99:

$$\text{e)} \ldots F = \frac{R^2 + R^2}{4} \cdot \pi - \frac{R^2 + R^2}{2}$$

Setzt man nach der aus dem rechtwinkligen Dreieck AMC sich ergebenden Relation:

$$\overline{MA}^2 + \overline{MC}^2 = \overline{AC}^2$$

für:

$$\text{f)} \ldots R^2 + R^2 = s^2$$

so erhält man für den gesuchten Inhalt:

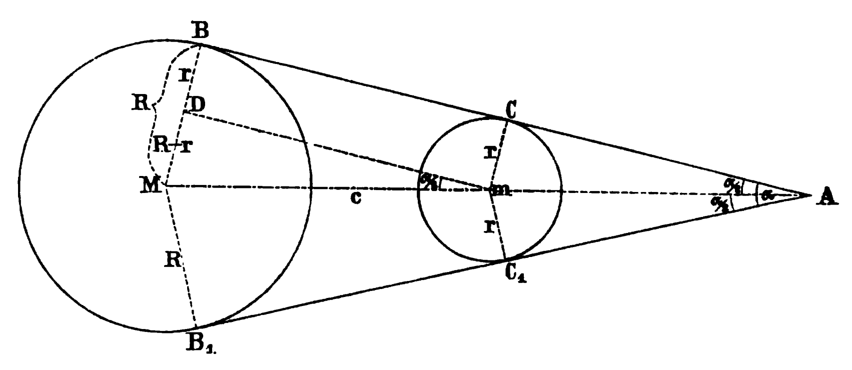
$$F = \frac{s^2}{4} \cdot \pi - \frac{s^2}{2}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots F = \frac{s^2}{4}(\pi - 2)$$

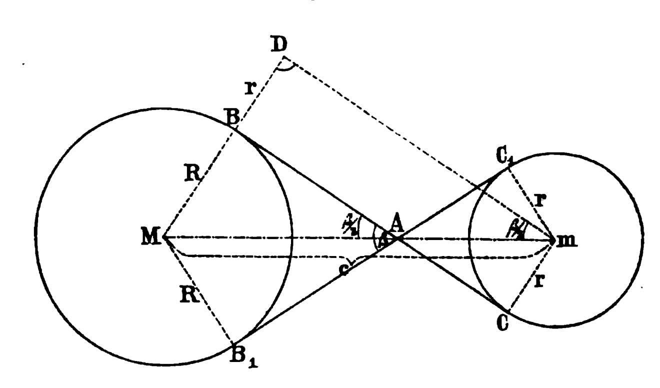
nach welcher allgemeinen Gleichung man in Rücksicht eines für s gegebenen Zahlenwerts den gesuchten Inhalt F berechnen kann.

Figur 393.



Aufgabe 1041. Die Radien R und r zweier Kreise sind bezw. 20,36 und 15,08 dm, die Centrallinie beider Kreise misst $c =$ 40,8 dm; welchen Winkel bilden die beiden äusseren, an diese Kreise gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten miteinander und welchen Winkel bilden die beiden inneren, an diese Kreise gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten miteinander?

Figur 394.



Erkl. 614. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„An zwei ganz auseinanderliegende Kreise sind vier gemeinschaftliche Tangenten möglich; zwei derselben schneiden die Centrallinie, die beiden andern schneiden dieselbe nicht (bezw. schneiden die Verlängerungen der Centrallinie, wenn die Radien beider Kreise ungleich sind)."

Die beiden ersten heissen die inneren, die beiden letzten heissen die äusseren gemeinschaftlichen Tangenten.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Andeutung. Sind, siehe Figur 393, BC und B_1C_1 die an die gegebenen Kreise M und m gezogenen äusseren gemeinschaftlichen Tangenten (siehe Erkl. 614), und man verlängert dieselben bis zu ihrem Durchschnitt A, so muss nach der Erkl. 615 dieser Durchschnitt A in der Verlängerung der Centrallinie Mm beider Kreise liegen. Zieht man die Radien MB, MB_1, mC und mC_1 nach den Berührungspunkten, so erhält man die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MBA und MB_1A, bezw. die Dreiecke mCA und mC_1A. Hieraus ergibt sich, dass der zu berechnende Winkel α durch die Centrallinie MmA halbiert wird, wie in der Figur angedeutet. Zieht man ferner noch mD parallel AB, so erhält man das rechtwinklige Dreieck mDM. In demselben ist:

$$\sphericalangle MmD = \sphericalangle MAB \text{ oder } = \frac{\alpha}{2}$$

$$\overline{Mm} = c$$

$$\overline{MD} = \overline{MB} - \overline{MD} \text{ oder } = \overline{MB} - \overline{mC} \text{ oder } = R - r$$

Aus diesem Dreieck ergibt sich sonach:

$$\text{A)} \quad \ldots \quad \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{c}$$

nach welcher Gleichung man aus R, r und c den Winkel α berechnen kann.

In ganz analoger Weise kann man in Rücksicht der Erkl. 615 den Winkel β, siehe

Figur 394, bestimmen, unter welchem sich die inneren gemeinschaftlichen Tangenten BC und B_1C_1 beider Kreise schneiden. Zieht man mD parallel BC und verlängert MB, so erhält man das bei D rechtwinklige Dreieck MDm. In demselben ist:

$$\sphericalangle MmD = \sphericalangle MAB \text{ oder } = \frac{\beta}{2}$$

$$\overline{Mm} = c$$

und $\overline{MD} = \overline{MB} + \overline{BD}$ oder $= \overline{MB} + \overline{mC}$
oder $= R + r$

Aus diesem Dreieck ergibt sich sonach:

$$\text{B)} \ldots \sin\frac{\beta}{2} = \frac{R+r}{c}$$

nach welcher Gleichung man aus R, r und c den Winkel β berechnen kann.

Erkl. 615. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Der Durchschnittspunkt je zweier inneren oder je zweier äusseren an zwei ganz auseinanderliegenden Kreisen gezogenen gemeinschaftlichen Tangenten liegt auf der Centrallinie, bezw. auf der Verlängerung derselben."

Aufgabe 1042. Die Centrallinie zweier Kreise ist $c = 210,8$ dm; die inneren Tangenten an diesen beiden Kreisen schneiden sich unter dem Winkel $\beta = 110^0\,40'$ und die äusseren Tangenten schneiden sich unter dem Winkel $\alpha = 40^0\,10'$. Man soll die Radien beider Kreise berechnen.

Andeutung. Nach der Andeutung der vorigen Aufgabe 1041 bestehen zwischen den Winkeln α und β, den Radien R und r und der Centrallinie c der beiden Kreise die Relationen:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R-r}{c}$$

und

$$\sin\frac{\beta}{2} = \frac{R+r}{c}$$

aus denselben erhält man bezw.:

$$\text{a)} \ldots R - r = c\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$$

und

$$\text{b)} \ldots R + r = c\cdot\sin\frac{\beta}{2}$$

Durch Addition bezw. durch Subtraktion dieser beiden Gleichungen erhält man bezw.:

$$\text{c)} \ldots 2R = c\cdot\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\right)$$

und

$$\text{d)} \ldots 2r = c\cdot\left(\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}\right)$$

Bringt man in bezug auf $\sin\frac{\alpha}{2} + \sin\frac{\beta}{2}$ und $\sin\frac{\beta}{2} - \sin\frac{\alpha}{2}$ die in den Erkl. 115 und 116 angeführten goniometr. Formeln in Anwendung, so erhält man bezw.:

$$\text{A)} \ldots R = c\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{4}$$

und

$$\text{B)} \ldots r = c\cdot\sin\frac{\beta-\alpha}{4}\cdot\cos\frac{\beta+\alpha}{4}$$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für c, α und β gegebenen Zahlenwerte die Radien R und r berechnen kann.

Hülfsrechnung 2.

$$\frac{53^0\,7'\,48''}{360^0} = \frac{53\cdot 60' + 7' + \frac{48'}{60}}{360\cdot 60'}$$

$$= \frac{3180' + 7' + \frac{4'}{5}}{21600}$$

$$= \frac{3187\,\frac{4}{5}}{21600}$$

$$= \frac{15939}{5\cdot 21600}$$

Hülfsrechnung 3.

Aus:

$$\sin\gamma = \frac{3}{5}$$

erhält man γ wie folgt:

$$\log\sin\gamma = \log 3 - \log 5$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} & (+10) \qquad (-10) \\ \log 3 = & 0{,}4771213 \\ -\log 5 = & -\,0{,}6989700 \\ \hline \log\sin\gamma = & 9{,}7781513 - 10 \\ & 1467 \\ \hline & 46 \\ & 56 \end{array}$$

mithin ist:

$$\gamma = 36^0\,52'\,12''$$

Hülfsrechnung 4.

$$\frac{36^0\,52'\,12''}{360^0} = \frac{36\cdot 60' + 52' + \frac{12'}{60}}{360\cdot 60'}$$

$$= \frac{2160' + 52' + \frac{1'}{5}}{21600'}$$

$$= \frac{2212\,\frac{1}{5}}{21600}$$

$$= \frac{11061}{5\cdot 21600}$$

Hülfsrechnung 5.

Den Wert für:

$$\pi\cdot\frac{38061}{21600}$$

kann man wie folgt berechnen:

$$\log\pi\cdot\frac{38061}{21600} = \log\pi + \log 38061 - \log 21600$$

Nun ist:

$$\begin{array}{rl} \log\pi = & 0{,}4971499 \\ +\log 38061 = & +\,4{,}5804802 \\ \hline & 5{,}0776301 \\ -\log 21600 = & -\,4{,}3344538 \\ \hline \log\pi\cdot\frac{38061}{21600} = & 0{,}7431763 \\ & 1725 \\ \hline & 38 \\ & 39{,}5 \end{array}$$

mithin:

$$\pi\cdot\frac{38061}{21600} = 5{,}53575$$

Für den Inhalt des Sektors bAC hat man nach der Erkl. 486:

$$\text{Sektor } bAC = \frac{\beta^0}{360^0}\cdot r_{,,}^2\pi$$

oder, da sich aus dem rechtwinkligen Dreieck abc:

$$\sin\beta = \frac{\overline{ac}}{\overline{bc}}$$

oder:

$$\sin\beta = \frac{4}{5}$$

mithin nach Hülfsrechnung 1:

$$\beta = 53^0\,7'\,48''$$

ergibt:

$$\text{Sektor } bAC = \frac{53^0\,7'\,48''}{360^0}\cdot r_{,,}^2\cdot\pi$$

oder in Rücksicht der Hülfsrechnung 2 und des für $r_{,,}$ gegebenen Werts:

$$\text{d) . . . Sektor } bAC = \frac{15939\cdot 2^2\cdot\pi}{5\cdot 21600}$$

Für den Inhalt des Sektors cAB hat man schliesslich nach der Erkl. 486:

$$\text{Sektor } cAB = \frac{\gamma^0}{360^0}\cdot r_{,,,}^2\cdot\pi$$

oder, da sich aus dem rechtwinkligen Dreieck abc:

$$\sin\gamma = \frac{\overline{ab}}{\overline{bc}}$$

oder:

$$\sin\gamma = \frac{3}{5}$$

mithin nach der Hülfsrechnung 3:

$$\gamma = 36^0\,52'\,12''$$

ergibt:

$$\text{Sektor } cAB = \frac{36^0\,52'\,12''}{360^0}\cdot r_{,,,}^2\cdot\pi$$

oder in Rücksicht der Hülfsrechnung 4 und des für $r_{,,,}$ gegebenen Zahlenwerts:

$$\text{e) . . . Sektor } cAB = \frac{11061\cdot 3^2\cdot\pi}{5\cdot 21600}$$

Aus den Gleichungen a) bis e) folgt:

$$F = 6 - \left[\frac{\pi}{4} + \frac{15939\cdot 2^2\cdot\pi}{5\cdot 21600} + \frac{11061\cdot 3^2\cdot\pi}{5\cdot 21600}\right]$$

$$= 6 - \pi\left[\frac{1}{4} + \frac{15939\cdot 4 + 11061\cdot 9}{5\cdot 21600}\right]$$

$$= 6 - \pi\left[\frac{1}{4} + \frac{63756 + 99549}{5\cdot 21600}\right]$$

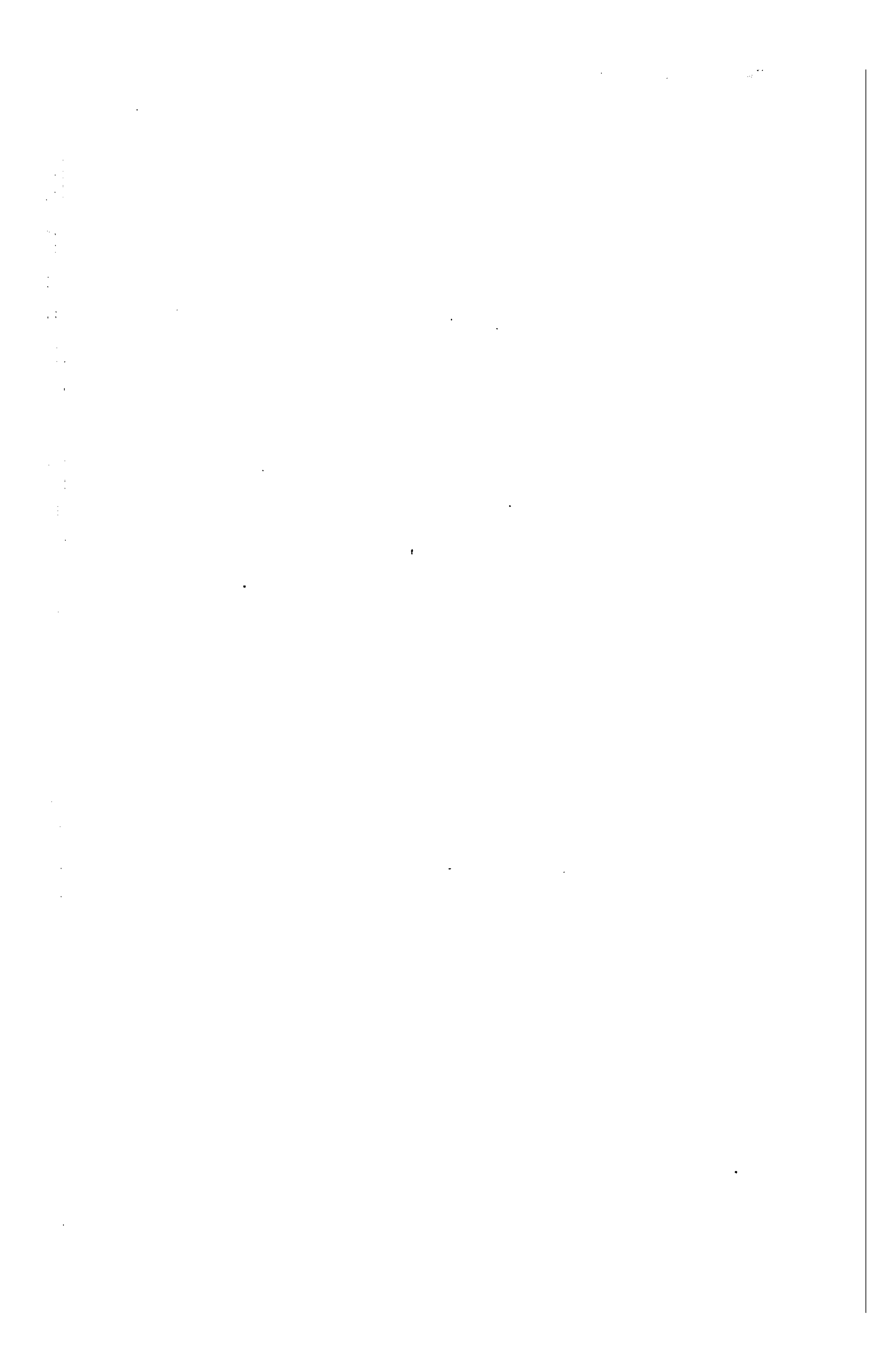
$$= 6 - \pi\cdot\left(\frac{1}{4} + \frac{163305}{5\cdot 21600}\right)$$

$$= 6 - \pi\left(\frac{1}{4} + \frac{32661}{21600}\right)$$

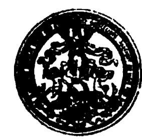
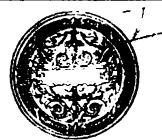
$$= 6 - \pi\cdot\frac{5400 + 32661}{21600}$$

$$= 6 - \pi\cdot\frac{38061}{21600}$$

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.



345. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 344. — Seite 737—752. Mit 18 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von
Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 344. — Seite 737—752. Mit 18 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben über den Kreis in Verbindung mit einem oder zwei anderen Kreisen, Fortsetzung. — Trigonometrische Aufgaben aus der angewandten Mathematik. Aufgaben aus der praktischen Geometrie (dem Feldmessen). — Aufgaben über die Berechnung der horizontalen Entfernung zweier Punkte, aus horizontal gemessenen Bestimmungsstücken. — Aufgaben über die Berechnung der Entfernung zweier Punkte aus gemessenen Bestimmungsstücken, welche mit jenen Punkten in einer und derselben Ebene liegen.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.


Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem kein ähnliches zur Seite steht, erscheint monatlich in 3–4 Heften zu dem billigen Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens etc. etc. und zwar in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen nebst Angabe und Entwickelung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten etc., so dass die Lösung Jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein Anhang von ungelösten Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die Lösungen hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen, etc.

Die Schüler, Studierenden und Kandidaten der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum unfehlbaren Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber auch die überaus grosse Fruchtbarkeit der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem Lehrer soll mit dieser Aufgabensammlung eine kräftige Stütze für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des praktischen Teiles der mathematischen Disciplinen — zum Auflösen von Aufgaben — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, hiermit aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende Aufgaben zu lösen, die gehabten Regeln, Formeln, Sätze etc. anzuwenden und praktisch zu verwerten. Lust, Liebe und Verständnis für den Schul-Unterricht wird dadurch erhalten und belebt werden.

Den Ingenieuren, Architekten, Technikern und Fachgenossen aller Art, Militärs etc. etc. soll diese Sammlung zur Auffrischung der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen einem toten Kapitale lebendige Kraft verleihen und somit den Antrieb zu weiteren praktischen Verwertungen und weiteren Forschungen geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser Dr. Kleyer, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Nach Hülfsrechnung 5 erhält man hieraus:

$$F = 6 - 5{,}53575$$

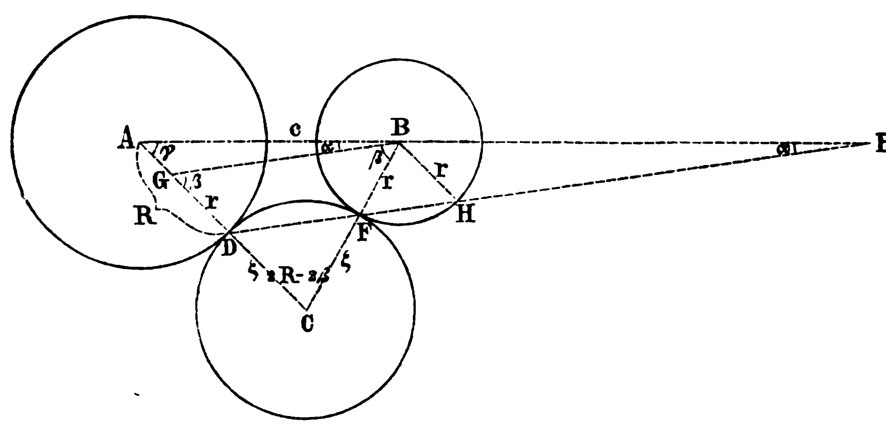
Der gesuchte Inhalt F ist also:

$$F = 0{,}46425 \text{ qm}$$

Aufgabe 1046. Welche Winkel bilden die Centrallinien dreier sich von aussen berührender Kreise miteinander, wenn die Radien dieser drei Kreise bezw. $R = 48$, $r = 36$ und $\varrho = 42$ dm messen?

Andeutung. Man kennt von dem durch die drei Mittelpunkte der Kreise bestimmten Dreieck die drei Seiten; dieselben sind nach der Erkl. 613 bezw. $= R + r$, $R + \varrho$ und $r + \varrho$. Man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt, aus diesen drei Seiten die Winkel dieses Dreiecks, d. s. die gesuchten Winkel, welche die Centrallinien jener Kreise miteinander bilden, berechnen.

Figur 397.



Aufgabe 1047. Die Centrallinie zweier Kreise mit den Radien $R = 8{,}45$ und $r = 5{,}36$ m misst $c = 20{,}6$ m. Beide Kreise werden von aussen von einem dritten Kreis berührt, dessen Radius $\varrho = 6{,}4$ m misst. Wie gross ist der Winkel, welchen die Verbindungslinie der Berührungspunkte jener beiden Kreise und diesem dritten Kreis mit der Centrallinie jener beiden Kreise bildet.

Erkl. 618. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Zieht man in zwei Kreisen in gleichem (oder entgegengesetztem) Sinn parallele Radien, und durch die Endpunkte je zweier solcher zusammengehöriger Radien Gerade, so schneiden sich diese Geraden in einem und demselben Punkt der Centralen jener zwei Kreise."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über die Planimetrie handeln.

Andeutung. Sind, siehe Figur 397, die Kreise um A und B die gegebenen Kreise, welche von dem dritten Kreis um C in D und F berührt werden, so ist gemäss der Aufgabe $\sphericalangle DPA$ oder α der gesuchte Winkel.

Zieht man noch $BG \parallel PD$, so ist $\sphericalangle GBA$ ebenfalls $= \alpha$ und diesen Winkel kann man wie folgt berechnen:

Das Dreieck BGC ist ein **gleichschenkliges Dreieck**, indem nach einer Folgerung des in der Erkl. 618 ausgesprochenen planimetrischen Lehrsatzes $GD \parallel BH$, also ebenfalls $= r$ ist.

Bezeichnet man einen der Basiswinkel, wie in der Figur angedeutet, mit β, so ist der Winkel $ACB = 2R - 2\beta$.

Diesen Winkel $2R-2\beta$, ebenso den Winkel γ des Dreiecks ABC kann man aus den drei Seiten $AB\,(=c)$, $BC\,(=\varrho-\cdot$ und $AC\,(=R+\varrho)$ berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aus dem Dreieck ABC ergibt sich ferner für α:

$$\alpha = 2R-(2R-2\beta)-\gamma-\beta$$

oder:

$$\alpha = 2R-2R+2\beta-\gamma-\beta$$

mithin:

A) . . . $\alpha = \beta-\gamma$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für β und γ berechneten Werte, den gesuchten Winkel α bestimmen kann.

Aufgabe 1048. Die Radien R und r zweier Kreise messen bezw. 10,4 und 7,42 m und die Centrallinie c derselben misst 25,08 m. Auf dem Kreis mit dem Radius R ist ein Punkt D so gegeben, dass der nach diesem Punkt gezogene Radius dieses Kreises mit der Centrallinie c den Winkel $\gamma = 42^0\,40'\,10''$ bildet.

Wie gross sind die Radien der Kreise, welche jene beiden Kreise berühren und zwar den einen in jenem Punkt D?

Andeutung. In dem Dreieck ABC, siehe Figur 397 und die Erkl. 618, ist die Seite $\overline{AB}=c$, die Seite $\overline{BC}=\varrho+r$ und die Seite $AC = R+\varrho$. Zwischen diesen Seiten und dem Winkel γ besteht nach dem Projektionssatz die Relation:

$$(\varrho+r)^2 = (R+\varrho)^2+c^2-2\,(R+\varrho)\cdot c\cdot\cos\cdot$$

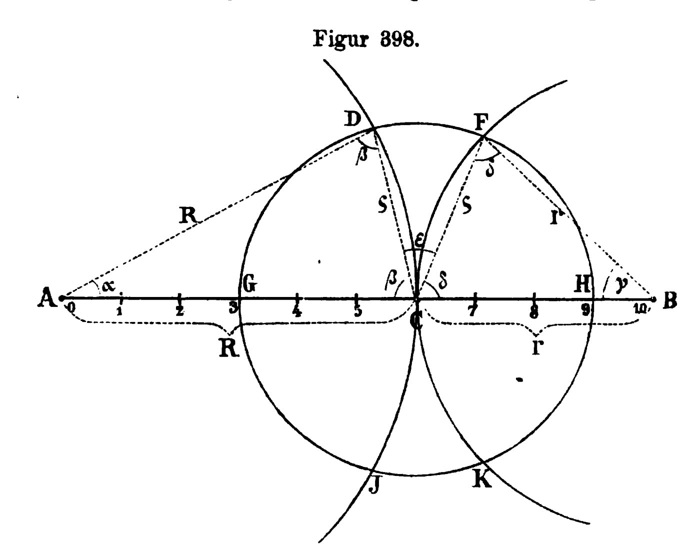
und aus dieser Gleichung, welche nur den unbekannten Radius ϱ enthält, kann man denselben berechnen. Man erhält für denselben vier verschiedene Werte. (Ueber die geometrische Bedeutung dieser **vier** verschiedenen Werte siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.

Aufgabe 1049. Wenn die Endpunkte einer in zehn gleiche Teile geteilten Strecke Mittelpunkte von Kreisen sind, die sich im sechsten Teilpunkt jener Strecke berühren und dieser der Mittelpunkt eines dritten Kreises ist, welcher $^3/_{10}$ jener Strecke zum Radius hat, wie gross sind die im Winkelmass ausgedrückten Bogenstücke der drei Kreise, welche zwischen je zwei ihrer Durchschnittspunkte liegen.

Andeutung. Gemäss der Aufgabe sind die drei Radien R, r und ϱ der Kreise um A, B und C, siehe Figur 398, bekannt, indem $R=6$, $r=4$ und $\varrho=3$ Längeneinheiten ist.

Wie in der Andeutung zur Aufgabe 800 gezeigt, kann man, siehe Fig. 398, aus R und . bezw. aus r und ϱ leicht die Centriewinkel und γ, welche das Mass der zu den Sehnen

Figur 398.



CD und CF gehörigen Bogen sind, bestimmen. Sind α und γ bestimmt, so kann man mittels der Relationen:

$$\beta = \frac{2R - \alpha}{2}$$

und $$\delta = \frac{2R - \gamma}{2}$$

die Centriewinkel β und δ, welche das Mass der Bogen DG und FH sind, berechnen, und dann kann man mittels der Relation:

$$\varepsilon = 2R - (\beta + \delta)$$

den Centriewinkel ε, welcher das Mass des Bogens DF ist, bestimmen.

Anmerkung 60. Weitere trigonometrische Uebungsaufgaben sind in dem Teil dieser Encyklopädie enthalten, welcher über: „Konstruktionsaufgaben, gelöst durch trigonometrische Analysis" handelt.

Trigonometrische Aufgaben aus der angewandten Mathematik.

Anmerkung 61. Die in nachstehenden Abschnitten vorgeführten trigonometrischen Aufgaben aus der angewandten Mathematik haben den Zweck, dem Studierenden zu zeigen, wie die goniometrischen und trigonometrischen Formeln und Sätze zur Lösung wichtiger Probleme aus anderen, besonders aus den praktischen Wissenschaften benutzt werden; hierdurch soll zugleich der Studierende auf die unendliche Wichtigkeit, welche die Trigonometrie infolge ihrer vielseitigen Anwendung in anderen Wissenschaften hat, aufmerksam gemacht werden. — Bemerkt sei hierbei, dass mit den nachstehenden Aufgaben die mannigfaltigen Probleme, welche mittels Anwendung trigonometrischer Lehren gelöst werden können, und welche in den Wissenschaften vorkommen, denen jene Aufgaben entnommen sind, in keiner Weise erschöpft sind, noch erschöpft werden sollen (solches findet in den einzelnen Teilen der Encyklopädie statt, welche speziell über diese Wissenschaften handeln); es sollen, wie oben erwähnt, nur einige Anwendungen der trigonometrischen Lehren vorgeführt werden.

Anmerkung 62. Diejenigen der in nachstehenden Abschnitten enthaltenen Aufgaben, welche mittels der auf das rechtwinklige oder das gleichschenklige Dreieck Bezug habenden trig. Sätze gelöst werden können, sind mit einem Sternchen (*) versehen; die Auflösung dieser Aufgaben kann schon nach dem Studium des Abschnitts 4), bezw. des Abschnitts 8) dieses Lehrbuchs vorgenommen werden.

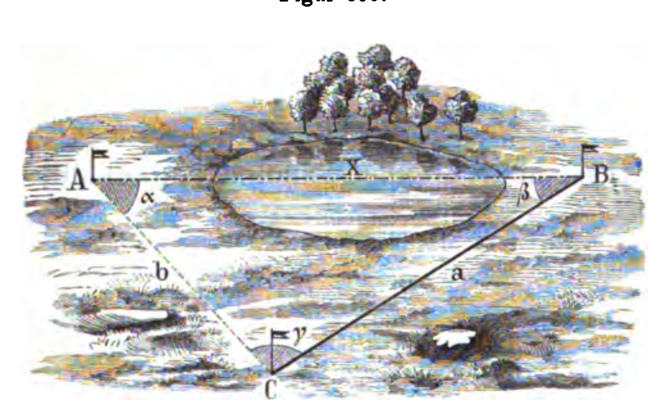
Anmerkung 63. Die in nachstehendem enthaltenen Erklärungen, die sich ihrem Inhalt nach auf andere Wissenschaften, wie z. B. auf die Geodäsie, die mathematische Geographie, die sphärische Astronomie, auf Zweige der Physik und der Technik beziehen, sollen keineswegs den Zweck haben, diese Wissenschaften bis in ihre Einzelheiten zu erörtern und zu lehren (solches geschieht in den Teilen der Encyklopädie, welche speziell über jene Wissenschaften handeln), sondern sie sollen nur dazu dienen, solche Begriffe aus jenen Wissenschaften, auf welche in den Aufgaben Bezug genommen ist, soweit zu erklären, dass der Studierende den allgemeinen Zweck der Aufgaben möglichst erkennen und die Aufgaben selbst auch verstehen kann.

1). Aufgaben aus der praktischen Geometrie (dem Feldmessen).

a) Aufgaben über die Berechnung der horizontalen Entfernung zweier Punkte aus horizontal gemessenen Bestimmungsstücken.

Aufgabe 1050. Zwischen zwei in ziemlich ebenem Terrain liegenden Punkten A und B befindet sich ein Teich. Das Terrain ist offen, d. h. es ist so beschaffen, dass man von jedem der beiden Punkte nach dem andern sehen kann, dass man ferner einen dritten Punkt wählen kann, von welchem aus man nach jenen Punkten sehen und nach einem derselben messen kann. Man soll die horizontale Entfernung der beiden Punkte A und B bestimmen.

Figur 399.



Erkl. 619. Die Bestimmung der Entfernung zweier Punkte auf dem Felde kann auf zweierlei Weise geschehen, nämlich:

a) unmittelbar, d. h. durch direkte Messung mittels Anwendung der Längenmessapparate, der sog. Längenmesser (siehe die Erkl. 620 und 622).

und

b) mittelbar, durch Berechnung (siehe Erkl. 623).

Erkl. 620. Bei der unmittelbaren oder der direkten Messung der Entfernung zweier Punkte ist es erforderlich, dass man von dem einen Punkt nach dem andern sehen oder visieren kann (siehe Erkl. 621), und dass das Terrain (das Gelände) so beschaffen ist, dass die direkte Messung auch mittels Längenmesser (siehe Erkl. 622) möglich ist, d. h. dass das zwischen jenen beiden Punkten liegende Terrain zugänglich und ziemlich eben ist.

Auflösung. In Figur 399 seien A und B die Punkte, zwischen welchen sich ein Teich befindet und deren horizontale Entfernung x bestimmt werden soll (siehe die Erkl. 619 bis 623). Zu diesem Zweck wähle man in dem Terrain und zwar ausserhalb der Linie AB einen dritten Punkt C so, dass man von demselben nach den Punkten A und B sehen und nach einem der Punkte, z. B. nach dem Punkt B auch messen kann (siehe Erkl. 624). Stelle dann in dem Punkt C ein Winkelmessinstrument auf und messe den Horizontalwinkel γ; dann messe man, von C ausgehend, die horizontale Entfernung a der Punkte C und B; stelle hierauf in dem Punkt B das Winkelmessinstrument auf und messe den Horizontalwinkel β (siehe die Erkl. 625 bis 631). Nach dieser Messung kennt man von dem Dreieck ABC die Seite a und die derselben anliegenden Winkel β und γ.

Wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, erhält man aus diesem Dreieck für die gesuchte horizontale Entfernung x allgemein:

$$\text{A)} \quad \ldots \quad x = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$$

Nach welcher Gleichung man aus den gemessenen Stücken a, β und γ die gesuchte Entfernung x berechnen kann. (Siehe die folgende Aufgabe.)

Erkl. 621. Damit man bestimmte Punkte auf dem Felde deutlich sehen und einvisieren, also nach denselben messen kann, bedient man sich sogenannter Signale. Diese Signale bestehen bei kleineren Messungen auf offenem Felde in geraden Stäben, den sogenannten Fluchtstäben oder Messfahnen.

Bei grösseren und ausgedehnten Messungen wählt man zum Einvisieren als Signale: Turmspitzen, Mauerkanten, Bäume, oder hoch aufgebaute sogenannte Pyramidensignale. Bei sehr grossen Messungen benutzt man auch Lichtsignale, Heliotrope, ja selbst den Schall von Trompeten in Wäldern etc. bei solchen Messungen, bei welchen es allerdings auf besondere Genauigkeit nicht ankommt (siehe Anmerk. 63).

Erkl 622. Zur unmittelbaren Messung einer geraden Linie auf dem Felde bedient man sich, wenn keine sehr grosse Genauigkeit gefordert wird, oder wenn die zu messende Linie nicht sehr lang ist, der Messstäbe, d. s. einfache Stäbe von bestimmter Länge, oder der Messketten. Bei solchen Messungen, bei welchen es auf grössere Genauigkeit ankommt, benutzt man Messlatten und Messstangen (siehe Anmerkung 63).

Erkl. 623. Das Verfahren der mittelbaren Bestimmung der Entfernung zweier Punkte auf dem Felde ist ein rein trigonometrisches; es besteht im allgemeinen darin, dass man durch passend gewählte Punkte eines oder mehrere Dreiecke herstellt, Bestimmungsstücke dieser Dreiecke durch praktische Messung mittels geeigneter Instrumente bestimmt, und hieraus durch trig. Rechnung die gesuchte Entfernung zu bestimmen sucht. (Siehe z. B. die Aufgaben 1050 bis 1062 u. a.)

Erkl. 624. Bei der Wahl von Dreieckspunkten zum Zweck praktischer Vermessungen und daran sich schliessender Berechnungen (siehe Erkl. 623) ist es in bezug auf die Genauigkeit der durch die Berechnung sich ergebenden Resultate von Vorteil, die Dreieckspunkte stets so zu wählen, dass solche Dreiecke mit sehr verschiedenen Seitenlängen, bezw. mit kleinen Winkeln vermieden werden. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über die Goniometrie, die Logarithmen und die Ausgleichungsrechnungen handeln.)

Erkl. 625. Bei der praktischen Messung der Bestimmungsstücke eines auf dem Feld durch drei Punkte bestimmten Dreiecks hat man stets darauf zu sehen, dass diese gemessenen Bestimmungsstücke auch wirklich Bestimmungsstücke des gedachten Dreiecks sind, welches durch jene drei Punkte bestimmt ist, dass also alle hierzu erforderlichen Visierlinien und gemessenen Linien in der Ebene dieses Dreiecks liegen. Solches ist praktisch nicht durchführbar, indem in Wirklichkeit kein Terrain so beschaffen ist, dass dies möglich wird, indem sich ferner bei Winkelmessungen das Auge des Beobachters

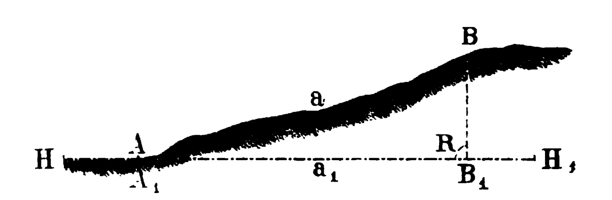
stets in verschiedenen Höhen über den Standpunkten des Beobachters und den einzuvisierenden Punkten befindet. Aus diesem Grund werden alle praktischen Messungen, welche weiteren trigonometrischen Berechnungen zu Grund gelegt werden, so vorgenommen, dass sie sich auf eine Horizontalebene (bezw. auf eine Vertikalebene) beziehen (siehe Erkl. 626).

Erkl. 626. Unter einer Horizontalebene versteht man diejenige (durch das Auge des Beobachters gehende) Ebene, welche senkrecht zur Richtung der Schwerkraft, d. i. die Richtung eines frei fallenden Körpers (eines Lots) ist. Ein stillstehendes Wasser bildet mit seiner Oberfläche eine horizontale Ebene, daher der Gebrauch der Libellen oder Wasserwagen zur Bestimmung horizontaler Ebenen.

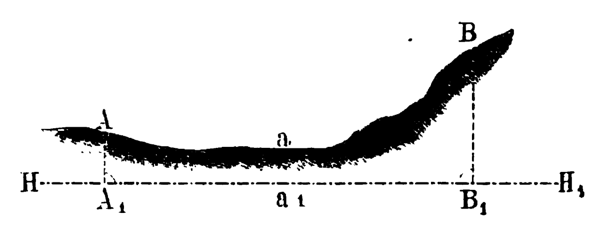
Jede Ebene, welche senkrecht zu einer Horizontalebene steht, heisst Vertikalebene.

Erkl. 627. Unter der horizontalen Entfernung zweier Punkte der Erdoberfläche versteht man die orthogonale (rechtwinklige) Projektion der beiden Punkte auf eine Horizontalebene. Die wirkliche Entfernung zweier Punkte, auf der Erdoberfläche gemessen, ist stets grösser als die horizontale Entfernung derselben. In den Terrainprofilen (siehe Erkl. 628), welche durch die Figuren 400 bis 403 dargestellt sind, sind z. B. A_1B_1 die horizontalen Projektionen oder die horizontalen Entfernungen der Terrainpunkte A und B. Die in diesen Figuren die Punkte A und B verbindenden Terrainlinien sind die wirklichen Entfernungen jener Punkte.

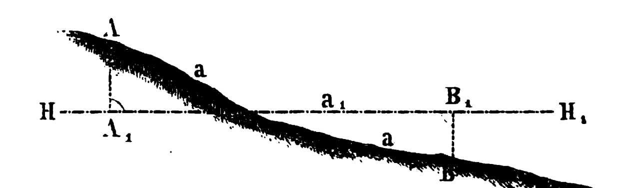
Figur 400.



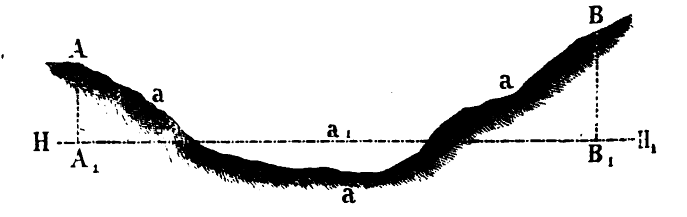
Figur 401.



Figur 402.



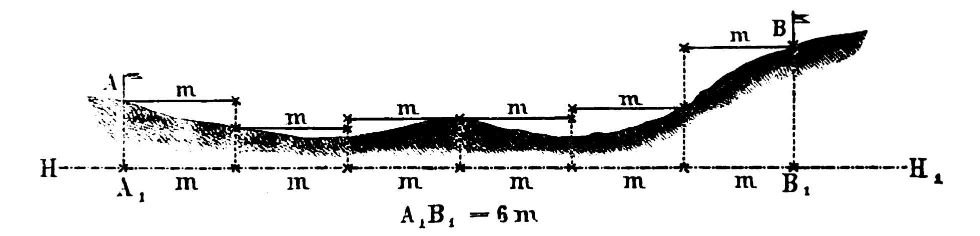
Figur 403.



Erkl. 628. Unter einem Terrainprofil versteht man im allgemeinen die Durchschnittsfigur, welche man erhält, wenn man sich durch einen Teil der Erdoberfläche eine lotrechte Ebene (d. i. eine zu einer wagerechten oder horizontalen Ebene senkrechte Ebene) gelegt denkt.

Erkl. 629. Bei der unmittelbaren Messung der horizontalen Entfernung zweier Punkte müssen die in der Erkl. 622 erwähnten Längenmesser stets so gelegt werden, dass sie horizontal sind, d. h. dass eine auf derselben befindliche Wasserwage (Libelle) einspielt. Siehe Figur 404.

Figur 404

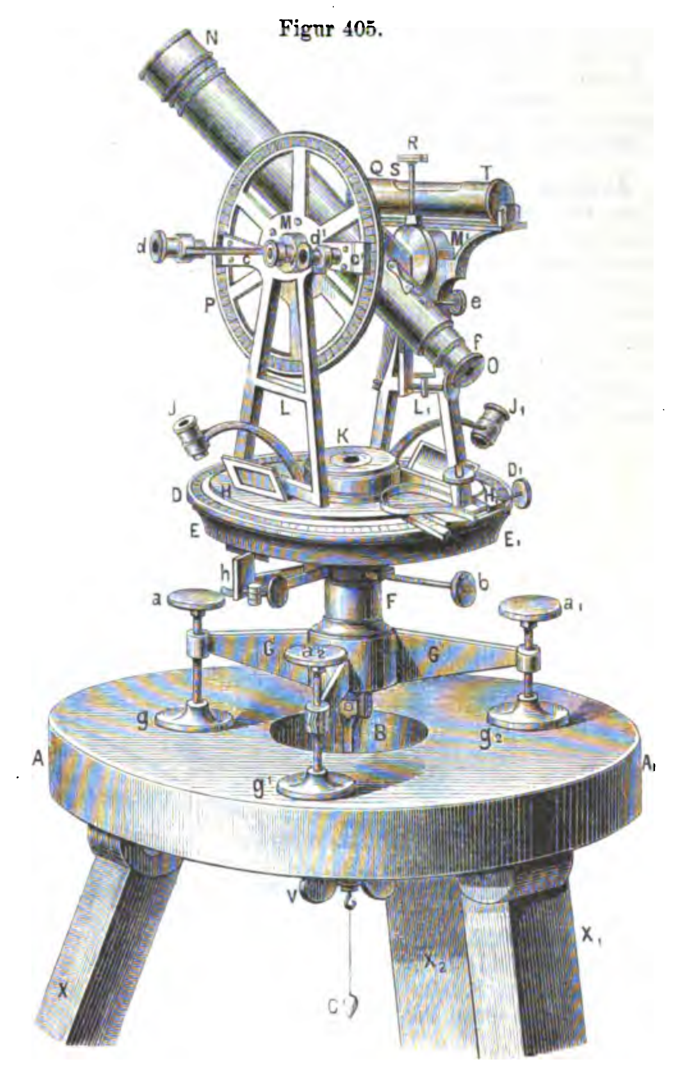


Erkl. 630. Die wichtigsten Winkelmessinstrumente, welcher man sich zur Messung von beliebigen Winkeln auf dem Felde bedient, sind: der Spiegelsextant, auch kurzweg Sextant genannt, und der Theodolit. Der Spiegelsextant dient zum Messen ganz beliebiger Winkel, d. h. solcher Winkel, deren Schenkel (d. s. die Visierlinien von einem bestimmten Punkt, dem Scheitel des Winkels, nach zwei andern Punkten) ganz beliebige Lagen haben können. Das Instrument wird bei dem Gebrauch genau lotrecht über den Scheitel des zu messenden Winkels mit der Hand gehalten.

Der Theodolit dient zum genauen Messen von Horizontal- und Vertikalwinkeln, d. s. solche Winkel, deren Schenkel in einer Horizontal- bezw. in einer Vertikalebene liegen. Dieses Instrument wird bei dem Gebrauch genau lotrecht über den Scheitel des zu messenden Winkels auf einem Stativ fest aufgestellt; mit demselben können sehr genaue Messungen vorgenommen werden.

Das in dem praktischen Vermessungswesen so wichtige Winkelmessinstrument „der Theodolit" ist durch die Figur 405 dargestellt. Dieses Instrument dient sowohl zum Messen von Horizontal-, als auch von Vertikalwinkeln. (Siehe Anmerkung 63.)

Figur 405.



Erkl. 681. Bei der Bestimmung der Entfernung AB, siehe Figur 399 und die Auflösung der Aufgabe 1050, ist es von Vorteil, auch den dritten Winkel β des Dreiecks ABC mittels des Winkelmessinstruments zu messen. Zur Kontrolle muss dann die Summe der drei gemessenen Winkel α, β und $\gamma = 180^0$ sein. Ergibt sich bei dieser Kontrolle ein grosser Fehler, so ist entweder das Winkelmessinstrument, wie man zu sagen pflegt, nicht justiert, d. h. es entspricht nicht den an dasselbe gestellten Anforderungen, oder die Messung selbst wurde fehlerhaft ausgeführt.

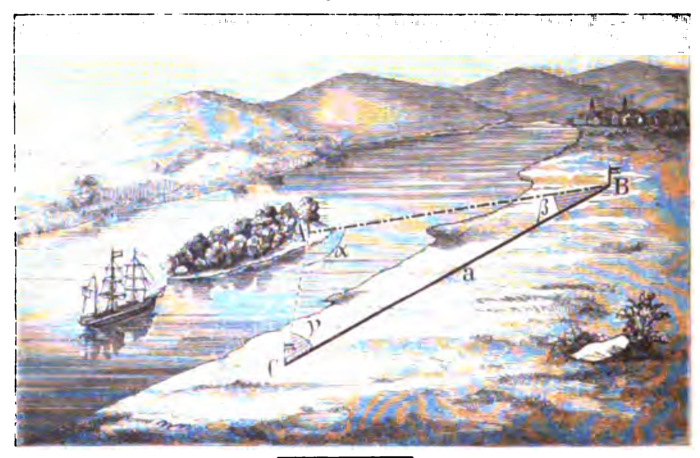
Ein kleiner Unterschied wird sich stets ergeben, da man in der Praxis keinen Winkel absolut genau messen kann. Bei allen praktischen Vermessungen muss man sich stets für die Richtigkeit der ausgeführten Messungen Kontrolle verschaffen, denn bei solchen Messungen können nur zu leicht grobe Fehler unterlaufen. Diese Kontrolle kann darin bestehen, dass man die gemachten Messungen auf verschiedene Weise wiederholt, oder dass man anderweite Bestimmungsstücke noch misst und, wie z. B. vorstehend bei einem einfachen Fall angedeutet ist, mittels Rechnung untersucht, ob die Messungen richtige Resultate ergeben haben.

Aufgabe 1051. In einem See, siehe Figur 406, befindet sich eine Insel; zur Bestimmung der Entfernung eines Punktes A dieser Insel von einem Punkt B am Ufer des Sees, wurde am Ufer desselben die Standlinie $CB = a = 200$ m horizontal abgemessen und die Horizontalwinkel $ABC = \beta = 56^0\,40'\,20''$ u. $ACB = \gamma = 32^0\,46'\,10''$ ermittelt. Wie gross ist die Entfernung jener Punkte A und B?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1050.



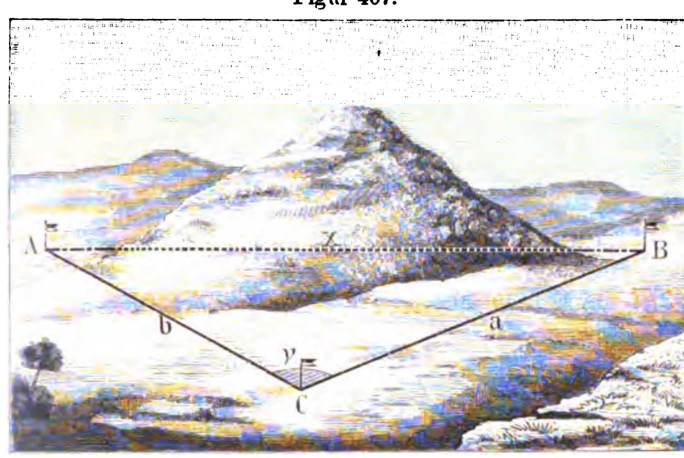
Figur 406.



Aufgabe 1052. Zwischen zwei Punkten A und B im Felde befindet sich ein erhöhter Gegenstand, z. B. ein Berg, so dass man nicht von dem einen Punkt nach dem andern

sehen kann. Das Terrain ist so beschaffen, dass man sich einen Punkt wählen kann, von welchem aus man nach jenen beiden Punkten sehen und messen kann. Man soll die horizontale Entfernung der Punkte A und B bestimmen.

Figur 407.



Auflösung. In Figur 407 seien A und B die Punkte, zwischen welchen sich ein Berg befindet und deren horizontale Entfernung x bestimmt werden soll. Zu diesem Zweck wähle man einen dritten Punkt C so, dass man von demselben nach A und B sehen und auch messen kann. Dann messe man den Horizontalwinkel γ bei C und die horizontalen Entfernungen von C nach A und von C nach B.

Nach dieser Messung kennt man von dem Dreieck ABC die Seiten a und b, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel γ.

Wie in Auflösung 1 der Aufgabe 118 gezeigt, erhält man hieraus für die gesuchte Seite $AB (= x)$:

A) . . . $x = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

nach welcher Gleichung man aus den gemessenen Stücken a, b und γ die gesuchte Entfernung x berechnen kann.

Man kann zur Berechnung der gesuchten Entfernung x auch verfahren, wie in Auflösung 2 der Aufgabe 118 gezeigt wurde, welches Verfahren für logarithmische Rechnung bequemer ist. (Siehe die Aufg. 1053.)

Aufgabe 1053. Welchen Wert erhält man für die Entfernung der Punkte A und B, siehe Figur 407, wenn, wie in voriger Auflösung angegeben:

$$a = 1\tfrac{1}{2}\,\text{km}$$
$$b = 0{,}86\,\text{km}$$

und

$$\gamma = 64^0\,30'\,20.5''$$

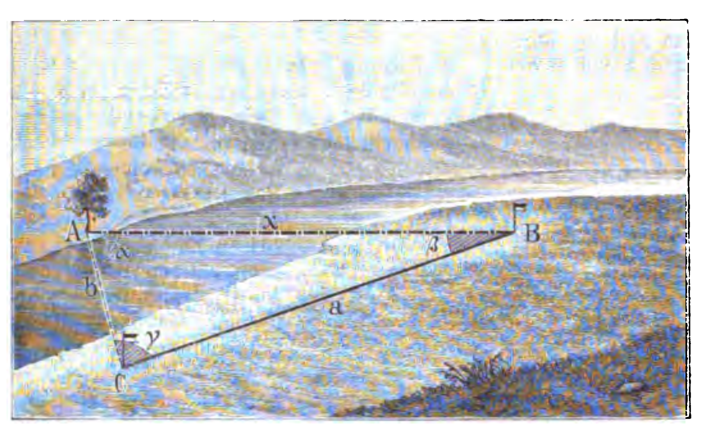
gemessen wurde?

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe 1052.

Aufgabe 1054. Von zwei in offenem Terrain befindlichen Punkten A und B ist der von B aus sichtbare Punkt A unzugänglich. Von einem dritten Punkt kann man nach jenen beiden Punkten sehen, aber nur nach dem Punkt B messen. Man soll die horizontale Entfernung der Punkte A und B bestimmen.

Auflösung. In Figur 408 seien A und B zwei Punkte, zwischen welchen sich z. B. ein Fluss befindet, der von dem auf der Seite B befindlichen Beobachter nicht überschritten werden kann.

Figur 408.



Zur Bestimmung der horizontalen Entfernung AB wähle man sich den Punkt C so, dass man von C nach A und B sehen und nach B messen kann. Dann messe man die Horizontalwinkel β und γ und die horizontale Entfernung von C nach B.

Nach dieser Messung kennt man von dem Dreieck ABC die Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ.

Wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, erhält man aus diesem Dreieck für die gesuchte Entfernung x:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta+\gamma)}$$

nach welcher Gleichung man aus den gemessenen Stücken a, β und γ die Entfernung x berechnen kann. (Siehe die Aufg. 1055.)

Aufgabe 1055. Welchen Wert erhält man für die Entfernung der Punkte A und B in Figur 408, wenn, wie in voriger Auflösung angegeben:

$$a = 850 \text{ m}$$
$$\beta = 28^0 40' 15{,}4''$$

und

$$\gamma = 64^0 0' 4{,}08''$$

gemessen wurde?

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe 1054.

---

* **Aufgabe 1056.** Zur Bestimmung der Breite eines Flusses hat man von einem Punkt des einen Ufers aus längs desselben die Standlinien $CB = a = 55$ m abgemessen und in C mittels eines Winkelspiegels einen Punkt A am jenseitigen Ufer aufgesucht, welcher in einer zu BC Senkrechten liegt; dann hat man in B den Winkel $\beta = 23^0 35' 8{,}4''$ gemessen, unter welchem jener Punkt A gegen die Standlinie a erscheint.

Man soll hieraus die Breite dieses Flusses berechnen.

Andeutung. Aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck ABC der Figur 409 ergibt sich die Relation;

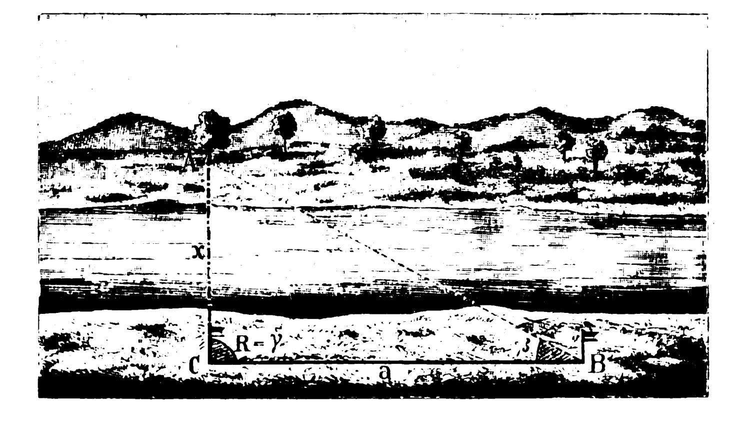
$$\operatorname{tg}\beta = \frac{x}{a}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots x = a \cdot \operatorname{tg}\beta$$

Nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und β durch Messung gefundenen Werte, die gesuchte Breite x des Flusses bei C berechnen kann.

Figur 409.



Aufgabe 1057. Zwei im Felde befindliche Punkte A und B sind unzugänglich, man kann also von dem einen nach dem andern weder sehen noch messen. Von zwei andern Punkten aus kann man jene Punkte sehen. Man soll die horizontale Entfernung jener Punkte A und B bestimmen.

Figur 410.



Auflösung. In Figur 410 seien A und B zwei unzugängliche, z. B. zwei Punkte, die jenseits eines Flusses liegen, welcher nicht überschritten werden kann.

Zur Bestimmung der horizontalen Entfernung dieser Punkte kann man wie folgt verfahren:

Man wähle diesseits zwei Punkte C und D, deren horizontale Entfernung a gemessen werden kann und von welchen man aus sowohl nach A als auch nach B sehen kann. Dann messe man die horizontale Entfernung $CD = a$, die sogenannte Standlinie, sowie die Horizontalwinkel γ_1, γ_2, δ_1 und δ_2.

Nach diesen Messungen kennt man von dem Dreieck ACD die Seite a und die derselben anliegenden Winkel $\gamma_1 + \gamma_2$ und δ_1; wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, erhält man aus diesem Dreieck für die Seite AD:

$$\text{A)} \ldots \overline{AD} = \frac{a \cdot \sin(\gamma_1 + \gamma_2)}{\sin(\gamma_1 + \gamma_2 + \delta_1)}$$

Ferner kennt man nach jenen Messungen von dem Dreieck BDC die Seite a und die derselben anliegenden Winkel γ_1 und $\delta_1 + \delta_2$;

analog wie vorhin erhält man aus diesem Dreieck für die Seite BD:

$$B) \ldots \overline{BD} = \frac{a \cdot \sin \gamma_1}{\sin(\delta_1 + \delta_2 + \gamma_1)}$$

Sind nach den Gleichungen A) und B die Seiten AD und BD des Dreiecks ABD berechnet, so kennt man von diesem Dreieck diese beiden Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel δ_2; wie in Auflösung 1 der Aufgabe 118 gezeigt, erhält man somit aus diesem Dreieck für die Seite AB desselben, d. i. die gesuchte Entfernung x:

$$C) . x = \sqrt{\overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \cdot \overline{AD} \cdot \overline{BD} \cdot \cos \delta}$$

Mittels der drei Gleichungen A) bis C kann man aus den gemessenen Stücken a, γ_1, γ_2, δ_1 und δ_2 die gesuchte Entfernung x berechnen. Man kann auch zur Berechnung der Seite AB $(= x)$ des Dreiecks ABD aus den Seiten AD, BD und dem Winkel δ_2 verfahren, wie in den Auflösungen 2 und 3 der Aufgabe 118 gezeigt wurde, welche Verfahren für logarithmische Rechnung bequemer sind.

Aufgabe 1058. Welchen Wert erhält man für die Entfernung der Punkte A und B in Figur 410, wenn, wie in voriger Auflösung angegeben:

$$a = 800 \text{ m}$$
$$\gamma_1 = 22^0\,40'\,36''$$
$$\gamma_2 = 30^0\,10'\,4{,}5''$$
$$\delta_1 = 18^0\,4'\,0{,}8''$$

und

$$\delta_2 = 46^0\,18'\,4{,}42''$$

gemessen wurde?

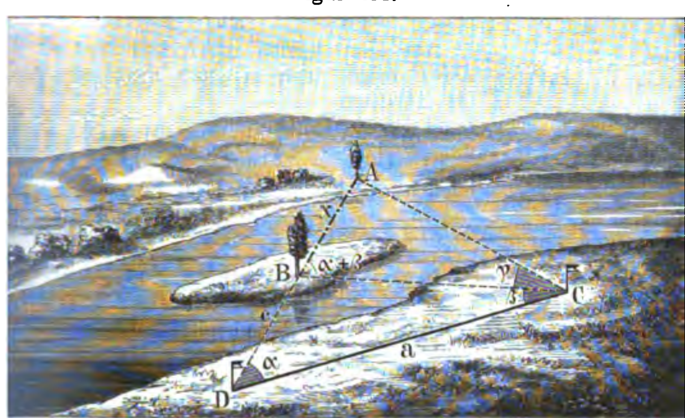
Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe 1057.

Aufgabe 1059. An dem jenseitigen Ufer eines Flusses und auf einer Insel desselben befinden sich zwei sichtbare aber unzugängliche Punkte; zur Bestimmung der Entfernung dieser Punkte A und B, siehe Figur 411, wird ein dritter Punkt D so bestimmt, dass er in der Verlängerung der durch A und B bestimmten Geraden liegt; dann wird von D ausgehend, eine Standlinie $DC = a = 350$ m abgemessen, so dass man von dem Endpunkt C derselben nach A und B sehen kann; hierauf werden die Horizontalwinkel $\alpha = 82^0\,30'\,45''$, $\beta = 49^0\,40'\,10''$ und $\gamma = 18^0\,35'\,16{,}5''$ gemessen. Man soll nach diesen Messungen die Entfernung AB berechnen.

Andeutung. In dem Dreieck BCD in Figur 411 kennt man nach den stattgehabten Messungen die Seite DC $(= a)$ und die Winkel α und β; wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, erhält man für die Seite BC dieses Dreiecks:

$$1) \ldots \overline{BC} = \frac{a \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$$

Figur 411.



Von dem Dreieck ABC kennt man nunmehr die Seite BC und die derselben anliegenden Winkel ABC und ACB; ersterer ist nach der Erkl. 113 $= \alpha + \beta$, letzterer durch Messung bestimmt $= \gamma$. Analog wie vorhin erhält man aus diesem Dreieck für die Seite AB desselben, d. i. die gesuchte Entfernung x:

$$2) \ldots x = \frac{\overline{BC} \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Aus den Gleichungen 1) und 2) folgt allgemein:

$$A) \ldots x = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha+\beta) \cdot \sin(\alpha+\beta+\gamma)}$$

Nach welcher Gleichung man die gesuchte Entfernung direkt aus den durch Messung bestimmten Stücken a, α, β und γ bestimmen kann.

Aufgabe 1060. Vier auf dem Felde befindche Punkte A, B, C u. D, s. Fig. 412, liegen ı einer geraden Linie; die horizontale Entferung der Punkte A und B beträgt $a = 250$ m, nd die der Punkte C und D beträgt $b =$ 44 m; zur Bestimmung der Entfernung der 'unkte B und C, welche direkt nicht geıessen werden konnte, wurde ein Standpunkt ' gewählt und die Horizontalwinkel $\alpha =$ 5° 40′, $\beta = 36° 20' 10''$ und $\gamma = 18° 0' 4{,}8''$ emessen, welche die von F nach jenen 'unkten gehenden Visierlinien mit einander ilden. Man soll hieraus die Entfernung der 'unkte B und C berechnen.

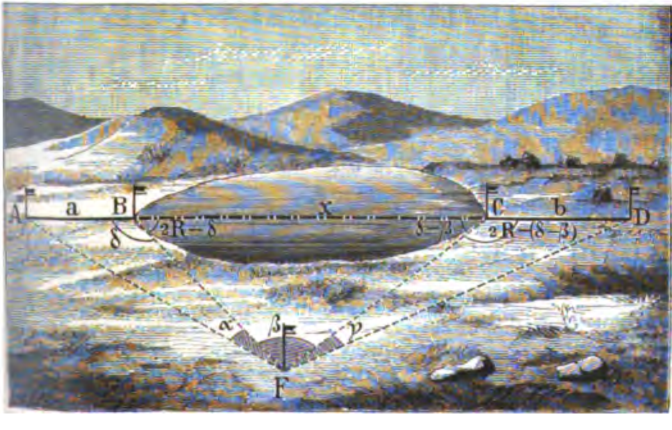
Andeutung. Aus dem Dreieck ABF der Fig. 412 ergibt sich nach der Sinusregel:

$$\overline{AF} : a = \sin\delta : \sin\alpha$$

oder:

$$a) \ldots \overline{AF} = \frac{a \cdot \sin\delta}{\sin\alpha}$$

Figur 412.



ferner ergibt sich aus dem Dreieck ACF nach der Sinusregel und in Rücksicht, dass nach der Erkl. 113:

$$\sphericalangle ABF = \sphericalangle BFC + \sphericalangle BCF$$

mithin:

$$\sphericalangle BCF = \sphericalangle ABF - \sphericalangle BFC$$

oder $= \delta - \beta$

ist, die Relation:

$$AF : (a+x) = \sin(\delta-\beta) : \sin(\alpha+\beta)$$

oder:

$$b) \ \overline{AF} = \frac{(a+x) \cdot \sin(\delta-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$1) \ldots \frac{a\cdot\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{(a+x)\cdot\sin(\delta-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$$

Aus den beiden Dreiecken DCF und DBF erhält man in ganz analoger Weise die Relation:

$$\frac{b\cdot\sin[2R-(\delta-\beta)]}{\sin\gamma} = \frac{(b+x)\cdot\sin(2R-\delta)}{\sin(\beta+\gamma)}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$2) \ldots . \frac{b\cdot\sin(\delta-\beta)}{\sin\gamma} = \frac{(b+x)\cdot\sin\delta}{\sin(\beta+\gamma)}$$

In den beiden Gleichungen 1) und 2) kommen noch die Unbekannten x und δ vor: zur Elimination von δ multipliziere man die beiden Gleichungen; man erhält alsdann:

$$\frac{a\cdot\sin\delta\cdot b\cdot\sin(\delta-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma} = \frac{(a+x)\cdot\sin(\delta-\beta)\cdot(b+x)\cdot\sin\delta}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)}$$

oder:

$$3) \ldots . \frac{a\cdot b}{\sin\alpha\cdot\sin\gamma} = \frac{(a+x)(b+x)}{\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 682:

$$A) \ldots x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{ab\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b, α, β und γ gegebenen resp. gemessenen Werte, die gesuchte Entfernung x berechnen kann. (Siehe die Erkl. 633.)

Erkl. 682. Aus der nebenstehenden Gleichung 3) erhält man x, wie folgt:

$$(a+x)\cdot(b+x) = \frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$ab+bx+ax+x^2 = \frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma}$$

$$x^2+(a+b)\cdot x = \frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} - ab$$

$$x^2+(a+b)\cdot x+\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} - ab + \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$\left(x+\frac{a+b}{2}\right)^2 = \frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{-4ab+a^2+2ab+b^2}{4}$$

$$x+\frac{a+b}{2} = \pm\sqrt{\frac{ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{a^2-2ab+b^2}{4}}$$

mithin:

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{ab\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\sin\alpha\sin\gamma} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

Erkl. 683. Zum Zweck der logarithmischen Berechnung kann man die in nebenstehender Andeutung aufgestellte allgemeine Gleichung A) wie folgt umformen:

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \sqrt{\frac{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\cdot ab\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\sin\alpha\sin\gamma} + \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$$

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\sqrt{\frac{4ab\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{(a-b)^2\sin\alpha\sin\gamma}+1}$$

Setzt man nunmehr (siehe Erkl. 140):

$$1) \ldots . \frac{4ab\sin(\alpha+\beta)\sin(\beta+\gamma)}{(a-b)^2\sin\alpha\sin\gamma} = \operatorname{tg}^2\vartheta$$

so erhält man:

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2}\sqrt{\operatorname{tg}^2\psi + 1}$$

oder in Rücksicht, dass nach der Erkl. 141:

$$\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\psi} = \frac{1}{\cos\psi}$$

ist:

$$x = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{a-b}{2\cos\psi}$$

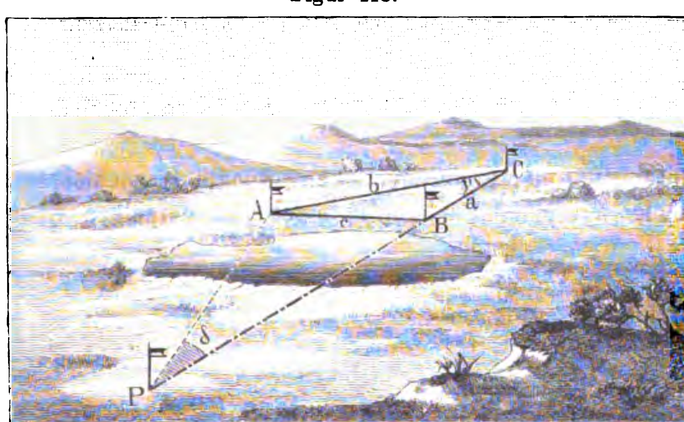
oder, da die Strecke x nicht negativ sein kann:

$$2) \ldots x = \frac{a-b}{2\cdot\cos\psi} - \frac{a+b}{2}$$

Sind für a, b, α, β und γ Zahlenwerte gegeben, so kann man nach Gleichung 1) zunächst den Hülfswinkel ψ und dann nach Gleichung 2) die Strecke x berechnen. (Siehe das Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 1061. Von einem Punkt P wird, s. Figur 413, nach den Punkten A, B und C, welche in derselben Ebene mit P liegen und deren Entfernungen von einander bezw. $AB = c = 73{,}24$ m, $BC = a = 82{,}73$ m, $CA = b = 65{,}48$ m sind, visiert; B und C erscheinen, von P aus gesehen, in gerader Linie und zwar B zwischen P und C; A dagegen erblickt man von P aus gegen B oder C unter einem Winkel $BPA = \delta = 27^0\,18'$. Wie weit ist P von B entfernt?

Figur 413.



Andeutung. Von dem Dreieck ABC, siehe Figur 413, kennt man gemäss der Aufgabe die drei Seiten a, b und c; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, den Winkel γ berechnen.

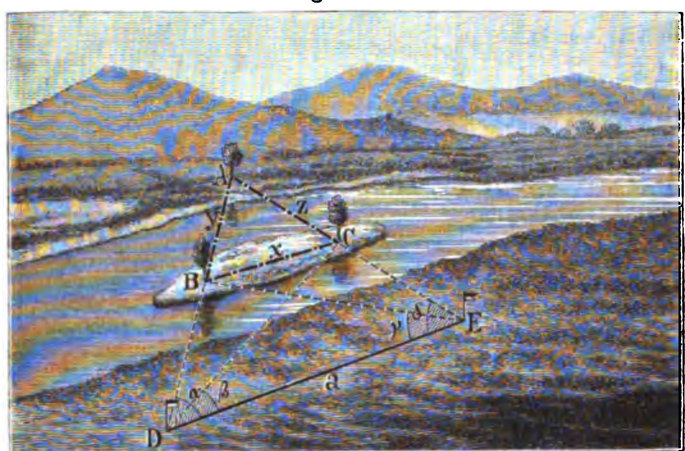
Ist γ berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACP die Seite b und die Winkel γ und δ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite PC dieses Dreiecks berechnen. Zur Bestimmung der gesuchten Entfernung PB, beachte man die Relation:

$$\overline{PB} = \overline{PC} - \overline{BC}$$

Aufgabe 1062. Zur Bestimmung der gegenseitigen Entfernung dreier unzugänglicher, aber sichtbarer Punkte A, B und C, wurde in der Verlängerung von AB über B ein dritter Punkt D, in der Verlängerung von AC über C ein vierter Punkt F so bestimmt, dass man die horizontale Entfernung der Punkte D und F messen konnte; für die-

selbe wurde $a = 320$ m gefunden. Ferner wurden die Horizontalwinkel $BDF = \alpha = 52^0 10' 24''$, $CDF = \beta = 14^0 30' 4''$, $BFD = \gamma = 22^0 2' 8''$ und $CFD = \delta = 94^0 28' 14''$ gemessen. Wie kann man aus diesen Messungen jene Entfernungen berechnen.

Figur 414.



Andeutung. In jedem der Dreiecke ADF, CDF und BDF, siehe Figur 414, kennt man eine Seite, d. i. die gemessene Standlinie $DF = a$, und die beiden anliegenden Winkel, d. s. die gemessenen Winkel α, β, γ und δ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 11. gezeigt wurde, die beiden übrigen Seiten eines jeden dieser Dreiecke berechnen.

Sind hiernach die nicht bekannten Seiten jener drei Dreiecke berechnet, so kann man die gesuchte Entfernung AB (= y) mittels der Relation:

A) . . . $y = \overline{AD} - \overline{BD}$

und die gesuchte Entfernung AC (= z) mittels der Relation:

B) . . . $z = \overline{AF} - \overline{CF}$

berechnen.

Die dritte gesuchte Entfernung ($BC = x$) kann man aus dem Dreieck BFC berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, indem man nach jenen Berechnungen von diesem Dreieck die Seiten BF und CF sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel, welcher $= \delta - \gamma$ ist, kennt.

---

b) Aufgaben über die Berechnung der Entfernung zweier Punkte aus gemessenen Bestimmungsstücken, welche mit jenen Punkten in einer und derselben Ebene liegen.

Aufgabe 1063. Von einem an einer Strasse liegenden Zollhaus führen gleichzeitig rechts und links zwei gerade Seitenwege ab, der erste unter einem Winkel α von 35^0, der zweite unter einem Winkel β von 56^0. Auf dem ersten kommt man nach einem Weg von $b = 6^2/_5$ km nach dem Orte A und auf dem zweiten nach einem Weg von $a = 4^1/_4$ km nach dem Orte B. Welche Entfernung haben die Orte A und B.

Andeutung. In dem Dreieck ABC, siehe Figur 415, kennt man nach den stattgehabten Messungen die Seiten a und b und den von denselben eingeschlossenen Winkel $\alpha + \beta$; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, die gesuchte Seite AB dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Entfernung x der Orte A und B berechnen (siehe die Erkl. 684).

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

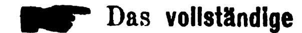
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles,** was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das **vollständige**

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

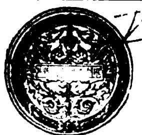
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

346. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 345. — Seite 753—768. Mit 19 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 345. — Seite 753—768. Mit 19 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der praktischen Geometrie (dem Feldmessen), Fortsetzung.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen** Preise von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen und alsdann** auch alle Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord.**, **gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen zu lösen haben, zugleich aber** auch **die überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

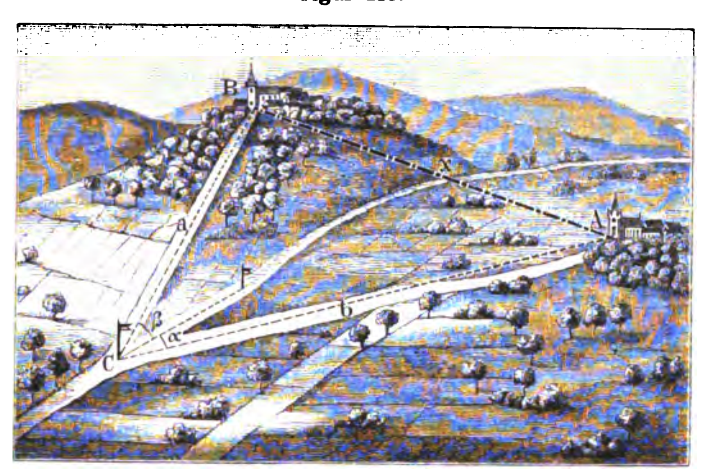
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles der mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten** eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die erhabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust**, Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden**.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militär** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

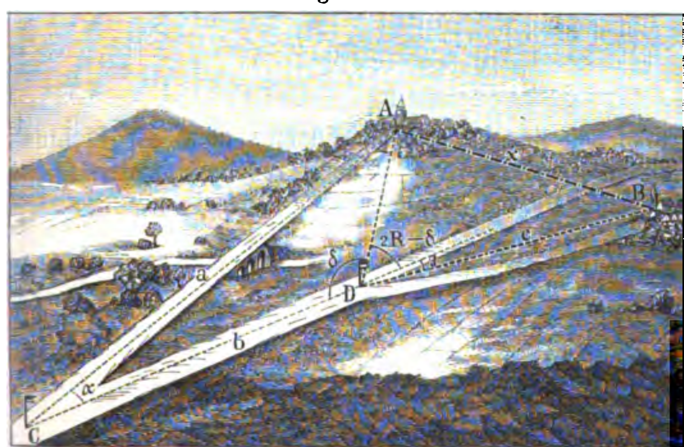
Figur 415.



Erkl. 684. Die direkte Messung von Winkeln, deren Schenkel nicht in einer horizontalen Ebene liegen, wie es bei den in den Aufgaben 1063 und 1064 erwähnten Winkeln α und β stattfinden kann, geschieht mittels des in der Erkl. 630 angeführten Spiegelsextanten.

Aufgabe 1064. Von einer Landstrasse geht links ein ziemlich gerader, 4 km langer Feldweg unter einem Winkel $\alpha = 30^0$ nach einem Ort *A* ab; $1^1/_2$ km geraden Wegs weiter geht rechts ein anderer, ebenfalls ziemlich gerader und $2^1/_2$ km langer Feldweg unter einem Winkel $\beta = 60^0$ nach einem andern Ort *B*. Welche Entfernung haben die Orte *A* und *B*.

Figur 416.



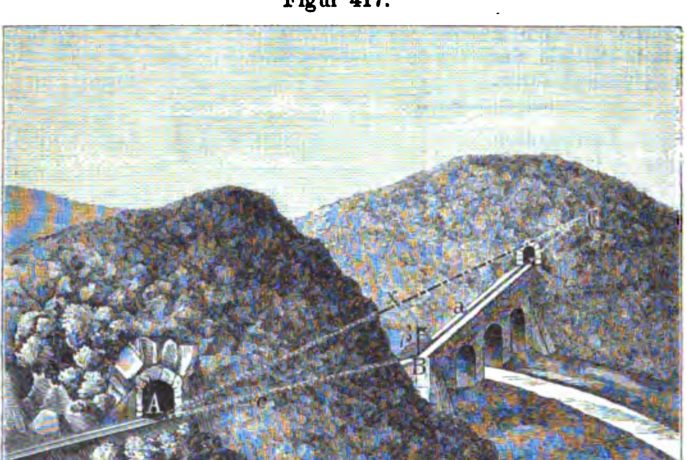
Andeutung. Ist, siehe Figur 416, *CA* der nach dem Ort *A* unter dem Winkel $\alpha = 30^0$ von der Landstrasse abgehende Weg, und man denkt sich *A* mit dem Punkt *D* der Landstrasse verbunden, von welchem aus unter dem Winkel $\beta = 60^0$ nach rechts ein zweiter Feldweg nach dem Ort *B* führt, so erhält man das Dreieck *ACD*. Von diesem Dreieck kennt man die Seiten *CA* ($= a = 4$ km) und *CD* ($= b = 1^1/_2$ km) und den von denselben eingeschlossenen Winkel $\alpha = 30^0$; wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man hieraus die Seite *AD* dieses Dreiecks, desgleichen den Winkel δ berechnen.

Nach dieser Berechnung kennt man von dem gedachten Dreieck *ABD* die Seiten *AD* und *DB* ($= c = 2^1/_2$ km) und den von

denselben eingeschlossenen Winkel, welcher $= 2R - \delta + \beta$ ist. Analog wie vorhin kann man aus diesen Stücken die Seite AB dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Entfernung x berechnen.

Aufgabe 1065. Durch einen Berg wurde ein Stollen AB von $c = 1500$ m Länge getrieben. Da wo der Stollen bei B zu Tage tritt, wurde nach einem seitwärts liegenden Berg ein zweiter Stollen eingetrieben, dessen Richtung mit der Richtung jenes ersten Stollens einen Winkel $\beta = 211^0\ 40'$ bildet. Nachdem man diesen zweiten Stollen bis zu dem Punkt C eingetrieben hat, dessen Entfernung von $B = a = 3^1/_2$ km beträgt, will man die direkte Entfernung dieses Punktes C von dem Anfang des ersten Stollens bei A wissen; wie gross ist dieselbe?

Figur 417.



Andeutung. Von dem Dreieck ABC in Figur 417 kennt man gemäss der Aufgabe die Seite AB ($= c = 1500$ m) und die Seite BC ($= a = 3^1/_2$ km oder $= 3500$ m), sowie den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel β; man kann somit aus diesem Dreieck die Seite AC, d. i. die gesuchte Entfernung x berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

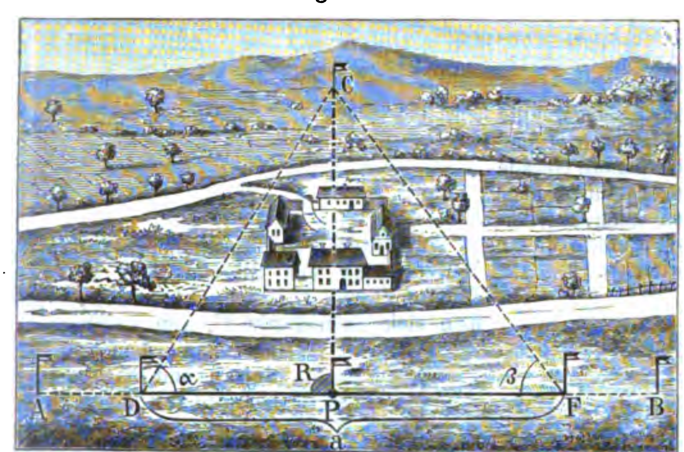
---

c) Aufgaben über die Bestimmung der Lage eines Punktes oder der Richtung einer Linie in bezug auf andere gegebene und in derselben horizontalen Ebene liegende Punkte oder Linien.

* **Aufgabe 1066.** Auf einem Feld ist eine Gerade durch zwei markierte Punkte A und B festgelegt. Auf dieser Geraden soll ein Punkt P so bestimmt werden, dass er der Fusspunkt eines Perpendikels von einem dritten Punkt C auf die Gerade AB ist. Zwischen dem Punkt C und dem Fusspunkt P des gedachten Perpendikels befindet sich ein erhöhter Gegenstand, z. B. ein Haus, welches das Sehen von C in der Richtung des gedachten Perpendikels verhindert, so dass man den Fusspunkt P, z. B. mittels eines Winkel-

spiegels (siehe Erkl. 685) direkt nicht bestimmen kann. Wie kann man die Lage des Fusspunktes P bestimmen?

Figur 418.



Erkl. 685. Zur Bestimmung bestimmter Winkel, wie z. B. der Winkel von 90°, 45° etc. benutzt man in der praktischen Geometrie bei kleineren Entfernungen besondere Winkelmessinstrumente, wie z. B. das Winkelkreuz, die Winkeltrommel, den Winkelspiegel u. a.

Auflösung. Zur Bestimmung des Fusspunktes P, siehe Figur 418, des von C auf die Gerade AB gefällt gedachten Perpendikels CP, wähle man auf der Geraden AB zwei solche Punkte D und F, von welchen aus man nach dem Punkte C sehen kann. Dann messe man die horizontale Entfernung DF $(= a)$ und die Horizontalwinkel α und β. Aus den gedachten rechtwinkligen Dreiecken DPC und FPC ergeben sich bezw. die Relationen:

a) . . . $\overline{CP} = \operatorname{tg}\alpha \cdot \overline{DP}$

und

b) . . . $\overline{CP} = \operatorname{tg}\beta \cdot \overline{FP}$

Aus denselben folgt:

c) . . . $\operatorname{tg}\alpha \cdot \overline{DP} = \operatorname{tg}\beta \cdot \overline{FP}$

Setzt man nunmehr in dieser Gleichung:

$$\overline{DP} = x$$

und, in Rücksicht, dass $DF (= a)$ gemessen wurde:

$$\overline{FP} = a - x$$

so erhält man in bezug auf x die Bestimmungsgleichung:

$$x \cdot \operatorname{tg}\alpha = (a - x) \cdot \operatorname{tg}\beta$$

Aus derselben ergibt sich:

$$x \cdot \operatorname{tg}\alpha = a \cdot \operatorname{tg}\beta - x \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$x (\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta) = a \cdot \operatorname{tg}\beta$$

$$x = \frac{a \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 120 und 560:

$$x = \frac{a \cdot \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha \,.\, \cos\beta}}$$

mithin:

A) . . . $x = \dfrac{a \cdot \cos\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

nach welcher Gleichung man die Entfernung x des Fusspunktes P von dem angenommenen Punkt D, aus den durch Messung für a, α und β gefundenen Werten, berechnen kann. Ist x berechnet, so kann man diese berechnete Länge von D auf der Geraden AB nach B hin abmessen und somit die Lage des Punktes P bestimmen.

Aufgabe 1067. Welches ist die in voriger Auflösung allgemein berechnete Entfernung x, wenn die diesbezügliche Messung:

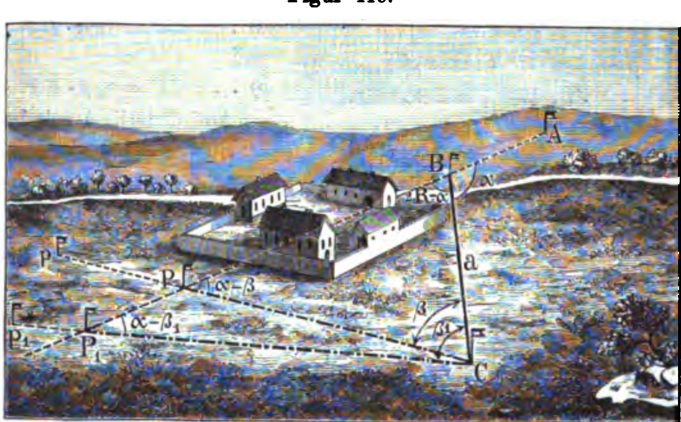
$$a = 582 \text{ m}$$
$$\alpha = 44^0\, 40'\, 30''$$
$$\beta = 56^0\, 31'\, 28{,}4''$$

ergab?

Andeutung. Man substituiere die für a, α und β gegebenen Messungsresultate in die Gleichung A) der Auflösung der vorigen Aufgabe 1066.

Aufgabe 1068. Auf einem ebenen Feld befinden sich zwei markierte Punkte A und B. Die durch diese Punkte bestimmte Gerade soll jenseits eines hohen Gegenstandes, über welchen nicht visiert werden kann, verlängert werden. Man soll zwei Punkte dieser gedachten Verlängerung bestimmen.

Figur 419.



Auflösung. Zur Bestimmung der in der Verlängerung der Strecke AB liegenden Punkte P und P_1, siehe Figur 419, wähle man sich einen Punkt C, von welchem aus man nach dem Punkt B sehen und nach demselben messen kann. Ferner wähle man in der Richtung, nach welcher die Verlängerung jener Strecke AB stattfinden soll, zwei weitere Punkte p und p_1, so, dass man sie von C aus sehen kann. Hierauf messe man die horizontale Entfernung $BC\,(= a)$ und die Horizontalwinkel α, β und β_1. Von jedem der gedachten Dreiecke BCP und BCP_1 kennt man hiernach die Seite a und die beiden derselben anliegenden Winkel $(2R - \alpha)$ und β bezw. $(2R - \alpha)$ und β_1, indem für den Fall, dass BP (bezw. BP_1) eine Verlängerung der Strecke AB ist, der Winkel CBP ein Nebenwinkel des Winkels α, also $= 2R - \alpha$ sein muss. Mittels der aus diesen Dreiecken nach dem Sinussatz sich ergebenden Relationen:

$$\overline{CP} = \frac{a \cdot \sin(2R - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta)} \quad \text{(s. Erkl. 636)}$$

oder:

$$\text{A)} \ldots\ \overline{CP} = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta)}$$

und

$$\overline{CP_1} = \frac{a \cdot \sin(2R - \alpha)}{\sin(\alpha - \beta_1)} \quad \text{(s. Erkl. 636)}$$

oder:

$$\text{B)} \ldots\ \overline{CP_1} = \frac{a \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha - \beta_1)}$$

kann man aus den gemessenen Stücken a, α, β und β_1 die Strecken $\overline{CP}$ und $\overline{CP_1}$ berechnen. Werden diese Strecken von C aus nach p und p_1 hin horizontal abgemessen,

Erkl. 636. Nach der Erkl. 113 ist in der Figur 419:

$$\sphericalangle ABC = \sphericalangle BCP + \sphericalangle BPC$$

oder:

$$\alpha = \beta + \sphericalangle BPC$$

und hieraus ergibt sich, dass:

$$\text{a)} \ldots\ \sphericalangle BPC = \alpha - \beta$$

ist. In derselben Weise kann man darthun, dass:

$$\text{b)} \ldots\ \sphericalangle BP_1C = \alpha - \beta_1$$

ist.

so werden durch diese Abmessungen die Punkte P und P_1, welche in der Verlängerung der Strecke AB jenseits des Hauses liegen, bestimmt.

Aufgabe 1069. Bei der Auflösung der vorigen Aufgabe wurde durch Messung:

$$\alpha = 96^0\,40'$$
$$\beta = 62^0$$
$$\gamma = 80^0$$

und

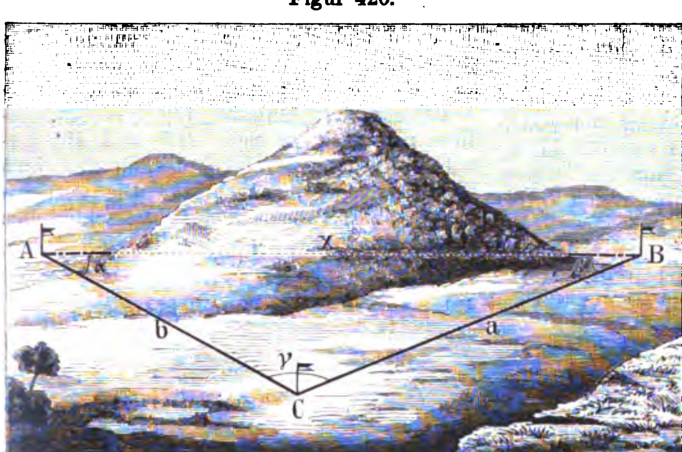
$$a = 500\,\text{m}$$

gefunden, welches sind nach voriger Auflösung die Entfernungen CP und CP_1?

Andeutung. Man setze die gegebenen Zahlenwerte in die in der Auflösung der vorigen Aufgabe 1068 aufgestellten allgemeinen Gleichungen A) und B).

Aufgabe 1070. Auf verschiedenen Seiten eines Berges befinden sich zwei Punkte; diese beiden Punkte sollen mittels eines durch den Berg führenden Tunnels verbunden werden. Wie kann man die Richtung bestimmen, welche die hierzu erforderliche Durchbohrung des Berges haben muss, damit, wenn bei A die Bohrung beginnt, dieselbe genau bei B zu Tage tritt. Die Lage der beiden Punkte A und B soll so sein, dass man diese Punkte von einem dritten Punkt C aus sehen und von demselben nach jenen Punkten messen kann.

Figur 420.



Auflösung. Man wähle, siehe Figur 420, einen Punkt C, von welchem aus man die beiden Punkte A und B sehen und nach denselben messen kann. Dann messe man den Horizontalwinkel γ und die horizontalen Entfernungen $AC = b$ und $BC = a$.

Nach diesen Messungen kennt man von dem Dreieck ABC zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel.

Wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man somit die Winkel α und β mittels des Tangentensatzes berechnen.

Sind diese Winkel berechnet, so kann man in A (resp. in B) ein Winkelmessinstrument aufstellen, mit demselben den Punkt C einvisieren und dann das Fernrohr (oder Diopter) des Instruments um den berechneten horizontalen Winkel α (resp. β) nach links (resp. nach rechts) drehen. In der Richtung der optischen Axe (der Sehlinie) des alsdann festgestellten Fernrohrs hat die Durchbohrung des Berges zu erfolgen. (Siehe die Aufgabe 1071.)

Aufgabe 1071. Durch die in Auflösung der vorigen Aufgabe erwähnten Messungen wurde, siehe Figur 420:

$$a = 0{,}8 \text{ km}$$
$$b = 0{,}64 \text{ km}$$

und

$$\gamma = 98^0\, 40'\, 10''$$

gefunden. Welches sind die Winkel α und β, welche die Achse des durch den Berg zu führenden Tunnels mit den Visierlinien AC und BC bildet.

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 1072. Die gegenseitige Lage dreier Orte A, B und C wurde durch Messung der Entfernung von B nach A ($= c = 5^1/_2$ km), der Entfernung von B nach C ($= a = 7{,}3$ km) und des Horizontalwinkels ABC ($= \beta = 32^0\, 50'$) bestimmt.

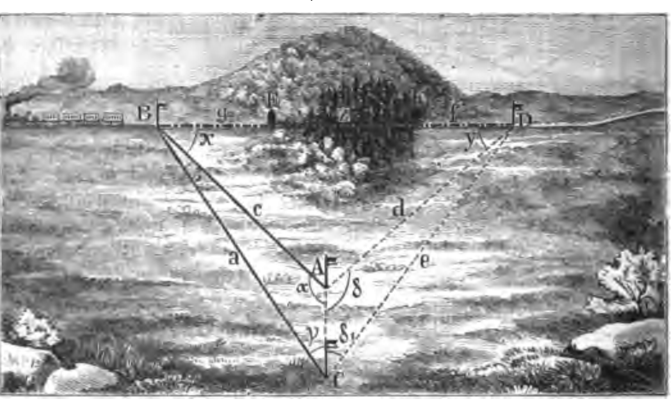
Zwischen dem Ort B und einem vierten Ort D, welcher ausserhalb des durch jene drei Orte bestimmten Dreiecks liegt, befindet sich ein Berg. Diese beiden Orte B und D sollen durch eine gerade Eisenbahn verbunden werden, zu welchem Zweck durch den Berg ein gerader Tunnel geführt werden muss. Da man nun wegen dem Berg von D nach B und umgekehrt nicht sehen kann, so muss die gerade Richtung der Eisenbahnlinie und des Tunnels mittels Winkel bestimmt werden. Zu diesem Zweck wurden die Entfernungen von D nach A und nach C gemessen und bezw. $d = 8^3/_4$ km und $e = 10{,}7$ km gefunden.

Man soll aus diesen Angaben die Winkel berechnen, welche die Richtung der Bahnlinie mit den Visierlinien DA und BA bilden muss. Ferner soll man die Länge des Tunnels berechnen, wenn die Entfernung von D bis zum Einschnitt E in den Berg $= f = 2^1/_4$ km und die Entfernung von B bis zum Einschnitt F in den Berg $g = 1{,}9$ km beträgt.

Andeutung. Von dem Dreieck BAC, siehe Figur 421, kennt man die Seiten a und c, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel β; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite AC und die Winkel α und γ dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach die Seite AC berechnet, so kennt man von dem Dreieck ACD die drei Seiten AC, d und e; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt, hieraus die Winkel δ und δ_1 dieses Dreiecks berechnen. Nach dieser Berechnung kennt man von dem Dreieck BDA zwei Seiten c und d, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel BAD, derselbe ist $= 4R - (\alpha + \delta)$; man kann also, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, aus diesem Dreieck die Seite BD und die derselben anliegenden Winkel, d. s. die gesuchten Winkel x und y, berechnen. Die gesuchte Länge z des Tunnels findet man schliesslich mittels der Beziehung:

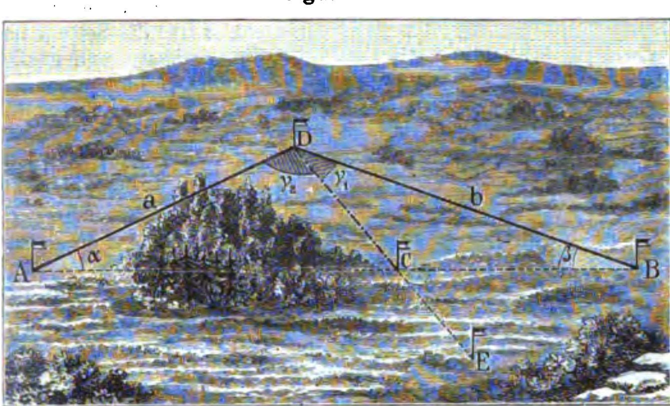
$$z = \overline{BD} - (f + g)$$

Figur 421.



Aufgabe 1073. Auf einem ebenen Felde befinden sich zwei Punkte A und B; der eine dieser Punkte ist von dem andern aus nicht sichtbar, da sich ein hoher Gegenstand, z. B. eine Baumgruppe zwischen denselben befindet. Man soll zwischen den Punkten A und B einen dritten Punkt C so bestimmen, dass er in der geraden Verbindungslinie jener beiden Punkte liegt.

Figur 422.



Auflösung. Befindet sich, siehe Fig. 422, zwischen den beiden Punkten A u. B ein hoher Gegenstand, z. B. eine Gruppe von Bäumen, und man soll einen Punkt C so bestimmen, dass er in durch A und B bestimmten Geraden liegt, so markiere man sich auf dem Terrain zwei Punkte D und E so, dass man von D nach A, E und B sehen und messen kann; dann messe man die horizontalen Entfernungen $DA\,(=a)$ und $DB\,(=b)$, sowie die Horizontalwinkel γ_1 und γ_2.

Nach dieser Messung kennt man von dem Dreieck ABD die Seiten a und b, sowie den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel $(\gamma_1+\gamma_2)$; wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man hieraus die Winkel α und β des Dreiecks ABD berechnen. Nach dieser Berechnung kennt man z. B. von dem Dreieck ACD die Seite a und die derselben anliegenden Winkel α und γ_2; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seite DC dieses Dreiecks berechnen.

Ist die Strecke DC hiernach berechnet, so messe man die für dieselbe sich ergebende Länge von dem Punkt D aus in der Richtung nach E hin ab, wodurch ein Punkt C so bestimmt wird, dass er in der Geraden AB liegt. (Siehe die Aufgabe 1074.)

Aufgabe 1074. Durch die in Auflösung der vorigen Aufgabe 1073 erwähnten Messungen wurde, siehe Figur 422:

$$a = 850\text{ m}$$
$$b = 722{,}5\text{ m}$$
$$\gamma_2 = 38^0\,50'$$

und

$$\gamma_1 = 30^0\,42'\,30''$$

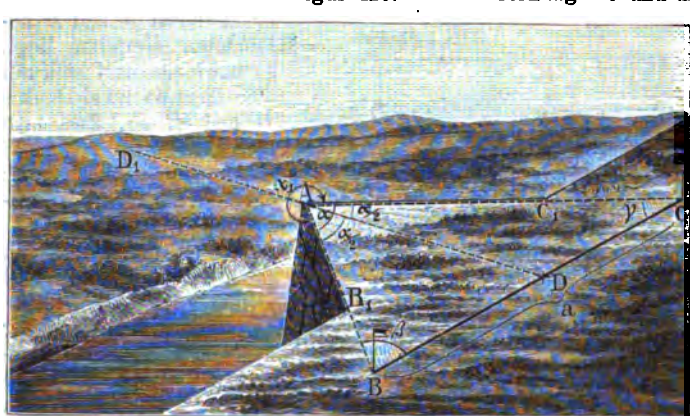
gefunden; wie lang ist die von D nach E hin abzumessende Strecke DC?

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 1075. Zwei Festungslinien bilden einen vorspringenden Winkel, ein sogen. Saillant. Der Scheitel dieses Winkels ist sichtbar aber unzugänglich. Die über den Scheitel des Winkels hinaus verlängerte

Halbierungslinie dieses Winkels bestimmt die Lage des von den eigenen Geschützen unbestrichenen Raumes. Die Lage dieses Raumes oder jener Halbierungslinie soll bestimmt werden.

Figur 423.



Auflösung. Man wähle, siehe Fig. 423, auf den Verlängerungen der Festungslinien AB_1 und AC_1 die beiden Punkte B und C so, dass man von denselben nach den Ecken B_1 und C_1 sehen und die Linie BC messen kann. Dann messe man die horizontale Entfernung BC und die Horizontalwinkel β und γ.

Nach diesen Messungen kennt man von dem Dreieck ABC die Seite a und die beiden anliegenden Winkel β und γ; wie in Auflösung der Aufg. 117 gezeigt, kann man somit die Seiten AB und AC und den Winkel α jenes Dreiecks berechnen.

Stellt nun AD die zu bestimmende Halbierungslinie des Winkels α dar, so wird durch dieselbe das Dreieck ABC in die zwei Dreiecke ABD und ACD zerlegt; von jedem dieser Dreiecke kennt man eine Seite und die beiden anliegenden Winkel. Von dem Dreieck ABD z. B. kennt man nach jener Berechnung die Seite AB, den Winkel β und auch den Winkel $\frac{\alpha}{2}$, indem $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$, also $\frac{\alpha}{2} = R - \frac{\beta + \gamma}{2}$ ist, man kann also, wie in der Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Dreiecksseite BD berechnen. In analoger Weise kann man zur Kontrolle auch CD berechnen.

Ist hiernach BD berechnet, so messe man diese Strecke auf der markierten Strecke BC von B nach C hin ab. Der hierdurch bestimmte Punkt D ist ein Punkt der Halbierungslinie des Winkels α. Durch die Punkte A und D ist die Lage der Halbierungslinie des Winkels α bestimmt.

Aufgabe 1076. Durch die in Auflösung der vorigen Aufgabe 1075 erwähnten Messungen wurde, siehe Figur 423:

$$a = 572 \text{ m}$$
$$\beta = 48^0\,30'\,20''$$

und

$$\gamma = 66^0\,42'\,40''$$

gefunden, welches sind die Längen der Strecken BD und CD?

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe.

Aufgabe 1077. Auf einem Felde sind drei Punkte A, B und C markiert. Die beiden Punkte A und B sind unzugänglich aber von dem Punkt C aus sichtbar. Man soll einen vierten Punkt so bestimmen, dass die durch den Punkt C und diesen vierten Punkt bestimmte Horizontallinie parallel der durch die Punkte A und B bestimmten Horizontallinie ist.

Figur 424.



Auflösung. Man wähle, siehe Fig. 424, einen Punkt D, von welchem aus man nach den drei Punkten A, B und C sehen und nach dem Punkt C auch messen kann. Dann messe man die Horizontalwinkel γ, γ_1, δ und δ_1, sowie die horizontale Entfernung von C nach D.

Nach dieser Messung kennt man von dem Dreieck ADC die Seite a und die beiden Winkel γ und δ_1, desgl. kennt man von dem Dreieck BCD die Seite a und die Winkel γ_1 und δ; man kann also die Seite AC des Dreiecks ACD, ebenso die Seite BC des Dreiecks BCD berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Nach dieser Berechnung kennt man von dem Dreieck ABC die Seiten AC und BC, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel $\gamma - \gamma_1$; man kann also mittels des Tangentensatzes wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, den Winkel x dieses Dreiecks berechnen.

Soll nun CP parallel AB sein, so muss $\sphericalangle BCP$ gleich jenem berechneten Winkel x sein.

Zur Bestimmung des Punktes P stelle man in dem Punkt C ein Winkelmessinstrument horizontal auf, visiere den Punkt B ein und drehe das Fernrohr des Instruments um jenen Winkel x nach rechts. Die durch die optische Achse des Fernrohrs bestimmte Sehlinie ist dann parallel AB; ein Signal in dieser Sehlinie angebracht, gibt die Lage des zu bestimmenden Punktes P an. (Siehe die Aufg. 1078.)

Aufgabe 1078. Durch die in voriger Aufgabe erwähnten Messungen wurde, siehe Figur 424:

$$a = 120\,\text{m}$$
$$\gamma = 72^0\,40'\,30''$$
$$\gamma_1 = 24^0\,38'\,22''$$
$$\delta = 118^0\,24'\,16''$$
$$\delta_1 = 36^0\,14'\,0{,}8''$$

gefunden, welcher Wert wird sich hiernach für den Winkel x ergeben?

Andeutung. Man beachte die Auflösung der vorigen Aufgabe 1077.

Aufgabe 1079. Auf einem Felde wurde die gegenseitige Lage dreier Punkte A, B und C dadurch bestimmt, dass, siehe Fig. 425:

$$AB = c$$
$$AC = b$$

und

$$\sphericalangle BAC = \alpha$$

gemessen wurde. Man soll die Lage eines vierten Punktes P bestimmen, von welchem aus man nach jenen Punkten A, B und C sehen und die Winkel:

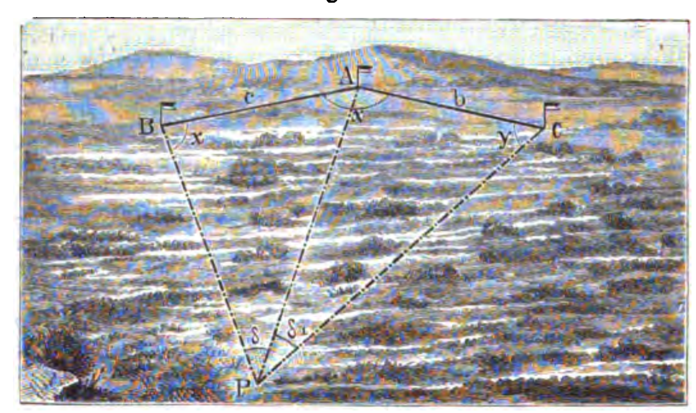
$$APB = \delta$$

und

$$APC = \delta_1$$

messen kann.

Figur 425.



Erkl. 687. Die Aufgabe 1079 ist allgemein unter dem Namen das Pothenot'sche Problem bekannt, obgleich sie schon vor Pothenot (1692) von Snellius (1617) aufgestellt und gelöst wurde.

Erkl. 688. Bei dem Pothenot'schen Problem, siehe Aufgabe 1079 und Erkl. 687, welches bei praktischen Vermessungen (auch bei Messtischaufnahmen, bei dem sogen. Rückwärtseinschneiden) oft zur Anwendung kommt, können in bezug auf die Lage der vier Punkte zueinander folgende Fälle stattfinden:

1) Die drei Punkte A, B und C bilden die Ecken eines Dreiecks und der vierte Punkt P liegt:

a) ausserhalb;

b) in einer Seite jenes Dreiecks;

c) auf der Verlängerung einer Seite desselben und

d) innerhalb des Dreiecks;

bei dem unter a) angegebenen Fall kann ausserdem der vierte Punkt P entweder:

Auflösung. Die Lage des Punktes P, siehe Figur 425, zu den drei Punkten A, B und C ist im allgemeinen bestimmt durch eine der horizontalen Entfernungen AP, BP und CP und durch einen der Winkel x und y. Diese sämtlichen Stücke kann man aus den gemessenen Stücken b, c, α, δ und δ_1 berechnen, wie nachstehend gezeigt ist. Zunächst kann man die Winkel x und y wie folgt berechnen:

In dem Viereck $ABPC$ ist:

$$x + y + \alpha + \delta + \delta_1 = 360^0$$

und hieraus ergibt sich, dass:

$$\text{A)} \ldots x + y = 360^0 - (\alpha + \delta + \delta_1)$$

ist.

Aus den beiden Dreiecken ABP und ACP ergibt sich ferner nach der Sinusregel bezw.:

$$\frac{\overline{AP}}{c} = \frac{\sin x}{\sin \delta}$$

oder:

$$\alpha) \ldots \overline{AP} = \frac{c \cdot \sin x}{\sin \delta}$$

und

$$\frac{\overline{AP}}{b} = \frac{\sin y}{\sin \delta_1}$$

oder:

$$\beta) \ldots \overline{AP} = \frac{b \cdot \sin y}{\sin \delta_1}$$

und aus diesen beiden Gleichungen α) und β) folgt:

$$\frac{c \cdot \sin x}{\sin \delta} = \frac{b \cdot \sin y}{\sin \delta_1}$$

oder:

$$\text{d)} \ldots \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \cdot \sin \delta}{c \cdot \sin \delta_1}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

α) innerhalb des Dreieckswinkels BAC oder

β) ausserhalb dieses Dreieckswinkels BAC liegen.

2) Die drei Punkte A, B und C liegen in einer Geraden und der vierte Punkt D liegt entweder:

a) innerhalb dieser Geraden oder

b) ausserhalb derselben.

In den Teilen dieser Encyklopädie, welche speziell über die Geodäsie handeln, sind die einzelnen dieser verschiedenen Fälle besonders behandelt.

(Siehe auch die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Erkl. 639. Die Winkel x und y, siehe nebenstehende Auflösung, kann man auch wie folgt bestimmen:

Setzt man in nebenstehender Gleichung d):

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \cdot \sin\delta}{c \cdot \sin\delta_1}$$

nach der Erkl. 140:

$$1) \ldots \frac{b \cdot \sin\delta}{c \cdot \sin\delta_1} = \operatorname{tg}\psi$$

so erhält man:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \operatorname{tg}\psi$$

oder nach der Erkl. 120:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\psi}{\cos\psi}$$

und nach der Erkl. 19:

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin\psi}{\cos(90^0 - \psi)}$$

Durch Anwendung des in der Erkl. 119 angeführten Summensatzes erhält man hieraus:

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{\sin\psi + \cos(90^0 - \psi)}{\sin\psi - \cos(90^0 - \psi)}$$

oder, wenn man beiderseits die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\psi + 90^0 - \psi}{2}}{\operatorname{tg}\frac{\psi - 90^0 + \psi}{2}}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{\operatorname{tg}(\psi - 45^0)}{\operatorname{tg}45^0} \cdot \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$$

oder in Rücksicht, dass nach der Erkl. 639a:

$$\operatorname{tg}45^0 = 1$$

ist:

$$2) \ldots \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \operatorname{tg}\frac{x+y}{2} \cdot \operatorname{tg}(\psi - 45^0)$$

Hat man also nach obiger Gleichung 1) den Hülfswinkel ψ und nach der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A):

$$x + y = 360^0 - (\alpha + \delta + \delta_1)$$

$x + y$ berechnet, so kann man nach Gleichung 2) die Winkeldifferenz $x - y$ bestimmen, u. s. f.

$$\frac{\sin x + \sin y}{\sin x - \sin y} = \frac{b \cdot \sin\delta + c \cdot \sin\delta_1}{b \cdot \sin\delta - c \cdot \sin\delta_1}$$

oder, wenn man in bezug auf den Quotienten links die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}} = \frac{b\sin\delta + c\sin\delta_1}{b\sin\delta - c\sin\delta_1}$$

und hieraus erhält man:

$$B) \ldots \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{b \cdot \sin\delta - c\sin\delta_1}{b \cdot \sin\delta + c\sin\delta_1} \cdot \operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$$

Berechnet man nach Gleichung A) die Winkelsumme $x + y$ und dann in Rücksicht dieses gefundenen Wertes und der für b, c, δ und δ_1 gemessenen Werte, nach Gleichung B) die Winkeldifferenz $x - y$, so kann man leicht aus den für $x + y$ und $x - y$ hiernach gefundenen Werten die einzelnen Winkel x und y selbst bestimmen.

Sind hiernach die Winkel x und y berechnet, so kennt man in jedem der Dreiecke ABP und ACP eine Seite und zwei Winkel; man kann also die Seiten BP, AP und CP dieser Dreiecke mittels der Sinusregel berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde; man erhält nämlich allgemein:

$$C) \ldots \overline{AP} = \frac{c \cdot \sin x}{\sin\delta} \text{ oder } = \frac{b \cdot \sin y}{\sin\delta_1}$$

[Siehe die Gleichungen α) und β)]

$$D) \ldots \overline{BP} = \frac{c \cdot \sin(x + \delta)}{\sin\delta}$$

und

$$E) \ldots \overline{CP} = \frac{b \cdot \sin(y + \delta_1)}{\sin\delta_1}$$

(Siehe die Erkl. 637 bis 639 und die folgende Aufgabe.)

Erkl. 639a. Eine goniometrische Relation heisst:

$$\operatorname{tg}45^0 = \operatorname{ctg}45^0 = 1$$

(siehe Auflösung der Aufgabe 9 in dem Lehrbuch der Goniometrie).

Aufgabe 1080. Man berechne, siehe Figur 425, die horizontalen Entfernungen des Punktes P von A, B und C, wenn durch Messung:

$$b = 952{,}46 \text{ m}$$
$$c = 1486{,}07 \text{ m}$$
$$\alpha = 99^0\, 40'\, 12''$$
$$\delta = 22^0\, 4'\, 13{,}8''$$
und $$\delta_1 = 16^0\, 43'\, 10{,}4''$$

gefunden wurde.

Andeutung. Man beachte die allgemeine Auflösung der vorigen Aufgabe.

---

d) Aufgaben über die Bestimmung der horizontalen Entfernung zweier Punkte aus gemessenen Höhen- oder Tiefenwinkeln und der gemessenen scheinbaren Entfernung zweier Punkte.

* **Aufgabe 1081.** Man soll die horizontale Entfernung zweier nicht in einer und derselben horizontalen Ebene liegenden Punkte trigonometrisch bestimmen.

Auflösung. Sind, siehe **Figur** 426, A und B zwei Punkte, welche **nicht** in derselben horizontalen Ebene **liegen**, z. B. zwei Punkte einer geraden **Strasse**, welche gegen die Horizontalebene HH_1 geneigt ist, so kann man die **horizontale** Entfernung x **der** Punkte A und B, d. i. (**siehe** Erkl. 627) die rechtwinklige oder orthogonale Projektion AC der Strecke AB **auf** die Horizontalebene HH_1, trigonometrisch wie **folgt** bestimmen (siehe die Erkl. 623, 629 und 640):

Man messe in dem Punkt A den Höhen- od. Elevationswinkel $BAC = \alpha$ des Punktes B (siehe Erkl. 641), oder man messe in dem Punkt B den Tiefen- oder Depressionswinkel $ABD = \alpha$ des Punktes A (siehe Erkl. 642 und 643). Ferner messe man noch die direkte Entfernung $AB (= a)$ der Punkte A und B; von dem rechtwinkligen Dreieck ABC (oder von dem ihm kongruenten rechtwinkligen Dreieck ABD) kennt man hiernach die Hypotenuse a und den Winkel α. Aus diesem Dreieck ergibt sich die Relation:

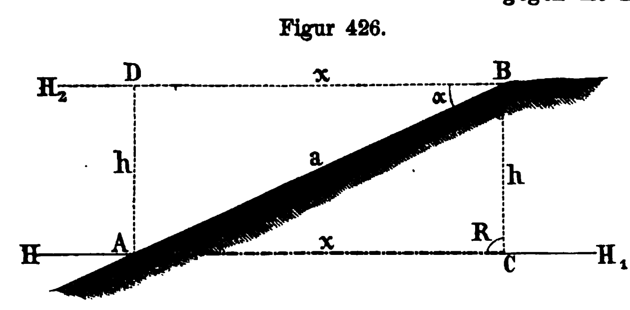
$$\cos\alpha = \frac{x}{a}$$

oder:

$$\text{A)} \quad \ldots\ldots \quad x = a \cdot \cos\alpha$$

nach welcher Gleichung man die horizontale Entfernung der Punkte A und B aus der gemessenen direkten Entfernung a der beiden Punkte A und B und aus dem gemessenen Höhenwinkel α des Punktes B oder dem gemessenen Tiefenwinkel α des Punktes A berechnen kann. (Siehe die Erkl. 644 und 645.)

Figur 426.



Erkl. 640. In der Erkl. 629 wurde angegeben, wie man die horizontale Entfernung zweier Punkte unmittelbar durch Messung bestimmen kann. In Auflösung der Aufgabe 1081 wird gezeigt, wie man die horizontale Entfernung zweier Punkte mittelbar durch trigonometrische Rechnung bestimmen kann.

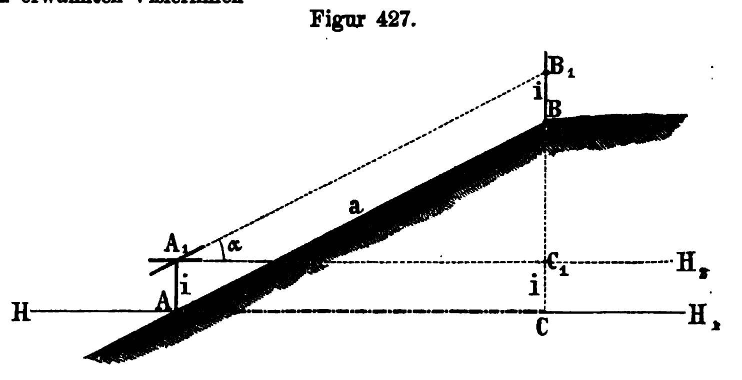
Erkl. 641. Unter einem Höhen- oder Elevationswinkel versteht man einen Winkel, welchen ein horizontaler Sehstrahl mit einem andern Sehstrahl bildet, der mit jenem horizontalen Sehstrahl in einer und derselben Vertikalebene liegt und nach einem Punkt gerichtet ist, der über der Horizontalebene liegt, welcher jener horizontale Sehstrahl angehört.

Erkl. 642. Unter einem Tiefen- oder Depressionswinkel versteht man einen Winkel, welchen ein horizontaler Sehstrahl mit einem andern Sehstrahl bildet, der mit jenem horizontalen Sehstrahl in ein und derselben Vertikalebene liegt und nach einem Punkt gerichtet ist, der unter der Horizontalebene liegt, welcher jener horizontale Sehstrahl angehört.

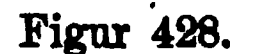
Erkl. 643. In der Fig. 426 ist der Höhenwinkel BAC des Punktes B gleich dem Tiefenwinkel ABD des Punktes A (als innere Wechselwinkel an den Parallelen AH_1 und BH_2).

Erkl. 644. Bei der Messung von Winkeln, wie z. B. des Höhenwinkels BAC, siehe Figur 426, befindet sich das Auge, von welchem aus die in der Erkl. 642 erwähnten Visierlinien gehen, nicht in dem Punkt A, sondern in einem vertikal über A liegenden Punkt A_1, siehe Figur 427. Die Entfernung dieser beiden Punkte A und A_1, „Instrumentenhöhe" genannt, sei mit i bezeichnet. Zur Messung des Höhenwinkels BAC in dem Punkt A_1, muss man, wie in der Figur 427 angedeutet ist, vertikal über dem Punkt B einen Punkt B_1 markieren, dessen Entfernung von $B = i$, nämlich gleich jener in A gemessenen Instrumentenhöhe ist. Die von A_1 nach B_1 gehende Visierlinie bildet mit der durch A_1 gehenden horizontalen Visierlinie A_1C_1 alsdann genau denselben Winkel als die von A nach dem Punkt B gehende und gedachte Visierlinie mit der durch A gehenden und gedachten horizontalen Visierlinie AC.

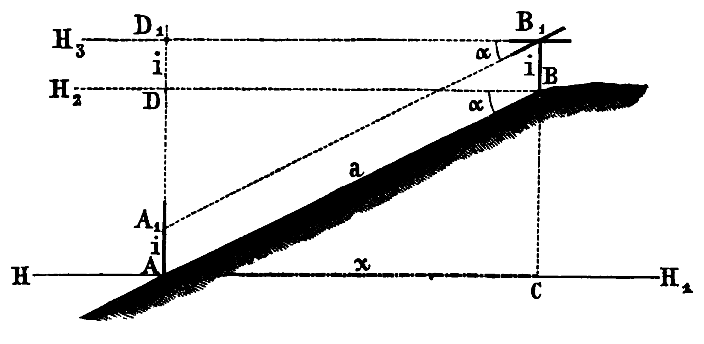
Figur 427.



Erkl. 645. Bei der Messung des Tiefenwinkels H_2BA, siehe Figur 426, befindet sich das Auge, von welchem aus die in der Erkl. 643 erwähnten Visierlinien gehen, nicht in dem Punkt B, sondern in einem vertikal über B liegenden Punkt B_1, siehe Figur 428. Die Entfernung dieser beiden Punkte B und B_1, „Instrumentenhöhe" genannt, sei mit i bezeichnet. Zur Messung des Tiefenwinkels H_2BA in dem Punkt B_1, muss man, wie in der Figur 428 angedeutet ist, vertikal über A einen zweiten Punkt A_1 markieren, dessen Entfernung von $A = i$, nämlich gleich jener in B gemessenen Instrumentenhöhe ist. Die von B_1 nach A_1 gehende Visierlinie bildet mit der durch B_1 gehenden horizontalen Visierlinie B_1D_1 alsdann genau denselben Winkel als die von B nach dem Punkt A gehende und gedachte Visierlinie mit mit der durch B gehenden und gedachten horizontalen Visierlinie BD.



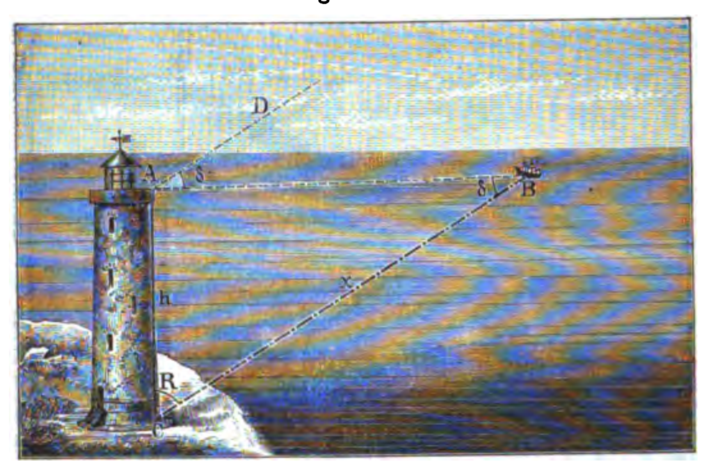
Figur 428.



***Aufgabe 1082.** Auf einem Hafenturm ist $h = 42{,}5$ m hoch über dem Meeresspiegel ein Winkelmessinstrument aufgestellt und mittels desselben der Tiefen- oder Depressionswinkel δ eines in Sicht befindlichen Fahrzeuges $= 15^0\,20'\,10''$ gemessen worden. Wie weit ist hiernach das Schiff von dem Fusse des Turmes noch entfernt?

Andeutung. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC ist die Kathete AC gleich der gegebenen Höhe h, in welcher das Winkelmessinstrument auf dem Turm aufgestellt ist, ferner ist der Winkel ABC, als innerer Wechselwinkel an Parallelen, gleich dem Winkel BAD, also gleich dem gegebenen Tiefenwinkel δ. Man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 3 gezeigt wurde, die Kathete CB dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Entfernung x des in Sicht befindlichen Schiffes von dem Fusspunkt des Hafenturmes berechnen.

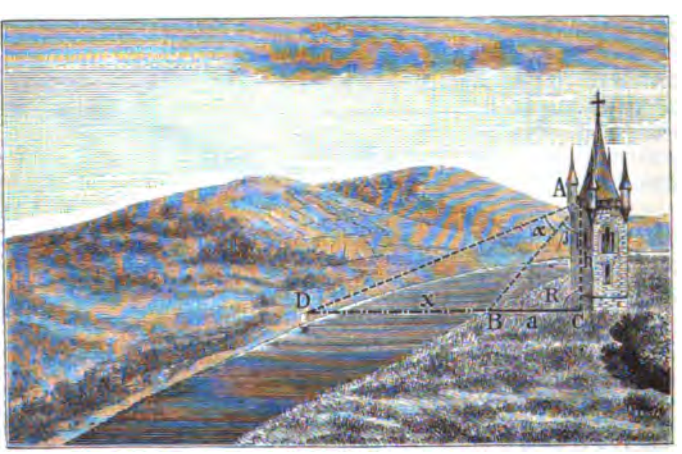
Figur 429.



***Aufgabe 1083.** Die Höhe eines Turmes beträgt $h = 22$ m, derselbe befindet sich in einer Entfernung von $a = 65$ m von dem Ufer eines Flusses; wie gross ist die Breite des Flusses, wenn sie von der Spitze des Turmes aus unter einem Winkel $\alpha = 12^0\,40'$ erscheint?

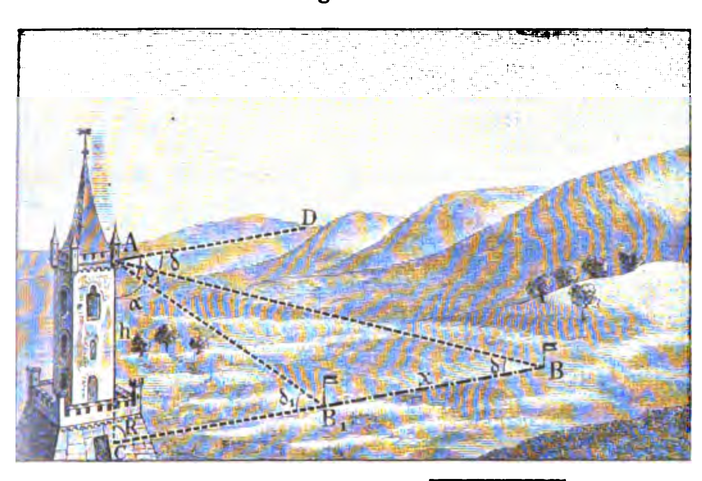
Andeutung. In dem rechtwinkligen Dreieck ACB der Figur 430 kennt man die beiden Katheten a und h; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 1 gezeigt wurde den Winkel β dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach β berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck ACD die Kathete h und den spitzen Winkel $DAC = \alpha - \beta$; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 3 gezeigt wurde die Kathete $a + x$ berechnen. Ist hiernach $a + x$ berechnet, so kann man leicht die gesuchte Breite $DB\,(= x)$ des Flusses bestimmen.

Figur 430.



***Aufgabe 1084.** Von einem Turme aus, dessen Höhe $h = 38{,}4$ m ist, sieht man zwei mit dem Fusspunkt des Turmes in einer horizontalen Geraden liegende Punkte B und B_1 bezw. unter den Depressionswinkeln $\delta = 24^0 48'$ und $\delta_1 = 36^0 35'$; wie weit sind diese Punkte von einander entfernt?

Figur 431.

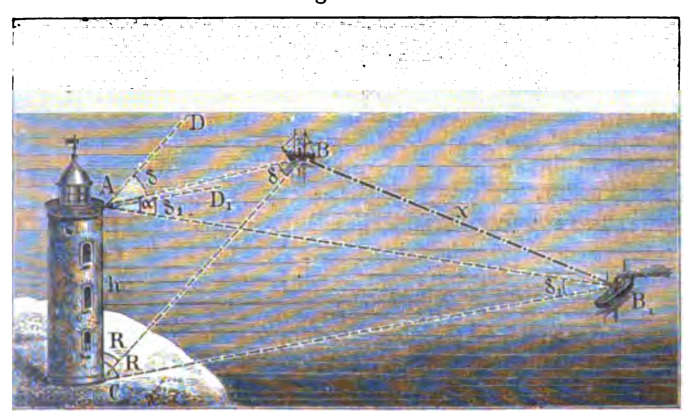


Andeutung. In dem rechtwinkligen Dreieck AB_1C, siehe Figur 431, kennt man die Kathete AC ($= h$) und den Winkel CAB_1 ($= \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAB_1$ oder $= R - \delta_1$); ebenso kennt man in dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Kathete AC ($= h$) und den Winkel CAB ($= R - \delta$); man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde, die Katheten CB_1 und CB dieser Dreiecke berechnen. Die gesuchte Entfernung x der Punkte B und B_1 findet man schliesslich mittels der aus der Figur sich ergebenden Relation:

$$x = CB - \overline{CB_1}$$

Aufgabe 1085. Von einem $h = 40$ m über dem Meeresspiegel gelegenen Punkt A eines Hafenturmes AC aus sind zwei Fahrzeuge B und B_1 in Sicht; das erstere erscheint unetr einem Tiefenwinkel $\delta = 10^0\, 5' 40''$, das zweite unter einem Tiefenwinkel $\delta_1 = 12^0 26' 45''$. Wie weit sind die beiden Schiffe von einander entfernt, wenn die scheinbare Entfernung beider Schiffe $\alpha = 6^0 22' 14''$ beträgt?

Figur 432.



Andeutung. In dem rechtwinkligen Dreieck ABC, siehe Figur 432, kennt man die Kathete AC ($= h$) und den Winkel BAC ($= \sphericalangle DAC - \sphericalangle DAB$ oder $= R - \delta$); desgleichen kennt man in dem rechtwinkligen Dreieck AB_1C die Kathete AC ($= h$) und den Winkel B_1AC ($= \sphericalangle D_1AC - \sphericalangle D_1AB_1$ oder $= R - \delta_1$); wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde, kann man hieraus die Hypotenusen AB und AB_1 dieser Dreiecke berechnen. Sind dieselben berechnet, so kennt man von dem schiefwinkligen Dreieck BAB_1 die Seiten AB und AB_1, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel BAB_1, derselbe ist nämlich

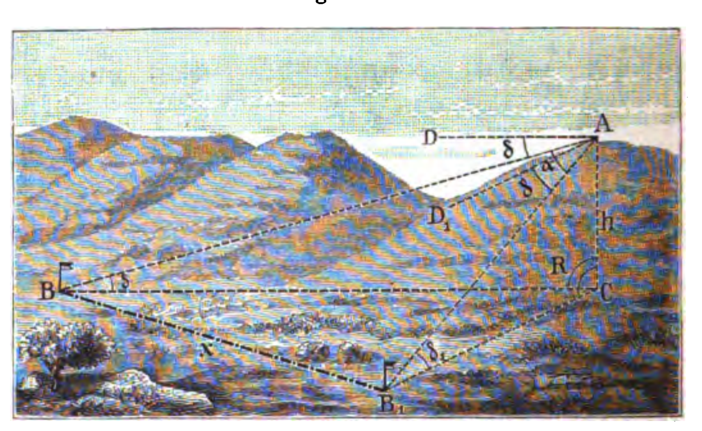
Erkl. 646. Unter der **scheinbaren Entfernung** zweier Punkte A und B in einem bestimmten dritten Punkt C, versteht man **den Winkel**, welchen die von C aus nach A und B gehenden Sehstrahlen miteinander bilden. Diesen Winkel nennt man auch **Seh- oder Gesichtswinkel**, auch **scheinbare Grösse** der Strecke AB in dem Punkt C.

gleich der beobachteten **scheinbaren Entfernung** α der Schiffe B und B_1, siehe Erkl. 646; man kann somit hieraus, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die gesuchte Entfernung x der Schiffe B und B_1 berechnen.

Aufgabe 1086. Von der Spitze A eines Berges sieht man zwei in horizontaler Ebene liegenden Orte B und B_1 bezw. unter den Depressionswinkeln $\delta = 6^0\,42'\,30''$ und $\delta_1 = 7^0\,28'\,40''$. Die scheinbare Entfernung α beider Orte beträgt $72^0\,18'\,35''$ und die Bergspitze A liegt $h = 500$ m hoch über jener horizontalen Ebene. Welche Entfernung haben die Orte B und B_1?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist, siehe die Figuren 432 und 433, analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1085.


Figur 433.

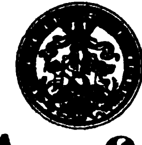
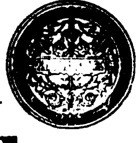


Aufgabe 1087. Direkt an dem Ufer eines Flusses steht ein hohes Gebäude. Von zwei senkrecht übereinander liegenden Fenstern dieses Gebäudes wurde ein Punkt am gegenseitigen Ufer einvisiert und beobachtet, dass dieser Punkt bezw. unter den Depressionswinkeln $\delta = 48^0\,40'$ und $\delta_1 = 19^0\,52'$ erscheint. Wie breit ist der Fluss an dieser Stelle, wenn die Entfernung der Punkte, in welchen jene Depressionswinkel beobachtet wurden, $a = 12{,}5$ m beträgt?

Andeutung. Von dem Dreieck ABA_1, siehe Figur 434, kennt man die Seite AA_1 ($= a$), den Winkel A_1AB ($= \sphericalangle A_1AD - \sphericalangle BAD$ oder $= R - \delta$) und den Winkel AA_1B ($= \sphericalangle D_1A_1A + \sphericalangle D_1A_1B$ oder $= R + \delta_1$); man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite A_1B (oder auch die Seite AB) dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach diese Seite berechnet, so kennt man von dem bei

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

354. Heft.	Preis des Heftes 25 Pf.	Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 346. — Seite 769—784. Mit 22 Figuren.

Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst,** der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 346. — Seite 769—784. Mit 22 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der praktischen Geometrie (dem Feldmessen), Fortsetzung. — Aufgaben über die Berechnung der direkten Entfernung zweier Punkte und bekannten Höhen und Höhenwinkeln. — Aufgaben über die Berechnung von Höhen aus horizontal gemessenen Strecken, aus Höhen-, Tiefen- und Gesichtswinkeln. — Aufgaben über die Berechnung von Höhen aus gemessenen Strecken und Höhenwinkeln. — Aufgaben über die Berechnung von Winkeln aus gemessenen Strecken, auch Aufgaben über das sogenannte Centrieren von Winkeln.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint **monatlich in** 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik,** Physik, **Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und **alsdann auch** alle Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — **nach** besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben beigegeben,** welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur** Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord.,** gleichberechtigten **höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien,** Progymnasien, **Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten als z. B. für das Einjährig-**Frei**willige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der **mathematischen, technischen** und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten **Theorien** etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich** aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

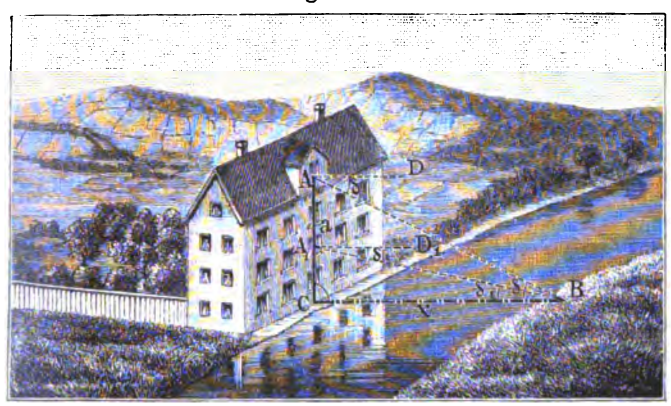
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten** eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militär** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 434.

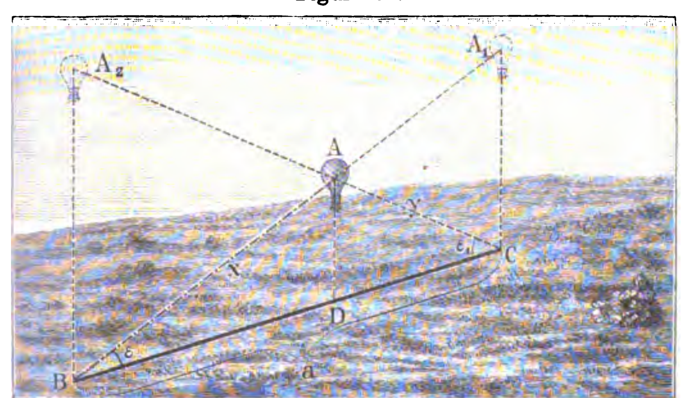


rechtwinkligen Dreieck A_1CB die Hypotenuse A_1B und den Winkel A_1BC (= $\sphericalangle BA_1D_1$ oder = δ_1); man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 5 gezeigt wurde, die Kathete BC, d. i. die gesuchte Breite x des Flusses an jener Beobachtungsstelle, berechnen.

β) Aufgaben über die Berechnung der direkten Entfernung zweier Punkte aus bekannten Höhen und Höhenwinkeln.

Aufgabe 1088. Ein Luftballon A erscheint einem in dem Ort B befindlichen Beobachter genau über dem Ort C und zwar in einer scheinbaren Höhe $\varepsilon = 38^0\,14'\,30''$ über dem Horizont; einem Beobachter, welcher sich in dem Ort C befindet, erscheint zu derselben Zeit der Ballon A genau über dem Ort B und zwar in einer scheinbaren Höhe $\varepsilon_1 = 67^0\,33'\,10''$. Man soll hieraus die Entfernungen berechnen, welche zu jener Zeit der Ballon A von den Orten B und C hatte, und zwar unter der Voraussetzung, dass die horizontale Entfernung der Orte B und C bekannt sei und $a = 7^1/_2$ km betrage.

Figur 435.

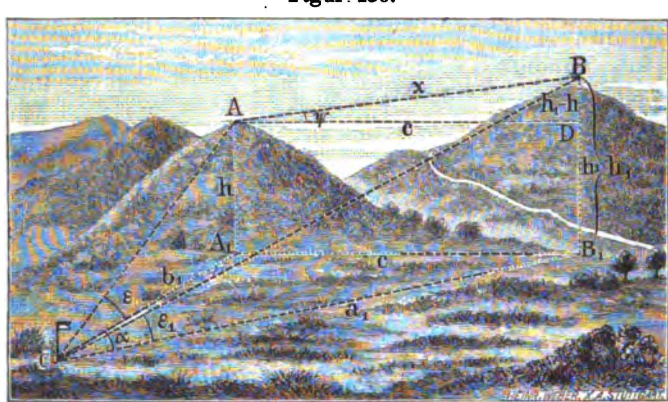


Andeutung. In Figur 435 seien B und C die in einer horizontalen Ebene liegenden Orte, von welchen aus zu gleicher Zeit der in der Luft schwebende Ballon A beobachtet wird. Dem Beobachter in B erscheint gemäss der Aufgabe der Luftballon A in A_1, nämlich senkrecht über dem Ort C unter dem Höhenwinkel (der scheinbaren Höhe) ε. Dem Beobachter in C erscheint zu derselben Zeit der Luftballon A in A_2, nämlich senkrecht über dem Ort B unter dem Höhenwinkel (der scheinbaren Höhe) ε_1. Von dem Dreieck ABC kennt man gemäss der Aufgabe die Winkel ε und ε_1, sowie die Seite BC, d. i. die horizontale Entfernung a der Orte B und C; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, aus diesen Stücken die Seiten AB und AC dieses Dreiecks, d. s. die gesuchten wirklichen Entfernungen x und y des Ballons A von den Orten B und C in der gedachten Zeit, berechnen,

---

Aufgabe 1089. Zur Bestimmung der Entfernung zweier durch ein Thal getrennter Bergspitzen A und B wurden, wie in den Aufgaben 1092 bis 1096 gezeigt, die Höhen der beiden Bergspitzen über einem festen Standpunkt C im Thale bestimmt und die Höhe h der Bergspitze A über $C = 350$ m, die Höhe h_1 der Bergspitze B über $C = 420$ m gefunden. Dann wurden in jenem festen Punkt C die Höhenwinkel ε und ε_1 jener Bergspitzen A und B gemessen und gefunden $\varepsilon = 12^0\,40'\,10''$ u. $\varepsilon_1 = 18^0\,30'\,45''$; schliesslich wurde noch der Horizontalwinkel α gemessen, welchen die horizontalen Projektionen der von C nach den Bergspitzen gehenden Visierlinien mit einander bilden, und dafür $124^0\,40'\,36''$ gefunden. Welche Entfernung haben die Bergspitzen A und B?

Figur. 436.



Andeutung. Von den rechtwinkligen Dreiecken AA_1C und BB_1C der Figur 436 kennt man bezw. die Katheten AA_1 (= h) und BB_1 (= h_1), sowie die denselben gegenüberliegenden Winkel ε und ε_1; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 3 gezeigt wurde, hieraus die Katheten A_1C und B_1C dieser Dreiecke berechnen. Nach dieser Berechnung kennt man von dem horizontalen Dreieck A_1B_1C die Seiten A_1C und B_1C, sowie, gemäss der Aufgabe, den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel α; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, die Seite A_1B_1 dieses Dreiecks berechnen. Denkt man sich nunmehr durch A zu A_1B_1 die Parallele AD gezogen, so erhält man das bei D rechtwinklige Dreieck ABD, in welchem die Kathete AD gleich der vorhin berechneten Seite A_1B_1 und in welchem die Kathete $BD = BB_1 - DB_1$ oder $= BB_1 - AA_1$ oder $h_1 - h$ ist; man kann somit aus diesem Dreieck mittels des pythagoreischen Lehrsatzes die Hypotenuse AB, d. i. die gesuchte Entfernung x der Bergspitzen A und B, berechnen.

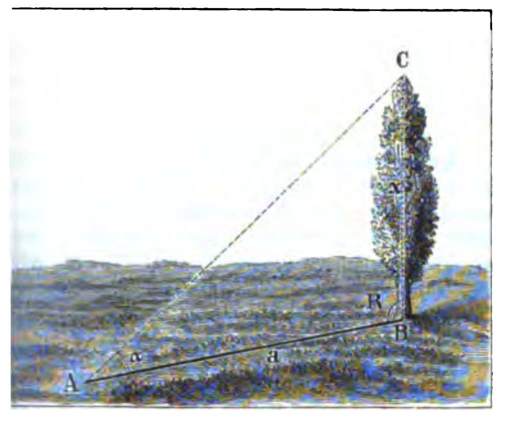
---

f) Aufgaben über die Berechnung von Höhen aus horizontal gemessenen Strecken, aus Höhen-, Tiefen- und Gesichtswinkeln.

* **Aufgabe 1090.** Wie hoch ist ein Baum, wenn derselbe in dem Endpunkt einer vom Fusspunkt desselben ausgehenden $a = 100$ m langen horizontalen Strecke unter einem Winkel $\alpha = 22^0\,40'\,10''$ erscheint?

Andeutung. Ist, siehe Figur 437, BA eine vom Fusspunkt des Baumes BC ausgehende Horizontale von der gegebenen Länge a, so ist in dieser Figur α der Winkel, unter welchem einem in A befindlichen Auge eines Beobachters die Höhe x des Baumes

Figur 437.



erscheint. Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man die Kathete a und den Winkel α; aus diesem Dreieck ergibt sich:

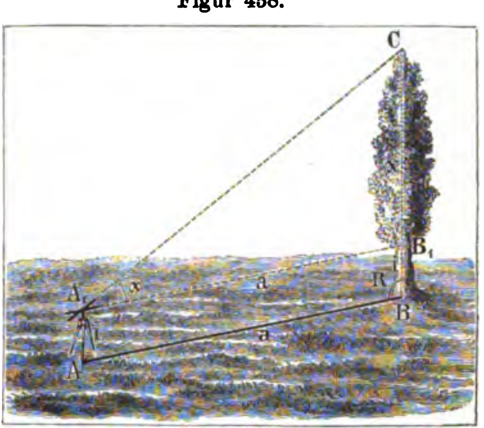
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}$$

oder:

A) . . . . . $x = a \cdot \operatorname{tg} \alpha$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Höhe x des Baumes berechnen kann. (Siehe die Erkl. 647.)

Figur 438.



Erkl. 647. Wie schon in den Erkl. 644 und 645 erwähnt, befindet sich das Auge eines Beobachters bei Winkelmessungen stets in einer gewissen Entfernung vertikal über dem Beobachtungspunkt.

Die Aufgabe 1090 praktisch ausgeführt, wird sich deshalb gestalten, wie in der Figur 438 angedeutet ist. Nach dieser Figur ergibt sich für die gesuchte Höhe CB des Baumes:

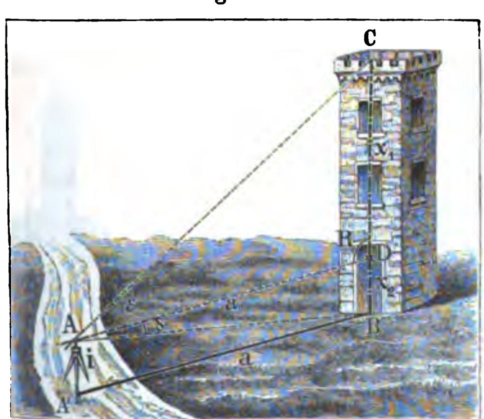
$$\overline{CB} = x + i$$

in welcher Gleichung i jene erwähnte Entfernung, die sog. Instrumentenhöhe bedeutet. Die Grösse x wird aus a und α berechnet, wie in nebenstehender Andeutung gesagt wurde.

---

* **Aufgabe 1091.** Wie hoch ist ein Turm, wenn einem in der horizontalen Entfernung $a = 100$ m von demselben befindlichen Beobachter die Spitze desselben unter einem Höhenwinkel $\varepsilon = 12^0\ 20'\ 8''$ und der Fusspunkt unter einem Tiefenwinkel $\delta = 4^0\ 20'\ 2''$ erscheint?

Figur 439.



Andeutung. Befindet sich, s. Figur 439, das Auge des Beobachters in dem Punkt A und man zieht die Linien AC und AB, sowie die horizontale Linie AD, so kennt man von jedem der rechtwinkligen Dreiecke ADC und ADB die Kathete $AD\ (= A_1B = a)$ und die Winkel ε und δ. Aus diesen Dreiecken ergeben sich:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a \cdot \operatorname{tg}\varepsilon \\ \text{und} \quad x_2 = a \cdot \operatorname{tg}\delta \end{array}\right\} \text{(s. Erkl. 46)}$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$x_1 + x_2 = a \cdot \operatorname{tg}\varepsilon + a \cdot \operatorname{tg}\delta$$

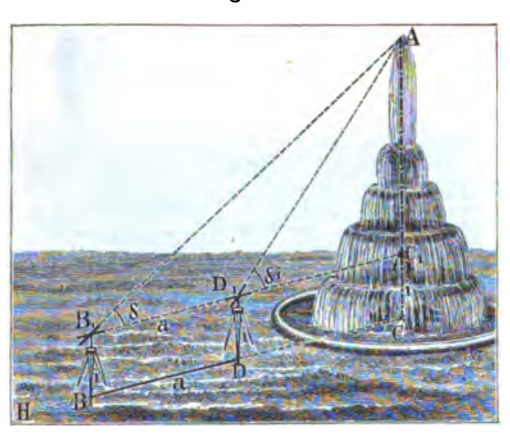
oder, da $x_1 + x_2$ die gesuchte Höhe x des Turmes ist:

A) . . . $x = a \cdot (\operatorname{tg}\varepsilon + \operatorname{tg}\delta)$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, ε und δ gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Höhe x des Turmes berechnen kann.

Aufgabe 1092. Zur Berechnung der Höhe eines auf einer horizontalen Ebene befindlichen Springbrunnens hat ein Beobachter den Höhenwinkel δ des höchsten Punktes des Wasserstrahls beobachtet und hierfür $25^0\,45'$ gefunden. Hierauf näherte sich der Beobachter in gerader Richtung dem Fusspunkt der vertikalen Achse des Springbrunnens um $a = 24$ m und beobachtet den Höhenwinkel δ_1, unter welchem ihm von dieser Stelle aus der höchste Punkt der Wassersäule erschien und fand hierfür 46^0 $38'$. Welche Höhe hatte der höchste Punkt der Wassersäule, wenn sich bei jenen Winkelmessungen das Auge des Beobachters stets $i = 1{,}62$ m über der horizontalen Ebene befand?

Figur 440.



Andeutung. In Figur 440 sei AC die zu berechnende Höhe; B, bezw. D sei der jeweilige Standpunkt des Beobachters in der nach dem Fusspunkt C der Vertikalen AC gerichteten horizontalen Linie CH; B_1 und D_1 seien die Punkte, von welchen aus der Beobachter die Höhenwinkel δ und δ_1 des höchsten Punktes A der Wassersäule beobachtete.

In dem Dreieck AB_1D_1 kennt man die Seite B_1D_1 $(= BD = a)$, sowie die derselben anliegenden Winkel AB_1D_1 $(= \delta)$ und AD_1B_1 $(= 2R - \delta_1)$; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite AB_1 (oder auch die Seite AD_1) dieses Dreiecks berechnen. Nach dieser Berechnung kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck AC_1B_1 die Hypotenuse AB_1 und den Winkel δ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 5 gezeigt wurde, die Kathete AC_1 dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach AC_1 berechnet, so kann man die gesuchte Höhe AC $(= x)$ nach der aus der Figur sich ergebenden Relation:

$$\overline{AC} = \overline{AC_1} + \overline{C_1C}$$

oder, da C_1C gleich der bekannten Instrumentenhöhe i ist, nach der Relation:

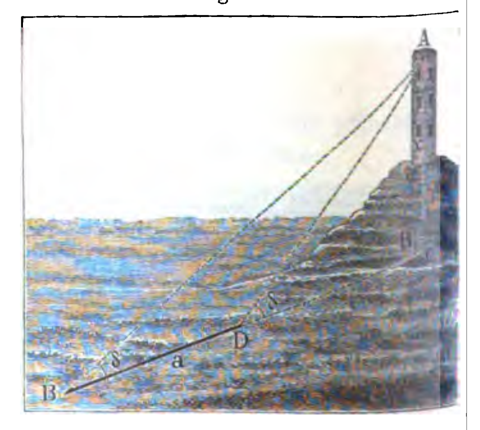
$$x = \overline{AC_1} + i$$

berechnen.

Aufgabe 1093. Die Spitze eines auf einem Berg stehenden Turmes erscheint unter einem Erhöhungswinkel $\delta = 28^0\,15'$; nachdem man demselben in horizontaler Ebene um $a = 230$ m näher gekommen ist, findet man, dass jener Erhöhungswinkel $\delta_1 = 35^0\,2'$ beträgt. Wie hoch liegt die Spitze des Turmes über der Horizontalebene?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1092.

Figur 441.

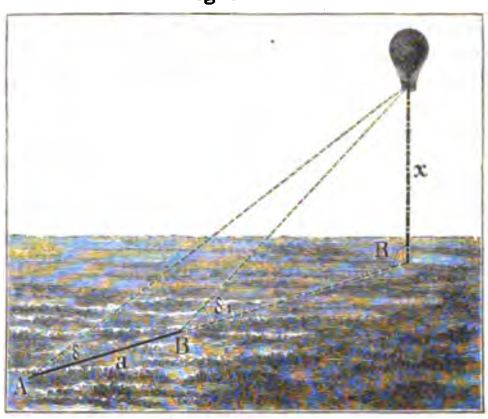


Aufgabe 1094. Zur Bestimmung der Erhebung eines Luftballons über einer horizontalen Ebene wurde in der Richtung, welche der Ballon voraussichtlich annehmen wird, eine horizontale Standlinie $AB = 900$ m gemessen. In den Endpunkten derselben wurden zwei Höhenwinkelmessinstrumente so aufgestellt, dass jedes derselben die Instrumenthöhe $i = 1{,}50$ m hatte.

In dem Augenblick, in welchem der indessen in die Höhe gegangene Ballon in die durch jene horizontale Standlinie gelegt gedachte Vertikalebene kam, wurden die Höhenwinkel bei A und B gemessen und hierfür bezw. $\delta = 28^0\,23'$ und $\delta_1 = 56^0\,48'$ gefunden; wie kann man hieraus die Erhebung des Ballons über die durch A und B gehende horizontale Ebene berechnen, für den Augenblick jener Messung?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1092.

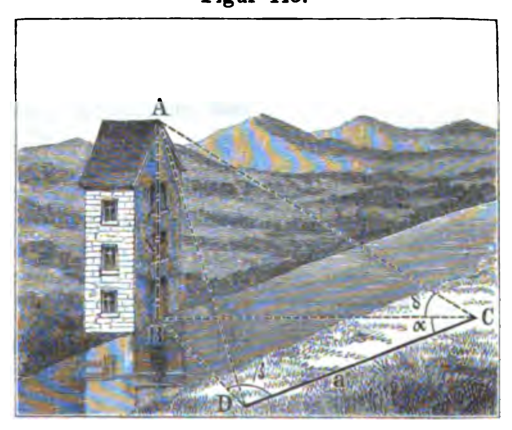
Figur 442.



Aufgabe 1095. Jenseits eines Flusses befindet sich ein Turm. Zur Bestimmung von dessen Höhe wurde diesseits eine Standlinie $CD = a = 200$ m abgemessen und zwar so, dass man von deren Endpunkten die Spitze des Turmes und dessen Fusspunkt sehen kann. Dann wurden in C und D die Horizontalwinkel gemessen, welche die Standlinie CD mit den nach dem Fusspunkt B des Turmes gerichteten Visierlinien bildet und hierfür bezw. $\alpha = 98^0\,28'\,40''$ und $\beta = 57^0\,20'\,30''$ gefunden. Schliesslich wurde noch in C der Höhenwinkel δ gemessen, unter welchem von C aus die Spitze A des Turmes erscheint und hierfür $= 36^0\,44'\,20''$ gefunden. Wie kann man aus diesen Messungen die Höhe des Turmes berechnen?

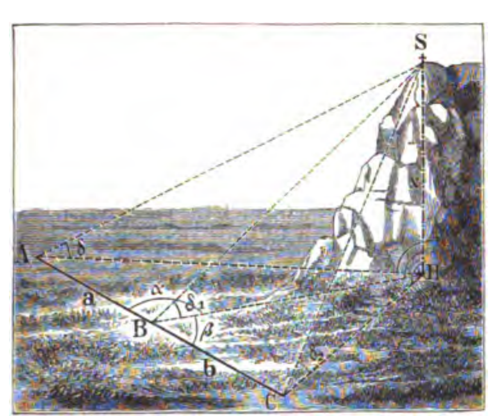
Andeutung. Von dem Dreieck BCD der Figur 443 kennt man, nach den stattgehabten Messungen, die Seite CD ($= a$), sowie die derselben anliegenden Winkel α und β; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite BC dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach BC berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck ABC die Kathete BC und den gemessenen Höhenwinkel δ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde, aus diesen Stücken die Kathete AB dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Höhe x des Turmes, berechnen.

Figur 443.



Aufgabe 1096. Zur Bestimmung der Höhe eines Berges in bezug auf eine vor demselben sich ausbreitende horizontale Ebene, wurden in letzterer drei in gerader Linie liegende Punkte A, B und C festgelegt und deren horizontale Entfernungen $AB = a = 1050$ m und $BC = b = 1640$ m gemessen. Dann wurden die Höhenwinkel gemessen, unter welchen die Spitze S des Berges von jedem jener drei Punkte A, B und C aus erscheint und hierfür bezw. $\delta = 24^0\,34'\,16''$, $\delta_1 = 31^0\,10'\,23''$ und $\delta_2 = 19^0\,46'\,38''$ gefunden. Wie kann man aus diesen Messungen die Höhe $SH\,(= x)$ des Berges berechnen?

Figur 444.



Andeutung. Aus den Dreiecken HBA und HBC, siehe Fig. 444, ergeben sich nach dem Projektionssatz:

$$\text{a)} \ldots \cos\alpha = \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{BH}}$$

und

$$\text{b)} \ldots \cos\beta = \frac{\overline{BC}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{CH}^2}{2\,\overline{BC}\cdot\overline{BH}}$$

Ferner ergeben sich aus den rechtwinkligen Dreiecken SHA, SHB u. SHC bezw.:

$$\text{c)} \ldots \overline{AH} = \frac{\overline{SH}}{\operatorname{tg}\delta}$$

$$\text{d)} \ldots \overline{BH} = \frac{\overline{SH}}{\operatorname{tg}\delta_1}$$

und

$$\text{e)} \ldots \overline{CH} = \frac{\overline{SH}}{\operatorname{tg}\delta_2}$$

(siehe Erkl. 96)

Berücksichtigt man nunmehr, dass α und β Supplementwinkel sind, dass also nach der Erkl. 94:

$$\cos\alpha = -\cos\beta$$

ist, dass sich hiernach aus den Gleichungen a) und b) die Relation:

$$\frac{\overline{AB}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2}{2\,\overline{AB}\cdot\overline{BH}} = -\frac{\overline{BC}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{CH}^2}{2\,\overline{BC}\cdot\overline{BH}}$$

oder:

$$\text{f)} \ldots \frac{\overline{AB}^2 + \overline{BH}^2 - \overline{AH}^2}{2\,\overline{AB}} = \frac{\overline{CH}^2 - \overline{BC}^2 - \overline{BH}^2}{2\,\overline{BC}}$$

ergibt, und setzt man in dieser Gleichung für $\overline{AH}$, $\overline{BH}$ und $\overline{CH}$ die Werte aus den Gleichungen c) bis e), und berücksichtigt man gleichzeitig, dass:

$$\overline{AB} = a$$

und

$$\overline{BC} = b$$

gemessen wurde, so erhält man:

$$\text{g)} \ldots\ldots \frac{a^2 + \dfrac{\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta_1} - \dfrac{\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta}}{2a} = \frac{\dfrac{\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta_2} - b^2 - \dfrac{\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta_1}}{2b}$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 64

$$\text{h)} \ldots \overline{SH} = \sin\delta\sin\delta_1\sin\delta_2 \cdot \sqrt{\frac{ab\,(a+b)}{a\sin(\delta+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)\sin^2\delta - b\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)\sin^2\delta_2}}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b, δ, δ_1 und δ_2 durch Messung gefundenen Resultate, die gesuchte Höhe SH ($= x$) des Berges berechnen kann.

Erkl. 648. Die nebenstehende Gleichung g) kann man wie folgt umformen:

$$2b\left[a^2+\overline{SH}^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta_1}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta}\right)\right]=2a\cdot\left[\overline{SH}^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta_2}-\frac{1}{\operatorname{tg}^2\delta_1}\right)-b^2\right]$$

$$2a^2b+2b\cdot\overline{SH}^2\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta_1}{\operatorname{tg}^2\delta\cdot\operatorname{tg}^2\delta_1}=2a\cdot\overline{SH}^2\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta_1-\operatorname{tg}^2\delta_2}{\operatorname{tg}^2\delta_2\cdot\operatorname{tg}^2\delta_1}-2ab^2$$

$$\frac{\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta_1}\cdot\left[2b\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta_1}{\operatorname{tg}^2\delta}-2a\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta_1-\operatorname{tg}^2\delta_2}{\operatorname{tg}^2\delta_2}\right]=-2ab^2-2a^2b$$

$$2a^2b+2ab^2=\frac{2\cdot\overline{SH}^2}{\operatorname{tg}^2\delta_1}\left[a\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta_1-\operatorname{tg}^2\delta_2}{\operatorname{tg}^2\delta_2}-b\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta_1}{\operatorname{tg}^2\delta}\right]$$

$$ab(a+b)\cdot\operatorname{tg}^2\delta_1=\overline{SH}^2\left[a\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta_1-\operatorname{tg}^2\delta_2}{\operatorname{tg}^2\delta_2}-b\cdot\frac{\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta_1}{\operatorname{tg}^2\delta}\right]$$

Setzt man nunmehr nach der in der Erkl. 649 angeführten goniometrischen Formel:

$$\operatorname{tg}^2\delta-\operatorname{tg}^2\delta_1=\frac{\sin(\delta+\delta_1)\cdot\sin(\delta-\delta_1)}{\cos^2\delta\cdot\cos^2\delta_1}$$

analog:

$$\operatorname{tg}^2\delta_1-\operatorname{tg}^2\delta_2=\frac{\sin(\delta_1+\delta_2)\cdot\sin(\delta_1-\delta_2)}{\cos^2\delta_1\cos^2\delta_2}$$

und nach der Erkl. 120:

$$\operatorname{tg}^2\delta_2=\frac{\sin^2\delta_2}{\cos^2\delta_2}$$

desgleichen:

$$\operatorname{tg}^2\delta=\frac{\sin^2\delta}{\cos^2\delta}$$

so erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$ab(a+b)\cdot\operatorname{tg}^2\delta_1=\overline{SH}^2\left[a\cdot\frac{\sin(\delta_1+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)}{\sin^2\delta_2\cos^2\delta_1}-b\cdot\frac{\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)}{\sin^2\delta\cos^2\delta_1}\right]$$

und hieraus ergibt sich:

$$\overline{SH}=\sqrt{\frac{ab(a+b)\operatorname{tg}^2\delta_1}{a\cdot\frac{\sin(\delta_1+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)}{\sin^2\delta_2\cos^2\delta_1}-b\cdot\frac{\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)}{\sin^2\delta\cos^2\delta_1}}}$$

oder:

$$\overline{SH}=\sqrt{\frac{ab\cdot(a+b)\cdot\sin^2\delta_1}{a\cdot\frac{\sin(\delta_1+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)}{\sin^2\delta_2}-b\cdot\frac{\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)}{\sin^2\delta}}}$$

$$\overline{SH}=\sqrt{\frac{ab(a+b)\cdot\sin^2\delta\sin^2\delta_1\sin^2\delta_2}{a\cdot\sin(\delta_1+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)\sin^2\delta-b\cdot\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)\sin^2\delta_2}}$$

mithin:

$$\overline{SH}=\sin\delta\sin\delta_1\sin\delta_2\cdot\sqrt{\frac{ab(a+b)}{a\cdot\sin(\delta_1+\delta_2)\sin(\delta_1-\delta_2)\cdot\sin^2\delta-b\cdot\sin(\delta+\delta_1)\sin(\delta-\delta_1)\sin^2\delta_2}}$$

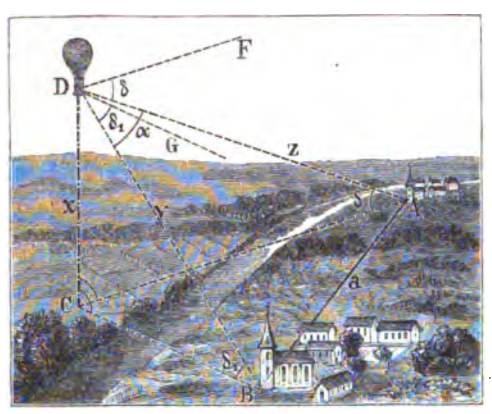
Erkl. 649. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$$

(Siehe Formel 221 in dem Lehrbuch der Goniometrie.)

Aufgabe 1097. Von einem Luftballon aus sieht man die Kirchtürme zweier in derselben horizontalen Ebene liegenden Orte A und B, deren horizontale Entfernung $a = 7^1/_2$ km beträgt, bezw. unter den Tiefenwinkeln $\delta = 67^0\,48'$ und $\delta_1 = 32^0\,40'$; wie hoch befindet sich in diesem Augenblick der Ballon über jener Horizontalebene, wenn die scheinbare Entfernung der Orte A und B zur Zeit der Messung jener Tiefenwinkel in dem Ballon $\alpha = 24^0\,36'$ beträgt?

Figur 445.



Andeutung. Aus den rechtwinkligen Dreiecken DCA und DCB, siehe Fig. 445, ergeben sich, in Rücksicht, dass:

$$\sphericalangle CAD = \sphericalangle ADF \text{ oder } = \delta$$

und

$$\sphericalangle CBD = \sphericalangle BDG \text{ oder } = \delta_1$$

ist, bezw. die Relationen:

$$\text{a)} \ldots \sin\delta = \frac{x}{z}$$

und

$$\text{b)} \ldots \sin\delta_1 = \frac{x}{y}$$

Ferner ergibt sich aus dem schiefwinkligen Dreieck DAB nach dem Projektionssatz die Relation:

$$\text{c)} \ldots a^2 = y^2 + z^2 - 2yz\cdot\cos\alpha$$

Setzt man die für z und y aus den Gleichungen a) und b) sich ergebenden Werte:

$$z = \frac{x}{\sin\delta}$$

und

$$y = \frac{x}{\sin\delta_1}$$

in Gleichung c), so erhält man in bezug auf x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{d)}\ .\ a^2 = \frac{x^2}{\sin^2\delta} + \frac{x^2}{\sin^2\delta_1} - 2\cdot\frac{x}{\sin\delta}\cdot\frac{x}{\sin\delta_1}\cdot\cos\alpha$$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 650:

$$\text{A)}\ .\ x = \frac{a\cdot\sin\delta\sin\delta_1}{\sqrt{\sin^2\delta_1 + \sin^2\delta - 2\sin\delta\sin\delta_1\cos\alpha}}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für a gegebenen Wertes und in Rücksicht der für δ, δ_1 und α in dem Ballon gemessenen Werte, die gesuchte Höhe DC ($= x$) des Ballons über der horizontalen Ebene berechnen kann.

Erkl. 650. Aus der nebenstehenden Gleichung d) erhält man x wie folgt:

$$a^2\cdot\sin^2\delta\sin^2\delta_1 = x^2\sin^2\delta_1 + x^2\sin^2\delta - 2x^2\sin\delta\sin\delta_1\cos\alpha$$

$$a^2\sin^2\delta\sin^2\delta_1 = x^2[\sin^2\delta_1 + \sin^2\delta - 2\sin\delta\sin\delta_1\cos\alpha]$$

$$x^2 = \frac{a^2\sin^2\delta\sin^2\delta_1}{\sin^2\delta_1 + \sin^2\delta - 2\sin\delta\sin\delta_1\cos\alpha}$$

mithin:

$$x = \frac{a\sin\delta\sin\delta_1}{\sqrt{\sin^2\delta_1 + \sin^2\delta - 2\sin\delta\sin\delta_1\cos\alpha}}$$

Aufgabe 1098. Ein Beobachter befindet sich auf einem alten Wartturm, durch welchen eine gerade Landstrasse führt. An dieser Landstrasse steht in einer Entfernung $b = 100$ m vom Fusspunkt des Turmes ein Kilometerstein D; 140 m weiter ist an der Landstrasse durch einen grossen Grenzstein C die Landesgrenze gekennzeichnet. Dem Beobachter auf dem Turm erscheint die Entfernung zwischen jenen beiden Steinen unter einem Gesichtswinkel $\alpha = 4^0\,30'$. Wie

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 446, den Winkel β, welchen der

hoch müsste sich nach diesen Angaben der Beobachter über dem Fusspunkt des Turmes befinden?

Figur 446.



Erkl. 651. Eine goniometrische Formel heisst:

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$$

(Siehe Formel 171 in dem Lehrbuch der Goniometrie.)

von A nach D gehende Sehstrahl mit der durch den Beobachtungspunkt A gehenden Vertikallinie AB bildet, wie folgt:

Aus den rechtwinkligen Dreiecken ABC und ABD ergeben sich bezw. die Relationen:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{a+b}{\overline{AB}}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \overline{AB} = \frac{a+b}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$

und

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{b}{\overline{AB}}$$

oder:

$$\text{b)} \ldots \overline{AB} = \frac{b}{\operatorname{tg}\beta}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt die Relation:

$$\frac{b}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a+b}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots \frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a+b}{b}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\beta} = \frac{a+b+b}{a+b-b}$$

oder, wenn man die in der Erkl. 651 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt, indem man in derselben:

$$\alpha = \alpha + \beta$$

$$\text{und} \quad \beta = \beta$$

setzt:

$$\frac{\sin(\alpha+\beta+\beta)}{\sin(\alpha+\beta-\beta)} = \frac{a+2b}{a}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots \sin(\alpha+2\beta) = \frac{a+2b}{a} \cdot \sin\alpha$$

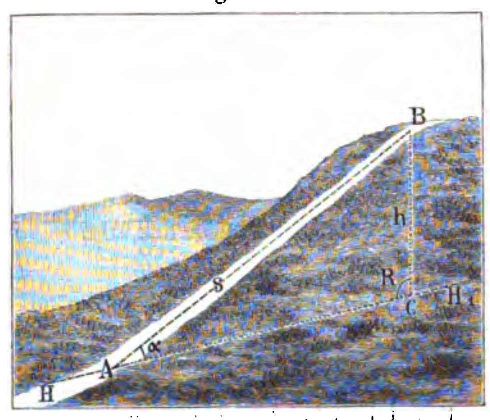
nach welcher Gleichung man zunächst $\alpha+2\beta$ berechnen kann. Aus diesem für $\alpha+2\beta$ gefundenen und dem für α gegebenen Wert kann man im weiteren leicht den Winkel β berechnen. Ist hiernach β gefunden, so benütze man zur Berechnung der gesuchten Höhe AB die aus dem rechtwinkligen Dreieck ABD sich ergebende Relation:

$$\text{B)} \ldots \overline{AB} = b \cdot \operatorname{ctg}\beta \text{ (siehe Erkl. 43).}$$

g) Aufgaben über die Berechnung von Höhen aus gemessenen Strecken und Höhenwinkeln.

***Aufgabe 1099.** Ein Weg von $s = 856{,}6$ m Länge führt unter einem Neigungswinkel $\alpha = 19^0\ 10'\ 18''$ auf einen Berg; wie hoch ist der Berg?

Figur 447.



Erkl. 652. Unter dem Neigungswinkel einer Strasse (eines Weges etc.) versteht man den Winkel, welchen die Ebene der Strasse mit irgend einer Horizontalebene bildet.

Denkt man sich durch eine Strasse eine zu einer Horizontalebene senkrechte Ebene, eine sogen. Vertikalebene gelegt, so schliessen (siehe Figur 447) die Durchschnitte (AB und AC) der Strassenebene, sowie der Horizontalebene mit der gedachten Vertikalebene, den Neigungswinkel α jener beiden Ebenen ein.

Erkl. 653. Unter dem Neigungswinkel zweier Ebenen versteht man den Winkel, welchen die zwei Linien mit einander bilden, die in einem beliebigen Punkt der Durchschnittslinie beider Ebenen senkrecht zu dieser Durchschnittslinie gezogen werden, und zwar so, dass die eine dieser Senkrechten in der einen Ebene, die andere aber in der zweiten Ebene zu liegen kommt.

Andeutung. Denkt man sich, siehe Figur 447, durch den Anfangspunkt A des Weges AB die Horizontale HH_1 gezogen und von der Spitze des Berges das Perpendikel BC auf dieselbe gefällt, so ist in dem hierdurch entstehenden rechtwinkligen Dreieck ABC der Winkel α gleich dem gegebenen Neigungswinkel des Weges, die Kathete BC ist die zu berechnende Höhe h des Berges und die Hypotenuse ist gleich der gegebenen Weglänge s (siehe die Erkl. 652).

Aus dem Dreieck ACB ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h}{s}$$

und hieraus erhält man:

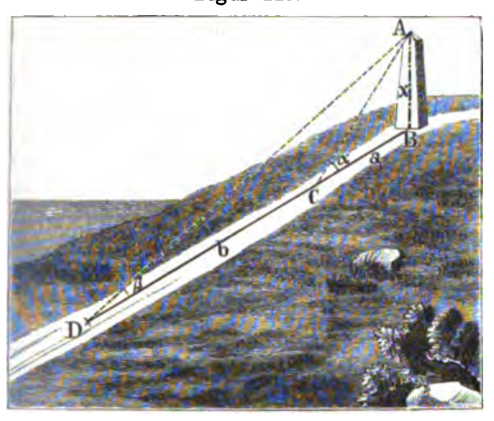
A) . . . $h = s \cdot \sin\alpha$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für s und α gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Höhe h berechnen kann.

Aufgabe 1100. Auf einem Abhang steht ein Obelisk. Zur Bestimmung von dessen Höhe wurde vom Fusspunkt desselben, den Abhang herab, die Strecke $a = 8{,}1$ m gemessen und in dem Endpunkt derelben mittels eines Sextanten der Winkel α gemessen, welchen diese Strecke mit der nach der Spitze des Obelisken gerichteten Visierlinie bildet, und hierfür $50^0\ 40'$ gefunden; dann wurde in der Richtung jener Strecke a weiter, eine zweite Strecke $b = 7{,}2$ m gemessen und in deren Endpunkt in derselben Weise der

Winkel β bestimmt, welchen diese Strecke mit der nach der Spitze des Obelisken gerichteten Visierlinie bildet, und hierfür 32^0 $20'$ gefunden. Welche Höhe muss nach diesen Messungen der Obelisk haben?

Figur 448.

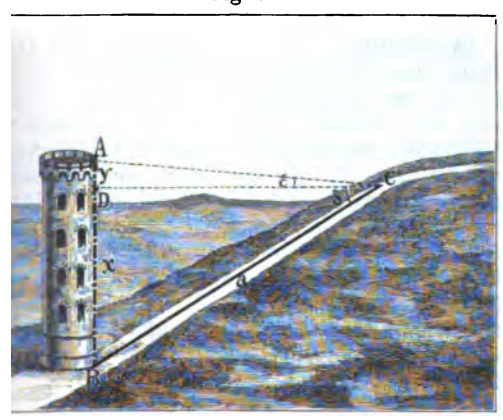


Andeutung. In dem Dreieck ACD, siehe Figur 448, kennt man die Seite b und die derselben anliegenden Winkel ADC $(=\beta)$ und ACD $(=2R-\alpha)$; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seite AC dieses Dreiecks berechnen. Ist diese Seite berechnet, so kennt man von dem Dreieck ABC die Seiten AC und BC $(=a)$, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel α; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite AB, d. i. die gesuchte Höhe x des Obelisken, berechnen.

---

* **Aufgabe 1101.** Am Fusse einer schief abfallenden Strasse steht ein Turm. Zur Bestimmung der Höhe dieses Turmes wurde von einem Punkt C der Strasse aus nach dem Fusspunkt B des Turmes die Standlinie $CB = a = 162$ m abgemessen; ferner wurde in C beobachtet, dass der Höhenwinkel ε der Turmspitze $= 24^0\ 33'\ 20''$ und der Tiefenwinkel δ des Fusspunktes des Turmes $= 21^0\ 0'\ 30''$ beträgt, welche Höhe ergibt sich hiernach für den Turm?

Figur 449.



Andeutung. Für die gesuchte Höhe AB des Turmes besteht, siehe Figur 449, die Relation:

$$\overline{AB} = x + y$$

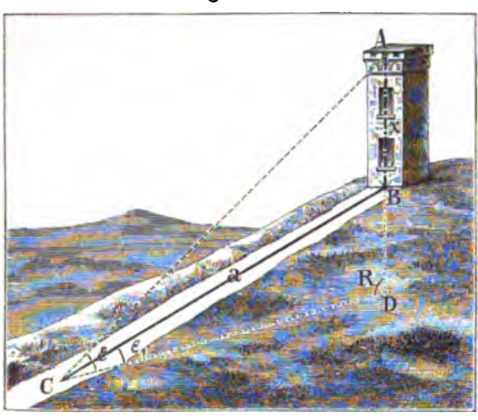
In dem rechtwinkligen Dreieck CDB kennt man die Hypotenuse CB $(=a)$ und den Winkel δ; man kann somit die Katheten DB $(=x)$ und CD berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 5 gezeigt wurde. Ist hiernach CD berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck CDA, die Kathete CD und den Winkel ε; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde, hieraus die Kathete y berechnen.

---

* **Aufgabe 1102.** Zur Bestimmung der Höhe eines auf einem Berg stehenden Turmes, nach dessen Fusspunkt ein gerader Weg führt, wurde von einem Punkt C dieses Weges

aus direkt nach dem Fusspunkt B des Turmes gemessen und für die Entfernung dieser Punkte $a = 185$ m gefunden; ferner wurden in C die Höhenwinkel der Turmspitze A und des Fusspunktes B des Turmes gemessen, und dafür bezw. $\varepsilon = 36^0\,28'\,40''$ und $\varepsilon_1 = 22^0\,10'\,20''$ gefunden. Wie kann man aus diesen Messungen die Höhe AB des Turmes berechnen?

Figur 450.

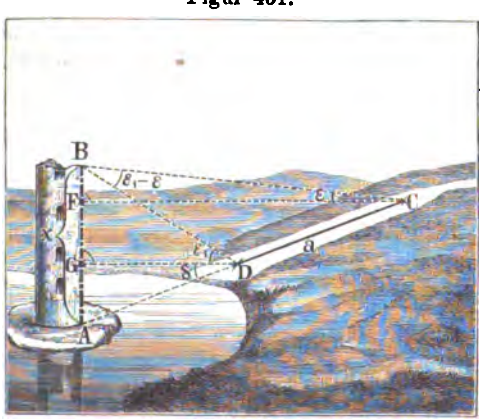


Andeutung. Von dem rechtwinkligen Dreieck BDC der Figur 450 kennt man die Hypotenuse $BC\,(= a)$ und den Winkel ε_1; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 5 gezeigt, hieraus die Katheten CD und BD dieses Dreiecks berechnen. Nach dieser Berechnung kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck ADC, die Kathete CD und den Winkel ε; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt, die Kathete AD dieses Dreiecks berechnen. Die gesuchte Höhe $AB\,(= x)$ des Turmes findet man alsdann nach der Relation:

$$x = \overline{AD} - \overline{BD}$$

Aufgabe 1103. Ein Beobachter befindet sich auf einem Berg und hat zur Bestimmung der Höhe eines im Thal befindlichen sichtbaren Turmes eine Standlinie CD ($= a = 40$ m) in der Richtung nach dem Fusspunkt jenes Turmes abgemessen; ferner hat er in den Endpunkten C und D jener Standlinie die Höhenwinkel ε und ε_1 der Turmspitze gemessen, hierfür bezw. $= 16^0\,20'\,30''$ und $46^0\,30'$ gefunden, schliesslich hat er noch in D den Tiefenwinkel δ des Fusspunktes des Turmes gemessen und hierfür $20^0\,40'\,32''$ gefunden. Welche Höhe muss nach diesen Angaben der Turm haben?

Figur 451.



Andeutung. Von dem Dreieck BCD, siehe Figur 451, kennt man die Seite CD $(= a)$, den Winkel BDC $[= 2R - (\varepsilon_1 + \delta)]$ und den Winkel DBC $(= \varepsilon_1 - \varepsilon$, siehe Erkl. 654); man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, hieraus die Seite DB dieses Dreiecks berechnen. Ist diese Seite DB berechnet, so kennt man von dem Dreieck BDA die Seite BD, den Winkel BDA $(= \varepsilon_1 + \delta)$ und den Winkel ABD $(= 90^0 - \varepsilon_1$, siehe Erkl. 654); man kann somit, wie in Auflösung jener Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite AB, d. i. die gesuchte Höhe x des Turmes, berechnen.

Erkl. 654. In dem rechtwinkligen Dreieck CFB der Figur 451 ist:

a) . . . $\sphericalangle FBC = 90^0 - \varepsilon$

ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck DGB:

b) . . . $\sphericalangle GBD = 90^0 - \varepsilon_1$

Da nun für den Winkel DBC des schiefwinkligen Dreiecks BCD, wie sich aus der Figur ergibt, die Relation besteht:

$$\sphericalangle DBC = \sphericalangle FBC - \sphericalangle GBD$$

so ergibt sich hieraus in Rücksicht der Gleichungen a) und b) für diesen Winkel:

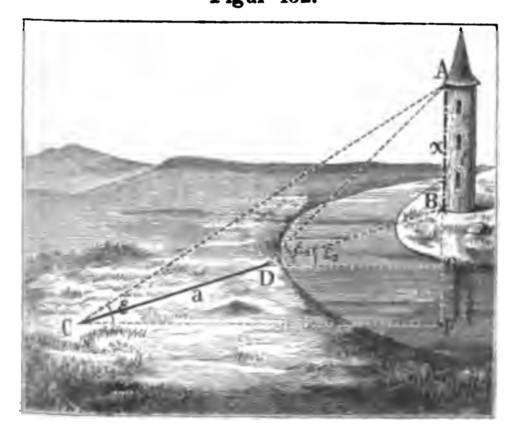
$$\sphericalangle DBC = 90^0 - \varepsilon - (90^0 - \varepsilon_1)$$

oder:

c) . . . $\sphericalangle DBC = \varepsilon_1 - \varepsilon$

Aufgabe 1104. Zur Bestimmung der Höhe eines auf einer Anhöhe stehenden Festungsturmes, vor welchem sich ein tiefer und breiter Graben befindet, wurde in der Richtung nach dem sichtbaren Fusspunkt desselben eine Standlinie $CD = a = 86$ m gemessen; ferner wurden in C und D die Höhenwinkel ε und ε_1 der Spitze des Turmes gemessen und hierfür bezw. $41^0\,26'\,30''$ und $58^0\,0'\,40''$ gefunden; schliesslich wurde noch in D der Höhenwinkel ε_2 des Fusspunktes gemessen und dafür $25^0\,40'\,10''$ gefunden. Welche Höhe müsste nach diesen Messungen der Turm haben?

Figur 452.



Andeutung. In dem schiefwinkligen Dreieck ACD der Figur 452 kennt man die Seite $CD\,(= a)$, den Winkel $ADC\ [= 2R - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$, siehe Erkl. 655] und den Winkel $CAD\ (= \varepsilon_1 - \varepsilon$, siehe Erkl. 656); man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite AD (oder auch die Seite AC) dieses Dreiecks berechnen. Ist hiernach diese Seite berechnet, so kennt man von dem schiefwinkligen Dreieck ABD die Seite AD, den Winkel $ADB\ (= \varepsilon_1 - \varepsilon_2)$ und den Winkel $DAB\ (= 90^0 - \varepsilon_1$, siehe Erkl. 656); man kann somit, analog wie vorhin angegeben, hieraus die Seite AB dieses Dreiecks, d. i. die gesuchte Höhe x des Turmes, berechnen.

Erkl. 655. In der Figur 452 ist:

$$\sphericalangle CDA = 2R - \sphericalangle ADB$$

Da nun:

$$\sphericalangle ADB = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$\sphericalangle CDA = 2R - (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)$$

ist.

Erkl. 656. In dem rechtwinkligen Dreieck AFC der Figur 452 ist:

a) . . . $\sphericalangle\, CAF = 90^0 - \varepsilon$
ferner ist in dem rechtwinkligen Dreieck AGD:

b) . . . $\sphericalangle\, DAG = 90^0 - \varepsilon_1$

Da nun in dem schiefwinkligen Dreieck CAD:

$$\sphericalangle\, CAD = \sphericalangle\, CAF - \sphericalangle\, DAG$$

ist, so ergibt sich hieraus und in Rücksicht der Gleichungen a) und b):

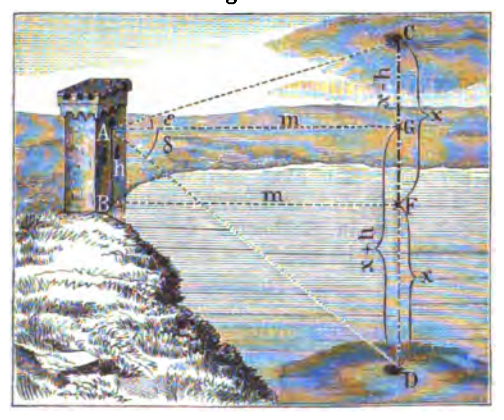
$$\sphericalangle\, CAD = (90^0 - \varepsilon) - (90^0 - \varepsilon_1)$$

oder:

c) . . . $\sphericalangle\, CAD = \varepsilon_1 - \varepsilon$

Aufgabe 1105. Ein Beobachter, der sich $h = 18{,}085$ m über der Oberfläche eines Teiches befindet, beobachtet eine Wolke und zugleich das Spiegelbild derselben im Wasser, und findet für den Höhenwinkel ε der Wolke selbst $= 54^0\, 32'\, 18''$, für den Tiefenwinkel δ des Spiegelbildes der Wolke in dem Teich $= 57^0\, 40'\, 14''$. Wie hoch befindet sich die Wolke über dem Teich?

Figur 453.



Erkl. 657. Aus nebenstehender Gleichung c) erhält man x wie folgt:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{x+h}{x-h}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so ergibt sich:

$$\frac{\operatorname{tg}\delta + \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{(x+h)+(x-h)}{(x+h)-(x-h)}$$

oder, nach gehöriger Reduktion und nach Anwendung der in der Erkl. 651 angeführten goniometrischen Formel:

$$\frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\delta-\varepsilon)} = \frac{2x}{2h}$$

und hieraus erhält man:

$$x = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\delta-\varepsilon)} \cdot h$$

Andeutung. In Figur 453 sei A der Ort des Beobachters, welcher sich in der Höhe $AB\ (= h)$ über der Oberfläche des Teiches befindet; C sei ein Punkt der beobachtenden, über dem Teich schwebenden Wolke, und D sei das Spiegelbild dieses Punktes der Wolke in dem Teich.

Denkt man sich, wie in der Figur angedeutet, die Punkte C und D verbunden, so wird diese Verbindungslinie durch die Oberfläche des Teiches halbiert, es ist also:

a) . . . $\overline{CF} = \overline{FD}$ oder $= x$

Denkt man sich ferner durch A zur Oberfläche des Teiches die Parallele AG gezogen und A mit C und mit D verbunden, so ist $\sphericalangle\, CAG$ der gemessene Höhenwinkel ε, unter welchem die Wolke selbst dem Beobachter in A erscheint; ferner ist $\sphericalangle\, GAD$ der gemessene Tiefenwinkel δ, unter welchem das Spiegelbild D der Wolke in dem Teich dem Beobachter in A erscheint.

Aus den rechtwinkligen Dreiecken AGC und AGD erhält man bezw.:

$$\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{\overline{CG}}{\overline{AG}}$$

und

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{\overline{DG}}{\overline{AG}}$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich, in Rücksicht, dass:

$$\overline{CG} = \overline{CF} - \overline{GF} \text{ oder } = x - h$$

und

$$\overline{DG} = \overline{DF} + \overline{FG} \text{ oder } = x + h$$

ist, bezw.:

a) . . . $\overline{AG} = \dfrac{x-h}{\operatorname{tg}\varepsilon}$

und

b) . . . $\overline{AG} = \dfrac{x+h}{\operatorname{tg}\delta}$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man in bezug auf x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{c)} \ldots \quad \frac{x-h}{\operatorname{tg}\varepsilon} = \frac{x+h}{\operatorname{tg}\delta}$$

woraus sich nach der Erkl. 657:

$$\text{A)} \ldots \quad x = \frac{\sin(\delta+\varepsilon)}{\sin(\delta-\varepsilon)} \cdot h$$

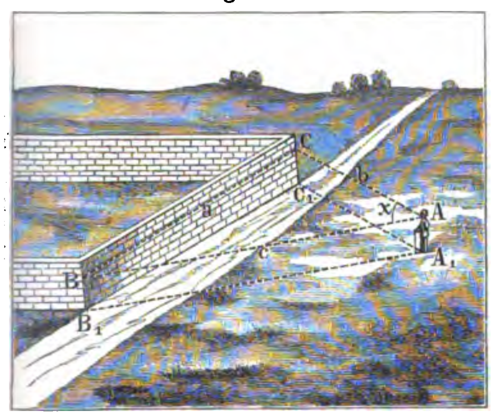
ergibt, nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für δ, ε und h durch Messung gefundenen Werte, die gesuchte Höhe x der Wolke über dem Teich berechnen kann.

---

h) Aufgaben über die Berechnung von Winkeln aus gemessenen Strecken, auch Aufgaben über das sog. Centrieren von Winkeln.

Aufgabe 1106. Unter welchem Sehwinkel wird eine $a = 120$ m lange Mauer von einem Punkt aus gesehen werden, dessen Entfernung von dem einen Ende der Mauer $b = 250$ m und von dem andern Ende der Mauer $c = 400$ m beträgt?

Figur 454.



Andeutung. Ist, siehe Figur 454, A der Punkt, welcher von dem einen Ende C der Mauer $b = 250$ m, von dem andern Ende B der Mauer $c = 400$ m entfernt ist, so ist x der gesuchte Seh- oder Gesichtswinkel, unter welchem dem in A befindlichen Auge eines Beobachters die Länge BC ($= a = 120$ m) erscheint.

Da man von dem Dreieck ABC die drei Seiten kennt, so kann man den gesuchten Winkel x berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde.

Aufgabe 1107. Die Länge der Achse einer geraden Strasse beträgt $c = 900$ m; wird diese Strassenachse horizontal gemessen, so erhält man für deren horizontale Länge $a = 850$ m; welchen Winkel bildet die Strassenachse mit einer Horizontalebene? oder: welcher ist nach der Erkl. 652 der Neigungswinkel der Strasse?

Andeutung. Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC der Figur 455, in welchem AB ($= c$) die wirkliche Länge der Strassenachse, BC ($= a$) deren horizontale Projektion, bezw. deren horizontale Länge vorstellt, kennt man die Hypotenuse c und die Kathete a; man kann somit den gesuchten Winkel x berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 2 gezeigt wurde (siehe die Erkl. 658).

Erkl. 658. Ist in dem rechtwinkligen Dreieck ABC (siehe Figur 455), die Hypotenuse c von der Kathete a nur sehr wenig verschieden (wie bei dem in Aufgabe 1107 gegebenen Zahlenbeispiel), so ist die andere Kathete b, sowie der derselben gegenüberliegende Winkel x sehr klein. Zur genauen Berechnung solcher kleiner Winkel kann man wie folgt verfahren:

Man berechne zunächst die dem kleinen Winkel x gegenüberliegende Kathete b wie folgt:

Nach dem pythagoreischen Lehrsatz ist, siehe Figur 455:

$$a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass die einem kleinen Winkel x gegenüberliegende Kathete b sehr klein ist, nach der Erkl. 659:

$$a = c - \frac{1}{2} \cdot \frac{b^2}{c}$$

aus welcher Gleichung sich für jene Kathete b:

$$\text{a)} \ldots b = \sqrt{2(c-a)c}$$

ergibt.

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB:

$$\sin x = \frac{b}{c}$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$\text{b)} \ldots \sin x = \frac{\sqrt{2(c-a)c}}{c}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass, wenn x ein in Sekunden ausgedrückter, d. h. ein zwischen 1″ und 60″ liegender Winkel, also ein sehr kleiner Winkel ist, nach den Erkl. 660 und 662:

$$\sin x'' = x \cdot 0{,}00000484813681109$$

mindestens bis auf elf Dezimalen genau ist, so geht in Rücksicht dessen die Gleich. b) über in:

$$x \cdot 0{,}00000484813681109 = \frac{\sqrt{2(c-a)c}}{c}$$

oder, wenn man berücksichtigt, dass:

$$0{,}00000484813681109$$

in einen Stammbruch ausgedrückt, nach der Erkl. 664

$$= \frac{1}{206265}$$

ist:

$$x \cdot \frac{1}{206265} = \frac{\sqrt{2(c-a)c}}{c}$$

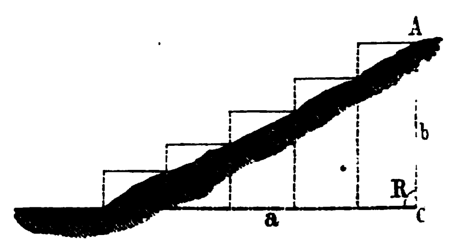
und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots x = 206265 \cdot \frac{\sqrt{2(c-a)c}}{c} \text{ Sekunden}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und c gegebenen und wenig verschiedenen Werte den in Sekunden ausgedrückten Winkel x direkt ohne eine log.-trigonometrische Tafel berechnen kann.

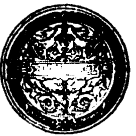
Erkl. 659. Aus $\sqrt{c^2 - b^2}$ erhält man nach den Regeln der Quadratwurzelausziehung (siehe das Lehrbuch der Potenzen und Wurzeln):

Figur 455.



Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

355. Heft. Preis des Heftes 25 Pf. Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 354. — Seite 785—800. Mit 20 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 354. — Seite 785—800. Mit 20 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der praktischen Geometrie, Fortsetzung: Aufgaben über die Berechnung von Gegenständen, deren Dimensionen bekannt sind, aus beobachteten Sehwinkeln. — Aufgaben über die Bestimmung der Entfernung, in welcher einem gesunden unbewaffneten Auge ein runder Gegenstand von bekannter Dimension verschwindet, etc. — Aufgaben über die Bestimmung der kleinsten Entfernung, in welcher einem gesunden Auge ein in Bewegung befindlicher Gegenstand stillzustehen scheint, etc. — Aufgaben über die Teilung von Grundstücken, Grenzregulierungen und Flächenbestimmungen.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen zu lösen haben, zugleich** aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften **vorgeführt.**

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils der mathematischen** Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen **aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der** Verfasser Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und **wird deren** Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

$$\sqrt{c^2 - b^2} = c - \frac{b^2}{2c} - \frac{b^4}{8c^3} - \cdots$$
$$\pm c^2$$
$$2c \,|\, -b^2$$
$$-b^2 + \frac{b^4}{4c^2}$$
$$+ \quad -$$
$$2c - \frac{b^2}{c} \,\Big|\, -\frac{b^4}{4c^2}$$
$$\mp \frac{b^4}{4c^2} \pm \frac{b^6}{8c^4} \pm \frac{b^{16}}{64c^6}$$
$$-\frac{b^6}{8c^4} - \frac{b^{16}}{64c^6} \text{ u. s. f.}$$

Ist b gegen c sehr klein, so ist der Wert des Bruches $\frac{b^2}{2c}$ sehr klein, der Wert des Bruches $\frac{b^4}{8c^3}$ gegen jenen ist noch kleiner u.s.f.; man kann deshalb, ohne einen groben Fehler zu begehen, die Glieder obiger Wurzel, vom dritten ab vernachlässigen, und abgerundet:

$$\sqrt{c^2 - b^2} = c - \frac{b^2}{2c}$$

setzen.

Erkl. 660. Bis auf fünf Dezimalen genau ist:

a) . . . $\sin 1^0 = \operatorname{tg} 1^0 = \operatorname{arc} 1^0 = 0{,}01745$ (siehe Erkl. 661)

Bis auf elf Dezimalen genau ist:

b) . . . $\sin 1' = \operatorname{tg} 1' = \operatorname{arc} 1' = 0{,}00029088209$

Bis auf sechszehn Dezimalen genau ist:

c) . . . $\sin 1'' = \operatorname{tg} 1'' = \operatorname{arc} 1'' = 0{,}0000048481368110\,9$ (siehe Erkl. 661)

Erkl. 661. Unter arc 1^0, arc $1'$, arc $1''$ versteht man den Bogen eines Kreises mit dem Radius $r = 1$, welcher zu einem Centriewinkel gehört, der bezw. 1^0, $1'$ oder $1''$ ist.

Die Relation:

$$2r\pi : \operatorname{bog}\alpha = 360^0 : \alpha^0 \quad \text{(siehe Erkl. 459)}$$

geht für den Fall, dass:

$$r = 1$$

und $\qquad \alpha = 1^0$ bezw. $= 1'$ oder $= 1''$

ist, bezw. über in:

a) . . . $2\pi : \operatorname{arc} 1^0 = 360^0 : 1^0$

b) . . . $2\pi : \operatorname{arc} 1' = 360 \cdot 60' : 1'$

und

c) . . . $2\pi : \operatorname{arc} 1'' = 360 \cdot 60 \cdot 60'' : 1''$

aus welchen Relationen man bezw. arc 1^0, arc $1'$ und arc $1''$ berechnen kann (siehe Erkl. 665).

Erkl. 662. Nach den Erkl. 660 und 663 ist, wenn allgemein x einen in Minuten ausgedrückten Winkel bedeutet, also einen beliebigen zwischen $1'$ und $60'$ ($= 1^0$) liegenden Wert hat:

a) . . . $\sin x' = \operatorname{tg} x' = \operatorname{arc} x' = x \cdot \operatorname{arc} 1' = x \cdot 0{,}00029088209$

mindestens bis auf fünf Dezimalen genau

Bezeichnet allgemein x einen in Sekunden ausgedrückten Winkel, also einen beliebigen zwischen 1″ und 60″ (= 1′) liegenden Winkel hat, so ist nach den Erkl. 660 und 663:

b) . . . $\sin x'' = \operatorname{tg} x'' = \operatorname{arc} x'' = x \cdot \operatorname{arc} 1'' = x \cdot 0{,}00000484813681109$

mindestens bis auf elf Dezimalen genau.

Erkl. 663. Nach dem planimetrischen Lehrsatz:

„Bogen eines und desselben Kreises sind proportional den zu diesen Bogen gehörigen Centriewinkeln“ ist:

a) . . . $\operatorname{arc} \alpha'' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1''$

b) . . . $\operatorname{arc} \alpha' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1'$

Erkl. 664. Den Dezimalbruch:

0,0000048481368111

in einen Stammbruch verwandelt, gibt:

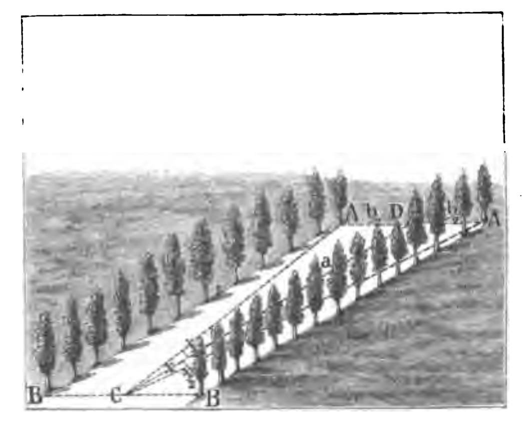
$$\frac{48481368111}{10000000000000000} = \frac{48481368111 : 48481368111}{10000000000000000 : 4848136811} = \frac{1}{206265}$$

Erkl. 665. Ausführliches über das in den Erkl. 660 bis 664 Gesagte findet man in dem Lehrbuch der Goniometrie, Abschnitt 23.

---

* **Aufgabe 1108.** Eine $a = 2000$ m lange und $b = 35$ m breite Allee verbindet den Ort A mit dem Ort B. Unter welchem Gesichtswinkel erscheint einem Beobachter das eine Ende der Allee, wenn er sich am andern Ende in der Mitte derselben aufstellt?

Figur 456.



Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck CDA, siehe Figur 456, ergibt sich die Relation:

a) . . . $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{b}{2} : a$

Da die Kathete $AD \left(= \frac{b}{2}\right)$ gegen die Kathete CD (= a) in Rücksicht der in der Aufgabe gegebenen Zahlenwerte sehr klein ist, mithin auch der Winkel $\frac{x}{2}$ ein sehr kleiner sein muss, so beachte man, dass nach der Erkl. 662 mindestens bis auf elf Dezimalen genau:

b) . . . $\operatorname{tg} \frac{x''}{2} = \frac{x}{2} \cdot \operatorname{arc} 1''$

$$= \frac{x}{2} \cdot 0{,}00000484813681109$$

ist. In Rücksicht dessen geht die vorstehende Gleichung a), unter der Voraussetzung, dass $\frac{x}{2}$ ein zwischen 1″ und 60″ liegender Winkel bedeutet, über in:

$$\frac{x}{2} \cdot 0{,}00000484813681109 = \frac{b}{2a}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Erkl. 664:

$$\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{206265} = \frac{b}{2a}$$

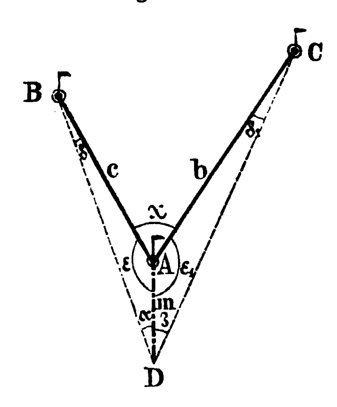
oder:

A) . . . $x = \frac{b}{a} \cdot 206265$ Sekunden

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte, den in Sekunden ausgedrückten Winkel x berechnen kann.

Aufgabe 1109. Man soll die Grösse eines gedachten Horizontalwinkels, dessen Scheitelpunkt unzugänglich ist, durch Winkelmessungen, welche in der Nähe des Scheitelpunkts ausgeführt werden, bestimmen.

Figur 457.



Erkl. 666. Das in nebenstehender Auflösung angegebene Verfahren zur Bestimmung eines Horizontalwinkels, in dessen Scheitelpunkt man kein Winkelmessinstrument, wohl aber ein solches in der Nähe desselben aufstellen kann, nennt man in der Praxis „das Centrieren der Winkel."

Dieses Verfahren muss oft angewandt werden bei Landesvermessungen und sonstigen grösseren Messungen (Aufnahmen), bei welchen die Festlegung eines Dreiecksnetzes (eine sog. Triangulation) erforderlich ist, dessen Ecken, z. B. Spitzen von Kirchtürmen und anderen hohen Gegenständen bilden, da in solchen Punkten die Aufstellung von Winkelmessinstrumenten nicht möglich ist.

Auflösung. Soll, siehe Figur 457, der Horizontalwinkel x bestimmt werden, welchen die beiden von dem Punkt A ausgehenden horizontalen Strecken AB ($= c$) und AC ($= b$) mit einander bilden, und kann in dem Scheitel A des Winkels x ein Winkelmessinstrument zum direkten Messen dieses Winkels nicht aufgestellt werden (s. Erkl. 666), so wähle man in der Nähe von A einen andern Standpunkt D, in welchem man das Winkelmessinstrument aufstellen und nach den Punkten A, B und C sehen kann, messe dann die horizontale Entfernung m, sowie die horizontalen Winkel α und β. Aus diesen gemessenen Stücken und den als bekannt vorausgesetzten horizontalen Entfernungen b und c kann man den Winkel x wie folgt berechnen:

Aus den Dreiecken BAD und CAD ergeben sich nach der Sinusregel:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\alpha} = \frac{m}{c}$$

oder:

a) . . . . . $\sin\delta = \frac{m \cdot \sin\alpha}{c}$

und

$$\frac{\sin\delta_1}{\sin\beta} = \frac{m}{b}$$

oder:

b) . . . . $\sin\delta_1 = \frac{m \cdot \sin\beta}{b}$

Berücksichtigt man nunmehr, dass die Dreiecksseite AD ($= m$) gegen die beiden andern Dreiecksseiten der Dreiecke BAD und CAD stets sehr klein ist (siehe Erkl. 666), dass somit die Winkel δ und δ_1 ebenfalls nur sehr kleine Winkel sein können, so kann man nach der Erkl. 662 mindestens bis auf elf Dezimalen genau:

$\sin\delta'' = \delta \cdot \text{arc } 1'' = \delta \cdot 0{,}0000048481368111$

desgl.:

$\sin\delta_1'' = \delta_1 \cdot \text{arc } 1'' = \delta_1 \cdot 0{,}0000048481368111$

Erkl 667. Das Centrieren eines Winkels (siehe Erkl. 666), erfordert stets, dass man:

1) die Länge der Winkelschenkel AB und AC, siehe Figur 457, kennt;
bei Triangulationen können dieselben stets aus den Seiten des anstossenden Dreiecks berechnet werden,

dass:

2) der Punkt D so gewählt ist, dass man die horizontalen Winkel α und β messen kann, und dass

3) der Punkt D so gewählt ist, dass man die Entfernung AD ($= m$) bestimmen kann;
diese Bestimmung erfolgt in den meisten Fällen, wie in Andeutung zur Aufgabe 1112 gesagt ist.

Erkl. 668. In der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A):

$$x = (\alpha + \beta) + (\delta + \delta_1)$$

drückt $\delta + \delta_1$ den Winkel aus, um welchen der Winkel $\alpha + \beta$ ($= \sphericalangle BDC$, siehe Figur 457) korrigiert werden muss, damit man den zu bestimmenden Winkel x ($= \sphericalangle BAC$) erhält.

Für diese in Sekunden ausgedrückte Korrektion $(\delta + \delta_1)$ des Winkels $(\alpha + \beta)$ erhält man nach den nebenstehenden Gleichungen 1) und 2):

$$\delta + \delta_1 = \left(\frac{m \cdot \sin\alpha}{c} + \frac{m \cdot \sin\beta}{b}\right) \cdot 206265 \text{ Sekund.}$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \delta + \delta_1 = \left(\frac{\sin\alpha}{c} + \frac{\sin\beta}{b}\right) \cdot m \cdot 206265 \quad ''$$

Setzt man noch:

$$\alpha) \ldots \frac{\sin\alpha}{c} = \operatorname{tg}\psi$$

und

$$\beta) \ldots \frac{\sin\beta}{b} = \operatorname{tg}\psi_1$$

so erhält man hiernach:

$$\delta + \delta_1 = (\operatorname{tg}\psi + \operatorname{tg}\psi_1) \cdot m \cdot 206265 \text{ Sekunden}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 560:

$$\text{b)} \ldots \delta + \delta_1 = \frac{\sin(\psi + \psi_1)}{\cos\psi \cos\psi_1} \cdot m \cdot 206265 \text{ Seku.}$$

Erkl. 669. In bezug auf die Lage des zu wählenden Punktes D gegen den unzugänglichen Scheitelpunkt A können ausser dem durch die Figur 457 angedeuteten Fall, die durch die Figuren 458 bis 460 angedeuteten weiteren Fälle stattfinden:

Aus der Figur 458 ergibt sich:

$$x + \varepsilon + \delta = (\beta - \alpha) + \varepsilon + \delta_1 \text{ (je } = 2R)$$

und hieraus erhält man:

$$1) \ldots x = (\beta - \alpha) + (\delta_1 - \delta)$$

Aus der Figur 459 ergibt sich:

$$x + \varepsilon + \delta_1 = (\alpha - \beta) + \varepsilon + \delta \text{ (je } = 2R)$$

und hieraus erhält man:

$$2) \ldots x = (\alpha - \beta) + (\delta - \delta_1)$$

bezw. nach der Erkl. 664:

$$\text{c)} \ldots \sin\delta'' = \delta \cdot \frac{1}{206265}$$

und

$$\text{d)} \ldots \sin\delta_1'' = \delta_1 \cdot \frac{1}{206265}$$

setzen. In Rücksicht der Gleichungen c) und d) erhält man aus den Gleichungen a) und b) für die in Sekunden ausgedrückten Winkel δ und δ_1, bezw.:

$$1) \ldots \delta = \frac{m \cdot \sin\alpha}{c} \cdot 206265 \text{ Sekunden}$$

und

$$2) \ldots \delta_1 = \frac{m \cdot \sin\beta}{b} \cdot 206265 \text{ Sekunden}$$

Nach welchen Gleichungen man die kleinen Winkel δ und δ_1 berechnen kann.

Aus der Figur 457 ergibt sich ferner:

$$\alpha) \ldots x = 360^0 - (\varepsilon + \varepsilon_1)$$

$$\beta) \ldots \varepsilon = 180^0 - (\alpha + \delta)$$

und

$$\gamma) \ldots \varepsilon_1 = 180^0 - (\beta + \delta_1)$$

Aus diesen drei Gleichungen erhält man:

$$x = 360^0 - [180^0 - (\alpha + \delta) + 180^0 - (\beta + \delta_1)]$$

$$x = 360^0 - 360^0 + \alpha + \delta + \beta + \delta_1$$

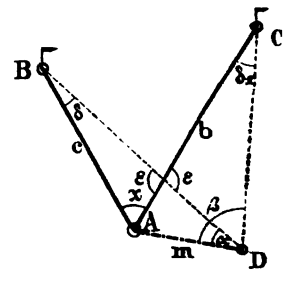
$$x = \alpha + \beta + \delta + \delta_1$$

oder:

$$\text{A)} \ldots x = (\alpha + \beta) + (\delta + \delta_1)$$

nach welcher Gleichung man den gesuchten Winkel x aus den gemessenen Winkeln α und β und den nach den Gleichungen 1) und 2) berechneten Winkel δ und δ_1 bestimmen kann. (Siehe die Erkl. 666 bis 669.)

Figur 458.



Aus der Figur 460 ergibt sich schliesslich:

$$x_1 + \alpha + \delta = 180^0$$

und

$$x_2 + \beta + \delta_1 = 180^0$$

Durch Addition dieser Gleichungen erhält man:

$$(x_1 + x_2) + (\alpha + \beta) + (\delta + \delta_1) = 360^0$$

$$x_1 + x_2 = 360^0 - [(\alpha + \beta) + (\delta + \delta_1)]$$

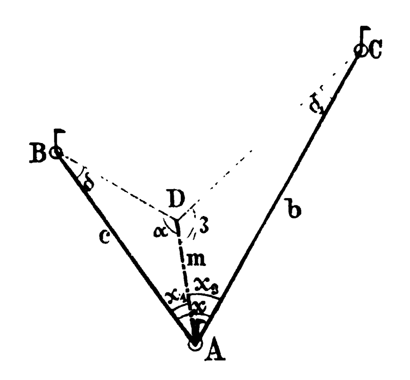
oder:

$$3) \;.\;.\;.\; x = 360^0 - [(\alpha + \beta) + (\delta + \delta_1)]$$

Nach den Gleichungen 1) bis 3) kann man aus den gemessenen Winkeln α und β und aus den zu berechnenden Winkeln δ und δ_1, deren Berechnung in analoger Weise erfolgt, wie in nebenstehender Auflösung gezeigt wurde, den Winkel x berechnen, auch für die Lagen des zu wählenden Punktes D, welche in den Figuren 458 bis 460 angedeutet sind.

Figur 459.

Figur 460.



Aufgabe 1110. In Figur 457 sei:

$$\overline{AB} = 6850 \text{ m}$$
$$\overline{AC} = 9760{,}8 \text{ m}$$
$$m = 4{,}5 \text{ m}$$
$$\alpha = 10^0\, 25'\, 40''$$
$$\beta = 25^0\, 4'\, 10''$$

welcher Wert ergibt sich für den Winkel x?

Andeutung. Man beachte die Auflösung zur vorigen Aufgabe 1109.

Aufgabe 1111. In Figur 458 sei:

$$\overline{AB} = 1670{,}4 \text{ m}$$
$$\overline{AC} = 2485{,}65 \text{ m}$$
$$m = 17 \text{ m}$$
$$\alpha = 62^0\, 40'\, 12{,}5''$$

und

$$\beta = 95^0\, 53'\, 29''$$

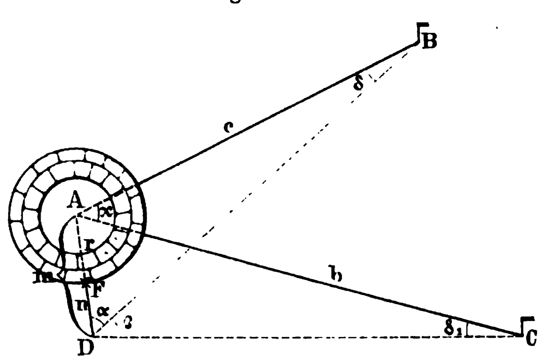
welcher Wert ergibt sich für den Winkel x?

Andeutung. Man beachte die Auflösung zur Aufgabe 1109 und die Erkl. 669.

Aufgabe 1112. Zur Bestimmung der Grösse eines Winkels $BAC = x$, dessen Scheitel A in dem Mittelpunkt eines kreisrunden Turmes mit dem Radius $r = 1,5$ m liegt, und dessen Schenkel $AB = c = 1650,8$ m und $AC = b = 2423,9$ m lang sind, wurde neben dem Turm in dem Abstand $n = 12$ m von demselben ein Punkt D so gewählt, dass der Winkel $BDC = \beta = 56^0 32' 44''$ und der Winkel $BDA = \alpha = 43^0 12' 0,8''$ (siehe Erkl. 670) gemessen werden konnte; wie kann man hieraus den Winkel x berechnen?

Andeutung. Zunächst bestimme man, siehe Figur 461, die Entfernung $AD = r + n$, dann berechne man, analog wie in der Auflösung der Aufgabe 1109 angegeben wurde, die Winkel δ und δ_1 und bestimme schliesslich den gesuchten Winkel x, wie in der Erkl. 669 für den durch die Figur 459 angedeuteten Fall angegeben wurde. (Siehe die Erkl. 670.)

Figur 461.

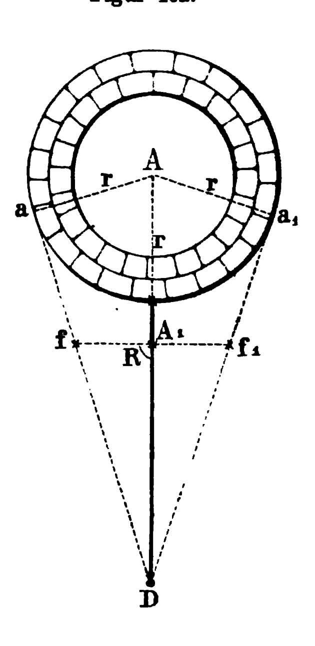


Erkl. 670. Den Winkel BDC $(= \beta)$, siehe Figur 461 und die Aufgabe 1112, kann man direkt messen, aber nicht den Winkel BDA $(= \alpha)$, indem man von D aus nicht nach dem Mittelpunkt A des Turmes sehen kann.

Zur Messung dieses Winkels α verfahre man wie folgt:

Man visiere, siehe Figur 462, von D aus die Berührungspunkte a und a_1 der nach dem äusseren Umfang des Turmes gezogen gedachten Tangenten Da und Da_1 ein, messe in deren Richtungen die beliebigen aber gleichen Strecken Df und Df_1 ab und halbiere die gedachte Verbindungslinie ff_1; der somit gefundene Halbierungspunkt A_1 dieser Strecke ff_1 ist ein Punkt der von D nach A gehenden Visierlinie (wie sich leicht aus der Kongruenz der Dreiecke AaD, Aa_1D, bezw. der Dreiecke fA_1D und f_1A_1D nachweisen lässt). Zur Bestimmung des Winkels BDA, siehe Fig. 461, kann man von D aus den Punkt A_1, siehe Figur 462, einvisieren.

Figur 462.

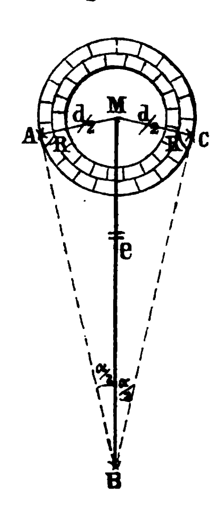


i) Aufgaben über die Berechnung der Entfernung von Gegenständen, deren Dimensionen bekannt sind, aus beobachteten Sehwinkeln.

* **Aufgabe 1113.** Der Durchmesser d eines runden Turmes beträgt 15 m; von einem bestimmten Standpunkt aus erscheint dieser Durchmesser unter einem Gesichts- oder Seh-

winkel von 1°; welche horizontale Entfernung hat der Turm von diesem Standpunkt?

Figur 463.



Andeutung. Denkt man sich, s. Fig. 463, von dem gegebenen Standpunkt B aus Tangenten an die sichtbaren Konturen des runden Turmes so gezogen, dass dieselben in der Horizontalebene liegen, in welcher sich der Standpunkt, bezw. der Beobachtungspunkt B befindet, wie in der Figur 463 angedeutet, so ist der Winkel, welchen diese Tangenten einschliessen, der gegebene Gesichts- oder Sehwinkel α, unter welchem der Durchmesser des Turmes erscheint. Verbindet man, siehe Figur 463, den Mittelpunkt M des in der erwähnten Horizontalebene liegenden Querschnitts des Turmes mit den Berührungspunkten A und C jener beiden Tangenten, so erhält man die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MAB und MCB; von jedem dieser Dreiecke kennt man eine Kathete und einen Winkel. Von dem Dreieck MAB z. B. kennt man die Kathete $AM\left(=\frac{d}{2}\right)$ und den Winkel MBA $\left(=\frac{\alpha}{2}\right)$; aus diesem Dreieck erhält man zur Berechnung der gesuchten Entfernung e des Beobachters B vom Mittelpunkt M des Turmes:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{d}{2}:e$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots e=\frac{d}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Berücksichtigt man, dass $\frac{\alpha}{2}$ gemäss der Aufgabe ein kleiner Winkel, nämlich gleich 30 Minuten ist, so kann man in Rücksicht der Erkl. 662 mindestens bis auf fünf Dezimalen genau:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\operatorname{arc}\frac{\alpha}{2} \text{ oder } =\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{arc}1'$$

$$\text{oder } =\frac{\alpha}{2}\cdot 0{,}000\,290\,882\,086\,6572$$

$$\text{oder } =\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{3437} \text{ (siehe Erkl. 671)}$$

setzen, wonach die Gleichung A, wenn $\frac{\alpha}{2}$ ganz allgemein die Masszahl eines zwischen 1′ bis 60′ liegenden Winkels bedeutet, übergeht in:

$$e=\frac{d}{2\cdot\frac{\alpha}{2}\cdot\frac{1}{3437}}$$

oder in:

$$\text{A}_1) \ldots e=\frac{d}{\alpha}\cdot 3437$$

Setzt man in diese Gleichung den für d gegebenen Wert und für α den gegebenen und in Minuten ausgedrückten Wert, so kann man hiernach leicht die gesuchte Entfernung e berechnen. (Siehe die Erkl. 672 und 673.)

Erkl. 671. Den Dezimalbruch:

$$0{,}000\,290\,882\,086\,6572$$

in einen Stammbruch verwandelt, gibt:

$$\frac{290\,882\,086\,6572}{1000\,000\,000\,000\,0000}=$$

$$\frac{290\,882\,086\,6572:290\,882\,086\,6572}{1000\,000\,000\,000\,0000:290\,882\,086\,6572}=$$

$$\frac{1}{3437}$$

Erkl. 672. Nimmt man bei der Auflösung der Aufgabe 1113, wie es in den meisten Fällen bei sehr kleinen Sehwinkeln oder bei sehr grossen Entfernungen geschieht, an, dass die Verbindungslinie der Berührungspunkte A und C der von dem Beobachtungspunkt B an den Turm gezogen gedachten Tangenten BA und BC mit einem Durchmesser des Turmes zusammenfällt (siehe Erkl. 673), wie in der Figur 464 angedeutet, so erhält man die kongruenten und bei M rechtwinkligen Dreiecke AMB und CMB. Aus dem Dreieck AMB ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{d}{2}:e$$

oder:

$$1) \ldots e=\frac{d}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

(Siehe die Erkl. 673.)

Erkl. 678. Ist, siehe die Figuren 463 und und 464, der Winkel α ein sehr kleiner Winkel, z. B. ein in Sekunden ausgedrückter oder auch noch ein in Minuten ausgedrückter Winkel, d. h. ein zwischen 1″ und 6″ oder ein zwischen 1′ und 60′ liegender Winkel, so ist nach der in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichung A):

$$\text{a)} \ldots \; e = \frac{d}{2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}}$$

und nach der in der Erkl. 672 aufgestellten Gleichung 1):

$$\text{b)} \ldots \; e = \frac{d}{2\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man Werte für e, die bis auf mehrere Dezimalen genau übereinstimmen:

Ist $\frac{\alpha}{2}$ ein zwischen 1′ und 60′ (= 1°) liegender Winkel, so erhält man nach der Erkl. 662, nach welcher:

$$\sin\alpha' = \operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{arc}\alpha' \text{ oder } = \alpha\cdot\operatorname{arc} 1'$$

mindestens bis auf fünf Dezimalen genau ist, aus den Gleichungen a) und b) für e Werte, welche mindestens bis auf fünf Dezimalen übereinstimmen.

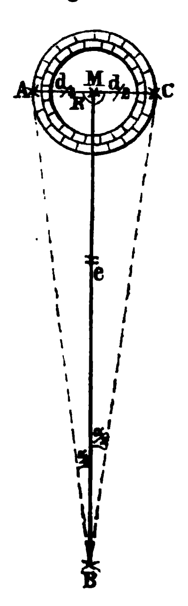
Ist $\frac{\alpha}{2}$ ein zwischen 1″ und 60″ (= 1′) liegender Winkel, so erhält man nach der Erkl. 662, nach welcher:

$$\sin\alpha'' = \operatorname{tg}\alpha'' = \operatorname{arc}\alpha'' \text{ oder } = \alpha\cdot\operatorname{arc} 1''$$

mindestens bis auf elf Dezimalen genau ist, aus den Gleichungen a) und b) für e Werte, welche mindestens bis auf elf Dezimalen übereinstimmen.

Aus diesem Grund kann man, allerdings nur bis zu einem gewissen Grad der Genauigkeit, statt der nebenstehenden mathematisch richtigen Auflösung die in der Erkl. 672 angeführte, in der Praxis vielfach angewandte Auflösungs methode benutzen.

Figur 464.



Aufgabe 1114. Der Sehwinkel, unter welchem ein mit der Gondel $h = 25$ m hoher Luftballon erscheint, sei $\alpha = \frac{1}{2}$ Grad und der Erhöhungswinkel der Gondel sei $\varepsilon = 15^0$. Wie hoch schwebt die Gondel über der Erde und in welcher Entfernung befindet sich in dem Augenblick der Beobachtung jener Winkel die Gondel des Ballons von dem Beobachter?

Andeutung. In dem Dreieck ABC de… Figur 465 ist:

$$\overline{AB} = h$$
$$\sphericalangle ACB = \alpha$$
$$\sphericalangle ABC = R + \varepsilon$$ (als Aussenwinkel des re… winkligen Dreiecks BD…, s… Erkl. 113).

$$\sphericalangle CAB = 2R - \sphericalangle ACB - \sphericalangle ABC$$
$$= 2R - \alpha - (R + \varepsilon)$$
$$= R - (\alpha + \varepsilon)$$

Nach der Sinusregel erhält man hierna… aus diesem Dreieck:

$$\frac{y}{h} = \frac{\sin[R - (\alpha + \varepsilon)]}{\sin\alpha}$$

und hieraus ergibt sich, in Rücksicht der Erkl. 19, für die gesuchte Entfernung BC $(= y)$ der Gondel des Ballons von dem in C befindlichen Beobachter, allgemein:

$$\text{A)} \ldots y = \frac{h \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)}{\sin\alpha}$$

Für die gesuchte Höhe BD $(= x)$, welche die Gondel in dem gedachten Augenblick über der durch den Beobachtungspunkt C gehenden Horizontalebene hat, ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BDC:

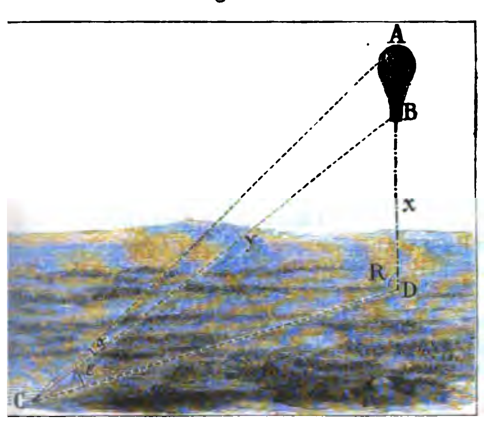
$$x = y \cdot \sin\varepsilon \text{ (siehe Erkl. 50)}$$

oder in Rücksicht der Gleichung A):

$$\text{B)} \ldots x = \frac{h \cdot \cos(\alpha + \varepsilon)\sin\varepsilon}{\sin\alpha}$$

Nach den Gleichungen A) und B) kann man, in Rücksicht des für h gegebenen Werts und der für α und ε in dem Beobachtungsort C durch Messung gefundenen Werte, die gesuchten Entfernungen x und y berechnen. (Siehe die Erkl. 674.)

Figur 465.



Erkl. 674. Da der Gesichtswinkel α in Aufgabe 1114 ein kleiner Winkel nämlich $= \frac{1}{2}$ Grad oder $= 30'$ ist, so kann bei den numerischen Berechnungen nach den in nebenstehender Auflösung aufgestellten Gleichungen A) und B) für:

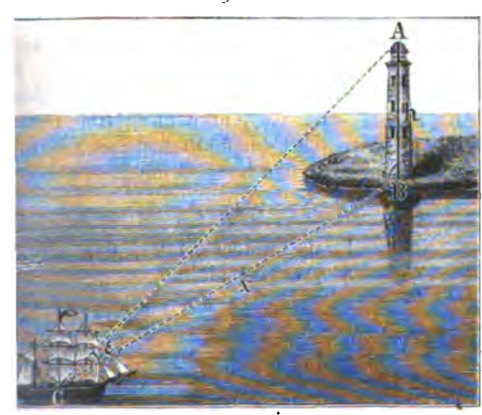
$$\sin\alpha = \sin 30'$$
$$= \text{arc}\, 30' = 30 \cdot \text{arc}' = 30 \cdot 0{,}000290882086$$
$$= 30 \cdot \frac{1}{3437}$$

gesetzt werden (siehe die Erkl. 662 und 671).

---

* **Aufgabe 1115.** Von einem Schiff aus sieht man die Spitze eines Leuchtturmes, dessen Höhe $h = 42$ m bekannt ist, unter einem Erhöhungswinkel $\varepsilon = 23'\,40''$; man soll die Entfernung des Schiffes von jenem Turm in Seemeilen angeben. Bei der Berechnung soll keine Rücksicht auf die sphäroidische Gestalt des Meeresspiegels genommen werden.

Figur 466.



Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ABC der Figur 466 ergibt sich die Relation:

$$\text{tg}\,\varepsilon = \frac{h}{x}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{h}{\text{tg}\,\varepsilon}$$

Da gemäss der Aufgabe ε ein kleiner Winkel, nämlich $= 23'\,40''$ ist, so berücksichtige man, dass nach der Erkl. 662 mindestens bis auf fünf Dezimalen genau:

$$\text{tg}\,\varepsilon = \text{tg}\,23'\,40'' = \text{arc}\,23'\,40''$$
$$= \text{arc}\,23\frac{40}{60} \text{ Minuten}$$
$$= \text{arc}\,23\frac{2}{3} \quad ''$$
$$= 23\frac{2}{3} \cdot \text{arc}\,1'$$
$$= \frac{71}{3} \cdot 0{,}000290882086 \ldots$$

oder nach der Erkl. 671:

$$1) \ldots \operatorname{tg} 23' 40'' = \frac{71}{3} \cdot \frac{1}{3437}$$

gesetzt werden kann. Da ferner gemäss der Aufgabe die Entfernung x in Seemeilen ausgedrückt werden soll, und die Höhe gemäss der Aufgabe $= 42$ m beträgt, so beachte man, dass nach der Erkl. 675:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1855} \text{ Seemeilen}$$

mithin:

$$2) \ldots 42 \text{ m} = \frac{42}{1855} \text{ Seemeilen}$$

ist. In Rücksicht der Gleichungen 1) und 2) geht die Gleichung A) für das in der Aufgabe gegebene Zahlenbeispiel über in:

$$x = \frac{\frac{42}{1855}}{\frac{71}{3 \cdot 3437}} \text{ Seemeilen}$$

oder in:

$$3) \ldots x = \frac{42 \cdot 3 \cdot 3437}{1855 \cdot 71} \text{ Seemeilen}$$

wonach man die in Seemeilen ausgedrückte Entfernung x leicht berechnen kann.

Erkl. 675. Da:

1 Seemeile = 1,855 Kilometer
oder = 1855 Meter

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$1 \text{ m} = \frac{1}{1855} \text{ Seemeilen}$$

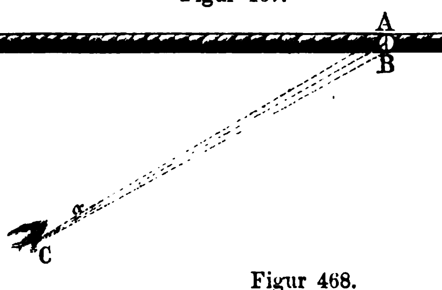
sein muss.

---

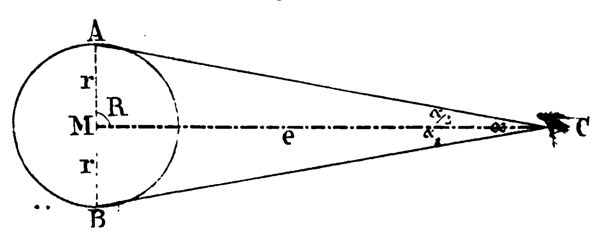
k) Aufgaben über die Bestimmung der Entfernung, in welcher einem gesunden unbewaffneten Auge ein runder Gegenstand von bekannter Dimension verschwindet; sowie Aufgaben über die Bestimmung der Dimension eines runden Gegenstandes, damit er einem gesunden Auge in gewisser Entfernung verschwindet.

***Aufgabe 1116.** Wie weit muss man sich von einem Seiltänzer entfernen, damit das Seil, auf welchem sich derselbe befindet und welches einem Durchmesser $d = 5$ cm hat, dem Auge gerade verschwindet?

Figur 467.



Figur 468.



Andeutung. Denkt man sich, siehe Figur 467, durch das Auge C, den Beobachtungsort, eine Ebene so gelegt, dass sie senkrecht zur Achse des Seils ist, so ist die Durchschnittsfigur dieser gedachten Ebene mit dem Seil ein Kreis, dessen Durchmesser gleich dem gegebenen Durchmesser d (= 5 cm) des Seils ist; denkt man sich ferner von dem Auge C Sehstrahlen gezogen, welche jenen Kreis berühren, so erhält man die Fig. 468 (bezw. die Figur 468a, siehe Erkl. 676), in welcher der Winkel ACB ($= \alpha$) gleich dem Sehwinkel oder Gesichtswinkel ist, unter welchem dem in C befindlichen Auge der Durchmesser AB des Kreises um M erscheint (siehe Erkl. 677).

Aus dem bei M rechtwinkligen Dreieck AMC der Figur 468 ergibt sich:

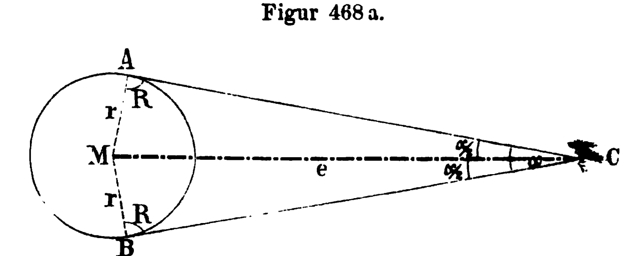
$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{r}{e}$$

und hieraus erhält man:

$$A) \ldots e = \frac{r}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$$

Erkl. 676. Wie in Andeutung zur Aufgabe 1113 gezeigt, erhält man, wenn man sich von dem Punkt C Tangenten an den Kreis um M gezogen denkt, eigentlich nicht die Fig. 468, sondern die Figur 468a. Da jedoch in dem Fall, in welchem der Winkel α ein sehr kleiner (ein in Sekunden ausgedrückter) Winkel ist, der Winkel AMB (welcher mit jenem zusammen $2R$ betragen muss, siehe Erkl. 596) beinahe $= 2R$ ist, so kann man ohne einen merklichen Fehler zu begehen, für solche Fälle, in welchen α sehr klein ist, die Figur 468 als richtig annehmen, wie es auch in der Praxis meistens geschieht. (Siehe die Erkl. 672 und 673.)

Figur 468a.



Erkl. 677. Unter dem Seh- oder Gesichtswinkel einer Strecke versteht man im allgemeinen den Winkel, welchen die beiden von dem optischen Mittelpunkt des Auges nach den Endpunkten der Strecken gerichteten Sehlinien einschliessen. Unter dem Seh- oder Gesichtswinkel, unter welchem eine Strecke (die Verbindungslinie zweier Punkte) erscheint, versteht man in dem Fall, in welchem kein bestimter Standpunkt des beobachtenden Auges in bezug auf die Strecke selbst gegeben ist, stets einen solchen Winkel, dessen Scheitel auf der in der Mitte jener Strecke (jener Verbindungslinie) errichtet gedachten Senkrechten liegt.

Unter allen Sehwinkeln, unter welchen eine Strecke (die Verbindungslinie zweier Punkte) erscheint und deren Scheitel gleichen senkrechten Abstand von jener Strecke haben, ist derjenige der grösste Sehwinkel, dessen Scheitel in der in der Mitte jener Strecke errichteten Senkrechten liegt. In Figur 469 ist von den Winkeln α, α_1, α_2 $\alpha_3 \cdots$ der Winkel α der grösste.

Den Beweis der Richtigkeit dieser Aussage findet man in den Teilen dieser Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln; ist auch leicht mittels der Fig. 469 zu führen.

Erkl. 678. Der kleinste Sehwinkel, unter welchem ein gesundes unbewaffnetes Auge einen runden Gegenstand von dunklem Farbenton noch erkennen kann, beträgt ungefähr 40 Sekunden.

In Rücksicht des für $r = \frac{d}{2}$ gegebenen Zahlenwerts und in Rücksicht der Erkl. 678 ist hiernach:

$$1) \ldots e = \frac{2.5}{\operatorname{tg} 20''} \text{ Centimeter}$$

Berücksichtigt man, dass nach den Erkl. 662 und 664 bis auf elf Dezimalen genau:

$$\operatorname{tg} 20'' = \operatorname{arc} 20'' = 20 \cdot \operatorname{arc} 1'' = 20 \cdot \frac{1}{206265}$$

ist, so erhält man aus Gleichung 1):

$$e = \frac{2{,}5}{\frac{20}{206265}} \text{ Centimeter}$$

oder:

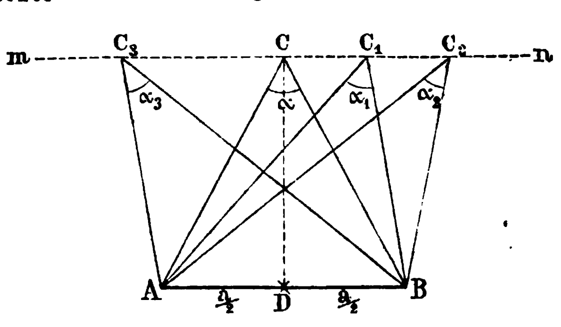
$$e = \frac{2{,}5 \cdot 206265}{20} \text{ Centimeter}$$

oder:

$$2) \; . \; e = \frac{2{,}5 \cdot 206265}{2000} \text{ Meter}$$

wonach die gesuchte Entfernung e leicht berechnet werden kann.

Figur 469.



***Aufgabe 1117.** Welchen Durchmesser muss ein kugelförmiger Luftballon haben, damit er in einer Entfernung von 5000 m einem gesunden unbewaffneten Aug noch sichtbar ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1116.

***Aufgabe 1118.** Man soll die Entfernung berechnen, in welcher ein runder Turm von 8,5 m Durchmesser einem scharfen Aug verschwindet, wenn der Turm einen weissen Anstrich hat.

Erkl. 679. Der kleinste Sehwinkel, unter welchem ein gesundes unbewaffnetes Auge einen runden Gegenstand von weissem Farbton noch erkennen kann, beträgt ungefähr 35 Sekunden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1116. Man setze jedoch nach der Erkl. 679 den Sehwinkel $\alpha = 35''$.

***Aufgabe 1119.** Welchen Durchmesser müsste ein Leuchtturm haben, um in einer Entfernung von 5 geogr. Meilen noch gesehen zu werden?

Erkl. 680. Eine deutsche oder geographische Meile ist = 7,420 Kilometer.

Ein Kilometer ist = 1000 Meter.

Andeutung. Man verfahre wie in der Andeutung zur Aufgabe 1116 gesagt wurde: setze für den Sehwinkel $\alpha = 35''$ und beachte die Erkl. 680.

***Aufgabe 1120.** Man soll die Entfernung berechnen, in welcher ein runder Turm von 8,5 m Durchmesser einem scharfen Auge verschwindet, wenn der Turm einen weissen Anstrich hat und von der Sonne beleuchtet wird.

Erkl. 681. Der kleinste Sehwinkel, unter welchem ein gesundes unbewaffnetes Auge einen runden Gegenstand von weissem Farbenton und bei heller Beleuchtung (z. B. durch das Sonnenlicht oder das elektrische Licht) noch erkennen kann, beträgt ungefähr 30 Sekunden.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1116. Man setzt jedoch für diesen Fall den Sehwinkel $\alpha = 30''$ (siehe Erkl. 681).

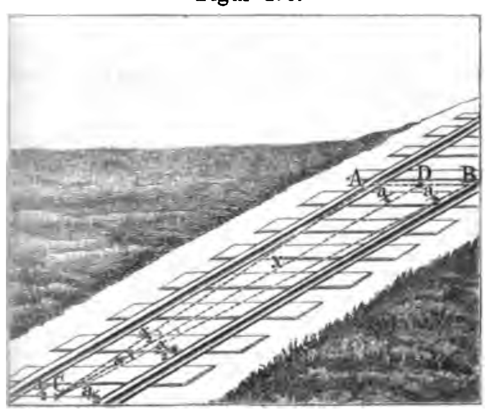
***Aufgabe 1121.** Wie dick müssen die Stricke der schwebenden Theaterwolken höchstens sein, damit sie einem scharfen Auge in einer Entfernung von 20 m gerade verschwinden?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 111[illegible]. Man nehme den Sehwinkel α unter der Voraussetzung, dass die Stricke hell beleuchtet sind, nach der Erkl. 681 = 30″ an.

***Aufgabe 1122.** Wie weit müssen die Schienen einer Eisenbahn von $a = 1{,}7$ m Geleisbreite oder Spurweite in gerader Linie

fortlaufen, damit es einem in der Mitte des Geleises stehenden Beobachter C erscheint, als ob die Schienen in einem Punkt zusammenliefen, wenn der Sehwinkel α, unter welchem eine Strecke (die Geleisbreite) gerade verschwindet $= 40''$ angenommen wird?

Figur 470.



Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC der Figur 470 ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a}{2} : x$$

oder:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{a}{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

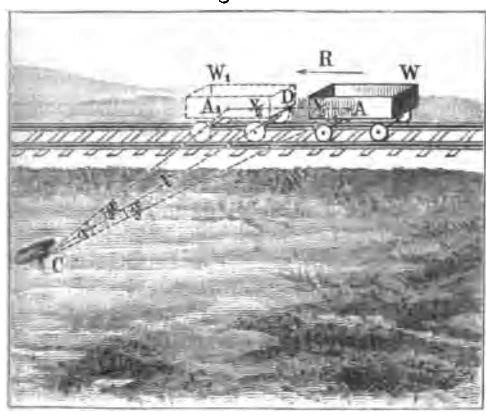
wonach man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Entfernung x berechnen kann, wie in Andeutung zur Aufgabe 1116 gesagt wurde.

---

l) Aufgaben über die Bestimmung der kleinsten Entfernung, in welcher einem gesunden unbewaffneten Auge ein in Bewegung befindlicher Gegenstand still zu stehen scheint; sowie Aufgaben über die Bestimmung des Wegs, welchen ein in Bewegung befindlicher Gegenstand in einer gewissen Zeit machen muss, damit die Bewegung einem gesunden Auge in gewisser Entfernung gerade noch sichtbar ist.

Aufgabe 1123. Von irgend einem Punkt aus sieht man einen Wagen von der Seite. Dieser Wagen hat eine Geschwindigkeit von $v = 2{,}3$ m pro Sekunde; wie weit muss man sich von dem Wagen entfernen, damit die Bewegung des Wagens gerade verschwindet, und der Wagen still zu stehen scheint (siehe Erkl. 682).

Figur 471.



Andeutung. Ist, siehe Figur 471, A ein beliebiger Punkt des Wagens W und befindet sich dieser Wagen in geradliniger Bewegung in der durch den Pfeil R angedeuteten Richtung, so wird der Punkt A des Wagens nach einer bestimmten Zeit einem in C befindlichen Beobachter nicht mehr in A, sondern z. B. in A_1 erscheinen. Ist jene gedachte Zeit $= 1$ Sekunde, so ist gemäss der Aufgabe der zurückgelegte Weg $AA_1 = v$ $(= 2{,}3$ m) und der Winkel A_1CA ist der Seh- oder Gesichtswinkel α, unter welchem dem Beobachter in C jener von dem Punkt A in der Sekunde zurückgelegte Weg AA_1 $(= v)$ erscheint. Soll diese Strecke AA_1 gerade noch sichtbar sein, also gerade verschwinden, so ist der Sehwinkel α bekannt; derselbe ist nach der Erkl. 682 $= 2^1/_2$ Minuten. Da nun für einen solchen bestimmten Sehwinkel stets angenommen wird, dass sich das Auge C senkrecht über der Mitte der Strecke AA_1 befindet (siehe Erkl. 677).

so hat man die **rechtwinkligen** Dreiecke ADC und A_1DC; aus jedem derselben ergibt sich:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{v}{2} : x$$

oder:

$$\text{A)} \; . \; . \; . \; . \; x = \frac{v}{2 \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$$

Nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für v gegebenen Zahlenwerts und in Rücksicht, dass nach der Erkl. 682 $\alpha = 2^1/_2$ Minuten, mithin $\frac{\alpha}{2} = 1^1/_4$ Minuten ist, die gesuchte Entfernung x berechnen kann. Da $\frac{\alpha}{2}$ ein **kleiner** Winkel ist, so kann man bei der numerischen Berechnung der gesuchten Entfernung x mittels der Gleich. A) nach der Erkl. 662:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg} 1\frac{1}{4}' = \operatorname{arc} 1\frac{1}{4}' = 1\frac{1}{4} \cdot \operatorname{arc} 1'$$
$$= 1\frac{1}{4} \cdot 0{,}00029088209$$

oder nach der Erkl. 671:

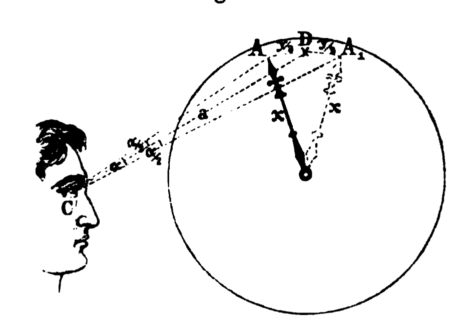
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 1\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3437}$$

setzen.

Erkl. 682. Der Sehwinkel, unter welchem einem **gesunden unbewaffneten** Auge der in einer gewissen Zeit (in der **Sekunde**) **zurückgelegte** Weg eines in geradliniger Bewegung befindlichen Punktes **gerade** verschwindet, beträgt ungefähr $2^1/_2$ Minuten.

Aufgabe 1124. Wie lang muss der Minutenzeiger einer Uhr sein, damit das gesunde unbewaffnete Auge eines Beobachters, welches sich in einer Entfernung von $a =$ 20 cm von dem Zeiger befindet, das in jeder Sekunde stattfindende Fortrücken des Minutenzeigers gerade noch wahrnehmen kann?

Figur 472.



Andeutung. Ist, siehe Figur 472, A die Spitze des Minutenzeigers einer Uhr, welche im Gang ist, so wird das in C befindliche Auge eines Beobachters nach einer bestimmten Zeit diese Spitze nicht mehr in A, sondern z. B. in A_1 sehen. Ist jene **gedachte** Zeit gleich **einer Sekunde**, so ist der von der Spitze des Minutenzeigers zurückgelegte Weg AA_1 $(= y)$ das Bogenstück eines Kreises, dessen Radius gleich der gesuchten Länge des Minutenzeigers ist. Dieses Bogenstück kann man aber zunächst wie folgt berechnen:

Gemäss der Aufgabe ist die Entfernung des beobachtenden Auges C von der Spitze des Zeigers gegeben, dieselbe ist $a = 20$ cm, ferner ist, da dem Auge der pro Sekunde von der Spitze des Minutenzeigers zurückgelegte Weg AA_1 $(= y)$ gerade noch sichtbar sein soll oder gerade verschwinden soll der Sehwinkel ACA_1 oder α bekannt, derselbe ist nach der Erkl. 682 $= 2^1/_2$ Minuten. Da nun für einen solchen bestimmten Sehwinkel stets angenommen wird, dass sich das Auge senkrecht über der Mitte D der Verbindungs-

linie AA_1 befindet, siehe Erkl. 677, so hat man die rechtwinkligen Dreiecke ADC und A_1DC. Aus jedem derselben ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{y}{2} : a$$

oder:

$$\text{A)} \; \ldots \; y = 2a \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man, analog wie in voriger Aufgabe, das in der Sekunde zurückgelegte Bogenstück y berechnen kann.

Zur Berechnung der gesuchten Länge x des Minutenzeigers beachte man, dass nach der Erkl. 461 zwischen dem zu einem Centriewinkel von β^0 gehörigen und in Längeneinheiten ausgedrückten Bogen, bog β^0, und dem Radius r des zugehörigen Kreises die Relation besteht:

$$\operatorname{bog}\beta^0 = r\pi \cdot \frac{\beta^0}{180^0}$$

Setzt man in dieser Gleichung für bog β^0 den nach Gleichung A) berechneten und in Längeneinheiten (cm) ausgedrückten Bogen $y\ (= AA_1)$, welcher gemäss der Aufgabe zu einem Centriewinkel $1''$ gehört, dementsprechend $\beta^0 = 1''$ und $180^0 = 180 \cdot 60' \cdot 60''$, so erhält man zur Berechnung des gesuchten Radius $r\ (= x)$ die Relation:

$$y = x \cdot \pi \cdot \frac{1}{180 \cdot 60 \cdot 60}$$

oder:

$$\text{A)} \; \ldots \; x = \frac{y \cdot 180 \cdot 60 \cdot 60}{\pi}$$

nach welcher Gleichung man, wenn y berechnet ist, die gesuchte Länge x des Minutenzeigers berechnen kann.

---

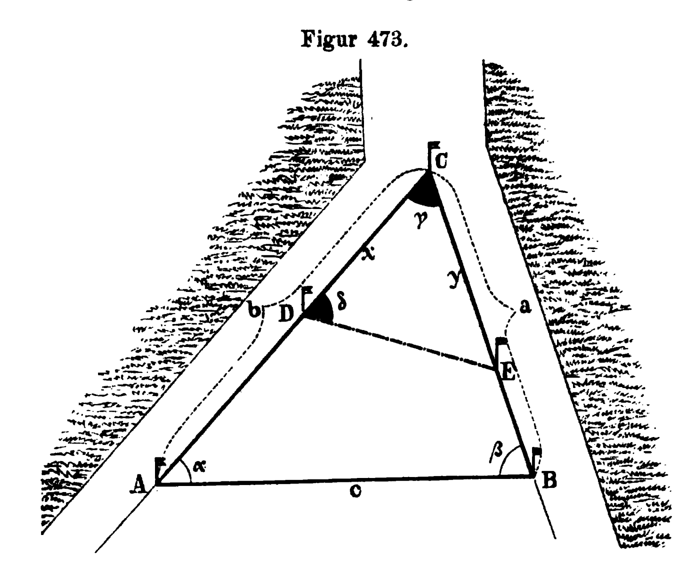
m) Aufgaben über die Teilung von Grundstücken, über Grenzregulirungen und Flächenbestimmungen.

Aufgabe 1125. Die zwei Seiten AC und BC eines dreieckigen Feldes ABC sind $b = 1400$ und $a = 1100$ m lang und der von diesen Seiten eingeschlossene Winkel γ beträgt $48^0\ 40'\ 50''$. Von diesem Feld soll ein nach der Spitze C hin liegendes Stück mit dem Inhalt $F = 264380$ qm so abgeteilt werden, dass die festzuliegende Teillinie mit der Seite $AC\ (= b)$ einen Winkel $\delta = 66^0\ 30'$ bildet. Man soll die Lage der gedachten Teillinie feststellen.

Andeutung. Zur Feststellung der gesuchten Teillinie, dargestellt durch die Linie DE in der Figur 473, berechne man die Entfernungen $CD\ (= x)$ und $CE\ (= y)$; dies kann man wie folgt:

Für den gegebenen Inhalt F des abzuteilenden dreieckigen Stücks CDE hat man nach der Erkl. 151:

Figur 473.



a) . . . $F = \frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin \gamma$

Ferner ergibt sich nach der Sinusregel aus dem Dreieck CDE die Relation:

$$\frac{x}{y} = \frac{\sin 2R - (\delta + \gamma)}{\sin \delta}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

b) . . . . $\frac{x}{y} = \frac{\sin(\delta + \gamma)}{\sin \delta}$

Aus den Gleichungen a) und b), welche nur die Unbekannten x und y enthalten, kann man leicht diese Unbekannten bestimmen; man erhält allgemein:

A) . $x = \sqrt{\frac{2F \cdot \sin(\delta + \gamma)}{\sin \delta \sin \gamma}}$

und

B) . $y = \sqrt{\frac{2 \cdot F \sin \delta}{\sin(\delta + \gamma) \sin \gamma}}$

nach diesen Gleichungen kann man, in Rücksicht der für F, δ und γ gegebenen Zahlenwerte, die Strecken x und y berechnen, durch Abmessung dieser Strecken die Lage der Teillinie DE bestimmen. (Siehe die Erkl. 683 bis 685.)

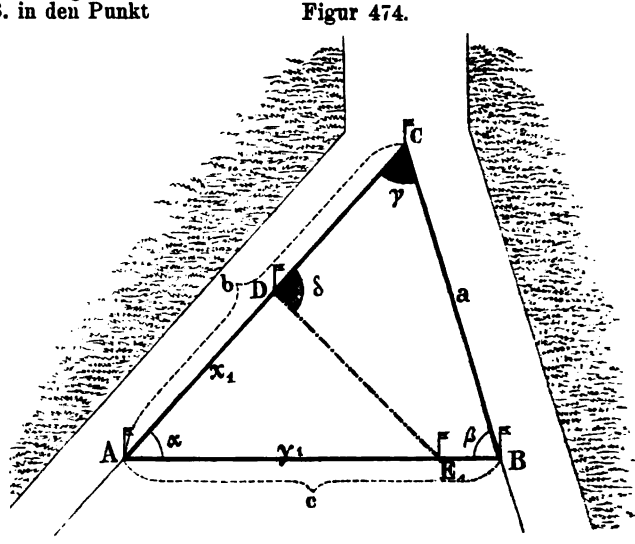
Erkl. 683. Erhält man bei der Auflösung der Aufgabe 1125 für x oder für y einen Wert, welcher **grösser** als die Seite AC, bezw. als die Seite BC des dreieckigen Feldes ist, so gestaltet sich die Auflösung der Aufgabe etwas anders.

Ergibt sich z. B. nach der stattgehabten Berechnung, dass die Strecke y **grösser** als die Dreiecksseite CB ist, siehe Figur 473, so kann der Punkt E nicht mehr in die Seite CB fallen, sondern er wird, wie in der Figur 474 angedeutet, in die Seite AB, z. B. in den Punkt E_1 zu liegen kommen. In diesem Fall muss man zur Feststellung der Teillinie DE_1 die Entfernungen AD $(= x_1)$ und AE_1 $(= y_1)$ der Punkte D und E_1 von der Ecke A berechnen und zwar wie folgt:

Aus den gegebenen Seiten a und b und dem gegebenen Winkel γ des Dreiecks ABC berechne man zunächst, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, den Winkel α (bezw. β) und die Seite AB $(= c)$, sowie den Inhalt des Dreiecks ABC.

Subtrahiert man von dem hiernach berechneten Inhalt des Dreiecks ABC den gegebenen Inhalt F, welchen das abzuschneidende Stück CDE_1B der Aufgabe gemäss haben soll, so erhält man den Inhalt des gedachten Dreiecks ADE_1.

Figur 474.



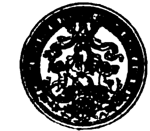
Nach diesen Berechnungen kann man zur Berechnung der Strecken x_1 und y_1 verfahren, wie in nebenstehender Andeutung gesagt wurde.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

364. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 355. — Seite 801—816.
Mit 15 Figuren.



Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 355. — Seite 801—816. Mit 15 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der praktischen Geometrie (dem Feldmessen), Fortsetzung. — Aufgaben über die Teilung von Grundstücken, über Grenzregulierungen und Flächenbestimmungen. — Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die Erhebung von Punkten der Erdoberfläche über dem Meereshorizont (und auch auf die irdische Strahlenberechnung) genommen ist.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht**, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar **in vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen **oft keine** Zeit erübrigt werden **kann, hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen**, die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

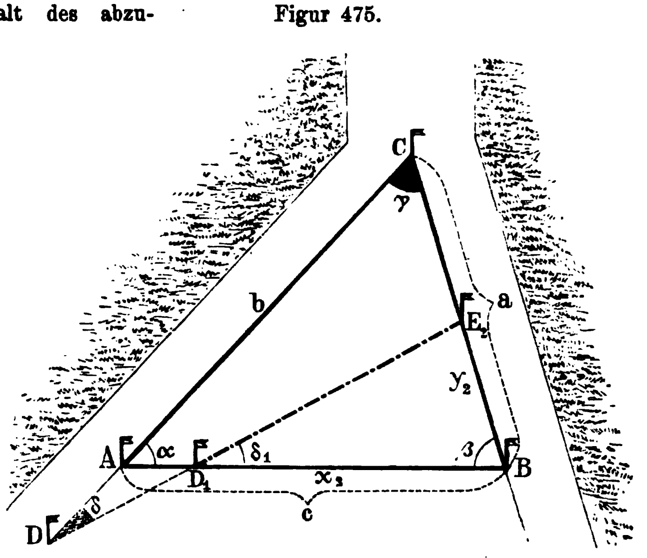
Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer**, Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Wobei man aber, wie vorstehend erwähnt, zunächst den Inhalt des Dreiecks ADE_1 (derselbe ist gleich dem Inhalt des ganzen Dreiecks ABC weniger dem gegebenen Inhalt des abzuschneidenden, nach der Spitze C hin liegenden Flächenstücks CDE_1B), sowie die Seite c und den Winkel α des Dreiecks berechnen muss (s. Erkl. 684).

Figur 475.



Erkl. 684. Ist durch die Auflösung der Aufgabe 1125 x grösser als die Seite CA gefunden worden, siehe Fig. 473 und die Erkl. 683, so muss die Teillinie DE die in Figur 475 durch E_2D_1 angedeutete Lage haben und man muss zur Bestimmung der Lage derselben die Abschnitte x_2 und y_2 berechnen, analog wie in voriger Erkl. 683 angegeben wurde, indem man zunächst den Inhalt und den Winkel δ_1 des Dreiecks BD_1E_2, sowie die Seite c und den Winkel β des ganzen Dreiecks ABC berechnet.

Erkl. 685. Die Auflösung der Aufgabe 1125 ist unmöglich, wenn der gegebene Inhalt F der abzuschneidenden Fläche grösser als der Inhalt der gegebenen dreieckigen Fläche ABC ist, was wohl vor der Berechnung zu untersuchen ist; dies geschieht, indem man den Inhalt der Fläche ABC aus dessen gegebenen Stücken berechnet und denselben mit dem gegebenen Inhalt F des abzuschneidenden Stücks vergleicht.

Aufgabe 1126. Von einem dreieckigen Grundstück ABC, siehe Figur 476, wurde gemessen $BC = a = 108{,}4$ m, $AC = b = 91$ m und $\gamma = 41^0\,30'\,10''$. Dieses Grundstück soll durch zwei zu AB parallele Geraden DG und HJ so in drei Teile zerlegt werden, dass der Inhalt des nach der Spitze C hin liegenden Teils $f_1 = 530$ qm und der Inhalt des folgenden Teils $f_2 = 820{,}3$ qm gross wird; wie gross müssen die Strecken CH, CJ, CD und CG sein, durch deren Abmessung die Lage der Teillinien DG und HJ bestimmt werden kann?

Andeutung. Nach der Erkl. 151 besteht zwischen dem Inhalt f_1 des Dreiecks CHJ, siehe Figur 476, dessen Seiten x und y und dem von denselben eingeschlossenen Winkel γ die Relation:

$$\text{a)} \ldots f_1 = \frac{x \cdot y}{2} \cdot \sin\gamma$$

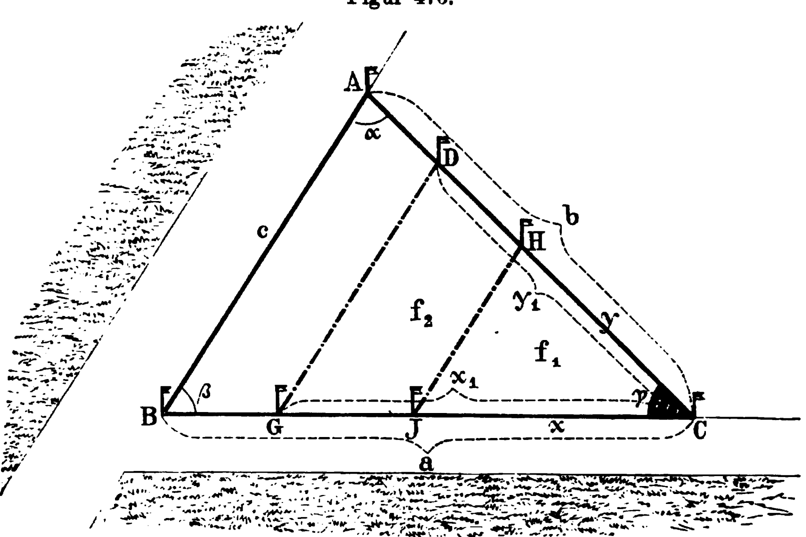
Da die Teillinie HJ gemäss der Aufgabe parallel AB sein soll, mithin die Dreiecke ABC und HJC ähnlich sind, so ergibt sich in Rücksicht dessen aus der Figur die Proportion:

$$\text{b)} \ldots \frac{x}{y} = \frac{a}{b}$$

Aus den beiden Gleichungen a) und b), welche nur die Unbekannten x und y enthalten, kann man leicht x und y berechnen.

In ganz analoger Weise kann man in Rücksicht, dass der Inhalt des Dreiecks $CDG = f_1 + f_2$ ist, die Strecken x_1 und y_1 berechnen.

Figur 476.



Aufgabe 1127. Von dem dreieckigen Grundstück ABC, siehe Figur 477, wurden die Grenzlinie AC und die Winkel α und γ, welche dieselbe mit den beiden andern Grenzlinien bildet, gemessen und gefunden $AC = b = 500$ m, $\alpha = 68^0\,20'\,4{,}8''$ und $\gamma = 37^0\,26'\,22{,}4''$. Dieses Grundstück soll durch drei zur Seite AB parallele Linien so in vier Teile geteilt werden, dass der nach der Spitze C hin liegende Teil $f_1 = 572$ qm, der nach der gegenüberliegenden Grenze AB hin liegende Teil $f_4 = 880$ qm enthält, und dass die beiden mittleren Teile, von welchen der nach C hin liegende der kleinere sein soll, sich wie $4:9$ verhalten. Man soll die Lage der Teillinien bestimmen.

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 477, aus der Seite AC (= b) und den derselben anliegenden Winkeln α und γ, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite a und den Inhalt F des ganzen Dreiecks ABC. Dann berechne man den Inhalt der beiden mittleren Teile H[illegible] und $KLJH$ mittels der Relationen:

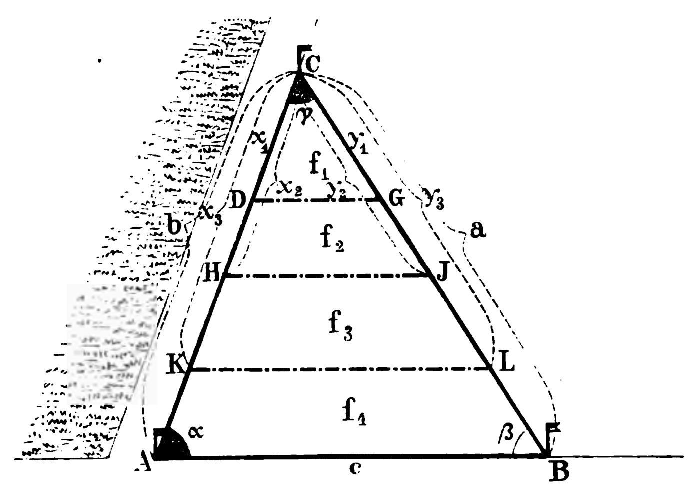
$$\text{a)} \ldots f_2 + f_3 = F - (f_1 + f_4)$$

und

$$\text{b)} \ldots f_2 : f_3 = 4 : 9$$

Dann berechne man die Abschnitte x_1 und y_1, bezw. x_2 und y_2, x_3 und y_3 ganz so, wie in der Andeutung zur vorigen Aufgabe 1126 gesagt wurde.

Figur 477.



Aufgabe 1128. Ein Grundstück hat die Form des durch die Figur 478 dargestellten Dreiecks ABC. Durch Messung wurde gefunden $AC = b = 340$ m, $AB = c = 515$ m und $\gamma = 100^0\,10'\,30{,}5''$. Dieses Grundstück soll durch zwei senkrecht zu AB stehende Teillinien so in drei Bauplätze geteilt werden, dass von B ab gerechnet, jeder folgende Bauplatz 9850 qm mehr Inhalt hat als der nächstvorhergehende. Man soll die Lage der Teillinien bestimmen.

Andeutung. Man kennt von dem Dreieck ABC, siehe Figur 478, zwei Seiten b und c, sowie den der grössern dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel γ; wie in Aufgabe 120 gezeigt, kann man aus diesen Stücken den Inhalt des Dreiecks ABC, dessen Seite a und dessen Winkel α und β berechnen.

Sind diese Stücke berechnet, so berechne man die Inhalte f_1, f_2 und f_3 wie folgt:

Gemäss der Aufgabe ist:

a) . . . $f_2 = f_1 + 9850$ qm

und

b) . . . $f_3 = f_2 + 9850$ qm

Ferner besteht die Relation:

c) . . . $F = f_1 + f_2 + f_3$

Aus den Gleichungen a) bis c) erhält man:

d) . . . $F = f_1 + (f_1 + 9850) + (f_1 + 2 \cdot 9850)$

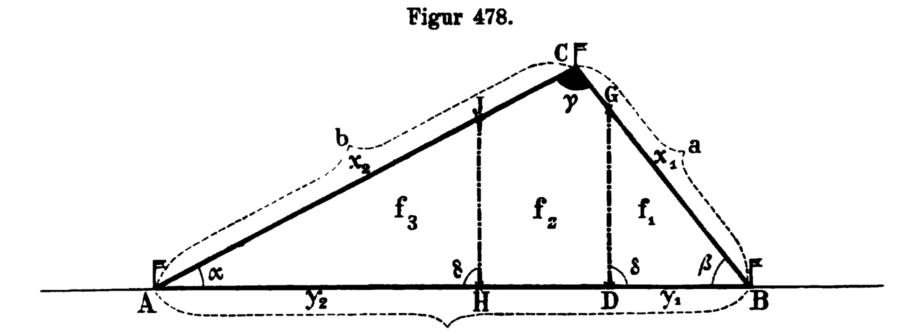
und mittels dieser Gleichung kann man f_1 berechnen; dann kann man nach den Gleich. a) und b) den Inhalt f_2, bezw. den Inhalt f_3 berechnen.

Nach dieser Berechnung kann man, in Rücksicht, dass die Teillinien GD und JH senkrecht zur Seite AB stehen sollen, dass also hiernach die in der Figur durch δ bezeichneten Winkel bekannt sind, indem sie

je = 90° betragen müssen, die Strecken x_1 und y_1, bezw. x_2 und y_2 berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 1125, bezw. in den Erkl. 683 und 684 gesagt wurde (siehe die Erkl. 686).

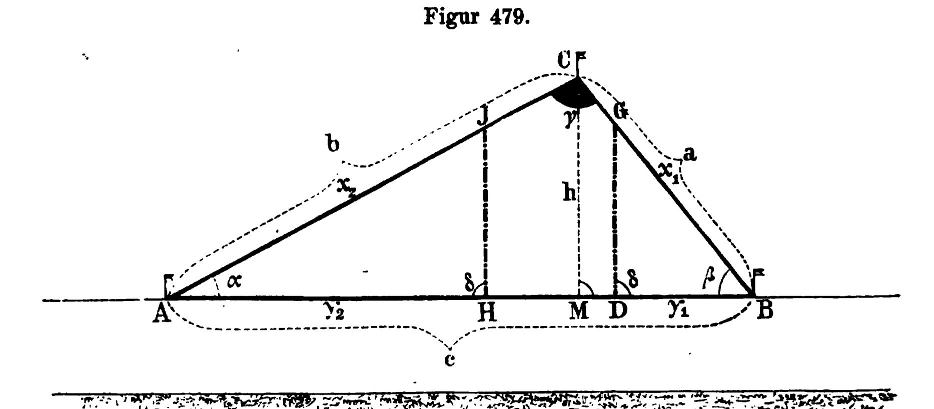
Mittels dieser berechneten Strecken kann man durch Abmessen derselben die Lagen jener Teillinien vollkommen bestimmen.

Figur 478.



Erkl. 686. Die nach nebenstehender Andeutung zu berechnenden Strecken x_1 und y_1, bezw. x_2 und y_2, siehe Figur 478, kann man auch berechnen, wie in Andeutung zur Aufgabe 1126 gesagt wurde, wenn man berücksichtigt, dass die zu AB senkrechten Teillinien GD und JH parallel der zur Seite AB gehörigen Höhe CM sein müssen, siehe Figur 479. Hierbei muss man die Inhalte der rechtwinkligen Dreiecke AMC und BMC berechnen, indem man aus b und α, bezw. aus a und β die Seitenabschnitte AM und BM berechnet und dann die in der Erkl. 151 aufgestellte Formel in Anwendung bringt.

Figur 479.



Aufgabe 1129. Die zwei Seiten BC und AC eines dreieckigen Feldes ABC bilden miteinander den Winkel $\gamma = 56^0\,30'\,20''$ und sind bezw. $a = 1250$ und $b = 1070$ m lang. Dieses Dreieck soll durch drei Linien, welche die Seite CA $(= b)$, bezw. unter den Winkeln $\delta_1 = 55^0$, $\delta_2 = 38^0$ und $\delta_3 = 48^0\,30'$ schneiden, in vier Teile geteilt werden, deren Inhalte von der Spitze C aus gezählt, der Reihe nach in dem Verhältnis $5:4:10:14$ stehen. Man soll die Lage der gedachten Teillinien bestimmen, welche von der Spitze C ab der Reihe nach mit D_1E_1, D_2E_2 und D_3E_3 bezeichnet seien.

Andeutung. Man berechne zunächst, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, aus a, b und γ den Inhalt F des Dreiecks ABC. Dann berechne man die Inhalte f_1, f_2, f_3 und f_4 der einzelnen Teile, in welche das ganze Feld zerlegt werden soll. Diese Berechnung kann man wie folgt ausführen:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$f_1 : f_2 : f_3 : f_4 = 5:4:10:14$$

Bringt man in bezug auf diese laufende Proportion den in der Erkl. 234 angeführten Summensatz in Anwendung, so erhält man:

$$\frac{f_1+f_2+f_3+f_4}{5+4+10+14} = \frac{f_1}{5} \text{ oder } = \frac{f_2}{4} \text{ oder } = \frac{f_3}{10} \text{ oder } = \frac{f_4}{14}$$

und hieraus ergeben sich, da:

$$f_1+f_2+f_3+f_4 = F$$

nämlich gleich dem berechneten Inhalt F der ganzen zu teilenden Fläche ABC ist:

$$\text{a)} \ldots\ldots \frac{F}{33} = \frac{f_1}{5}$$

$$\text{b)} \ldots\ldots \frac{F}{33} = \frac{f_2}{4}$$

$$\text{c)} \ldots\ldots \frac{F}{33} = \frac{f_3}{10}$$

und

$$\text{d)} \ldots\ldots \frac{F}{33} = \frac{f_4}{14}$$

nach welchen Gleichungen man die Inhalte f_1, f_2, f_3 und f_4 der einzelnen Teile berechnen kann.

Nach dieser Berechnung kann man, da hiernach die Inhalte der Dreiecke:

$$CD_1E_1 = f_1$$
$$CD_2E_2 = f_1 + f_2$$
$$CD_3E_3 = f_1 + f_2 + f_3$$

bekannt sind, zur Bestimmung der jeweiligen Abschnitte der gedachten Teillinien: D_1E_1, D_2E_2, D_3E_3 auf den Dreiecksseiten verfahren, wie in Andeutung zur Aufgabe 1125 und in den Erkl. 683 und 684 angegeben wurde.

Aufgabe 1130. Man hat ein dreieckiges Grundstück ABC, siehe Figur 480; gemessen wurde:

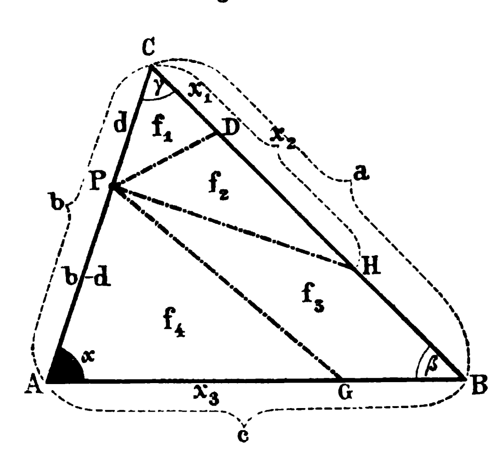
$$AC = b = 810 \text{ m}$$
$$BC = a = 885 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 81^0\, 52'\, 26{,}4''$$

Dieses Grundstück soll von einem auf der Seite AC liegenden Punkt P, welcher von C um $d = 250$ m entfernt ist, so in vier Teile geteilt werden, dass sich dieselben, von der Ecke C an gerechnet, wie $1:2:3:4$ verhalten. Man soll die Lage der Teillinien bestimmen.

Figur 480.



Erkl. 687. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Inhalte zweier Dreiecke, welche einen Winkel gleich haben, verhalten sich wie die Produkte der diesen Winkel einschliessenden Seiten.“

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Andeutung. Von dem Dreieck ABC, siehe Figur 480, kennt man die Seiten a und b, sowie den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel α; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde, den Inhalt F des Dreiecks, sowie die Seite c desselben berechnen; dann kann man die Inhalte f_1, f_2, f_3 und f_4 berechnen, wie in Andeutung zur Aufgabe 1129 gesagt wurde.

Da jedes der Dreiecke CPD, CPH und PGA mit dem Dreieck ABC einen gleichen Winkel hat, so kann man zur Berechnung der Strecken x_1, x_2 und x_3 den in der Erkl. 687 angeführten planimetrischen Satz in Anwendung bringen.

Nach diesem Satz ergeben sich aus der Figur 480 bezw. die Relationen:

a) . . . $F:f_1 = a \cdot b : d \cdot x_1$

b) . . . $F:(f_1 + f_2) = a \cdot b : d \cdot x_2$

und

c) . . . $F:f_4 = b \cdot c : (b - d) \cdot x_3$

nach welchen die Strecken x_1, x_2 und x_3 berechnet werden können, wobei jedoch die Erkl. 683 zu berücksichtigen ist.

Sind diese Strecken berechnet, so kann man dieselben auf den Grenzen des Grundstücks abmessen, und somit die Punkte D, H und G, bezw. die Lage der Teillinien PD, PH und PG bestimmen.

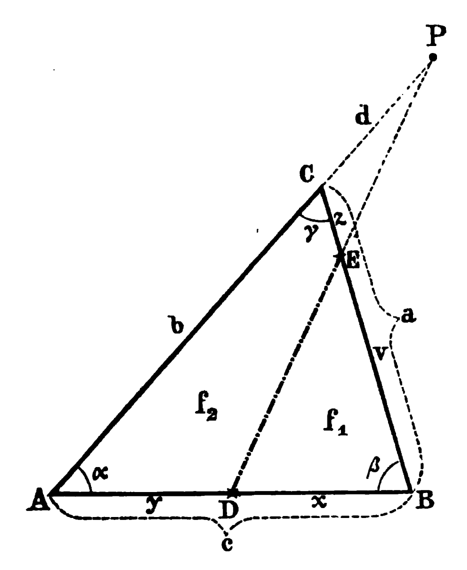
Aufgabe 1131. Die Grenzlinien eines dreieckigen Feldes ABC, siehe Figur 481, wurden gemessen und gefunden:

$$BC = a = 382 \text{ m}$$
$$AC = b = 479 \text{ m}$$
$$AB = c = 292 \text{ m}$$

Auf der Verlängerung der Grenzlinie AC befindet sich um $d = 45$ m von der Ecke C entfernt ein Punkt P. Das Grundstück soll so in zwei Teile geteilt werden, dass deren Inhalte f_1 und f_2 in dem Verhältnis $2:3$ stehen, und dass die Teillinie durch jenen Punkt P geht. Man soll die Lage dieser Teillinie bestimmen.

Andeutung. Man berechne zunächst aus den drei Seiten des Dreiecks, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde, den Inhalt F des Dreiecks, sowie dessen drei Winkel. Dann berechne man mittels der Relationen:

Figur 481.



a) . . . . $F = f_1 + f_2$

und

b) . . $f_1 : f_2 = 2 : 3$

die Inhalte f_1 und f_2 der einzelnen Teile. Zur Berechnung einer der Strecken x, y, z oder v, siehe Fig. 481, durch welche die Lage der gedachten Teillinie PD bestimmt werden kann, verfahre man wie folgt:

Nach der Erkl. 151 besteht die Relation:

c) . . . $f_1 = \frac{x \cdot v}{2} \cdot \sin\beta$

Ferner ergibt sich aus der Figur 481:

$$f_2 = \triangle ADP - \triangle CEP$$

oder nach Benutzung der in der Erkl. 151 angeführten trigonometrischen Inhaltsformel in bezug auf die Dreiecke ADP und CEP:

$$f_2 = \frac{(b+d) \cdot y}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{d \cdot z}{2} \cdot \sin(2R - \gamma)$$

oder, da:

$$y = c - x$$
$$z = a - v$$

und

$$\sin(2R - \gamma) = \sin\gamma$$

ist:

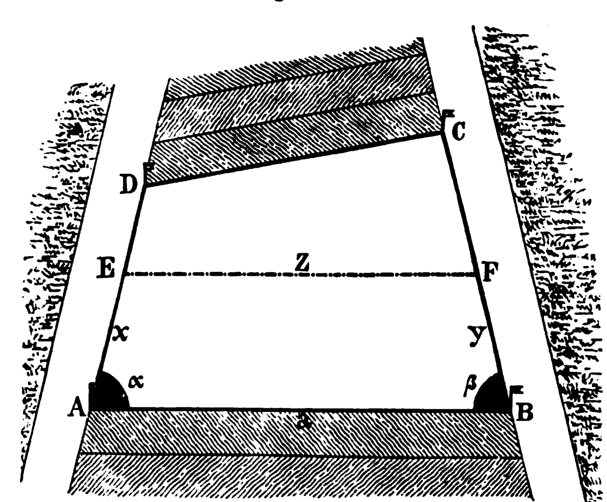
d) . . . $f_2 = \frac{(b+d)(c-x)}{2} \cdot \sin\alpha - \frac{d(a-v)}{2} \cdot \sin\gamma$

Mittels der Gleichungen c) und d), welche nach jenen bereits vorgenommenen Berechnungen nur noch die Unbekannten x und v enthalten, kann man eine dieser Strecken (zur Kontrolle auch die andere) berechnen. Ist eine dieser Strecken z. B. x berechnet, so braucht man dieselbe von B auf der Seite BA nach A hin nur abzumessen, um den Punkt D der gedachten Teillinie PD zu bestimmen; wird auch die Strecke v berechnet und von B nach C hin abgemesson, so müssen die drei Punkte P, E und D in einer geraden Linie liegen, was eine Kontrolle für die Richtigkeit der ausgeführten Rechnung ist.

Aufgabe 1132. Von einem viereckigen Feld $ABCD$, welches die durch die Fig. 482 dargestellte Form hat, wurde die Seite AB gemessen und dafür $a = 1580$ m gefunden; ferner wurden die Winkel $\alpha = 52^0\,30'\,40''$ und $\beta = 68^0\,10'\,8''$ gefunden. Von diesem Feld soll durch eine zu AB parallele Linie EF ein Stück $ABFE$ von dem Inhalt $f = 79000$ qm abgeteilt werden; wie gross müssen die Strecken AE ($= x$) und BF ($= y$) sein?

Andeutung. Das Flächenstück, welches von dem Grundstück $ABCD$, siehe Fig. 482, durch die zu AB Parallele EF abgeschnitten werden soll, ist ein Paralleltrapez. Wie in Andeutung zur Aufgabe 731 gezeigt, bestehen zwischen den Seiten a, z, x und y,

Figur 482



den Winkeln α und β, sowie dem Inhalt F desselben die Relationen:

a) . . . $x = (a - z) \cdot \frac{\sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

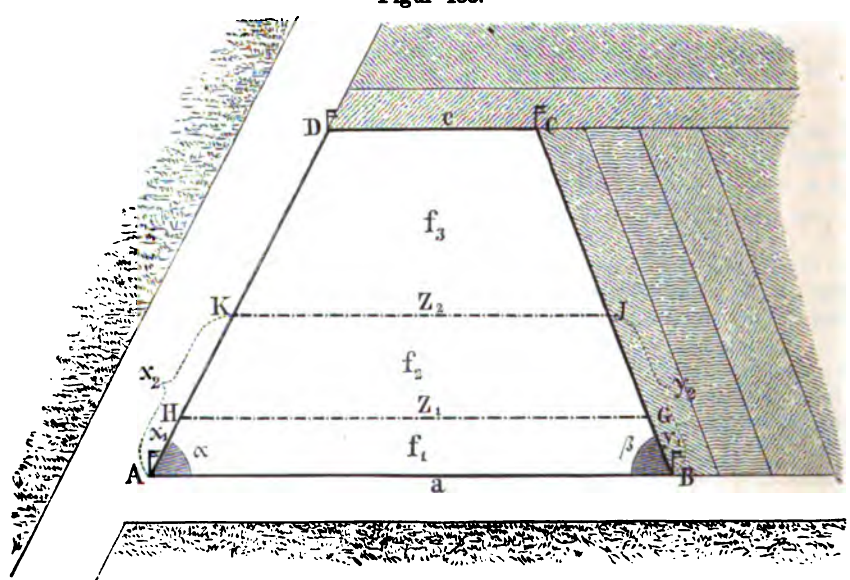
b) . . . $y = (a - z) \cdot \frac{\sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

und

c) . . $F = \frac{(a + z)(a - z) \cdot \sin \alpha \sin \beta}{2 \sin(\alpha + \beta)}$

Da gemäss der Aufgabe F, a, α und β bekannt sind, so kann man mittels der Relation c) die Seite z berechnen; ist hiernach z berechnet, so kann man mittels der Relationen a) und b) die Strecke x, bezw. die Strecke y berechnen, wodurch die Lage der Teillinien EF vollkommen bestimmt ist.

Figur 483.



Aufgabe 1133. Ein Grundstück hat, siehe Figur 483, die Form eines Paralleltrapezes $ABCD$; gemessen wurden:

$$AB = a = 1236 \text{ m}$$
$$DC = c = 410 \text{ m}$$
$$\alpha = 70^0\, 30'\, 25''$$
$$\beta = 43^0\, 18'\, 14''$$

Dieses Grundstück soll durch zwei zu den Parallelseiten desselben parallele Gerade in drei Teile geteilt werden, die sich, von der Grenze AB ab, der Reihe nach verhalten,

Andeutung. Man berechne zunächst aus a, c, α und β den Inhalt des Trapezes, wie in Andeutung zur Aufgabe 731 gesagt wurde. Nach jener Andeutung ist:

wie 2 : 5 : 6. Wo werden die nicht parallelen Seiten des Grundstücks von den Teillinien geschnitten?

$$a) \ldots F = \frac{(a+c)(a-c)\sin\alpha\sin\beta}{2\cdot\sin(\alpha+\beta)}$$

Dann berechne man die Inhalte f_1, f_2 und f_3 der einzelnen Teile mittels der Relationen:

$$b) \ldots f_1 + f_2 + f_3 = F$$

und

$$c) \ldots f_1 : f_2 : f_3 = 2 : 5 : 6$$

analog wie in Andeutung zur Aufgabe 1129 gesagt wurde.

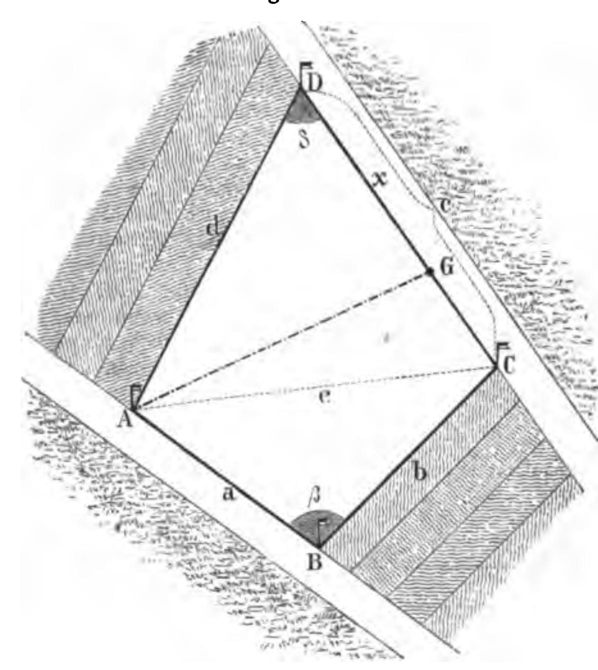
Sind die Inhalte f_1 und $f_1 + f_2$ der Paralleltrapeze $ABGH$ und $ABJK$ hiernach berechnet, so berechne man, analog wie in voriger Andeutung gesagt, zunächst die parallelen Seiten z_1 und z_2 und dann die Abschnitte x_1 und y_1, sowie x_2 und y_2.

Aufgabe 1134. Von einem viereckigen Grundstück $ABCD$, siehe Figur 484, wurden durch Messung bestimmt:

$$AB = a = 816 \text{ m}$$
$$BC = b = 780 \text{ m}$$
$$AD = d = 1110 \text{ m}$$
$$\beta = 124^0\,10'\,30''$$
$$\delta = 58^0\,12'\,58''$$

Dieses Grundstück soll durch eine von dem Eckpunkt A ausgehende Gerade in zwei gleiche Teile geteilt werden. Man soll die Lage dieser Teillinie bestimmen.

Figur 484.



Andeutung. Von dem Dreieck ABC, siehe Figur 484, kennt man die zwei Seiten a u. b, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel β; wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man somit den Inhalt f_1, sowie die Seite AC ($= e$) desselben berechnen. Dann berechne man aus d, e und δ den Inhalt f_2 des Dreiecks ACD und die Seite DC ($= c$) desselben, wie in Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde. Hierauf bestimme man den Inhalt F des ganzen Vierecks nach der Relation:

$$a) \ldots F = f_1 + f_2$$

Nunmehr untersuche man, welcher der Dreiecksinhalte f_1 und f_2 grösser als $\frac{F}{2}$ ist; ist z. B. der Inhalt f_2 des Dreiecks ACD grösser als $\frac{F}{2}$, nämlich als die Hälfte des Inhalts F des ganzen Vierecks, so muss die Teillinie AG in dieses Dreieck zu liegen kommen und die Seite DC treffen, wie in der Fig. 484 angedeutet (andernfalls müsste die Teillinie in das Dreieck ABC zu liegen kommen und die Seite BC treffen).

Zur Berechnung der Strecke DG ($= x$), mittels welcher die Lage der Teillinie AG fest-

Erkl. 688. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Inhalte von Dreiecken, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich wie die Grundlinien solcher Dreiecke."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Aufgabe 1135. Das durch die Fig. 484 dargestellte Grundstück $ABCD$, dessen Seiten a, b und d und dessen Winkel β und δ die in der Aufgabe 1134 angeführten Werte haben, soll von A aus in drei Teile geteilt werden, die sich wie $2:5:7$ verhalten. Man soll die Lage der Teillinien bestimmen.

Aufgabe 1136. Die gemeinschaftliche Grenze zweier aneinanderstossender Grundstücke G und G_1, siehe Figur 485, ist die einfach gebrochene Linie ABC. Diese Grenze soll von dem Endpunkt A derselben aus rektifiziert werden. Zur Bestimmung der Lage der neuen Grenzlinie AB_1 wurde durch Messung gefunden:

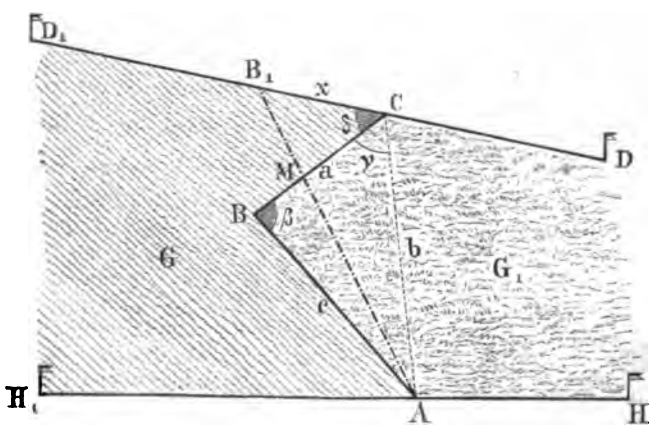
$$BC = a = 150 \text{ m}$$
$$AB = c = 375 \text{ m}$$
$$\beta = 95^0\,40'\,30''$$

und

$$\delta = 72^0\,15'\,16''$$

Man soll nach diesen Angaben die Lage der neuen Grenzlinie bestimmen.

Figur 485.



gelegt werden kann, beachte man, dass die Dreiecke ADG und ADC gleiche Höhen haben, wenn man $DC\,(= c)$ und $DG\,(= x)$ als Grundlinien dieser Dreiecke annimmt, und dass somit zwischen diesen Grundlinien, dem Inhalt $f\left(= \frac{F}{2}\right)$ des Dreiecks ADG und dem Inhalt f_2 des Dreiecks ACD nach der Erkl. 688 die Relation:

$$\text{b)} \;\ldots\; f : f_2 = x : c$$

besteht, nach welcher Gleichung man die Strecke x berechnen kann.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe.

Andeutung. Ist, siehe Figur 485, ABC die gemeinschaftliche Grenzlinie der Grundstücke G und G_1, welche **rektifiziert** werden soll, und ist AB_1 die neue Grenzlinie, so muss nach der Erkl. 689 diese neue Grenzlinie AB_1 eine solche Lage haben, dass der Inhalt des Dreiecks ABM, welcher durch die berichtigte Grenzlinie AB_1 von dem Grundstück G_1 abgeschnitten und dem Grundstück G zugeteilt wird, gleich dem Inhalt des Dreiecks CB_1M sein, welches durch die neue Grenzlinie von dem Grundstück G abgeschnitten und dem Grundstück G_1 zugeteilt wird.

Die Lage dieser neuen Grenzlinie AB_1 ist bestimmt, wenn man die Strecke $CB_1\,(= x)$ kennt; diese kann man aber wie folgt berechnen:

Denkt man sich A mit C verbunden, so muss in Rücksicht des vorstehend Gesagten, das Dreieck ABC an Inhalt gleich dem Dreieck AB_1C sein, indem, wie aus der Figur 485 ersichtlich:

$$\triangle ABC = \triangle ABM + \triangle AMC$$

und

$$\triangle AB_1C = \triangle CB_1M + \triangle AMC$$

ist und indem nach dem vorstehenden:

$$\triangle ABM = \triangle CB_1M$$

sein muss, woraus sich ergibt, dass, wie gesagt:

A) . . . $\triangle ABC = \triangle AB_1C$

sein muss.

Jst nun die Lage der gemeinschaftlichen Grenze ABC in bezug auf die Grenzlinien DD_1 und HH_1 z. B. dadurch bestimmt, dass, wie in der Aufgabe erwähnt, die Grenze $CB = a$, $AB = c$, der Winkel $CBA = \beta$ und der Winkel $BCD_1 = \delta$ gemessen wurde, so kennt man von dem Dreieck ABC die zwei Seiten a und c und den von denselben eingeschlossenen Winkel β; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, zunächst die Seite b und den Winkel γ dieses Dreiecks berechnen.

Erkl. 689. In der praktischen Geometrie versteht man unter dem Rektifizieren oder dem Berichtigen einer gebrochenen Grenzlinie, die Verwandlung derselben in eine gerade Grenzlinie, ohne dass hierdurch die Inhalte der Grundstücke, deren gemeinschaftliche Grenze jene gebrochene Grenzlinie ist, Veränderungen erleiden.

Nach der Erkl. 151 erhält man ferner für den Inhalt F des Dreiecks ABC:

a) . . . $F = \frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin\beta$

und für den Inhalt F_1 des Dreiecks AB_1C:

b) . . . $F_1 = \frac{b \cdot x}{2} \cdot \sin(\delta + \gamma)$

Da nun nach der allgemeinen Gleichung A):

$$F = F_1$$

sein muss, so ergibt sich aus den Gleichungen a) und b) für x die Bestimmungsgleichung:

c) . . . $\frac{a \cdot c}{2} \cdot \sin\beta = \frac{b \cdot x}{2} \cdot \sin(\delta + \gamma)$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, c, β und δ durch Messung und der für b und γ durch Rechnung gefundenen Werte, die Strecke x berechnen kann.

Aufgabe 1137. Zwei aneinanderstossende Grundstücke G und G_1 haben eine gemeinschaftliche Grenze von der in der Fig. 486 durch $ABCD$ dargestellten Form. Diese Grenze soll von dem Punkt A aus rektifiziert werden, zu welchem Zweck durch Messung bestimmt wurde:

$$AB = a = 262 \text{ m}$$
$$BC = b = 175 \text{ m}$$
$$CD = c = 305 \text{ m}$$
$$\alpha = 42^0\,30'$$
$$\beta = 38^0\,16'$$

und

$$\gamma = 70^0\,45'$$

Man soll nach diesen Angaben die Lage der neuen Grenzlinie bestimmen.

Andeutung. Ist, siehe Figur 486, AD_1 die gedachte neue Grenzlinie, so muss dieselbe eine solche Lage haben, dass der Inhalt des Dreiecks CMN, welches von dem Grundstück G_1 durch die neue Grenzlinie AD_1 abgeschnitten wird, gleich der Summe der Inhalte der Dreiecke NDD_1 und ABM ist, welche nach Festlegung der neuen Grenzlinie diesem Grundstück G_1 zugeteilt werden. Die Lage der neuen Grenzlinie AD_1 ist bestimmt, wenn man die Strecke

DD_1 ($= x$) kennt; diese kann man aber wie folgt berechnen:

Denkt man sich AB bis zum Durchschnitt O mit der Grenzlinie JJ_1 verlängert, so muss in Rücksicht des vorstehend Gesagten das Viereck $BODC$ mit dem Dreieck AOD_1 gleichen Inhalt haben, indem, wie aus der Figur ersichtlich:

a) . . . $\triangle AOD_1 = \triangle ABM + \triangle NDD_1 +$ Fünfeck $MBODN$

b) . . . Viereck $BODC = \triangle CMN +$ Fünfeck $MBODN$

ist, und nach vorstehendem:

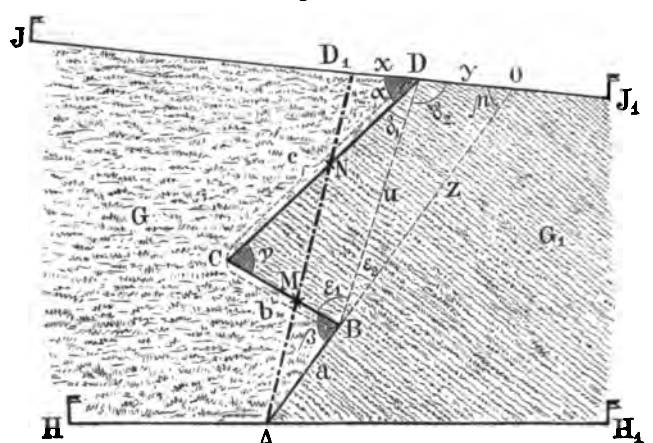
c) . . . $\triangle ABM + \triangle NDD_1 = \triangle CMN$

sein muss, woraus sich ergibt, dass:

A) . . . $\triangle AOD_1 =$ Viereck $BODC$

sein muss.

Figur 486.



Nach den in der Aufgabe erwähnten Messungen kennt man a, b, c, α, β und γ; verbindet man in Rücksicht dessen B mit D, so kennt man von dem hierdurch entstandenen Dreieck BCD die Seiten b und c und den eingeschlossenen Winkel γ; wie in Auflösung der Aufg. 118 gezeigt, kann man somit den Inhalt f dieses Dreiecks, sowie die Seite u und die Winkel δ_1 und ε_1 desselben berechnen. Hierauf kann man mittels der Gleichungen:

$$\delta_2 = 2R - (\alpha + \delta_1) \text{ und}$$

$$\varepsilon_2 = 2R - (\beta + \varepsilon_1)$$

die Winkel δ_2 und ε_2 des Dreiecks BOD (auch dessen dritten Winkel μ) berechnen. Dann kann man aus der Seite u und den Winkeln δ_2 und ε_2 dieses Dreiecks die Seiten y und z, sowie den Inhalt f_1 dieses Dreiecks BOD bestimmen. Berücksichtigt man alsdann, dass der Inhalt F des Vierecks $BODC = f + f_1$ und dass der Inhalt F_1 des Dreiecks AOD_1 nach der Erkl. 151:

$$= \frac{(x+y)(a+z)}{2} \cdot \sin\mu$$

ist, so erhält man in Rücksicht, dass nach Gleichung A):

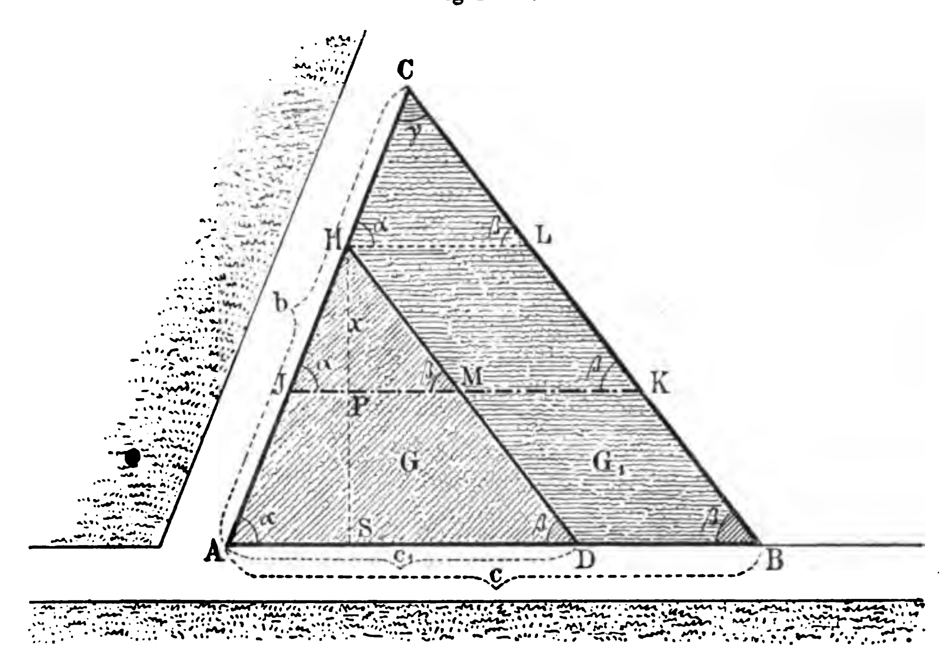
$$F = F_1$$

sein muss, für x die Bestimmungsgleichung:

$$\text{A}_1) \;\ldots\; f + f_1 = \frac{(x+y)(a+z)}{2} \cdot \sin\mu$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für a durch Messung bestimmten Werts und der für f, f_1, y, z und μ nach vorstehenden berechneten Werten, die gesuchte Strecke x berechnen kann.

Figur 487.



Aufgabe 1138. Ein dreieckiges Stück Feld ABC besteht aus zwei aneinanderstossenden Grundstücken G ($= ADH$) und G_1 ($= DBCH$) von der durch die Fig. 487 dargestellten Form ($HD \parallel CB$). Der Bodenwert des Grundstücks G ist pro qm zu 30 Mark und der des Grundstücks G_1 ist pro qm zu 38 Mark abgeschätzt. Das ganze Feld soll durch eine zur Grenze AB parallele Teillinie JK in zwei Teile geteilt werden, welche gleichen Bodenwert haben. Welches muss die Lage der Teillinie zur Grenze AB sein, wenn durch Messung gefunden wurde, dass;

$$AB = c = 75 \text{ m}$$
$$AC = b = 105 \text{ m}$$
$$AD = c_1 = 42 \text{ m}$$

und

$$\beta = 50^0 20' 10''$$

ist?

Andeutung. Ist, siehe Figur 487, JK die zu AB parallele Teillinie, welche das aus den Grundstücken G und G_1 bestehende dreieckige Feld in zwei Teile teilt, die gleichen Bodenwert haben, so muss der Bodenwert des Dreiecks JKC gleich dem halben Bodenwert des ganzen Feldes ABC sein, in Zeichen:

a) . Wert v. $\triangle JKC = \frac{1}{2}$ Wert v. $\triangle ABC$

Zieht man HL parallel JK, bezw. parallel AB, so ergibt sich aus der Figur 487, dass:

b) . Wert v. $\triangle JKL$ = Wert v. $\triangle CHL$ + Wert v. $\parallel$gr $HMKL$ + Wert v. $\triangle JMH$

Aus diesen Gleichungen folgt zunächst die Beziehung:

1) . Wert v. $\triangle CHL$ + Wert v. $\parallel$gr $HMKL$ + Wert v. $\triangle JMH = \frac{1}{2}$ Wert v. $\triangle ABC$

Drückt man nunmehr die in dieser Gleichung enthaltenen Werte (Bodenwerte) der einzelnen Flächenstücke in die in der Auf-

Erkl. 690. Den Bodenwert eines Flächenstücks findet man, indem man dessen Inhalt in qm ausdrückt und diesen mit der Anzahl von Mark multipliziert, zu welcher ein qm des betreffenden Grundstücks abgeschätzt wurde.

Erkl. 691. Da man von dem Dreieck ABC, siehe Figur 487, gemäss der Aufgabe 1138 die Seiten b und c, sowie den der grösseren dieser Seiten gegenüberliegenden Winkel kennt, so kann man den Inhalt, sowie die übrigen Bestimmungsstücke desselben, nämlich die Winkel α und β (und wenn nötig, die Seite $BC = a$) berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 120 gezeigt wurde.

Erkl. 692. Den Inhalt des Dreiecks ADH in Figur 487, sowie die Seiten AH u. DH und die Höhe HS desselben kann man in Rücksicht, dass $HD \parallel CB$, also $\sphericalangle ADH = \sphericalangle ABC$ oder $= \beta$ ist, aus der gegebenen Seite c_1 und aus den nach der Erkl. 691 berechneten Winkeln α und β berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Erkl. 693. Den Inhalt des Paralleltrapezes $HDBC$ in Figur 487 findet man mittels der Beziehung:

$$\parallel \text{tr}\ HDBC = \triangle ABC - \triangle ADH$$

(siehe die Erkl. 691 und 692)

Erkl. 694. Den Inhalt des Dreiecks CHL in Figur 487, sowie die Seite HL desselben kann man aus der Seite HC $(= AC - AH)$ und den Winkeln α und β berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Erkl. 695. Den Inhalt des Parallelogramms $HMKL$ in Figur 487 kann man in die nach der Erkl. 694 berechnete Seite HL dieses Parallelogramms und in die zu derselben gehörige Höhe HP $(= x)$ desselben ausdrücken.

Erkl. 696. Den Inhalt des Dreiecks JHM in Figur 487 kann man in die Grundlinie JM desselben und in die Höhe $HP (= x)$ ausdrücken; jene Grundlinie JM selbst kann man in die Strecken AD und HS (siehe Erkl. 692) und in die Höhe HP $(= x)$ ausdrücken und zwar mittels der nach der Erklärung 535 aus der Figur sich ergebenden Proportion:

$$\overline{HS} : \overline{AD} = \overline{HP} : \overline{JM}$$

gabe gegebenen Stücke, und in die Höhe $HP (= x)$ des Dreiecks JMH (oder des grs $HMKL$) aus, so erhält man in bezug auf x eine Bestimmungsgleichung, aus der man x berechnen kann (siehe die Erkl. 690 bis 696). Ist diese Strecke x berechnet, so kann man aus den rechtwinkligen Dreiecken HPJ und HPM, mittels der aus denselben sich ergebenden Relationen:

$$\left.\begin{aligned} \overline{HJ} &= \frac{x}{\sin\alpha} \\ \text{und}\qquad \overline{HM} &= \frac{x}{\sin\beta} \end{aligned}\right\} \text{(siehe Erkl. 42)}$$

die Strecken HJ und HM berechnen und somit die Lage der zu AB parallelen Teillinie JK bestimmen.

Aufgabe 1139. Auf einer Kante eines rechteckigen Platzes $CDGH$, siehe Fig. 488, befinden sich zwei Punkte A und B in der Entfernung von $d = 50$ m. In A hat man die Winkel:

$$\alpha = 72^0\,40'$$

und

$$\gamma = 64^0\,35'$$

in B den Winkel:

$$\beta = 57^0\,22'$$

gemessen.

Andeutung. Von dem Dreieck ABC der Figur 488 kennt man die Seite AB $(= d$

Welchen Flächeninhalt wird nach diesen Angaben jener rechteckige Platz haben?

sowie die derselben anliegenden Winkel $BAC = 2R - \alpha$ und $ABC = \beta$; man kann somit die Seite AC desselben berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde. Nach dieser Berechnung kennt man von dem bei H rechtwinkligen Dreieck CHA die Hypotenuse CA, sowie den Winkel α; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 5 gezeigt wurde, die Katheten CH und AH berechnen. Ist hiernach CH berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck DGA die Kathete $DG (= CH)$, sowie gemäss der Aufgabe den Winkel γ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 3 gezeigt wurde, die Kathete AG dieses Dreiecks berechnen. Mittels der für AH und AG gefundenen Werte kann man leicht die andere Rechtecksseite HG nach der aus der Figur sich ergebenden Relation:

$$\overline{HG} = \overline{AH} + \overline{AG}$$

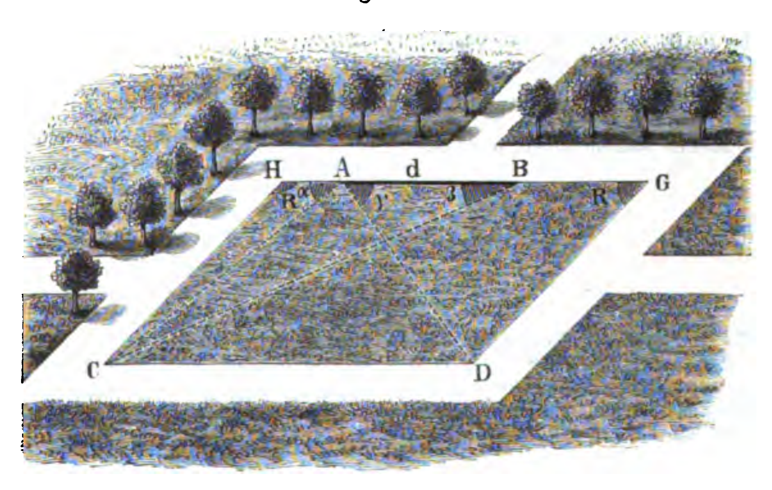
berechnen.

Den gesuchten Inhalt F des rechteckigen Platzes $CDGH$ findet man alsdann mittels der Relation:

A) . . . $F = \overline{CH} \cdot \overline{HG}$

wenn man in derselben die für CH und HG nach vorstehendem berechneten Werte substituiert.

Figur 488.

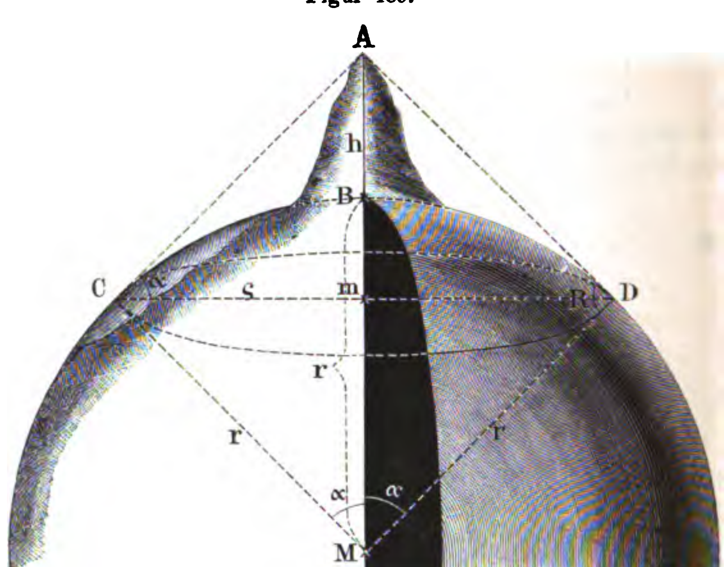


Anmerkung 64. Weitere Aufgaben aus der praktischen Geometrie findet man in den Teilen der Encyklopädie, welche speziell über das Feldmessen, niedere und höhere Geodäsie handeln.

2). Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie.

a) Aufgaben, in welchen Bezug auf die Erhebung von Punkten der Erdoberfläche über den Meereshorizont (und auch auf die irdische Strahlenbrechung) genommen ist.


Figur 489.



***Aufgabe 1140.** Man soll die Aussichtsweite des Aetna, dessen Höhe $h = 3313$ m über dem Meeresspiegel beträgt, berechnen. Der Radius r der Erde soll zu 859,6 geographischen Meilen angenommen werden.

Erkl. 697. Bei grösseren Messungen werden in Rücksicht des in der Erkl. 698 unter 1) Gesagten alle Entfernungen auf die Meeresfläche bezogen, wobei man sich die Erde als eine Kugel vorzustellen hat, deren Oberfläche die des Meeres ist.

Andeutung. Ist, siehe Figur 489 und die Erkl. 697 und 698, AB ein Berg, dessen Höhe über dem Meeresspiegel CBD, durch welchen die Kugelgestalt der Erde bestimmt wird, $= h$ ist, und man denkt sich ringsum von der Spitze A aus Sehstrahlen, wie z. B. AC und AD gezogen, welche Tangenten an die Oberfläche der Erde (die Meeresfläche) sind, so bestimmen die Berührungspunkte die Grenze, welche angibt, wie weit ein in A befindlicher Beobachter ringsum sehen kann (vorausgesetzt allerdings, dass sich sonst keine Erhebungen über dem Meeresspiegel in dem gedachten Umkreis befinden). Jene Grenze wird, wie sich mittels der in den Erkl. 699 und 700 vorgeführten stereometrischen Sätze leicht beweisen lässt und wie in der Figur 489 angedeutet ist, durch die Peripherie eines Kreises der Erdkugel gebildet.

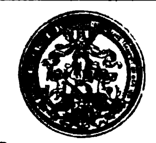
Den Bogen BC (oder BD) zwischen dem Fusspunkt B der Erhöhung AB über dem Meeresspiegel und dem Berührungspunkt C

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

365. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 364. — Seite 817—832
Mit 11 Figuren.





Vollständig gelöste

Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.
unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

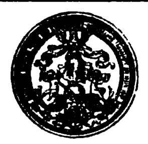
Fortsetzung von Heft 364. — Seite 817—832. Mit 11 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie, Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die Erhebung von Punkten der Erdoberfläche über dem Meereshorizont (und auch auf die irdische Strahlenberechnung) genommen ist, Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die geographische Breite bestimmter Orte der Erdoberfläche genommen ist.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

365. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | **Ebene Trigonometrie.** Forts. v. Heft 364. — Seite 817—832. Mit 11 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen** etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 364. — Seite 817—832. Mit 11 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) **des** Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel **zur Ausgabe**.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, **technischen** und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich** aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften **vorgeführt**.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils der mathematischen** Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen **aller Art, Militär** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige **und praktische** Ausgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen **und mit Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, **nimmt der** Verfasser Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, **und wird** deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 698. Bei dem Auflösen der in dem vorigen Abschnitt 1) vorgeführten Aufgaben, welche sich auf Höhenmessungen beziehen, wurden zwei Fehler begangen:

1) wurde angenommen, dass die Höhe eines Punktes A der Erdoberfläche über einem andern Punkt B gleich dem Perpendikel ist, welchen man von A auf die durch B gelegt gedachte Horizontalebene gefällt denken kann;
2) wurde angenommen, dass die Lichtstrahlen bei der Messung von Winkeln von dem Beobachtungsort aus zu dem einzuvisierenden Punkt in gerader Linie gelangen.

Diese beiden Annahmen können nur dann als richtig zugelassen werden, wenn die Entfernung der beiden gedachten Punkte A und B keine sehr grosse ist (siehe die Aufgabe 1159 und die Erkl. 732); ist diese Entfernung eine grosse, so muss in Rücksicht des unter 1) Gesagten die sphäroidische Gestalt der Erde in Betracht gezogen werden, wie in der nebenstehenden Andeutung z. B. gezeigt ist. Ferner muss in Rücksicht des unter 2) Gesagten die Refraktion der Lichtstrahlen (die atmosphärische Strahlenbrechung) berücksichtigt werden (siehe die Erkl. 703 und 704.)

Erkl. 699. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Die Durchschnittsfigur einer Ebene mit einer Kugel ist stets ein Kreis."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 700. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

„Verbindet man einen beliebigen, auf einem Kugelradius oder auf dessen Verlängerung liegenden Punkt mit beliebigen Punkten der Peripherie eines Kreises jener Kugel, dessen Ebene senkrecht auf jenem Kugelradius steht, so sind alle jene gedachten Verbindungslinien einander gleich."

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 701. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Die Bogen zweier Kreise, welche zu gleichen Centriewinkeln derselben gehören, verhalten sich wie die Radien dieser Kreise."

Bezeichnet man den Bogen eines Kreises, dessen Radius $= r$ Längeneinheiten ist und der zu dem Centriewinkel α desselben gehört, mit bog α, den Bogen eines Kreises, dessen Radius gleich jener Längeneinheit $= 1$ ist und der ebenfalls zu einem Centriewinkel α dieses Kreises gehört, mit arc α, so besteht nach jenem Satz die Relation:

a) . . . $\text{bog}\,\alpha : \text{arc}\,\alpha = r : 1$

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

(oder D) der von A an die kugelförmige Meeresfläche gezogen gedachten Tangente (Sehstrahl) nennt man die Aussichtsweite eines in A befindlichen Beobachters.

Die Länge dieses Bogens BC (oder des gleichen Bogens BD) kann man wie folgt berechnen:

Nach der Erkl. 459 ergibt sich aus der Figur 489 die Relation:

$$\text{bog}\,BC : 2r\pi \doteq \alpha^0 : 360^0$$

und hieraus erhält man:

A) . . . $\text{bog}\,BC = 2r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$ Längeneinheiten des Radius r

wonach man bog BC berechnen könnte, wenn der Centriewinkel α bekannt wäre; diesen Winkel α kann man aber wie folgt bestimmen:

Aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck MCA (siehe Erkl. 464) ergibt sich in Rücksicht, dass

$$\overline{MC} = r$$

und

$$\overline{MA} = \overline{MB} + \overline{BA} \quad \text{also} = r + h$$

ist, die Relation:

B) . . . $\cos\alpha = \frac{r}{r+h}$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann. Da aber der Radius r der Erde gegen die Erhebung h der Bergspitze A über der Meeresfläche sehr gross ist, da also in dem bei C rechtwinkligen Dreieck ACM der Figur 489 die Kathete r und die Hypotenuse $r+h$ nur wenig verschieden sind, mithin der Winkel α nur ein sehr kleiner Winkel sein kann [was sich auch aus der Gleichung B) ergibt, wenn man berücksichtigt, dass für den Fall, in welchem r u. $r+h$ beinahe einander gleich sind, $\cos\alpha$ nahezu $= 1$ und nach der Erkl. 99: $\cos 0^0 = 1$ ist] und da man nach jener Gleichung B) mittels einer trig. oder einer log.-trig. Tafel sehr kleine Werte für α direkt nicht mehr bestimmen kann, so verfahre man zur Bestimmung jenes sehr kleinen Winkels α, bezw. zur Berechnung des Bogens BC, wie folgt:

Nach der Erkl. 301 ist:

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht der Gleichung B):

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \frac{r}{r+h}$$

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{r+h-r}{r+h}$$

Erkl. 702. Mittels einer fünfstelligen Tafel wird man nach der umstehenden Gleichung B):

$$1) \ldots \cos\alpha = \frac{r}{r+h}$$

den Winkel α nur bis auf Minuten genau erhalten. Da nun einer Bogenminute auf der Erdoberfläche eine Länge entspricht, die gleich 1/4 einer geogr. Meile ist, so kann ein nach jener Gleichung erhaltenes Resultat durchaus keinen Anspruch auf Genauigkeit machen.

Einen genaueren Wert erhält man für α, wenn man die aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM sich ergebende Relation:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{MC}}$$

oder in Rücksicht, dass:

$$\overline{AC} = \sqrt{(r+h)^2 - r^2} \text{ oder } = \sqrt{(2r+h)h}$$

und

$$\overline{MC} = r$$

ist, die Relation:

$$3) \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{(2r+h)h}}{r}$$

benutzt.

Formt man diese Relation noch um, wie folgt:

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2rh+h^2}{r^2}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{r} + \left(\frac{h}{r}\right)^2}$$

und vernachlässigt den sehr kleinen Quotienten: $\left(\frac{h}{r}\right)^2$ so erhält man die weitere Relation:

$$3a) \ldots \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

Bei Benutzung dieser Gleichung kann man nach den Erkl. 660 bis 662, wenn ersichtlich ist, dass α ein zwischen 1″ und 60″ liegender Winkel ist, bis auf 11 Dezimalen genau:

$$\operatorname{tg}\alpha'' = \operatorname{arc}\alpha'' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1''$$

oder wenn ersichtlich ist, dass α ein zwischen 1′ und 60′ liegender Winkel ist, bis auf 5 Dezimalen genau:

$$\operatorname{tg}\alpha' = \operatorname{arc}\alpha' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1'$$

setzen und dann nach jener Gleichung 3a) den Winkel α direkt bestimmen.

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{h}{r+h}$$

oder:

$$a) \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{h}{2(r+h)}}$$

Beachtet man nunmehr, dass, wenn α ein sehr kleiner Winkel, speziell ein zwischen 1″ und 60″ oder ein zwischen 1′ und 60′ liegender Winkel ist, nach den Erkl. 660 bis 662 bis auf 11 Dezimalen, bezw. bis auf 5 Dezimalen genau:

$$\sin\alpha'' = \operatorname{arc}\alpha'' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1''$$

bezw.:

$$\sin\alpha' = \operatorname{arc} 1' = \alpha \cdot \operatorname{arc} 1'$$

gesetzt werden kann, so kann man in Rücksicht dessen und des vorhin Gesagten, statt der Gleichung a) annähernd, aber für derartige Berechnungen genau genug, die Gleichung:

$$\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{arc} 1' = \sqrt{\frac{h}{2(r+h)}}$$

setzen; und hieraus erhält man:

$$\alpha \cdot \operatorname{arc} 1' = 2 \cdot \sqrt{\frac{h}{2(r+h)}}$$

oder:

$$b) \ldots \alpha \cdot \operatorname{arc} 1' = \sqrt{\frac{2h}{r+h}}$$

Da nun nach der Erkl. 701:

$$\operatorname{bog}\alpha : \operatorname{arc}\alpha = r : 1$$

mithin:

$$\operatorname{bog}\alpha = r \cdot \operatorname{arc}\alpha$$

oder in Rücksicht des vorstehenden auch:

$$\operatorname{bog}\alpha = r \cdot \alpha \cdot \operatorname{arc} 1'$$

mithin:

$$c) \ldots \alpha \cdot \operatorname{arc} 1' = \frac{\operatorname{bog}\alpha}{r}$$

ist, so erhält man aus den Gleichungen b) und c), wenn man nach der Figur 48[illegible] $\operatorname{bog}\alpha = \operatorname{bog} BC$ setzt:

$$\frac{\operatorname{bog} BC}{r} = \sqrt{\frac{2h}{r+h}}$$

oder:

$$d) \ldots \operatorname{bog} BC = \sqrt{\frac{2r^2h}{r+h}}$$

Dividiert man noch Zähler und Nenner des unter der Wurzel stehenden Quotienten durch r, so erhält man:

$$e) \ldots \operatorname{bog} BC = \sqrt{\frac{2rh}{1+\frac{h}{r}}}$$

Berücksichtigt man nunmehr, dass der Quotient $h:r$, da r gegen h sehr gross ist, nur einen sehr kleinen, nahe bei Null liegenden Wert haben kann, so kann man, ohne

Erkl. 703. Wegen der irdischen Strahlenbrechung (siehe Erkl. 704) ist die Aussichtsweite W (= bog BC), siehe Figur 489, welche man nach der in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichung C):

1) . . . $W = \sqrt{2rh}$

erhält, zu klein. Man sieht nämlich infolge der irdischen Strahlenbrechung weiter und zwar, wie gewöhnlich angenommen wird, um das 0,08-fache jener Aussichtsweite W (des Bogens BC oder des Winkels α).

In Rücksicht des soeben Gesagten erhält man für die wirkliche Aussichtsweite W_1:

$$W_1 = W + 0{,}08 \cdot W$$

$$W_1 = W(1 + 0{,}08)$$

oder:

2) . . . $W_1 = 1{,}08 \cdot W$

oder in Rücksicht der vorstehenden Gleichung 1):

3) . . . $W_1 = 1{,}08 \cdot \sqrt{2rh}$ Längeneinheiten

nach welcher Gleichung man die wirkliche Aussichtsweite berechnen kann.

Erkl. 704. Die Brechung (Refraktion) des Lichtes besteht darin, dass ein Lichtstrahl, der von einem Mittel in ein anderes übergeht, an der Grenze beider Mittel im allgemeinen seine Richtung ändert.

Dadurch, dass z. B. die Atmosphäre nach der Erde hin stets dichter wird, also an Dichtigkeit zunimmt, [bemerkt sei hierbei, dass dies nur eine Annahme ist, denn es kann infolge der verschiedenartigen Erwärmung der Luft der Fall eintreten, dass die unteren Luftschichten dünner als höhere Luftschichten sind, und dass auch durch ungleiche Erwärmung der verschiedenen Luftschichten alle Luftschichten gleich dicht sind], wird die sogenannte atmosphärische Strahlenbrechung hervorgerufen.

Man spricht von einer astronomischen Strahlenbrechung (Refraktion), wenn die Lichtstrahlen von einem ausserhalb der Atmosphäre der Erde liegenden leuchtenden Punkt, also z. B. von einem Himmelskörper kommen und die die Erde umgebende Luftschicht durchdringen; man spricht von einer irdischen (oder terrestrischen) Strahlenbrechung (Refraktion), wenn die Lichtstrahlen von einem leuchtenden Punkt kommen, welcher innerhalb der Atmosphäre der Erde liegt, wie z. B. von der Spitze eines Berges.

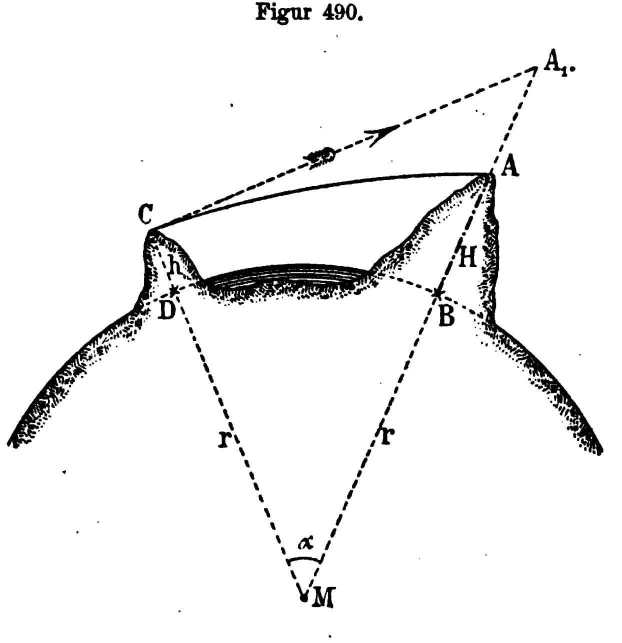
Ist in der Fig. 490 A ein über dem Meereshorizont liegender Punkt, z. B. die Spitze eines Berges, so werden die von A kommenden Lichtstrahlen, sobald sie in niedrigere (dichtere) Luftschichten eindringen, gebrochen und zwar so, dass der Weg eines von A kommenden Lichtstrahls

weiter einen besonderen Fehler zu begehen, diesen Quotienten noch vernachlässigen, und man erhält:

C) . . . bog $BC = \sqrt{2rh}$ Längeneinheiten

nach welcher Gleichung man den Bogen BC, d. i. die gesuchte Aussichtsweite, direkt aus dem gegebenen Radius r der Erde und der gegebenen Erhebung h eines Punktes über der Meeresfläche mit hinreichender Genauigkeit berechnen kann. (Siehe die Erkl. 702 bis 705.)

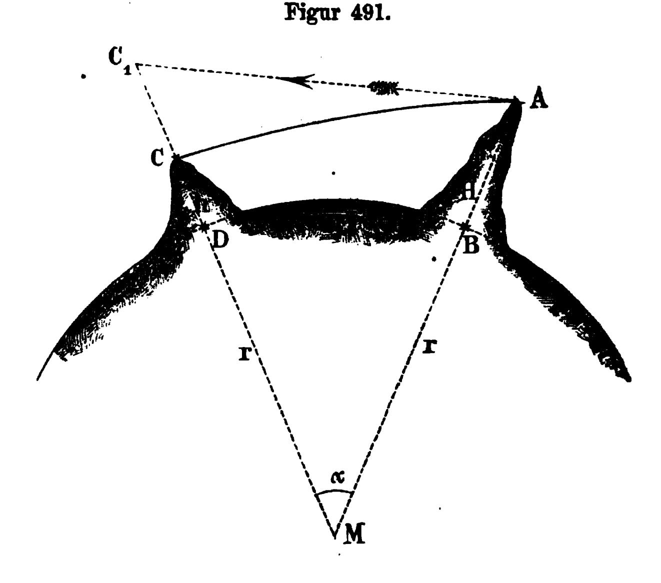
Figur 490.



die nach der Erdoberfläche hin konkave Kurve AC bildet. Da nun ein in C befindliches Auge das von A kommende Licht in einer geraden Richtung zu empfangen scheint, welche mit der Richtung der an diese Lichtkurve AC in C gezogenen Tangente CA_1 zusammenfällt, so scheint einem Beobachter in C die Spitze A des Berges höher liegend, nämlich in dem in jener Tangente liegenden Punkt A_1.

Befindet sich umgekehrt, siehe Figur 491, das Auge eines Beobachters in einem Punkt A, der höher als der Punkt C liegt, so wird der Weg eines von C ausgehenden Lichtstrahles die Kurve CA bilden. Da nun ein in A befindliches Auge das von C kommende Licht in der Richtung der an diese Lichtkurve CA gezogen gedachten Tangente AC_1 empfängt, so scheint einem Beobachter in A der niedriger liegende Punkt C, ebenfalls höher liegend, nämlich in dem in jener Tangente AC_1 liegenden Punkt C_1. Die irdische Strahlenbrechung bewirkt also, dass alle sichtbaren Punkte höher erscheinen, als sie wirklich sind.

Figur 491.



Erkl. 705. Den Winkel, um welchen man einen beobachteten Punkt höher sieht, als er in Wirklichkeit liegt, nennt man den Refraktions- (Brechungs-)winkel oder die Refraktion.

Bezeichnet man den Winkel, welchen die durch den Beobachtungsort und den beobachteten Punkt gehenden Erdradien mit einander bilden, mit α, so ist jener Refraktionswinkel gleich diesem Winkel, multipliziert mit einer Konstanten k. Für diese Konstante k, Refraktionskonstante genannt, wurden durch vielfache Beobachtungen bewährter Geodäten und Astronomen verschiedene Werte gefunden; gewöhnlich nimmt man an, dass diese Konstante k (nach vielen Untersuchungen von Laplace, Delambre, Gauss, Bessel u. a.) $= 0{,}08$ sei. Der Refraktionswinkel, um welchen man also einen Ort höher sieht, als er wirklich ist, ist hiernach $= 0{,}08 \cdot \alpha$

(Ausführliches über die Bestimmung der Refraktion findet man in den Teilen dieser Encyklopädie, welche über höhere Geodäsie und Dioptrik handeln, siehe Andeutung 63.)

***Aufgabe 1141.** Wie weit kann man von der Spitze des 8154 m hohen Dhawalagiri aus sehen, und zwar a) ohne Rücksicht und b) mit Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung? Der Radius der Erde zu 859,6 geogr. Meilen angenommen.

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 1140 und die Erkl. 702 und 703.

***Aufgabe 1142.** Der höchste Berg der Erde, Gaurisankar auch Kotivara oder Mount Everest (höchster Gipfel des Himalayagebirges) genannt, hat eine Höhe von 8837 m; welches ist die Aussichtsweite von der Spitze dieses Berges in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung? Radius der Erde = 859,6 geogr. Meil.

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 1140 und die Erkl. 703.

***Aufgabe 1143.** Welches ist die Aussichtsweite eines auf ebener Erde stehenden Menschen, dessen Auge von der Erde sich in einer Entfernung $h = 1{,}60$ m befindet? Radius r der Erde $= 859{,}6$ geogr. Meilen.

Andeutung. Man beachte die Andeutung zur Aufgabe 1140 und die Erkl. 703.

***Aufgabe 1144.** Ein Leuchtturm hat eine Höhe $h = 35$ m; von der Spitze desselben sieht man am äussersten Horizont ein Schiff; welche Entfernung hat dieses Schiff von der Spitze des Turmes? Radius r der Erde $= 859{,}6$ geogr. Meilen.

Erkl. 706. Eine deutsche oder geographische Meile hat eine Länge von 7,420 Kilometer oder von 7420 Meter (siehe Erkl. 728).

Andeutung. Zur Berechnung der gesuchten Entfernung AC, siehe Figur 489, ergibt sich aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck ACM nach dem pythagoreischen Lehrsatz die Relation:

$$\overline{AC} = \sqrt{(r+h)^2 - r^2}$$

Da h in Meter ausgedrückt ist, so muss man auch r in Meter ausdrücken oder umgekehrt (siehe Erkl. 706).

Figur 492.

***Aufgabe 1145.** Der Chimborasso (ein Berg der Cordilleren in Südamerika) ist $h = 6528$ m hoch. In welcher Entfernung von seinem Fuss verschwindet einem auf offenem Ocean befindlichen Seefahrer die Spitze dieses Berges? Radius r der Erde $= 859{,}6$ geogr. Meilen.

Andeutung. Nach der in Andeutung zur Aufgabe 1140 aufgestellten Gleichung C) besteht zwischen der Länge des Bogens BC, siehe Figur 492, dem Radius r der Erde

und der Höhe h des Chimborasso über dem Meeresspiegel, die Relation:

$$\text{bog}\, BC = \sqrt{2rh} \text{ Längeneinheiten}$$

Da nun die Aussichtsweite bog BC eines Beobachters auf der Spitze A gleich der gesuchten Entfernung x ist, in welcher einem Beobachter in C die Spitze A des Berges, wegen der Kugelgestalt der Erde verschwindet, so kann man diese Entfernung x nach jener Gleichung:

A) . . . $x = \sqrt{2rh}$

berechnen.

Man kann auch nach einer der in der Erkl. 702 angeführten Gleichungen 3) und 3a) zunächst den Winkel α, bezw. den in Winkelmass ausgedrückten Bogen BC berechnen, dann nach der in der Erkl. 459 angeführten planimetrischen Relation die Länge dieses Bogens bestimmen. Die Höhe h und der Radius r der Erde müssen allerdings in gleiche Längeneinheiten ausgedrückt werden (siehe Erkl. 706).

Will man die irdische Strahlenbrechung berücksichtigen, so hat man zu beachten, dass sich der Seefahrer, siehe Figur 492, von B noch weiter entfernen kann als der Punkt C angibt, und dass er doch noch wegen der irdischen Strahlenbrechung die Spitze A des Chimborasso sieht. Addiert man nach der Erkl. 703 zu der nach Gleichung A) berechneten Entfernung x das 0,08-fache derselben, so erhält man die gesuchte Entfernung x_1 in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung.

***Aufgabe 1146.** Welche Höhe muss ein an einer Küste befindlicher Berg haben, damit man seine Spitze noch in einer Entfernung von 120 Seemeilen sehen kann? Der Radius r der Erde zu 859,6 geographischen Meilen angenommen.

Andeutung. Setzt man in der in der Andeutung zur Aufgabe 1140 aufgestellten Gleichung C):

a) . . . $\text{bog}\, BC = \sqrt{2rh}$

für:

$$\text{bog}\, BC = 120 \text{ Seemeilen}$$

oder nach der Erkl. 707:

$$= 120 \cdot 1855 \text{ Meter}$$

für:

$$r = 859{,}6 \text{ geogr. Meilen}$$

oder nach der Erkl. 706:

$$= 859{,}6 \cdot 7420 \text{ Meter}$$

und löst jene Gleichung in bezug auf h auf, so erhält man für die gesuchte Höhe h:

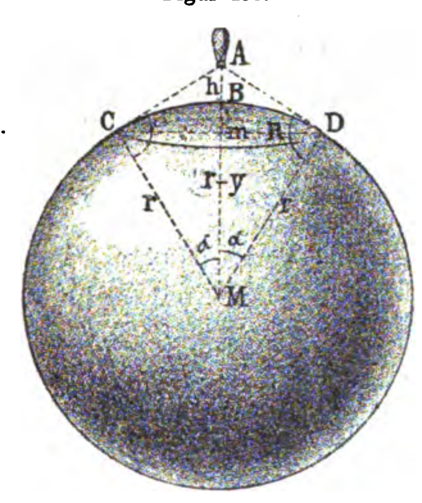
$$h = \frac{(120 \cdot 1855)^2}{2 \cdot 859{,}6 \cdot 7420} \text{ Meter}$$

Erkl. 707. Eine Seemeile ist $= 0{,}25$ geographische Meilen oder $= 1{,}855$ Kilometer oder $= 1855$ Meter.

Der nach dieser Gleichung sich ergebende Wert für h ist in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung um etwas zu gross, denn man sieht, siehe Figur 490 und die Erkl. 704, von C aus die Spitze A in A_1, nämlich höher als sie sich in Wirklichkeit befindet; zur Berechnung der wirklichen Höhe muss man deshalb nach der Erkl. 705 in vorstehender Gleichung a) für bog BC die Länge setzen, welche man erhält, wenn man die gegebene Länge dieses Bogens (d. i. die gegebene Entfernung) um das 0,08-fache derselben vermindert.

***Aufgabe 1147.** Ein Luftballon befindet sich $h = 500$ m über der Oberfläche der Erde; wie gross ist die Fläche der Erde, welche ein im Ballon befindlicher Beobachter übersehen kann? (Radius r der Erde $= 859{,}6$ geographische Meilen.)

Figur 493.



Erkl. 708. Bezeichnet man den Inhalt einer Calotte mit J, den Radius der zugehörigen Kugel mit r und die Höhe jener Calotte mit h, so besteht die Relation:

$$J = 2\pi\, r \cdot h$$

(Siehe das Lehrbuch der Körperberechnungen, 1. Buch).

Erkl. 709. Der nach nebenstehender Gleichung:

$$\text{a)} \ldots \alpha = \frac{1}{\text{arc}\,1'} \cdot \sqrt{\frac{2h}{r+h}}$$

zu berechnende Winkel wird zu klein, denn infolge der irdischen Strahlenbrechung sieht man,

Andeutung. Ist, siehe Figur 493, A der Punkt, in welchem sich der Beobachter über der Erdoberfläche befindet, und man denkt sich von A ringsum Sehstrahlen gezogen, welche die Erdoberfläche tangieren, so liegen die Berührungspunkte dieser sämtlichen gedachten Tangenten auf dem Kugelkreis CD, durch welchen der von A aus übersehbare Teil der Erdoberfläche begrenzt wird. Dieser übersehbare Teil ist eine Calotte der Erdkugel.

Nach der Erkl. 708 hat man für den gesuchten Inhalt x dieser Calotte:

$$\text{a)} \ldots x = 2\pi r \cdot y$$

in welcher Relation r der Radius der Erde und y die noch unbekannte Höhe mB der gedachten Calotte bedeutet. Dieses y kann man unter anderem wie folgt berechnen:

Nach der in Andeutung zur Aufgabe 1140 aufgestellten Gleichung b) ist, da α auch hier nur ein kleiner Winkel sein kann:

$$\alpha \cdot \text{arc}\,1' = \sqrt{\frac{2h}{r+h}}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{b)} \ldots \alpha = \frac{1}{\text{arc}\,1'} \cdot \sqrt{\frac{2h}{r+h}} \text{ Minuten}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann (siehe Erkl. 709).

Ferner kann man mittels der aus dem rechtwinkligen Dreieck ACM sich ergebenden Relation:

$$\text{c)} \ldots \overline{AC} = \sqrt{(r+h)^2 - r^2}$$

AC berechnen.

Sind α und $\overline{AC}$ berechnet, so kennt man von dem rechtwinkligen Dreieck AmC, in welchem nach der Erkl. 293:

$$\sphericalangle ACm = \sphericalangle CMm \text{ oder } = \alpha$$

ist, die Hypotenuse AC und den spitzen

nach der Erkl. 704 und 705, von A aus um das 0,08-fache des Bogens BC, bezw. des zugehörigen Winkels α weiter; will man also die Strahlenbrechung berücksichtigen, so muss man den um jenen angegebenen Wert korrigierten Winkel α_1 aus der Gleichung:

$$\alpha_1 = \alpha + 0{,}08 \cdot \alpha \text{ oder } = \alpha\,(1 + 0{,}08) \text{ oder } = 1{,}08 \cdot \alpha$$

bezw. aus der Gleichung:

$$\text{b)} \ldots \alpha_1 = \frac{1{,}08}{\operatorname{arc} 1'} \sqrt{\frac{2h}{r+h}}$$

berechnen.

Winkel α; man kann somit mittels der aus diesem Dreieck sich ergebenden Relation:

$$\text{d)} \ldots \sin\alpha = \frac{h+y}{\overline{AC}}$$

die Höhe y der Calotte bestimmen, wobei man, in Rücksicht, dass α ein sehr kleiner Winkel ist, nach den Erkl. 660 und 662:

$$\sin\alpha' = \operatorname{arc}\alpha' = \alpha \cdot \operatorname{arc}\alpha'$$

setzen kann.

***Aufgabe 1148.** Wie hoch müsste sich ein Luftballon über die Meeresfläche erheben, um ein Flächenstück der Erde zu übersehen, dessen Inhalt J gleich dem Inhalt einer der kalten Zonen, nämlich $= 387{,}139$ geogr. Quadratmeilen ist? (Radius r der Erde $= 859{,}6$ geographische Meilen.)

Andeutung. Man berechne mittels der in der Erkl. 708 vorgeführten stereometrischen Formel aus dem gegebenen Inhalt J der kalten Zone (welche eine Calotte der Erdkugel ist) und dem bekannten Radius r der Erde, die Höhe ($= y$ in Figur 493) dieser kalten Zone. Dann berechne man aus dem rechtwinkligen Dreieck MmC der Figur 493, in welchem nunmehr $\overline{MC}\ (= r)$: $\overline{Mm} = (r - y)$ bekannt sind, den Winkel α mittels der Relation:

$$\cos\alpha = \frac{r-y}{r}$$

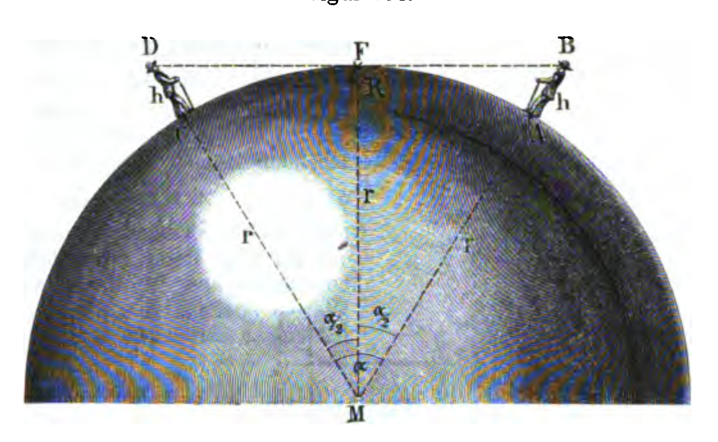
welche Relation jedoch, wenn sich für α (bei probeweiser Berechnung des Winkels α nach dieser Relation) ein kleiner Winkel ergeben sollte, mittels der goniometrischen Formel:

$$1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$$

umgeformt werden muss, analog wie in Andeutung zur Aufgabe 1140 gezeigt wurde.

Ist dieser Winkel α berechnet, so berechne man den zu diesem Winkel α gehörigen Bogen BC mittels der in der Erkl. 459 vorgeführten planimetrischen Relation, und verfahre schliesslich zur Bestimmung der gesuchten Höhe des Luftballons, wie in Andeutung zur Aufgabe 1146 gesagt wurde.

Figur 494.



*** Aufgabe 1149.** Auf einem Terrain, auf welchem keine Erhöhungen sind, befinden sich zwei Männer, jeder derselben ist $h = 1{,}6$ m gross; wie weit können sich dieselben von einander entfernen, um sich gerade noch sehen zu können? (Radius r der Erde $= 859{,}6$ geographische Meilen.)

Andeutung. In Figur 494 seien AB und CD die zwei Männer, welche sich so weit von einander entfernt haben, dass sie sich gerade noch sehen können. Dies findet statt, wenn der von dem Auge des Mannes AB ausgehende und nach dem Auge D des Mannes CD gerichtete Sehstrahl (oder umgekehrt) die Erdoberfläche, bezw. den grössten Kreis der Erde tangiert, dessen Ebene in der durch die Standpunkte A und C der beiden Männer und den Mittelpunkt M der Erde bestimmten Ebene liegt, wie in der Figur 494 angedeutet ist.

Die Länge des Bogens AFC, welche, in Winkelmass ausgedrückt, gleich dem Centriewinkel α ist, ist die gesuchte Entfernung x. Diese Entfernung x kann man nunmehr wie folgt berechnen:

Verbindet man den Berührungspunkt F jenes die Erde berührenden (gedachten) Sehstrahls BD mit M, so erhält man die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MFD und MFB; aus jedem derselben ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots \cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{r+h}$$

nach welcher Gleichung man α berechnen kann.

Da jedoch $\frac{\alpha}{2}$ nur ein sehr kleiner Winkel sein kann und da nach jener Gleich. a) mittels einer gewöhnlichen log.-trig. Tafel sehr kleine Winkel nicht bestimmt werden können, so forme man jene Gleichung so um,

Erkl. 710. Will man bei der Auflösung der Aufgabe 1149 die irdische Strahlenbrechung berücksichtigen, so hat man zu beachten, dass in Rücksicht dieser Strahlenbrechung nach den Erkl. 703 bis 705 in Bezug auf den Punkt F der Erdoberfläche jeder der Punkte A und C, bezw. um das 0,08-fache der Bogen AF und FC weiter liegen kann, als in der geometrischen Figur 494 angedeutet ist.

Man erhält also für die Entfernung x_1 in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung hiernach und nach der in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichung A):

$$x_1 = 2\cdot\sqrt{2rh} + 0{,}08\cdot 2\sqrt{2rh}$$

oder:

$$x_1 = 2\sqrt{2rh}\,(1 + 0{,}08)$$

mithin:

$$\text{a)} \ldots x_1 = 1{,}08\cdot 2\sqrt{2rh} \text{ Längeneinheiten}$$

wie in der Andeutung zur Aufgabe 1149 gesagt wurde; man erhält alsdann, wie in dieser Andeutung gezeigt ist:

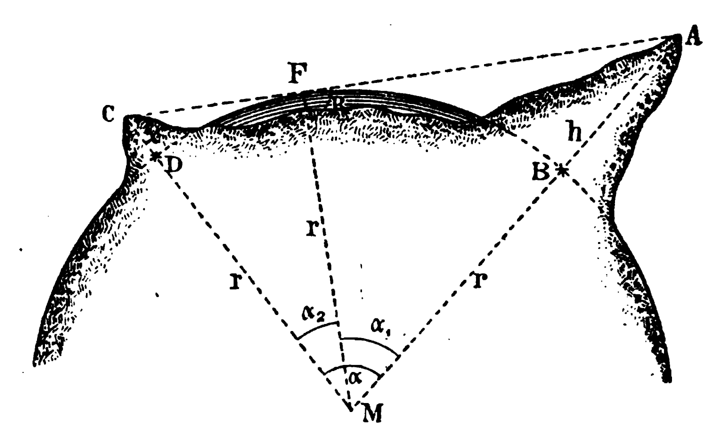
b) . . . bog $AF = \sqrt{2rh}$

Für die ganze gesuchte Entfernung x ($= AFC$) der beiden sich gerade noch sehenden Männer erhält man hiernach:

A) . . . $x = 2 \cdot \sqrt{2rh}$ Längeneinheiten

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für h in Meter gegebenen und des für r bekannten und in Meter auszudrückenden Wertes (siehe Erkl. 706) die gesuchte Entfernung x berechnen kann (siehe Erkl. 710).

Figur 495.



*** Aufgabe 1150.** Humboldt wirft die Frage auf, wie hoch der Punkt der afrikanischen Küste sein müsste, um mit Berücksichtigung der irdischen Strahlenbrechung den $h =$ 3716 m hohen Pik von Teneriffa auf den Kanarischen Inseln, welcher im Bogenmass von jenem ihm nächsten Punkt der afrikanischen Küste $\alpha = 2^0\ 49'$ entfernt ist, gerade noch sehen zu können. (Radius r der Erde $= 859{,}6$ geogr. Meilen.)

Andeutung. In Figur 495 stellt der Kreis um M einen grössten Kreis der Erdkugel dar, welcher durch den Pik von Teneriffa AB und durch einen Punkt D der afrikanischen Küste geht; CD ($= x$) sei die gesuchte Höhe des Punktes D der afrikanischen Küste, welche Höhe so gross sein soll, dass man von C die Spitze A des Berges AB gerade noch sehen kann.

Der Bogen BFD, welcher, im Winkelmass ausgedrückt, gleich dem Centriewinkel α ist, ist gleich der im Winkelmass gegebenen Entfernung des Berges AB von dem Punkt D der afrikanischen Küste.

Die gesuchte Höhe x kann man wie folgt berechnen:

Erkl. 711. Soll man bei der Auflösung der Aufgabe 1150 die irdische Strahlenbrechung berücksichtigen, so hat man zu beachten, dass in Rücksicht dieser Strahlenbrechung, nach den Erkl. 703 bis 705, in Bezug auf den Punkt F der Erdoberfläche jeder der Punkte A und C, bezw. um das 0,08-fache der Bogen BF und DF, bezw. der zugehörigen Centriewinkel α_1 und α_2 weiter liegen kann, als in der geometrischen Figur 495 angegeben ist.

Man erhält also für den ganzen Bogen BD, bezw. für den zugehörigen Centriewinkel α:

$$\alpha = (\alpha_2 + 0{,}08 \cdot \alpha_2) + (\alpha_1 + 0{,}08 \cdot \alpha_1)$$

oder:

$$\alpha = \alpha_2 (1 + 0{,}08) + \alpha_1 (1 + 0{,}08)$$
$$\alpha = 1{,}08 \cdot \alpha_2 + 1{,}08 \cdot \alpha_1$$

und hieraus ergibt sich für den Winkel α_2 in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung:

$$1{,}08 \cdot \alpha_2 = \alpha - 1{,}08 \cdot \alpha_1$$

oder:

$$\text{a)} \ldots \alpha_2 = \frac{\alpha}{1{,}08} - \alpha_1$$

Man berechne zunächst mittels der in der Erkl. 702 aufgestellten Gleichung 3):

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{\sqrt{(2r+h)h}}{r}$$

welche sich aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck MFA der Figur 495 ergibt, den zu dem Bogen BF gehörigen Centriewinkel α_1; wobei man, wenn durch probeweise Berechnung des Winkels α_1 ersichtlich wird, dass α_1 ein kleiner Winkel ist, nach den Erkl. 660 bis 662:

$$\operatorname{tg} \alpha'_1 = \operatorname{arc} \alpha'_1 \text{ oder } = \alpha_1 \operatorname{arc} \alpha'$$

setzen kann. Dann bestimme man mittels der aus der Figur sich ergebenden Relation:

$$\text{b)} \ldots \alpha_2 = \alpha - \alpha_1$$

den Centriewinkel α_2, welcher zu dem Bogen FD gehört; für welchen Centriewinkel man nach der Erkl. 711 in Rücksicht der irdischen Strahlenbrechung:

$$\text{b}_1\text{)} \ldots \alpha_2 = \frac{\alpha}{1{,}08} - \alpha_1$$

zu setzen hat.

Hierauf drücke man den Bogen FD, welcher zu dem jetzt bekannten Centriewinkel α_2 gehört, in Längeneinheiten des Radius r aus, indem man die Relation:

$$\operatorname{bog} FD : 2r\pi = \alpha_2{}^0 : 360^0 \text{ (siehe Erkl. 459)}$$

benutzt, nach welcher man:

$$\text{c)} \ldots \operatorname{bog} FD = 2r\pi \cdot \frac{\alpha_2{}^0}{360^0}$$

erhält.

Schliesslich benutze man zur Berechnung der gesuchten Höhe CD $(= x)$ die in Andeutung zur Aufgabe 1140 aufgestellte Gleichung C), indem man in derselben:

$$h = x$$
$$\text{und } \operatorname{bog} BC = \operatorname{bog} FD$$

setzt; man erhält hiernach:

$$\text{d)} \ldots \operatorname{bog} FD = \sqrt{2r \cdot x}$$

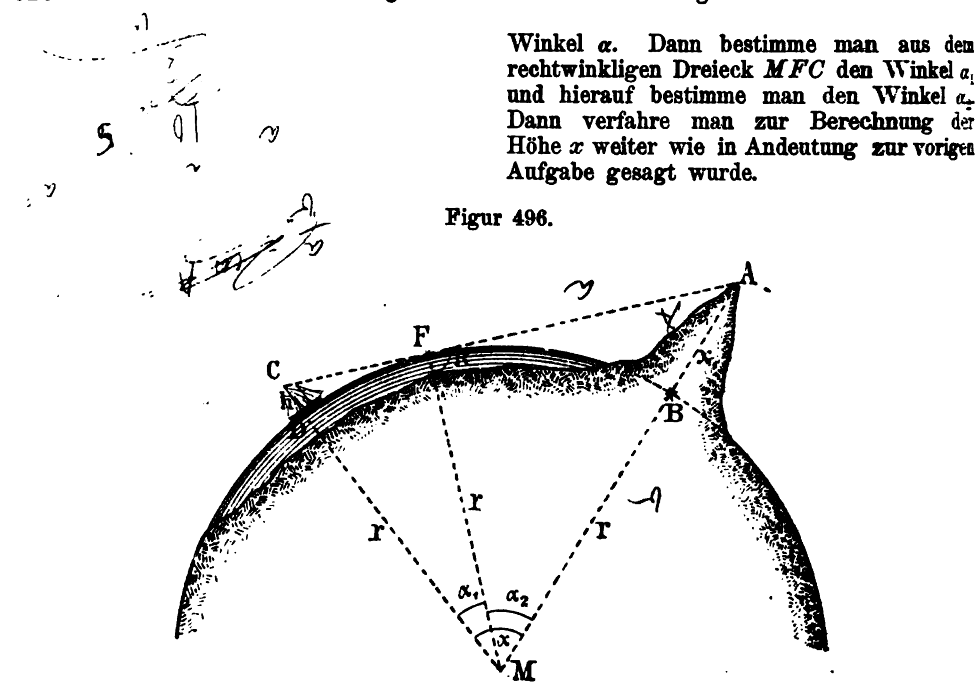
nach welcher Gleichung man aus bog FD und r die gesuchte Höhe x berechnen kann.

*** Aufgabe 1151.** Ein Schiff befindet sich in der Nähe der Kanarischen Inseln und zwar in einer Entfernung von $a = 35$ geogr. Meilen von Teneriffa. Ein auf dem Mast in der Höhe von $h = 12$ m über der Meeresfläche befindlicher Matrose sieht in jener Entfernung gerade am Horizont den Gipfel des Piks von Teneriffa. Man soll aus diesen Angaben und dem bekannten Radius $r (= 859{,}6$ geogr. Meilen) der Erde die ungefähre Höhe dieses Berges berechnen.

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe. Man berechne zunächst, s. Fig. 496, aus a (d. i. der Bogen BFD) und r den

Winkel α. Dann bestimme man aus dem rechtwinkligen Dreieck MFC den Winkel α_1 und hierauf bestimme man den Winkel α_2. Dann verfahre man zur Berechnung der Höhe x weiter wie in Andeutung zur vorigen Aufgabe gesagt wurde.

Figur 496.

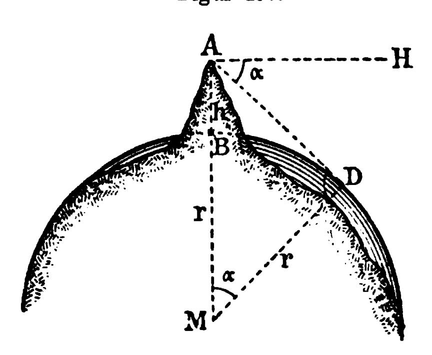


***Aufgabe 1152.** Das Licht eines Leuchtturms befindet sich 65 m über der Meeresfläche; auf einem Schiffe erblickt ein Beobachter, welcher sich 10 m über der Meeresfläche befindet, gerade am äussersten Horizont die ersten Lichtstrahlen jenes Lichtes; wie weit ist das Schiff in diesem Augenblick von dem Leuchtturm noch entfernt? (Radius r der Erde = 859,6 geogr. Meilen.)

Andeutung. Man verfahre wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 1150 und 1140 gesagt wurde.

***Aufgabe 1153.** Auf einem Berg wurde die Depression des Meereshorizonts beobachtet und $\alpha = 1^0\ 25'\ 48''$ gefunden; wie hoch war der Berg? (Radius der Erde r = 859,6 geogr. Meilen.)

Figur 497.



Andeutung. Ist, siehe Figur 497, A die Spitze des Berges, dessen Höhe h berechnet werden soll, so ist der Winkel DAH, welcher der von A nach dem äussersten sichtbaren Rand der Meeresfläche gehende Sehstrahl AD mit dem durch A gehenden und in derselben Vertikalebene liegenden horizontalen Sehstrahl AH bildet, die gegebene Depression α oder, wie sich die Seefahrer auszudrücken pflegen, die sog. Kimmtiefe des Meereshorizonts (siehe Erkl. 712).

Da nun:

$$AH \perp MA$$

und

$$AD \perp MD$$

ist, so ist nach dem in der Erkl. 263 angeführten planimetrischen Satz:

$$\sphericalangle DAH = \sphericalangle DMA \text{ oder } = \alpha$$

Erkl. 712. Unter der „Depression des Meereshorizonts" versteht man den Winkel, welchen ein von dem Auge eines Beobachters aus nach dem äussersten sichtbaren Rand der Meeresfläche gehender Sehstrahl (Lichtstrahl) mit der durch das Auge gehenden und in derselben Vertikalebene liegenden horizontalen Linie bildet.

In der See- oder Schiffswissenschaft wird diese Depression des Meereshorizonts „Dücking, auch Kimmtiefe oder kurzweg auch Kimm" genannt.

Erkl. 713. Bei der Messung der in der Aufgabe 1153 erwähnten Depression des Meereshorizonts oder der sogenannten Kimmtiefe α sieht man nach den Erkl. 704 und 705 infolge der irdischen Strahlenbrechung um das 0,08-fache des Bogens BD, bezw. des Winkels α weiter, als durch den Punkt D in der Figur 497 geometrisch angedeutet ist; man erhält also nach der in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichung A):

$$h = \frac{r}{2} \operatorname{tg}^2 \alpha$$

eine falsche Höhe, indem in dieser Gleichung jene Strahlenbrechung noch nicht berücksichtigt wurde und nicht der in der Aufgabe gegebene Winkel α, sondern der um das 0,08-fache dieses Winkels α verminderte Winkel der Winkel ist, welcher der Figur in Wirklichkeit entspricht und daselbst mit α bezeichnet ist; bezeichnet man diesen korrigierten Winkel mit α_1, so ist hiernach in jener Gleichung für α der Wert:

$$\alpha_1 = \alpha - 0{,}08 \cdot \alpha \text{ oder } = \frac{100}{100}\alpha - \frac{8}{100}\alpha$$

$$\alpha_1 = \frac{92}{100}\alpha$$

mithin:

$$\text{a)} \ldots \alpha_1 = \frac{23}{25}\alpha$$

zu setzen.

Wie in der Erkl. 702 gezeigt, ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ADM mit hinreichender Genauigkeit:

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{2h}{r}}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \ldots h = \frac{r}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 \alpha$$

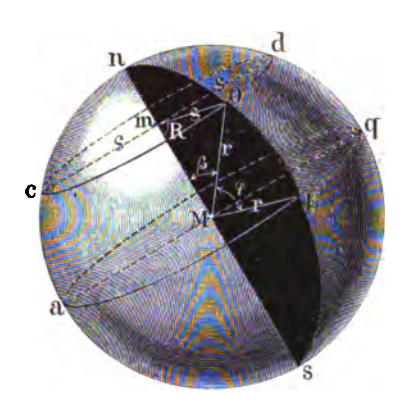
Nach welcher Gleichung man die gesuchte Höhe des Berges aus der gegebenen Kimmtiefe α und dem Radius r der Erde berechnen kann (siehe die Erkl. 713).

b) Aufgaben, in welchen Bezug auf die geographische Breite bestimmter Orte der Erdoberfläche genommen ist.

***Aufgabe 1154.** Ein Ort O auf der Erdoberfläche hat die nördliche (oder südliche) geogr. Breite $\varphi = 48^0\ 40'\ 18''$; welchen Umfang hat der durch diesen Ort gehende Parallelkreis, wenn die Erde als vollkommene Kugel mit dem Radius $r = 859{,}6$ geogr. Meilen angenommen wird?

Andeutung. In Figur 498 sei cd der Parallelkreis, welcher durch den Ort O der Erdkugel geht, deren Mittelpunkt M sei (s. die Erkl. 714 bis 720). Zieht man in der Fig. 498 den durch den Ort O gehenden Meridian $nOFs$ (siehe Erkl. 721), so ist der Bogen FO dieses Meridians die gegebene geographische nördliche Breite φ des Ortes O (s. Erkl. 722). Dieser im Winkelmass ausgedrückte Bogen FO ist das Mass des zu demselben gehörigen Centriewinkels FMO ($= \varphi$).

Figur 498.



Erkl. 714. Die Erde hat eine der Kugel ähnliche, eine sog. sphäroidische Gestalt; man kann sie als eine Kugel betrachten, die an den Endpunkten eines Durchmessers abgeplattet ist. Da diese Abplattung nicht sehr gross ist, so kann man, ohne einen groben Fehler zu begehen, die Erde als eine vollkommene Kugel betrachten.

Erkl. 715. Den Durchmesser der als Kugel gedachten Erde, um welchen die Erde rotiert (täglich eine Umdrehung macht), nennt man die Erdachse, deren Endpunkte die Erdpole. Die Erdachse ist ein Teil der Welt- oder Himmelsachse, d. i. der Durchmesser des scheinbaren Himmelsgewölbes, um welchen sich dasselbe scheinbar dreht, um welche die Gestirne am Himmel täglich Kreise zu beschreiben scheinen, deren Ebenen alle senkrecht auf jenem gedachten Durchmesser des Himmelsgewölbes stehen (siehe Erkl. 717). Die Endpunkte dieser gedachten Himmelsachse, in welcher die Erdachse liegt, heissen die Himmelspole. Die Erd- und Himmelspole machen als Punkte einer Drehachse keine Rotationsbewegung mit.

Erkl. 716. Der grösste Kreis der Erdkugel, dessen Ebene senkrecht zur Erdachse steht, heisst Erdäquator (oder Gleicher), der Durchschnitt der Ebene des Erdäquators mit dem scheinbaren Himmelsgewölbe heisst Himmelsäquator. (Siehe Figur 499 und die Erkl. 716a.)

Erkl. 716a. In den Figuren 499 und 500 stellt die innere Kugel die Erdkugel, die äussere jener konzentrischen Kugel, das Himmelsgewölbe dar, wie es einem Beobachter auf der Erde erscheint. Allerdings hat man sich bei diesen Figuren die Erdkugel im Verhältnis zum Himmelsgewölbe viel viel kleiner zu denken, als in einer Figur angegeben werden kann.

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 723 FM und Om senkrecht auf der Erdachse ns stehen, dass somit:

$$\left.\begin{array}{l}\sphericalangle FMN = 90^0 \\ \text{und} \quad \sphericalangle OmM = 90^0\end{array}\right\} \text{oder} = R$$

ist, dass also das Dreieck OmM ein rechtwinkliges ist, dass ferner nach der Erkl. 724 MO und MF gleich dem Radius r der Erdkugel sind, so ergibt sich aus der Fig. 498:

a) . . . $\beta = 90^0 - \varphi$

und

b) . . . $\sin\beta = \frac{\varrho}{r}$

Aus diesen beiden Gleichungen erhält man:

$$\sin(90^0 - \varphi) = \frac{\varrho}{r}$$

oder nach der Erkl. 19:

$$\cos\varphi = \frac{\varrho}{r}$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . $\varrho = r \cdot \cos\varphi$

nach welcher Gleichung man den Radius ϱ des Parallelkreises cd berechnen kann.

Den gesuchten Umfang U desselben findet man nach der Erkl. 640 mittels der Relation:

B) . . . $U = 2\varrho\pi$

oder in Rücksicht der Gleichung A) mittels der Relation:

B_1) . . . $U = 2r\pi \cdot \cos\varphi$

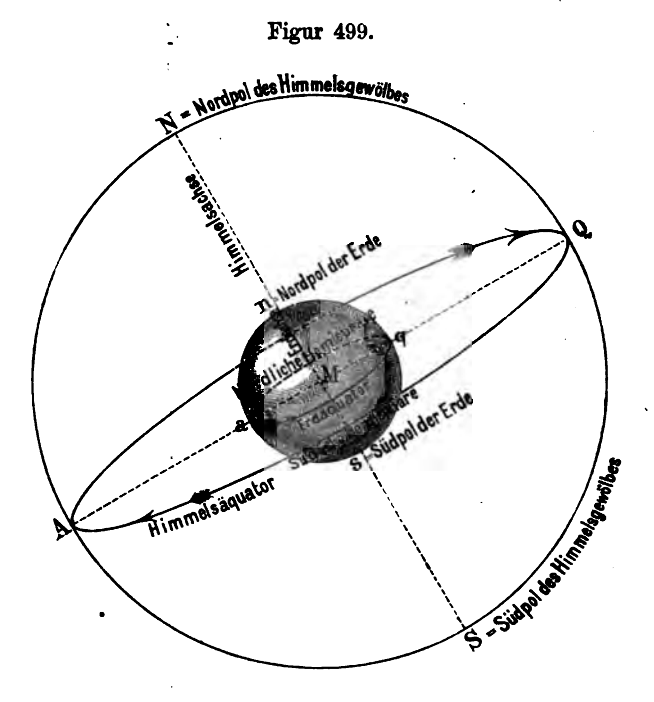
Erkl. 717. Die Richtung, nach welcher die Rotation der Erde um die Erdachse erfolgt, ist in der Fig. 500 durch einen Pfeil an dem Erdäquator angedeutet. Scheinbar dreht sich das Himmelsgewölbe mit allen Gestirnen täglich um die Himmelsachse in der entgegengesetzten Richtung, wie durch Pfeile an dem Himmelsäquator angegeben ist.

Erkl. 718. Durch den Erdäquator wird die Erde in zwei Hälften, sog. Hemisphären geteilt, der Teil, welcher links der in der Erkl. 717 erwähnten Drehungsrichtung der Erde liegt, heisst nördliche Hemisphäre, der Teil, welcher rechts von jener Drehungsrichtung liegt, heisst südliche Hemisphäre. In ganz derselben Weise wird die Himmelskugel durch den Himmelsäquator in zwei Hemisphären geteilt (siehe die Figuren 499 und 500).

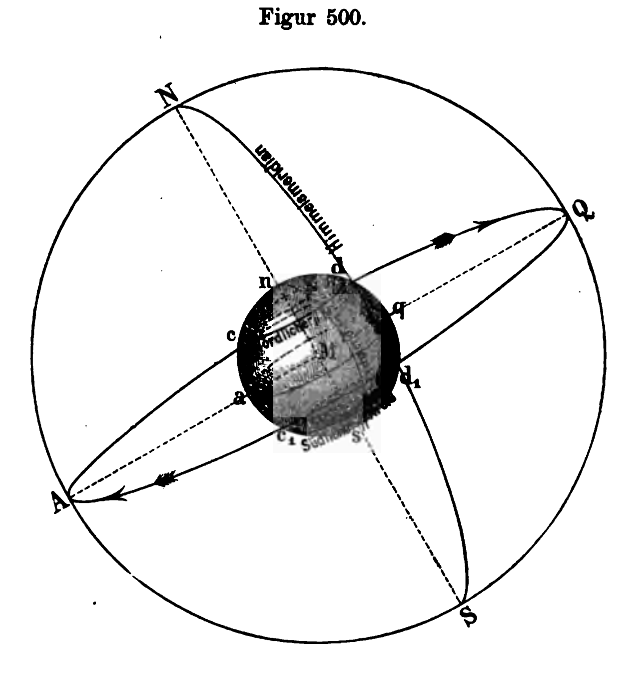
Erkl. 719. Der Endpunkt der Erdachse, welcher in der nördlichen Hemisphäre liegt, heisst Nordpol der Erdachse oder der Erde, der andere Endpunkt der Erdachse, welcher in der südlichen Hemisphäre liegt, heisst Südpol der Erdachse oder der Erde. Die entsprechenden Punkte der Himmelsachse heissen Nordpol,- bezw. Südpol der Himmelsachse (siehe die Figuren 499 und 500).

Erkl. 720. Denkt man sich durch die Erde eine Ebene parallel zum Aequator gelegt, so schneidet dieselbe die Erdkugel in einer Kreislinie, welche ein Parallelkreis der Erde heisst. Je nachdem ein solcher Parallelkreis in der nördlichen oder in der südlichen Hemisphäre liegt, heisst er ein nördlicher oder südlicher Parallelkreis (siehe Figur 500). Der Durchschnitt einer zum Himmelsäquator parallelen Ebene mit dem scheinbaren Himmelsgewölbe heisst Parallelkreis des Himmels; solche Parallelkreise werden scheinbar von allen Punkten (Sternen) des Himmelsgewölbes (ausgenommen des Nord- u. Südpols) beschrieben.

Figur 499.



Figur 500.



Erkl. 721. Denkt man sich durch die Längsrichtung der Erdachse oder der Weltachse eine Ebene gelegt, so durchschneidet dieselbe die Erdkugel nach einem grössten Kreis, dessen Ebene senkrecht zur Ebene des Erdäquators ist; ein solcher Kreis heisst ein Meridiankreis der Erde. Ein Bogen eines solchen Kreises, vom Nordpol bis zum Südpol der Erde gerechnet, nennt man einen Meridian. Jene gedachte Ebene durchschneidet auch die Himmelskugel nach einem grössten Kreis, dessen Ebene senkrecht zum Himmelsäquator und zum Erdäquator ist; ein solcher Kreis heisst ein Meridiankreis des Himmels. (Siehe Figur 500.)

Erkl. 722. Unter der geographischen Breite eines Ortes O auf der Oberfläche der Erde, siehe Figur 498, versteht man die Entfernung FO des Aequators aq von jenem Ort O, und zwar gemessen von dem Aequator ab auf dem durch den Ort O gehenden Meridian $nOFs$.

Je nachdem ein Ort O auf der nördlichen oder südlichen Hemisphäre der Erde liegt, je nachdem also die geographische Breite eines Ortes vom Aequator nach dem Nordpol hin oder nach dem Südpol hin gemessen wird, unterscheidet man nördliche und südliche geographische Breiten.

Die geographische Breite wird im allgemeinen durch den griechischen Buchstaben φ (Phi) bezeichnet und zwar die nördliche durch $+\varphi$, die südliche durch $-\varphi$. Die geographische Breite wird als Bogen eines Kreises im Winkelmass ausgedrückt.

Erkl. 723. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

> „Steht eine Linie (ns in Figur 498) senkrecht auf einer Ebene (aq oder cd), so steht sie auch senkrecht auf allen durch ihren Fusspunkt gehenden Linien (wie MF oder mo), welche in jener Ebene liegen."

(Siehe die Teile dieser Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

Erkl. 724. Ein stereometrischer Lehrsatz heisst:

> „Die Radien aller grössten Kreise einer Kugel sind einander gleich und zwar je gleich dem Radius der Kugel selbst."

(Siehe die Teile dieser Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln.)

***Aufgabe 1155.** Der Umfang eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $\varphi = 44^0\,50'\,14''$ ist, misst 3829,5 geogr. Meilen; wie gross ist der Umfang eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $\varphi_1 = 56^0\,22'\,18''$ beträgt?

Andeutung. Man benutze den in der Erkl. 725 aufgestellten Satz, durch welchen eine Beziehung zwischen den Umfängen zweier Parallelkreise und deren geographischen Breiten (siehe Erkl. 726) ausgedrückt ist.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.



Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

366. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 365. — Seite 833—848.
Mit 8 Figuren.



Vollständig gelöste



Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 365. — Seite 833—848. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie, Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die geographische Breite bestimmter Orte der Erdoberfläche genommen ist, Fortsetzung. Aufgaben, in welchen Bezug auf die gegenseitige Entfernung von Himmelskörpern genommen ist.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit vielen **Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen **gelösten** Aufgaben) **des** Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den **Schulunterricht** benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur** Ausgabe.

Das Werk behandelt **zunächst** den Hauptbestandteil des mathematisch-**naturwissen**schaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleich berechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-**Frei**willige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, **technischen** und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgaben**sammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für **den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden **kann, hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen **Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militär** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige **und praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und **mit Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt **der** Verfasser Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen **und wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Erkl. 725. Bezeichnet man den Radius der Erde mit r, den Umfang eines Parallelkreises, dessen geographische Breite $= \varphi$ ist (siehe Erkl. 726), mit U, den Umfang eines anderen Parallelkreises, dessen geographische Breite $= \varphi_1$ ist, mit U_1, so hat man nach der in Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung B_1), bezw.:

$$U = 2r\pi \cdot \cos\varphi$$

und

$$U_1 = 2r\pi \cdot \cos\varphi_1$$

Durch Division dieser beiden Gleichungen erhält man:

$$a) \ldots U : U_1 = \cos\varphi : \cos\varphi_1$$

d. h. die Umfänge zweier Parallelkreise verhalten sich wie die Kosinus ihrer geographischen Breiten.

Erkl. 726. Da solche Bogen der Erdmeridiane, welche zwischen zwei bestimmten Parallelkreisen der Erde liegen, einander gleich sind, so ergibt sich hieraus und in Rücksicht der Erkl. 722, dass alle in ein und demselben Parallelkreis liegenden Orte dieselbe geographische Breite haben. Spricht man von der geographischen Breite eines Parallelkreises, so versteht man hiernach darunter die geographische Breite irgend eines in jenem Parallelkreis liegenden Ortes.

***Aufgabe 1156.** In welcher geographischen Breite ist der Umfang des Parallelkreises gleich dem Durchmesser der Erde?

Hülfsrechnung.

Aus nebenstehender Gleichung A) erhält man φ wie folgt:

$$\log\cos\varphi = \log 1 - \log\pi$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} & \qquad +10 \qquad\qquad -10 \\ \log 1 &= 0{,}0000000 \\ -\log\pi &= -0{,}4971499 \\ \hline \log\cos\varphi &= 9{,}5028501 - 10 \\ & \qquad\quad 7957 \\ & \qquad\quad\ \ 544 \\ & \qquad\quad\ \ 501{,}6 \\ & \qquad\quad\ \ \ 42{,}4 \\ & \qquad\quad\ \ \ 43{,}8 \end{aligned}$$

mithin:

$$\varphi = 71^0\,26'\,30''$$

$$\left.\begin{array}{r} -8'' \\ -0{,}7'' \end{array}\right\} = -8{,}7''$$

oder:

$$\varphi = 71^0\,26'\,21{,}3''$$

Erkl. 727. Setzt man in der in der Erkl. 725 aufgestellten Proportion:

$$a) \ldots U : U_1 = \cos\varphi : \cos\varphi_1$$

U_1 gleich dem Umfang $2r\pi$ des Erdäquators, setzt man ferner gemäss der Aufgabe 1156:

$$U = 2r$$

und $\varphi_1 = 0$, da die geographische Breite des Erdäquators $= 0$ ist, so geht jene Proportion, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 99 $\cos 0^0 = 1$ ist, über in:

$$2r : 2r\pi = \cos\varphi : 1$$

und hieraus ergibt sich ebenfalls die in nebenstehender Auflösung aufgestellte Gleichung A):

$$b) \ldots \cos\varphi = \frac{1}{\pi}$$

Auflösung. Bezeichnet man, s. Fig. 498, den Radius des gedachten Parallelkreises mit ϱ, dessen Umfang mit U, so besteht nach der Erkl. 460 die Relation:

$$\alpha) \ldots U = 2\varrho \cdot \pi$$

Bezeichnet man ferner den Radius der Erde mit r, also deren Durchmesser mit $2r$, so besteht gemäss der Aufgabe und in Rücksicht der Relation α) die Relation:

$$2\varrho\pi = 2r$$

oder:

$$\beta) \ldots \varrho\pi = r$$

und hieraus erhält man für den Radius ϱ des Parallelkreises:

$$a) \ldots \varrho = \frac{r}{\pi}$$

Berücksichtigt man nun, dass nach der in Andeutung zur Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung A) und in Rücksicht der Erkl. 726 zwischen dem Radius ϱ eines Parallelkreises, dessen geographischer Breite φ und dem Radius r der Erde die Relation besteht:

$$b) \ldots \varrho = r \cdot \cos\varphi$$

so erhält man aus dieser Gleichung in Rücksicht der Gleichung a):

$$\frac{r}{\pi} = r \cdot \cos\varphi$$

oder:

$$A) \ldots \cos\varphi = \frac{1}{\pi}$$

nach welcher Gleichung man, für:

$$\pi = 3{,}1415926 \ldots$$

Ist in der Aufgabe 1156 statt der Beziehung zwischen dem Umfang eines Parallelkreises und dem Durchmesser der Erde, eine Beziehung zwischen den Umfängen zweier Parallelkreise gegeben, so kann man mittels der vorstehenden Gleichung a) und in Rücksicht der Erkl. 728 in analoger Weise, wie soeben gezeigt, die geogr. Breite eines der Parallelkreise berechnen.

gesetzt, die gesuchte geographische Breite berechnen kann.

Nach nebenstehender Hülfsrechnung erhält man:

$$1) \ldots \varphi = 71^0\, 26'\, 21{,}3''$$

Diese berechnete geographische Breite φ kann sowohl nördliche als auch südliche geographische Breite sein, indem nach der Erkl. 126:

$$\cos(-\varphi) = \cos\varphi$$

ist, wonach die Gleichung A) in der allgemeineren Form:

$$A_1) \ldots \cos(\pm\varphi) = \frac{1}{\pi}$$

geschrieben werden kann (s. die Erkl. 722).

Aufgabe 1157. Welche Länge hat ein Grad des durch Frankfurt a. M. gehenden Parallelkreises, dessen geographische Breite $\varphi = 50^0\, 7'$ beträgt, wenn der Halbmesser der Erde zu $r = 859{,}6$ geogr. Meilen angenommen wird?

Erkl. 728. Da nach der Erkl. 729 ein Grad des Aequators = 15 geographische Meilen lang ist, so hat man nach der in der Erkl. 731 aufgestellten Gleichung 3) für die Länge x eines zu 1^0 gehörigen Bogens des Parallelkreises, dessen Radius ϱ ist, und in Rücksicht, dass der Radius des Aequators gleich dem Radius r der Erde ist, die Relation:

$$a) \ldots 15 : x = r : \varrho$$

und hieraus erhält man:

$$b) \ldots x = 15 \cdot \frac{\varrho}{r}$$

Setzt man hierin für ϱ nach der in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichung a):

$$\varrho = r \cdot \cos\varphi$$

so erhält man:

$$x = 15 \cdot \frac{r\cos\varphi}{r}$$

oder:

$$A) \ldots x = 15 \cdot \cos\varphi \text{ geogr. Meilen}$$

nach welcher Gleichung man die Länge x eines zu 1^0 gehörigen Bogens eines Parallelkreises aus dessen bekannter geogr. Breite direkt berechnen kann.

Erkl. 729. Nach der Erkl. 730 ist die Länge eines Bogens des Erdäquators, welcher zu einem Centriewinkel von 1^0 gehört = 15 geographische Meilen.

Erkl. 730. Die deutsche oder geographische Meile wird so angenommen, dass sie gleich dem fünfzehnten Teil eines Grades des Erdäquators ist; da der Erdäquator 360 Bogengrad enthält, so muss der Erdäquator einen Umfang von 15·360 oder von 5400 geographische Meilen haben.

Zur Bestimmung der Länge einer geographischen Meile (in Toisen oder in Meter) wurde mittels Triangulation (siehe Erkl. 623) die Länge eines Meridianbogens der Erde ge-

Andeutung. Nach der in Andeutung zur Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung A) hat man für den Radius ϱ eines Parallelkreises, dessen geographische Breite φ ist (siehe Erkl. 726):

$$a) \ldots \varrho = r \cdot \cos\varphi$$

Ferner besteht nach der Erkl. 459 zwischen dem Umfang $2\varrho\pi$ eines Kreises, dem Bogen bog α, der zu einem Centriewinkel von α^0 dieses Kreises gehört, dem zu dem ganzen Umfang gehörigen Centriewinkel von 360^0 und dem zu jenem Bogen gehörigen und in Grad ausgedrückten Centriewinkel α, die Relation:

$$b) \ldots 2\varrho\pi : \text{bog}\,\alpha^0 = 360^0 : \alpha^0$$

Für den Fall, dass:

$$\alpha = 1^0$$

ist, geht diese Proportion über in:

$$2\varrho\pi : \text{bog}\,1^0 = 360 : 1$$

und hieraus erhält man:

$$\text{bog}\,1^0 = 2\varrho\pi \cdot \frac{1}{360}$$

oder:

$$c) \ldots\ldots \text{bog}\,1^0 = \frac{\pi}{180} \cdot \varrho$$

Setzt man in dieser Gleichung für ϱ den Wert aus Gleichung a), so erhält man:

$$A) \ldots \text{bog}\,1^0 = \frac{\pi}{180} \cdot r\cos\varphi \text{ Längeneinheiten des Radius } r$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r und φ gegebenen Zahlenwerte die Länge des Bogens von 1^0 des gedachten Parallelkreises berechnen kann, wie in Auflösung der Aufgabe 801 gezeigt wurde.

Da r in geographische Meilen ausgedrückt ist, so erhält man auch für bog 1^0 einen in geographische Meilen ausgedrückten

messen, resp. berechnet und mittels des hiernach erhaltenen Resultats wurde alsdann die Länge berechnet, welche 1⁰ jenes Erdmeridians, bezw. des Erdäquators entspricht, wie in Auflösung der Aufgabe 801 gezeigt wurde.

Erkl. 781. Hat man zwei Kreise mit den Radien r und ϱ, so hat man für deren Umfänge U_r und U_ϱ nach der Erkl. 460, bezw.:

$$\text{a)} \ldots U_r = 2r\pi$$

und

$$\text{b)} \ldots U_\varrho = 2\varrho\pi$$

Aus diesen Gleichungen erhält man durch Division:

$$1) \ldots U_r : U_\varrho = 2r : 2\varrho$$

oder auch:

$$2) \ldots U_r : U_\varrho = r : \varrho$$

d. h.: die Umfänge zweier Kreise verhalten sich wie die Durchmesser oder die Radien derselben.

Für die durch bog α bezeichnete Länge desjenigen Bogens eines Kreises vom Radius r, welcher zu einem Centriewinkel von α^0 gehört, hat man ferner nach der Erkl. 461:

$$\text{c)} \ldots \text{bog}\, \alpha = r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$$

In analoger Weise hat man für die durch bog$'\alpha$ bezeichnete Länge desjenigen Bogens eines Kreises vom Radius ϱ, welcher ebenfalls zu einem Centriewinkel von α^0 gehört:

$$\text{d)} \ldots \text{bog}'\alpha = \varrho\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$$

Aus den Gleichungen c) und d) erhält man durch Division die der Gleich. 2) analoge Relation:

$$3) \ldots \text{bog}\, \alpha : \text{bog}'\alpha = r : \varrho$$

d. h.: die Längen von Kreisbögen, welche zu gleichen Centriewinkeln verschiedener Kreise gehören, verhalten sich wie die Radien dieser Kreise.

Wert. Will man denselben in ein kleineres Mass, z. B. in Kilometer ausdrücken, so beachte man die Erkl. 706.

Einfacher gestaltet sich die Rechnung, wenn man verfährt, wie in der Erkl. 728 angegeben ist.

---

* **Aufgabe 1158.** In welcher geographischen Breite beträgt 1⁰ des Parallelkreises 100 km, wenn der Halbmesser der Erde zu 859,6 geogr. Meilen angenommen wird?

Andeutung. Man berechne zunächst den Radius ϱ des Parallelkreises, von welchem $1^0 = 100$ km lang ist; mittels der in der Erkl. 459 aufgestellten Relation:

$$2\varrho\pi : \text{bog}\, 1^0 = 360^0 : 1^0$$

indem man in derselben:

$$\text{bog}\, 1^0 = 100 \text{ km}$$

setzt.

Dann berechne man mittels der in Andeutung zur Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung A):

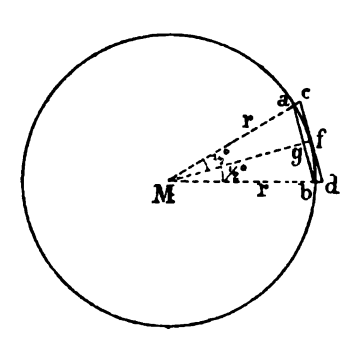
$$\varrho = r \cdot \cos\varphi$$

indem man in derselben den für ϱ berechneten und in km ausgedrückten Wert, für r den gegebenen und ebenfalls in km auszudrückenden Wert (siehe Erkl. 706) setzt, die gesuchte geographische Breite φ. Die hiernach berechnete geographische Breite kann sowohl nördliche als südliche geograph. Breite sein, wie in der Auflösung zur Aufgabe 1156 gezeigt.

---

* **Aufgabe 1159.** Der Umfang eines grössten Kreises der Erde (dieselbe als vollkommene Kugel gedacht), z. B. des Aequators, beträgt 5400 geographische Meilen (siehe die Erkl. 730); wie lang ist eine Sehne dieses Kreises, welche zu einem Bogen (Centriewinkel) von 1° gehört, und wie lang ist die Tangente, welche parallel der gedachten Sehne ist und zwischen den Verlängerungen der Radien liegt, welche durch die Endpunkte jenes Bogens von 1° gehen?

Figur 501.



Andeutung. Ist, siehe **Figur 501**, der Kreis um M ein grösster Kreis (z. B. der Aequator) der Erde, afb ein Bogen von 1° desselben, so stellen ab die zu berechnende Sehne und cd die zu berechnende Tangente dar. Aus dem gleichschenkligen Dreieck Mab, bezw. aus dem rechtwinkligen Dreieck Mag ergibt sich die Relation:

$$\sin\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\overline{ab}}{2} : \overline{Ma}$$

und hieraus erhält man:

A) . . . $\overline{ab} = 2r \cdot \sin 30'$

Aus dem gleichschenkligen Dreieck Mcd, bezw. aus dem rechtwinkligen Dreieck Mcf ergibt sich ferner die Relation:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{\overline{cd}}{2} : \overline{Mf}$$

und hieraus erhält man:

B) . . . $\overline{cd} = 2r \cdot \operatorname{tg} 30'$

Nach den Gleichungen A) und B) kann man die Sehne ab und die Tangente cd, welche bezw. zu 1° gehören, berechnen, wenn man aus dem gegebenen Umfang U des Kreises um M mittels der Relation:

$$U = 2r\pi$$

vorher den Radius r berechnet (siehe die Erkl. 732).

Erkl. 782. Hat man nach den in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichungen A) und B) die Länge der Sehne $\overline{ab}$ und die Länge der Tangente $\overline{cd}$ berechnet, und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 729 die Länge des Bogens afb, der zu 1° des Aequators gehört, = 15 geographische Meilen beträgt, so findet man bei einer Vergleichung dieser drei Längen, dass dieselben nur um weniges (um wieviel?) verschieden sind, woraus sich ergibt, dass man bei kleineren Vermessungen die Krümmungen der Erdoberfläche vernachlässigen kann, und, wie es in der niederen Geodäsie üblich ist, statt der wirklichen, sphärischen Entfernung afb der zwei Punkte a und b der Erdoberfläche, deren horizontale Entfernung ab oder auch cd (siehe Figur 501) als die Entfernung der Punkte a und b betrachten kann. (Siehe die Erkl. 698 und die Teile der Encyklopädie, welche über die sphärische Trigonometrie, bezw. über die höhere Geodäsie handeln.)

* **Aufgabe 1160.** Der Radius der Erde sei $r = 859{,}6$ geogr. Meilen, die Schiefe der Ekliptik sei $\varepsilon = 23^0\, 27'\, 6''$; wie gross müssen hiernach die Umfänge der Wendekreise und der Polarkreise sein?

Erkl. 783. Die Wendekreise der Erde (siehe Erkl. 736) sind solche Parallelkreise, deren geographische Breiten je gleich der Ekliptikschiefe ε (siehe Erkl. 784) sind, und von welchen der eine nördlich, der andere südlich vom Aequator liegt; die Polarkreise der

Andeutung. Man berechne zunächst die Radien der Wende- und der Polarkreise nach der in Andeutung zur Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung A), indem man berücksichtigt, dass nach der Erkl. 733 die geographische Breite eines jeden der Wende-

Erde sind solche Parallelkreise, deren geographische Breiten je gleich der Ergänzung der Ekliptikschiefe ε zu 90^0, also je $= 90^0 - \varepsilon$ sind, und von welchen der eine nördlich, der andere südlich vom Aequator liegt (siehe Erkl. 734).

Erkl. 784. Unter der Schiefe der Ekliptik oder der Ekliptikschiefe versteht man die Neigung der Ekliptik (siehe Erkl. 785) zum Aequator; dieselbe hat infolge der Schwankungen der Erdachse, der sog. Nutation, keinen konstanten Wert, eine wesentliche Aenderung macht sich jedoch nur in grösseren Zeitintervallen bemerkbar. Die Schiefe der Ekliptik wird bei Berechnungen, bei welchen es nicht auf besondere Genauigkeit ankommt, gewöhnlich rund zu $23^0 30'$ angenommen (siehe Anmerkung 63).

Erkl. 785. Unter der Ekliptik (griech., d. h. die Sonnenbahn) versteht man denjenigen grössten Kreis am Himmelsgewölbe, welcher die Bahn der Sonne ist, in der die Sonne ihren jährlichen Umlauf um die Erde zu machen scheint.

In Wirklichkeit ist es die Bahn, in welcher sich, umgekehrt die Erde um die Sonne bewegt. Die Zeit, welche scheinbar die Sonne (in Wirklichkeit die Erde) zu einem einmaligen Durchlaufen dieser Bahn braucht' heisst ein Sonnenjahr. (Siehe die Erkl. 740.)

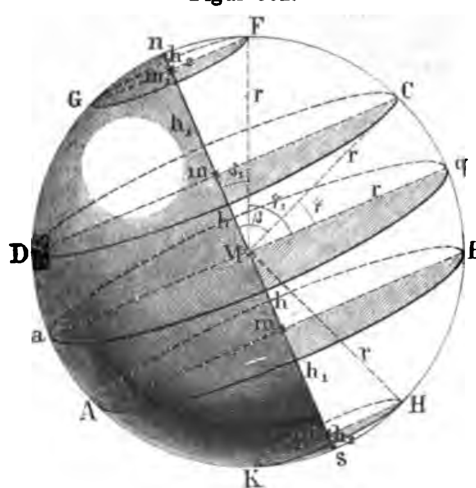
kreise (nördlich, bezw. südlich) gleich der gegebenen Ekliptikschiefe ε, und dass die geographische Breite eines jeden der Polarkreise $= 90 - \varepsilon$ ist.

Benutze dann zur Berechnung der gesuchten Umfänge die in der Erkl. 640 angeführte planimetrische Relation.

---

* **Aufgabe 1161.** Man soll den Inhalt der mittleren, heissen oder der Tropenzone, den Inhalt einer jeden der gemässigten und den Inhalt einer jeden der kalten oder Polarzonen berechnen, und zwar aus der geographischen Breite $\varphi = 23^0 30'$ eines jeden der beiden Wendekreise, aus der geographischen Breite $\varphi_1 = 66^0\ 30'$ eines jeden der beiden Polarkreise (siehe die Erkl. 733 bis 735) und aus dem bekannten Radius r ($= 859{,}6$ geogr. Meilen) der Erde.

Figur 502.



Andeutung. Die heisse Zone $ABCD$, siehe Figur 502 und die Erkl. 736, wird durch den Aequator aq in die zwei gleichen Zonen $aqCD$ und $aqBA$ zerlegt.

Für den Inhalt i einer jeden dieser beiden gleichen Zonen hat man nach der Erkl. 739:

$$i = 2\pi r \cdot h$$

also für den gesuchten Inhalt J der ganzen heissen Zone:

$$\text{a)} \ldots J = 4\pi r \cdot h$$

Analog wie in Andeutung zur Aufgabe 1154 gesagt, erhält man zur Bestimmung der unbekannten Höhe h aus dem rechtwinkligen Dreieck MmC:

$$\cos\beta = \frac{\overline{Mm}}{\overline{MC}}$$

oder, da $\beta = 90^0 - \varphi$ ist:

$$\cos(90^0 - \varphi) = \frac{h}{r}$$

und hieraus ergibt sich in Rücksicht der Erkl. 19:

$$\text{b)} \ldots h = r \cdot \sin\varphi$$

Erkl. 786. Die Zone der Erdoberfläche (siehe Erkl. 737), innerhalb welcher für jeden Beobachter die Sonne **zweimal** im Jahr in der Mittagszeit über dem Scheitel (siehe Erkl. 738) zu stehen scheint, heisst die **mittlere**, **heisse** oder **Tropenzone**. Die Parallelkreise, welche dieselbe begrenzen, heissen die **Wendekreise** (siehe Erkl. 733).

Die Zonen der Erdoberfläche, welche von einem jener Wendekreise und von einem der Polarkreise der Erde (siehe Erkl. 738) begrenzt werden, heissen die **gemässigten Zonen**, die eine derselben liegt nördlich vom Aequator, die andere südlich von demselben. Die Zonen endlich, welche von dem Polarkreise begrenzt werden, und welche Calotten der Erdkugel sind, heissen die **Polarzonen**, die eine derselben liegt **nördlich** (deren Scheitel ist der Nordpol der Erde), die andere liegt **südlich** (deren Scheitel ist der Südpol der Erde).

Erkl. 787. Unter einer Kugelzone, kurzweg **Zone** genannt, versteht man den Teil der **Oberfläche** einer Kugel, welcher zwischen zwei Parallelkreisen liegt. Unter einer Kugelkappe, oder kurzweg **Calotte** genannt, versteht man eine Kugelzone, deren einer Begrenzungskreis gleich Null ist. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln, speziell das Lehrbuch der Körperberechnungen, 1. Buch.)

Erkl. 788. Unter dem „**Scheitel**" oder dem „**Zenith**" eines Beobachters auf der Erde versteht man den Punkt am Himmel über dem Beobachter, welcher in der durch den Standpunkt des Beobachters und den Mittelpunkt der Erde gehenden Linie (der Lotrechten) liegt. Der Punkt des Himmelsgewölbes, in welchem die durch den Zenith und den Standpunkt eines Beobachters (und durch den Mittelpunkt der Erde) gehenden Linie (die Lotrechte oder Vertikale) den nicht sichtbaren Teil des Himmelsgewölbes trifft, heisst „**Nadir**" (siehe Fig. 508). Die Ebene, welche durch den Ort des Beobachters geht und **senkrecht** zu jener Lotrechten ist, bildet am scheinbaren Himmelsgewölbe den **scheinbaren Horizont**. Jeder grösste Kreis der **scheinbaren** Himmelskugel, welcher durch den Zenith eines Beobachters geht, heisst **Scheitelkreis** des Beobachters. Der Scheitelkreis eines Beobachters und der Meridian des Himmels, in dessen Ebene der Standpunkt jenes Beobachters liegt, sind gleichbedeutend. (Siehe die spätere Figur 508 und die Erkl. 747.)

Erkl. 789. Bezeichnet r den Radius einer Kugel, h die Höhe einer Zone oder einer Calotte derselben, J deren Inhalt und π die irrationale Zahl 3,1415···, so besteht die Relation:

$$J = 2\pi r \cdot h$$

(Siehe die Erkl. 708 und die Teile der Encyklopädie, welche über Stereometrie handeln; speziell das Lehrbuch der Körperberechnungen, 1. Buch.)

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\text{A)} \;.\;.\;.\; J = 4\pi r^2 \cdot \sin\varphi$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r und φ gegebenen Werte den Inhalt der heissen Zone berechnen kann.

Für den Inhalt J_1 einer jeden der gemässigten Zonen $DCFG$ und $ABHK$ hat man in analoger Weise die Relation:

$$\text{a}_1) \;.\;.\;.\; J_1 = 2\pi r \cdot h_1$$

Die Höhe h_1 einer solchen Zone kann man wie folgt bestimmen:

Aus der Figur 502 ergibt sich:

$$\alpha) \;.\;.\;.\; h_1 = \overline{Mm_1} - \overline{Mm}$$

Da nun:

$$\beta) \;.\;.\;.\; \overline{Mm} = h \text{ oder } = r \cdot \sin\varphi \text{ (s. Gleich. b)}$$

ist, und sich für $\overline{Mm_1}$ aus dem rechtwinkligen Dreieck Mm_1F:

$$\cos\beta_1 = \frac{\overline{Mm_1}}{\overline{MF}}$$

oder:

$$\cos(90^0 - \varphi_1) = \frac{\overline{Mm_1}}{r}$$

ergibt, mithin:

$$\gamma) \;.\;.\;.\; \overline{Mm_1} = r \cdot \sin\varphi_1$$

ist, so erhält man für die Höhe h_1:

$$h_1 = r \cdot \sin\varphi_1 - r \sin\varphi$$

oder:

$$\text{b}_1) \;.\;.\;.\; h_1 = r(\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$$

Für den gesuchten Inhalt J_1 einer der gemässigten Zonen erhält man also aus den Gleichungen a$_1$) und b$_1$):

$$J_1 = 2\pi r^2 (\sin\varphi_1 - \sin\varphi)$$

oder in Rücksicht der Erkl. 116:

$$\text{B)} \;.\;.\;.\; J_1 = 4\pi r^2 \cdot \cos\frac{\varphi_1 + \varphi}{2} \cdot \sin\frac{\varphi_1 - \varphi}{2}$$

nach welcher Gleichung man den Inhalt J_1 einer jeden der gemässigten Zonen berechnen kann.

Den Inhalt J_2 einer der kalten Zonen GFn und KHs erhält man in analoger Weise Weise mittels der Relation:

$$\text{C)} \;.\;.\;.\; J_2 = 2\pi r \cdot h_2$$

in welcher Gleichung:

$$\text{c}_1) \;.\;.\;.\; h_2 = r - (h + h_1)$$

gesetzt werden kann, wie sich leicht aus der Figur ergibt,.

*** Aufgabe 1162.** Der wegen seines herrlichen Glockenspiels berühmte Schlossturm des grossherzoglichen Schlosses zu Darmstadt habe eine nördliche geographische Breite $\varphi = 49^0\,52'\,20''$. Wie viel Meter liegt dieser Turm bei der Achsendrehung der Erde in einer Sekunde zurück, wenn der Radius r der Erde zu 859,6 geogr. Meilen und eine Meile zu 7420 Meter angenommen wird?

Erkl. 740. Infolge der Rotation der Erde um ihre Achse erscheint es einem Beobachter auf der Erde, als ob sich das Himmelsgewölbe (mit allen seinen Sternen) in entgegengesetzter Richtung drehe. Die Zeit, welche vergeht, bis ein in dem Zenith eines Beobachters befindlicher fester Punkt des scheinbaren Himmelsgewölbes, z. B. ein Fixstern, das nächstemal wieder in dem Zenith jenes Beobachters steht, nennt man einen „Sterntag."

Der bürgerliche Tag (Sonnentag) wird durch die Umlaufszeit der Erde um die Sonne bestimmt; es ist die Zeit, welche von einer Kulmination der Sonne bis zur nächstfolgenden Kulmination der Sonne vergeht (siehe Erkl. 747).

Der bürgerliche Tag wird in 24 Stunden oder in 24·60 Minuten oder in 24·60·60 Sekunden eingeteilt. Ein solcher bürgerlicher Tag ist um 236 seiner Sekunden grösser als ein Sterntag. (Ausführliches über die Bestimmung des Sterntags, des Sonnentags, des mittleren oder bürgerlichen Tags und deren gegenseitige Beziehungen etc. findet man in den Teilen dieser Encyklopädie, welche über die Astronomie, speziell über die Zeitrechnung handeln, siehe Anmerkung 63.)

Hülfsrechnung.

Aus nebenstehender Gleichung A) erhält man x wie folgt:

$$x = \frac{1719{,}2 \cdot 7420 \cdot \pi \cdot \cos 49^0\,52'\,20''}{86400 - 236}$$

$$x = \frac{1719{,}2 \cdot 7420 \cdot \pi \cdot \cos 49^0\,52'\,20''}{86164}$$

$$\log x = \log 1719{,}2 + \log 7420 + \log \pi + \log \cos 49^0\,52'\,20'' - \log 86164$$

Nun ist:

$$\begin{aligned} \log 1719{,}2 &= \ 3{,}2353264 \\ + \log 7420 &= +\ 3{,}8704039 \\ + \log \pi = \log 3{,}14159 &= +\ 0{,}4971499 \\ + \log \cos 49^0\,52'\,20'' &= +\ 9{,}8092191 - 10 \\ &\ \ 17{,}4120993 - 10 \\ - \log 86164 &= -\ 4{,}9353259 \\ \log x &= \ 12{,}4767734 - 10 \end{aligned}$$

oder:

$$\log x = 2{,}4767734$$
$$\phantom{\log x = 2{,}476}7737$$

mithin:

$$\text{numlog}\, x = 299{,}76$$

Auflösung. Der Schlossturm zu Darmstadt legt in jedem Tag, d. h. in jedem Sterntag, siehe Erkl. 740, einen Weg S zurück, dessen Länge gleich dem Umfang des Parallelkreises ist, welcher durch den Schlossturm geht, also die gegebene geographische Breite φ hat (siehe Erkl. 726).

Nach der in Andeutung zur Aufgabe 1154 aufgestellten Gleichung B_1):

$$U = 2r\pi \cdot \cos\varphi$$

in welcher r den Erdradius, U den Umfang eines Parallelkreises bedeutet, dessen geographische Breite $= \varphi$ ist, erhält man somit und in Rücksicht der in der Aufgabe für r und φ gegebenen Zahlenwerte für den Weg S, welchen der Schlossturm zu Darmstadt in einem Sterntag zurücklegt:

a) . . $S = 2 \cdot 859{,}6 \cdot 7420 \cdot \pi \cdot \cos 49^0\,52'\,20''$ Meter

Zur Bestimmung des Weges x, welchen der Schlossturm in einer Sekunde zurücklegt, muss man zunächst feststellen, wieviele Sekunden der bürgerlichen Zeitrechnung zur Zurücklegung des nach Gleich. a) zu berechnenden Wegs S erforderlich sind.

Da nun der bürgerliche Tag 24 Stunden oder $= 24 \cdot 60$ Minuten oder $= 24 \cdot 60 \cdot 60$ Sekunden enthält, und da der Sterntag um 236 solcher Sekunden kürzer als der bürgerliche Tag ist (siehe Erkl. 740), so braucht der Schlossturm zur Zurücklegung jenes Weges S nur $(24 \cdot 60 \cdot 60 - 236)$ Sekunden der bürgerlichen Zeitrechnung; er legt somit in einer Sekunde den Weg $\frac{S}{24 \cdot 60 \cdot 60 - 236}$ zurück.

Der gesuchte Weg x, welchen der Schlossturm in einer Sekunde zurücklegt, wird also bestimmt durch die Gleichung:

b) . . . $x = \frac{S}{24 \cdot 60 \cdot 60 - 236}$

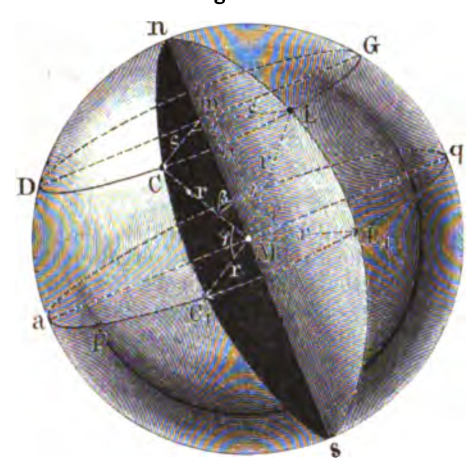
oder in Rücksicht der Gleichung a) durch die Gleichung:

A) . . $x = \frac{2 \cdot 859{,}6 \cdot 7420 \cdot \pi \cdot \cos 49^0\,52'\,20''}{24 \cdot 60 \cdot 60 - 236}$ Meter

Nach nebenstehender Hülfsrechnung ergibt sich hieraus, dass der Schlossturm zu Darmstadt pro Sekunde einen Weg x von 299,76 Meter zurücklegt.

* **Aufgabe 1163.** Angenommen, Leipzig und Cassel haben genau dieselbe geogr. Breite $\varphi = 51^0\ 18'$ und der Unterschied ihrer geographischen Längen betrage $\psi = 2^0\ 52'\ 30''$. Wie weit sind diese beiden Orte von einander entfernt, wenn der Radius r der Erde zu 859,6 geogr. Meilen angenommen wird?

Figur 503.



Erkl. 741. Die Lage eines Ortes auf der Erdoberfläche ist vollkommen bestimmt durch dessen geographische Breite (siehe die Erkl. 722 und 726 und durch dessen geographische Länge (siehe Erkl. 742).

Erkl. 742. Unter der geographischen Länge eines Ortes versteht man den Bogen des Erdäquators, welcher zwischen einem als fest angenommenen Punkt des Erdäquators und dem Durchschnittspunkt des Erdäquators und des durch den betreffenden Ort gehenden Meridians liegt. Ist z. B. in Figur 503 F ein fester Punkt des Erdäquators aq, so ist der Bogen FL_1 die geographische Länge des Ortes L, der Bogen FC_1 ist die geographische Länge des Ortes C.

Als fester Punkt des Erdäquators zur Bestimmung der geographischen Längen wird gewöhnlich der Durchschnitt des Erdäquators mit dem durch die Insel Ferro gehenden Meridian angenommen; dieser Meridian heisst dann der erste Meridian. Die Franzosen nehmen den 20^0 weiter westlich von Ferro, durch die Sternwarte von Paris gehenden Meridian als ersten Meridian an. Auf den Seekarten ist der von den Engländern gewählte, $17^0\ 39'\ 37,5''$ östlich von Ferro durch die Sternwarte von Greenwich gehende Meridian, als erster Meridian angegeben.

Die geographische Länge wird auf dem Aequator, vom ersten Meridian ab, immer nach Osten gerechnet.

Andeutung. Man berechne zunächst, siehe Figur 503, aus der gegebenen geographischen Breite φ des Parallelkreises DG, auf welchem Leipzig und Cassel liegen müssen, da diese Orte gleiche geogr. Breite haben (siehe Erkl. 726), und aus dem Radius r der Erde den Radius ϱ des Parallelkreises DG, mittels der Relation:

$$a) \ldots \varrho = r \cdot \cos\varphi$$

wie in Andeutung zur Aufgabe 1154 gesagt wurde.

Dann berücksichtige man, dass man von dem Kreissektor mCL den Radius ϱ ($= mC$ und $= mL$), sowie den Centriewinkel ψ kennt, indem derselbe das Mass des Bogens CL oder des Bogens C_1L_1, d. i. der gegebene Unterschied der geogr. Längen (siehe Erkl. 741 bis 743a) beider Städte, ist und beachte, dass die gesuchte Entfernung x der Orte C und L gleich dem in Längeneinheiten des Radius ϱ ausgedrückten Bogen CL ist.

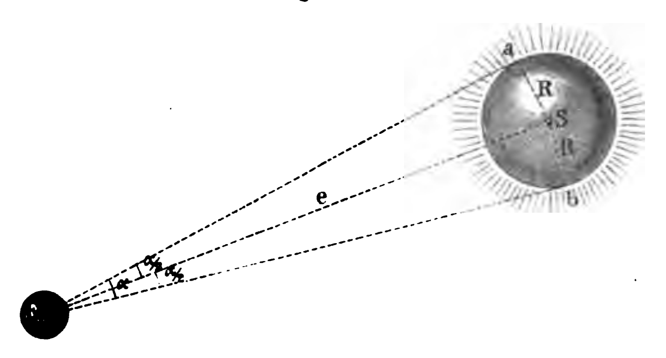
Hiernach und nach der Erkl. 459 erhält man zur Berechnung der gesuchten Bogenlänge CL ($= x$) die Bestimmungsgleichung:

$$b) \ldots x : 2\varrho\pi = \psi^0 : 360^0$$

Erkl. 743a. Der Unterschied der geographischen Längen zweier Orte der Erdoberfläche gibt die im Winkelmass ausgedrückte Entfernung an, in welcher die durch jene Orte gehenden Meridiane den Aequator durchschneiden. In Figur 503 z. B. ist $C_1 L_1$ der Unterschied der geographischen Längen der Orte C und L. Im Winkelmass ist der Bogen CL gleich dem Bogen $C_1 L_1$, da im Winkelmass diese Bogen gleich dem Neigungswinkel der durch die Orte C und L gehenden Meridianebenen sind.

c) Aufgaben, in welchen Bezug auf die gegenseitige Entfernung von Himmelskörpern genommen ist.

Figur 504.



*Aufgabe 1164.** Der mittlere scheinbare Durchmesser der Sonne, vom Mittelpunkt der Erde aus gesehen, sei $\alpha = 32$ Minuten, die geocentrische Entfernung der Sonne (von der Erde) sei $e = 20665840$ geographische Meilen; welches ist hiernach der wahre Durchmesser der Sonne?

Erkl. 743. Unter geocentrisch versteht man in der Astronomie alles das, was sich auf den Mittelpunkt der Erde bezieht, im Gegensatz zu heliocentrisch, worunter man alles das versteht, was sich auf den Mittelpunkt der Sonne bezieht.

Unter der geocentrischen Entfernung eines Himmelskörpers von der Erde versteht man die Entfernung des Mittelpunkts des Himmelskörpers von dem Mittelpunkt der Erde. Bei den Berechnungen, welche sich auf den Lauf der Planeten um die Sonne beziehen, werden die geocentrischen Entfernungen in heliocentrische umgerechnet.

Erkl. 744. Da sämtliche Planeten, also auch Sonne und Mond in verschiedenen Zeiten verschiedene Entfernungen von der Erde haben, mithin ihr scheinbarer Durchmesser zu verschiedenen Zeiten ein verschiedener ist, so spricht man von einem mittleren scheinbaren Durchmesser der Planeten, bezw. von einer mittleren Entfernung der Planeten von der Erde.

Andeutung. Denkt man sich, siehe Figur 504, von dem Mittelpunkt E der Erde (siehe Erkl. 743) die Sehstrahlen Ea und Eb gezogen, welche die Sonnenscheibe S tangieren, so ist der von denselben eingeschlossene Winkel α der gegebene mittlere scheinbare Durchmesser der Sonne (siehe Erkl. 744).

Aus den bei a und b rechtwinkligen Dreiecken EaS und EbS erhält man bezw.:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{e}$$

und hieraus ergibt sich:

$$\text{A)} \ldots R = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und α gegebenen Zahlenwerte, den Halbmesser R der Sonne und somit auch den gesuchten wahren Durchmesser $2R$ der Sonne berechnen kann.

Da $\frac{\alpha}{2}$ ein kleiner Winkel, nämlich $= \frac{32}{2}$ oder $= 16'$ ist, so setze man bei der numerischen Berechnung:

$$\sin 16' = \text{arc}\, 16' \text{ oder } = 16 \cdot \text{arc}\, 1'$$

wie in den Erkl. 660 bis 662 gesagt wurde. (Siehe die Aufgabe 1167 und die Erkl. 745.)

* **Aufgabe 1165.** Der mittlere scheinbare Durchmesser des Mondes sei $\alpha = 31' \, 6''$; die geocentrische Entfernung des Mondes von der Erde betrage $e = 51166{,}8$ geogr. Meilen; welches ist hiernach der wahre Durchmesser des Mondes?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1164.

---

* **Aufgabe 1166.** Unter welchem Winkel sieht man den Durchmesser der Erde

a) vom Mittelpunkt des Mondes und

b) vom Mittelpunkt der Sonne aus,

wenn die mittlere geocentrische Entfernung des Mondes von der Erde:

$$e = 51166{,}8 \text{ geogr. Meilen}$$

die mittlere heliocentrische Entfernung der Erde von der Sonne:

$$e_1 = 20665840 \text{ geogr. Meilen}$$

und der Radius der Erde $r = 859{,}6$ geogr. Meilen angenommen wird?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1164. Man erhält zur Berechnung der gesuchten Gesichtswinkel α und α_1 bezw. die Relationen:

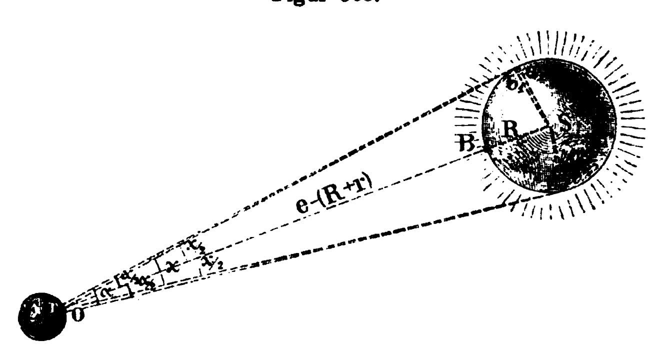
$$\text{a)} \ldots \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{e}$$

und

$$\text{b)} \ldots \sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{r}{e_1}$$

Da α und α_1 nur kleine Winkel sein können, so verfahre man bei der numerischen Berechnung derselben, wie z. B. in Andeutung zur Aufgabe 1108 gesagt wurde.

Figur 505.



* **Aufgabe 1167.** Die geocentrische Entfernung der Sonne von der Erde sei $e = 20665840$ geogr. Meilen; der scheinbare Durchmesser der Sonne betrage am Mittelpunkt der Erde $\alpha = 32$ Minuten; welches wird hiernach der scheinbare Durchmesser x der Sonne an einem Punkt der Erdoberfläche sein, wenn der Radius der Erde $r = 859{,}6$ geogr. Meilen beträgt?

Andeutung. Aus dem bei a rechtwinkligen Dreieck EaS der Figur 505, in welcher die Erde E im Verhältnis zur Sonne S viel zu gross angegeben ist, was nur den Zweck hat, die geometrischen Beziehungen erkennen zu lassen, ergibt sich die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{Sa}}{\overline{ES}}$$

oder, in Rücksicht, dass $\overline{Sa} = R$ und $\overline{ES} = e$ ist:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{R}{e}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots R = e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und α gegebenen Zahlenwerte, den Radius R der Sonne berechnen kann, wie in der Andeutung zur Aufgabe 1164 gesagt wurde.

Erkl. 745. Der nach nebenstehender Gleichung A):

$$x = \frac{e \cdot \alpha}{e - r} \text{ Minuten}$$

sich ergebende Wert für x, für den scheinbaren Durchmesser der Sonne von einem Punkt der Erdoberfläche ist von dem gegeb. Wert des Winkels α, unter welchem der Durchmesser der Sonne vom Mittelpunkt der Erde aus erscheinen wird, nur um sehr weniges verschieden; deshalb kann man, ohne einen besonderen Fehler zu begehen, die in der Aufgabe 1164 gebrauchte Redeweise „der scheinbare Durchmesser der Sonne vom Mittelpunkt der Erde aus gesehen," welche insofern Anstoss erregen kann, als man vom Mittelpunkt der Erde aus nicht sehen kann, gebrauchen.

Aus dem bei b rechtwinkligen Dreieck ObS ergibt sich ferner:

$$\sin\frac{x}{2} = \frac{\overline{Sb}}{\overline{OS}}$$

oder, da $\overline{Sb} = R$ und $\overline{OS} = \overline{ES} - \overline{EO}$ oder $= e - r$ ist:

$$\text{b)} \ldots \sin\frac{x}{2} = \frac{R}{e - r}$$

Setzt man hierin für R den Wert aus Gleichung a), so erhält man:

$$\text{c)} \ldots \sin\frac{x}{2} = \frac{e \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{e - r}$$

Da nun sowohl $\frac{x}{2}$ als auch $\frac{\alpha}{2}$ nur kleine Winkel sind, so kann man nach den Erkl. 660 bis 662:

$$\sin\frac{x'}{2} = \text{arc}\,\frac{x'}{2} \text{ oder } = \frac{x}{2} \cdot \text{arc}\,1'$$

dessgleichen:

$$\sin\frac{\alpha'}{2} = \text{arc}\,\frac{\alpha'}{2} \text{ oder } = \frac{\alpha}{2} \cdot \text{arc}\,1'$$

setzen, und man erhält hiernach:

$$\frac{x}{2} \cdot \text{arc}\,1' = \frac{e \cdot \frac{\alpha}{2} \cdot \text{arc}\,1'}{e - r}$$

oder:

$$\frac{x}{2} = \frac{e \cdot \frac{\alpha}{2}}{e - r}$$

mithin:

$$\text{A)} \ldots\ldots x = \frac{e \cdot \alpha}{e - r} \text{ Minuten}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e, α und r gegebenen Werte, den gesuchten und in Minuten ausgedrückten Winkel x, unter welchem einem Beobachter an einem Punkt O der Erdoberfläche der Durchmesser der Sonne erscheint, berechnen kann (siehe Erkl. 745).

* **Aufgabe 1168.** Wenn der Halbmesser der Sonne zu $R = 92500$ geogr. Meilen angenommen ist, unter welchem Winkel wird einem Beobachter auf dem Merkur der Durchmesser der Sonne erscheinen, wenn die mittlere heliocentrische Entfernung des Merkur zu 8 Millionen Meilen angenommen wird?

Andeutung. Man berechne den gesuchten scheinbaren Durchmesser x, unter welchem der Durchmesser der Sonne einem Beobachter auf dem Merkur erscheint, analog wie in Andeutung zur Aufgabe 1166 gesagt wurde

* **Aufgabe 1169.** Welches Resultat erhält man bei der Auflösung der vorigen Aufgabe, wenn sich der Beobachter nicht auf dem Merkur, sondern auf dem Neptun befinden würde, dessen mittlere Entfernung von der Sonne ungefähr 620 Millionen Meilen beträgt?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1166.

* **Aufgabe 1170.** Welches ist die geocentrische Entfernung der Sonne von der Erde, wenn die Horizontalparallaxe der Sonne zu 8,85″ und der Erdradius r zu 859,6 geogr. Meilen angenommen wird?

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck EAS, siehe Figur 506 und die Erkl. 746, ergibt sich die Relation:

$$\sin p = \frac{r}{e}$$

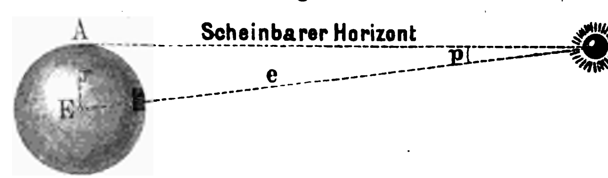
und hieraus erhält man für die gesuchte Entfernung der Sonne von der Erde:

$$\text{A)} \ldots e = \frac{r}{\sin p}$$

Bei der numerischen Berechnung berücksichtige man, dass p ein sehr kleiner Winkel ist, setze in Gleichung A) nach den Erkl. 660 bis 662:

$$\sin p'' = \operatorname{arc} p'' \text{ oder } = p \cdot \operatorname{arc} 1''$$
$$\text{oder } = p \cdot 0{,}000004848137$$

Figur 506



Erkl. 746. Unter Parallaxe (griech., d. h. Abweichung) versteht man im allgemeinen den Winkel, welchen die beiden geraden Linien mit einander bilden, die man von zwei Beobachtungsorten aus, nach einem und demselben Punkt gezogen denken kann.

In der Astronomie unterscheidet man zwei Arten von Parallaxen, nämlich:

a) Horizontalparallaxe, auch tägliche oder Hauptparallaxe genannt,

und

b) Höhenparallaxe, auch jährliche Parallaxe genannt.

Unter der Horizontalparallaxe versteht man den Winkel, welchen die gedachte Verbindungslinie des Erdmittelpunkts mit dem Mittelpunkt eines Gestirns und die Gesichtslinie eines Beobachters bilden und zwar in dem Augenblick, in welchem dem Beobachter das Gestirn am Horizont erscheint. Jene Verbindungslinie ist gleich der geocentrischen Entfernung, welche in jenem Augenblick das Gestirn hat (siehe Erkl. 743); man kann auch sagen: die Horizontalparallaxe ist der Winkel, unter welchem der Radius der Erde vom Mittelpunkt eines Gestirns aus erscheint.

Unter der Höhenparallaxe oder der jährlichen Parallaxe versteht man den Winkel,

welchen die beiden nach einem Gestirn gehenden Gesichtslinien mit einander bilden, die von zwei diametral gegenüberliegenden Punkten der Erdbahn (der Ekliptik) ausgehen; man kann auch sagen: die jährliche Parallaxe ist der Winkel, unter welchem einem auf einem Gestirn gedachten Beobachter der Durchmesser der Erdbahn (der Ekliptik) erscheint.

Die täglichen Parallaxen dienen zur Berechnung der geocentrischen Entfernungen der Planeten. Die jährlichen Parallaxen dienen zur Berechnung der geocentrischen Entfernungen von Fixsternen. (Ueber die Bestimmung der Parallaxen, welche besonders bei den Fixsternen eine sehr schwierige ist, infolge der Abberation des Lichtes, findet man Ausführliches in den Teilen dieser Encyklopädie, welche über Astronomie handeln.)

***Aufgabe 1171.** Die Horizontalparallaxe p des Mondes betrage $57' \, 2{,}07''$, der Erdradius $r = 859{,}6$ geogr. Meilen; wie kann man hieraus die geocentrische Entfernung des Mondes von der Erde berechnen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1170; man setze nach den Erkl. 660 bis 662:

$$\sin p' = \operatorname{arc} p' \text{ oder } = p \cdot \operatorname{arc} 1'$$
$$\text{oder } = p \cdot 0{,}000290882$$

***Aufgabe 1172.** Wie gross ist die tägliche Parallaxe der Sonne, wenn angenommen wird, dass die geocentrische Entfernung der Sonne 20 000 000 und der Radius der Erde $r = 859{,}6$ geogr. Meilen betrage?

Andeutung. Man berechne nach der in Andeutung zur Aufgabe 1170 aufgestellten Gleichung:

$$\sin p = \frac{r}{e}$$

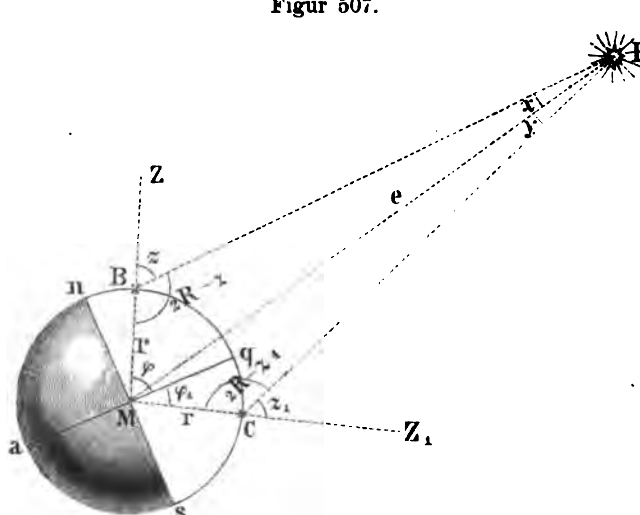
aus r und e den Winkel p, verfahre in Rücksicht, dass p ein sehr kleiner Winkel ist, wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 1107 und 1108 gesagt wurde.

Aufgabe 1173. Zur Bestimmung der geocentrischen Entfernung des Mondes von der Erde wurden im Jahre 1751 gleichzeitig von Lalande in Berlin und von La Caille am Cap der guten Hoffnung die scheinbaren Zenithdistanzen des Mondes zur Zeit seiner Kulmination beobachtet. In Berlin ergab sich für die Zenithdistanz des Mondes $z = 53^0 \, 10' \, 1''$, am Cap der guten Hoffnung ergab sich für dieselbe $z_1 = 33^0 \, 37' \, 32''$. Welches muss hiernach dazumal die Entfernung des Mondes von der Erde gewesen sein, unter der Voraussetzung, dass der Erdradius $r = 859{,}6$ geogr. Meilen, die geogr. Breite von Berlin, welche nördlich ist, $\varphi = 52^0 \, 23'$, die geogr. Breite des Beobachtungsortes am Cap, welche südlich ist, $\varphi_1 = 33^0 \, 5'$ betrage, und dass beide Beobachtungsorte in einem und demselben Meridian liegen?

Andeutung. In Figur 507 stelle der Kreis um M den durch die Beobachtungsorte B (in Berlin) und C (am Cap der guten Hoffnung) gehenden Meridiankreis der Erde dar, aq sei der Aequator in orthogonaler

Projektion auf die Papierebene. Der Bogen qB, bezw. der zugehörige Centriewinkel φ ist die geogr. Breite des Beobachtungsortes B, welcher in der nördlichen Hemisphäre liegt. $q C$ bezw. der zugehörige Centriewinkel φ_1 ist die geogr. Breite des Beobachtungsortes C, welcher in der südlichen Hemisphäre liegt. Ferner sei P der, gleichzeitig von B und C aus beobachtete Planet (der Mond) zur Zeit seiner **Kulmination** (siehe Erkl. 747) für die Orte B u. C. Die Winkel ZBP und Z_1CP sind alsdann die zur Zeit jener Kulmination beobachteten **Zenithdistanzen** des Planeten (siehe Erkl. 747) und $MP (= e)$ ist die gesuchte geocentrische Entfernung des Planeten zu jener Zeit.

Figur 507.



Zur Berechnung derselben kann man unter anderem (s. die Erkl. 749 u. 750) wie folgt verfahren:

Man berechne zunächst, siehe Figur 507, die Winkel x und y wie folgt:

Zwischen den Winkeln des Vierecks $PBMC$ besteht die Relation:

$$x + y + (2R - z) + (2R - z_1) + (\varphi + \varphi_1) = 4R$$

und hieraus erhält man:

$$1) \ldots x + y = z + z_1 - (\varphi + \varphi_1)$$

Nach dieser Gleichung ist die **Summe der Winkel** x und y leicht zu bestimmen. Die **Differenz** dieser Winkel kann man folgendermassen finden:

Aus den Dreiecken PBM und PCM ergeben sich nach der Sinusregel bezw. die Relationen:

$$a) \ldots \frac{\overline{PM}}{\overline{MB}} = \frac{\sin(180^0 - z)}{\sin x}$$

und

$$b) \ldots \frac{\overline{PM}}{\overline{MC}} = \frac{\sin(180^0 - z_1)}{\sin y}$$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 68

$$\alpha) \ldots \sin(180^0 - z) = \sin z$$

und

$$\beta) \ldots \sin(180^0 - z_1) = \sin z_1$$

gesetzt werden kann, so erhält man in Rücksicht dessen und wenn man jene Gleichung a durch Gleichung b) dividiert:

Erkl. 747. Der zu einem bestimmten Meridiankreis der Erde gehörende Meridiankreis des Himmels (siehe Erkl. 721) geht durch den **Zenith** (siehe Erkl. 738) eines jeden auf jenem Erdmeridian befindlichen Beobachters; er ist somit auch ein **Scheitelkreis** (siehe Erkl. 738) aller der auf dem betreffenden Erdmeridian befindlichen Beobachter.

Der zu einem Meridian der Erde gehörende Meridian des Himmels wird auch in bezug auf jenen Meridian der Erde „**Mittagskreis**“ genannt, da die Sonne **in dem Augenblick**, in welchem sie in diesen Meridian des Himmels tritt, ihren **höchsten** Stand über dem Horizont eines jeden der in dem zugehörigen Erdmeridian befindlichen Beobachter erreicht, oder, wie man zu sagen pflegt, **kulminiert** [daher der Name **Kulmination** für den Durchgang der Sonne oder eines anderen Himmelskörpers durch den Himmelsmeridiankreis eines bestimmten Beobachters], somit für alle Beobachter auf dem gedachten Erdmeridian zu jener Zeit „**Mittag**“ ist, indem man unter **Mittag** die Zeit des **höchsten Standes der Sonne** über dem Horizont versteht.

Dass für einen Beobachter auf der Erde ein Himmelskörper, z. B. die Sonne, ihren **höchsten**

Stand erreicht, wenn sie in den Meridiankreis des Himmels tritt, welcher nach der Erkl. 721 zu dem Meridian der Erde gehört, welcher durch den Standpunkt jenes Beobachters geht, kann man sich an Figur 508 veranschaulichen.

In dieser Figur bedeute $NWSO$ den Horizont eines Beobachters M; über dem Beobachter erscheint das Himmelsgewölbe als eine Halbkugel (diese Halbkugel hat man sich unter dem Horizont zu einer vollständigen Kugel ergänzt zu denken, wie in der Figur 508 angedeutet ist). Die zu dem Horizont senkrechte und durch den Standpunkt des Beobachters M gehende Gerade (welche durch den Mittelpunkt der Erde geht, siehe Erkl. 747 a) bestimmt an dem scheinbaren Himmelsgewölbe den Zenith und den Nadir (siehe Erkl. 738). Der grösste Kreis am Himmel, dessen Ebene, siehe Figur 508, durch den Nordpol Np der Himmelsachse, den Zenith und durch den Beobachtungsort M (bezw. durch den Mittelpunkt der Erde) geht, ist nach vorstehendem der Meridiankreis (Mittagskreis) des Beobachters M. Der Durchschnitt dieser Kreisebene mit dem Horizont gibt die genaue Nord-Südrichtung am Horizont an; die in M zu NS Senkrechte gibt die genaue Ost-Westrichtung am Horizont an. (Siehe Erkl. 760.)

Die Sonne (wie auch alle übrigen Gestirne) scheint tagtäglich, wie in der Figur 508 durch Pfeile angedeutet ist) im Osten am Horizont aufzugehen, sie scheint sich über den Horizont zu erheben, ihren höchsten Stand über dem Horizont zu erreichen, wenn sie (bei C oder C_1) in den Mittagskreis des Beobachters M tritt, sie scheint von da ab wieder nach dem Horizont im Westen hinabzusteigen und im Westen unterzugehen (wobei man annehmen muss, dass sie unterhalb des Horizontes einen ähnlichen Kreisbogen am Himmel beschreibt, da sie am andern Morgen wieder im Osten am Horizont erscheint).

Die sichtbaren Bogen, welche scheinbar die Sonne am Himmel täglich beschreibt, heissen die „Tagebogen“, die unsichtbaren (unter dem Horizont) die „Nachtbogen.“

Da man unter Zenithdistanz im allgemeinen den Bogen eines Scheitelkreises (siehe Erkl. 738) versteht, welcher zwischen dem Zenith und einem in dem Scheitelkreis liegenden Punkt des Himmels vorsteht, so sind hiernach und nach vorstehendem in der Fig. 508 die Bogen zwischen dem Zenith und den Punkten C und C_1, die Zenithdistanzen der Sterne C und Sterne C_1 zur Zeit ihrer Kulminationen, ihres höchsten Standes über dem Horizont.

Diese Zenithdistanzen werden, siehe Fig. 508, durch die Winkel z und z_1 gemessen, welche die nach dem Zenith gehende Visierlinie, bezw. mit der Visierlinie bildet, die nach dem Punkt des Meridians gerichtet ist, in dem zur Zeit seiner Kulmination der betreffende Himmelskörper steht.

$$1 = \frac{\sin z}{\sin x} \cdot \frac{\sin y}{\sin z_1}$$

oder:

$$\text{c)} \ldots \frac{\sin x}{\sin y} = \frac{\sin z}{\sin z_1}$$

Bringt man in bezug auf diese Proportion den in der Erkl. 119 angeführten Summen- und Differenzensatz in Anwendung, so ergibt sich die Relation:

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\sin z - \sin z_1}{\sin z + \sin z_1}$$

oder, wenn man noch die in der Erkl. 268 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}} = \frac{\operatorname{tg}\frac{z-z_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z+z_1}{2}}$$

und hieraus erhält man in Rücksicht, dass nach obiger Gleichung 1):

$$\frac{x+y}{2} = \frac{z+z_1-(\varphi+\varphi_1)}{2}$$

ist:

$$2) \ldots \operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{z-z_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z+z_1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{z+z_1-(\varphi+\varphi_1)}{2}$$

nach welcher Gleichung man, aus z, z_1, φ und φ_1 die Winkeldifferenz $x-y$ berechnen kann (siehe Erkl. 748).

Aus dem nach Gleichung 1) für $x+y$ sich ergebenden Wert und dem nach Gleichung 2) für $x-y$ sich ergebenden Wert kann man leicht die Winkel x und y bestimmen.

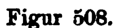
Sind hiernach diese Winkel x und y berechnet, so kann man mittels einer der vorstehenden Gleichungen a) und b), in welchen PM die gesuchte Entfernung e, MB und MC den bekannten Radius r der Erde bedeuten, und in Rücksicht der Gleichungen α) und β), leicht die gesuchte Entfernung e berechnen, wobei man nach den Erkl. 660 bis 662:

$$\sin x'' = \operatorname{arc} x'' \text{ oder } = x \cdot \operatorname{arc} 1''$$

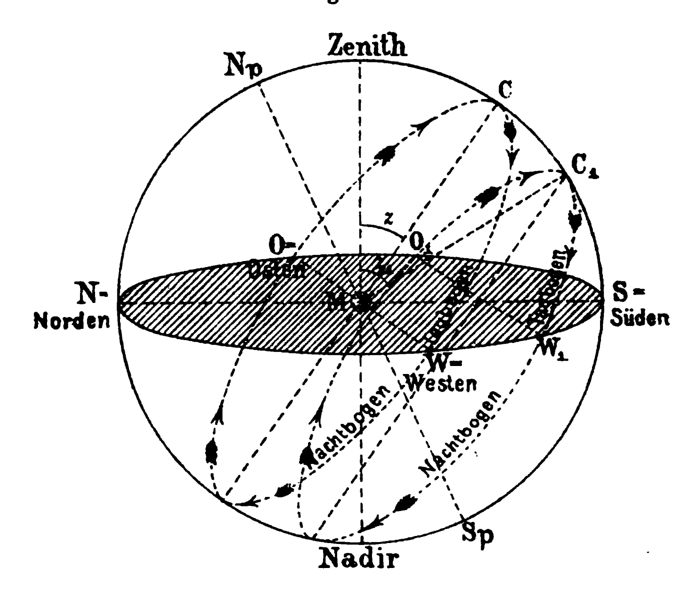
desgleichen:

$$\sin y'' = y \cdot \operatorname{arc} 1''$$

setzen kann, da, wie sich ergeben wird, x und y kleine Winkel sind (siehe auch die Erkl. 749 und 750).



Figur 508.



Erkl. 747a. Bei der Betrachtung des Himmelsgewölbes nimmt man den scheinbaren Horizont (siehe Erkl. 738), in Rücksicht, dass die Erde selbst im Verhältnis zum ganzen Himmelsgewölbe nur sehr klein (ein Punkt) ist, stets so an, als ob er mit der durch den Mittelpunkt der Erde und parallel zu jenem scheinbaren Horizont gelegt gedachten Ebene, durch welche der wahre oder astronomische Horizont bestimmt wird, zusammenfalle.

Erkl. 748. Da x und y sehr kleine Winkel sind, mithin $\frac{x-y}{2}$ ein noch kleinerer Winkel sein muss, so setzt man bei einer numerischen Berechnung nach der in vorstehender Andeutung aufgestellten Gleichung 2):

$$\text{a)} \ldots \operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)'' = \operatorname{arc}\left(\frac{x-y}{2}\right)'' = \frac{x-y}{2} \cdot \operatorname{arc} 1''$$

wonach jene Gleichung übergeht in:

$$\text{b)} \ldots \frac{x-y}{2} = \frac{1}{\operatorname{arc} 1''} \cdot \frac{\operatorname{tg}\frac{z-z_1}{2}}{\operatorname{tg}\frac{z+z_1}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{z+z_1-(\varphi+\varphi_1)}{2} \text{ Sekunden}$$

Erkl. 749. Man kann zur Berechnung der gesuchten Entfernung PM ($= e$), siehe Fig. 507, statt wie in Andeutung zur Aufgabe 1173 gesagt, auch wie folgt verfahren:

Denkt man sich, siehe Figur 509, B mit C verbunden, so kennt man von dem Dreieck MBC den Winkel BMC, indem:

$$\sphericalangle BMC = \varphi + \varphi_1$$

ist, ferner kennt man die Schenkel $\overline{MB}$ und $\overline{MC}$ dieses Dreiecks, indem:

$$\overline{MB} = \overline{MC} = r$$

nämlich gleich dem Erdradius ist. Man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 64 ge-

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entegen.

☛ Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

367. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 366. — Seite 849—864. Mit 13 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 366. — Seite 849—864. Mit 13 Figuren.

Inhalt:

Aufgaben aus der mathematischen Geographie und der sphärischen Astronomie, Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die gegenseitige Entfernung von Himmelskörpern genommen ist, Fortsetzung. — Aufgaben, in welchen Bezug auf die Sonnenhöhe genommen ist.

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste, Aufgabensammlung immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller Art, **Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

zeigt, die Seite BC dieses Dreiecks berechnen. Ist diese Seite BC berechnet, so kennt man von dem Dreieck BPC die Seite BC und die derselben anliegenden Winkel, letzteres aus dem Grund, weil:

$$\beta = 180^0 - (\alpha + z)$$

und

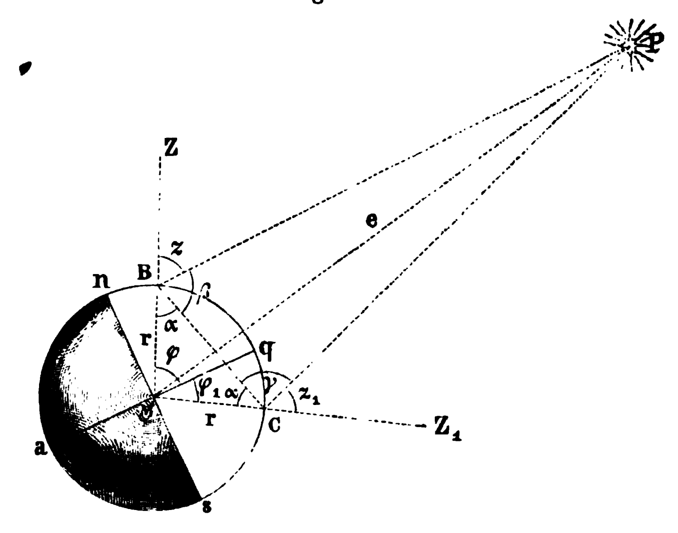
$$\gamma = 180^0 - (\alpha + z_1)$$

ist und der Basiswinkel α des gleichschenkligen Dreiecks BMC leicht mittels der Relation:

$$\alpha = \frac{180^0 - (\varphi + \varphi_1)}{2}$$

berechnet werden kann. Man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, die Seiten PB und PC dieses Dreiecks BPC berechnen. Sind diese Seiten berechnet, so kennt man von jedem der Dreiecke PBM und PCM die Seiten PB und MB bezw. PC und MC, sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel $\sphericalangle PBM = 180^0 - z$ bezw. $\sphericalangle PCM = 180^0 - z_1$; wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt, kann man somit aus jedem dieser Dreiecke die Seite PM, d. i. die gesuchte Entfernung e berechnen.

Figur 509.



Erkl. 750. Man kann auch bei Auflösung der Aufgabe 1178 wie folgt verfahren:

Aus den Dreiecken PBM und PCM der Figur 507 ergeben sich nach der Sinusregel die Relationen:

$$\frac{\sin x}{\sin(180 - z)} = \frac{r}{e}$$

und

$$\frac{\sin y}{\sin(180^0 - z_1)} = \frac{r}{e}$$

und aus diesen Gleichungen erhält man in Rücksicht, dass nach der Erkl. 66:

$$\sin(180^0 - z) = \sin z$$

und

$$\sin(180^0 - z_1) = \sin z_1$$

ist, und dass nach den Erkl. 660 bis 662, weil x und y nur kleine Winkel sein können:

$$\sin x'' = \operatorname{arc} x'' \text{ oder } = x \cdot \operatorname{arc} 1''$$

desgleichen:

$$\sin y'' = \operatorname{arc} y'' \text{ oder } = y \cdot \operatorname{arc} 1''$$

gesetzt werden kann:

$$x \cdot \operatorname{arc} 1'' = \frac{r}{e} \cdot \sin z$$

bezw.:

$$y \cdot \operatorname{arc} 1'' = \frac{r}{e} \cdot \sin z_1$$

oder:

$$\text{a)} \ldots x = \frac{r \cdot \sin z}{e \cdot \operatorname{arc} 1''} \text{ Sekunden}$$

und

$$\text{b)} \ldots y = \frac{r \cdot \sin z_1}{e \cdot \operatorname{arc} 1''} \text{ Sekunden}$$

und aus diesen beiden Gleichungen erhält man durch Addition:

$$1) \ldots x + y = \frac{r \cdot \sin z + r \cdot \sin z_1}{e \cdot \operatorname{arc} 1''} \text{ Sekunden}$$

Da ferner nach der in nebenstehender Andeutung aufgestellten Gleichung 1) auch:

$$2) \ldots x + y = z + z_1 - (\varphi + \varphi_1)$$

ist, so ergibt sich aus diesen Gleichungen 1) und 2) die Relation:

$$z + z_1 - (\varphi + \varphi_1) = \frac{r \cdot \sin z + r \cdot \sin z_1}{e \cdot \operatorname{arc} 1''}$$

und hieraus erhält man für die gesuchte Entfernung e:

$$e = \frac{r(\sin z + \sin z_1)}{[z + z_1 - (\varphi + \varphi_1)] \cdot \operatorname{arc} 1''} \text{ Längeneinheiten}$$

oder, wenn man noch in Bezug auf $\sin z + \sin z_1$ die in der Erkl. 118 angeführte goniometrische Formel in Anwendung bringt:

$$\text{A)} \ldots e = \frac{2r \cdot \sin \frac{z + z_1}{2} \cdot \cos \frac{z - z_1}{2}}{[z + z_1 - (\varphi + \varphi_1)] \cdot \operatorname{arc} 1''} \text{ Längeneinheiten des Radius } r$$

in welcher Gleichung man für:

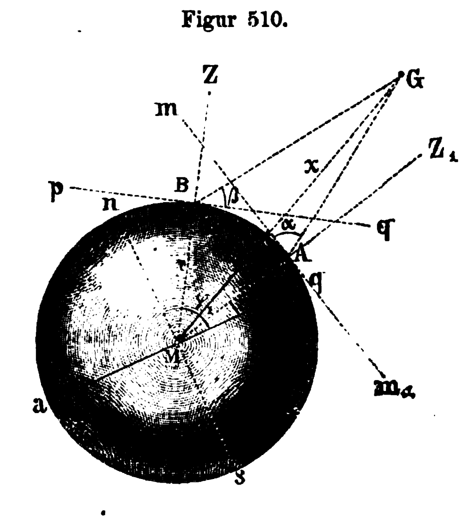
$$(z + z_1) - (\varphi + \varphi_1)$$

die Masszahl zu setzen hat, welche man erhält, wenn man den durch diese Differenz dargestellten Winkel in Sekunden ausdrückt.

Aufgabe 1174. Ein Meteor wird von einem Ort, der unter $\varphi = 9^0$ nördlicher Breite liegt, genau in nördlicher Richtung $9^0\,37'$ über dem Horizont beobachtet; gleichzeitig wird dasselbe von einem Ort, der in demselben Meridian liegt, aber eine nördliche Breite $\varphi_1 = 37^0\,14'$ hat, genau in südlicher Richtung $13^0\,12'$ über dem Horizont gesehen. Wie weit ist das Meteor von der Erdoberfläche entfernt? (Radius r der Erde $= 859{,}6$ geogr. Meilen.)

Andeutung. In Figur 510 sei der Kreis um M ein Meridiankreis der Erde, aq sei die zur Papierebene rechtwinklige Projektion des Aequators, A und B seien die Orte, welche auf jenem Meridiankreis der

Figur 510.



Erde liegen und deren geographische Breiten qA und qB mit φ und φ_1 gegeben sind. Die durch A und B senkrecht zu den Erdradien AM und BM gelegt gedachten Ebenen, welche tangierende Ebenen an die Erdkugel sind und sich in ihren zur Papierebene rechtwinkligen Projektionen als die geraden Linien mm_1 und pq projizieren, stellen bezw. die Horizonte der Beobachter in A und B dar. Ist nun G das Meteor oder irgend ein Gestirn, welches dem Beobachter in A genau im Norden, dem Beobachter in B genau im Süden erscheint, so muss sich das Meteor in der Ebene des Meridiankreises um M befinden, und die Winkel α und β in der Figur 510 müssen die gleichzeitig gemessenen Winkel sein, unter welchen den Beobachtern das Meteor über ihren Horizonten erscheint.

Da nun in dem Viereck $MBGA$ die Seiten MB und MA gleich dem Radius r der Erde, der Winkel $BMA = \varphi_1 - \varphi$, der Winkel $MBG = 90^0 + \beta$ und der Winkel $MAG = 90^0 + \alpha$ ist, da also diese Stücke gemäss der Aufgabe bekannt sind, so kann man zunächst die Entfernung GM berechnen, analog wie in Andeutung zur Aufgabe 1173 oder in den Erkl. 749 und 750 gesagt wurde. Die gesuchte Entfernung GC des Meteors G von der Erdoberfläche findet man alsdann mittels der Relation:

$$\overline{GC} = \overline{GM} - \overline{CM}$$

in welcher $\overline{CM}$ gleich dem bekannten Radius r der Erde ist.

Aufgabe 1175. Zwei Beobachter A und B haben sich mit ihren Winkelmessinstrumenten in der Entfernung $a = 1{,}2$ Meilen in demselben Meridian aufgestellt.

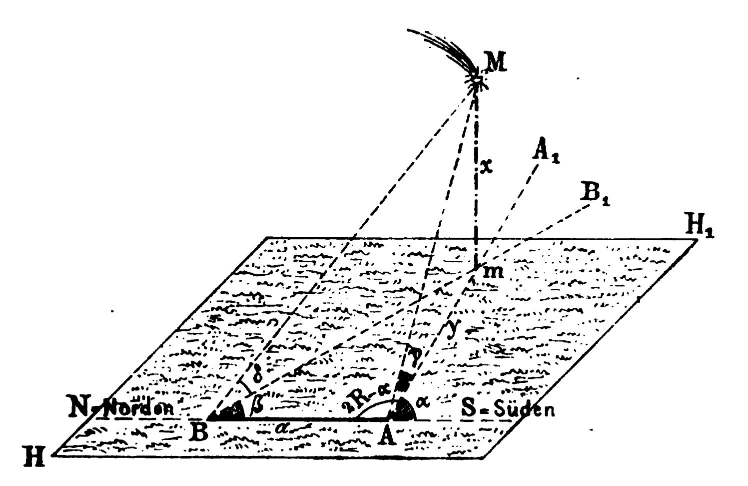
Für den Punkt des Erlöschens einer Sternschnuppe hat A für das Azimut $\alpha = 107^0\ 15'\ 16''$ für die Sternhöhe $\gamma = 86^0\ 4'\ 20''$, und B hat für das Azimut $\beta = 25^0\ 13'\ 26''$ gefunden.

Wie gross ist die absolute Höhe des gedachten Punktes über dem Horizont, wenn die Krümmung der Erde wegen der kleinen gegenseitigen Entfernung der Beobachter nicht in Betracht gezogen werden soll?

Andeutung. In der Figur 511 sei NS ein Stück des Erdmeridians, auf welchem sich die Beobachter A und B in der gegebenen Entfernung a befinden. Dieses Stück NS des gedachten Erdmeridians, bezw. das Stück AB desselben, soll gemäss der Aufgabe, da es im Verhältnis zum Umfang (zur Länge) des Erdmeridians nicht sehr gross ist, nicht als ein Bogenstück des gedachten Erdmeridians, sondern, wie in der Figur 511 angedeutet, als ein gerades Linienstück angenommen werden.

Ist nun M die bei ihrem Erlöschen beobachtete Sternschnuppe und man denkt sich

Figur 511.



durch M, A und den Zenith des Beobachters in A eine Ebene gelegt, so ist dies die Ebene desjenigen Scheitelkreises des A, welcher durch M geht; diese Ebene schneidet den Horizont HH_1 des A in der Geraden AA_1. Der Winkel, welchen diese Gerade AA_1 mit der von A nach dem Südpunkt S gehenden Linie AS bildet, ist das von A beobachtete Azimut α (siehe Erkl. 751) der Sternschnuppe bei M, besser gesagt: dieser Winkel ist das Mass des in A beobachteten Azimuts von M. Der Winkel, welchen die in dem Horizont des Beobachters A liegende Linie AA_1 mit der von A nach M gehenden Visierlinie AM bildet, ist die von A beobachtete Höhe γ der in M befindlichen Sternschnuppe (siehe Erkl. 751), besser gesagt: dieser Winkel ist das Mass der in A beobachteten Sternhöhe des Sterns M. Denkt man sich ebenso durch M, B und den Zenith des Beobachters in B eine Ebene gelegt, so ist dies die Ebene desjenigen Scheitelkreises des B, welcher durch M geht; da die Horizonte des A und des B zusammenfallen (indem AB ein kleines Stück eines Meridians ist, welches als gerade angenommen wird), so ist β, analog wie für A angegeben, das von B beobachtete Azimut der Sternschnuppe in M (der Winkel δ würde die Sternhöhe von M für den Beobachter B sein). Der Schnittpunkt m der durch A und B gehenden horizontalen Linie AA_1 und BB_1 ist der Fusspunkt des Perpendikels, welchen man sich von M auf den gemeinschaftlichen Horizont der Beobachter A und B gefällt denken kann. Mm ist also die gesuchte und zu berechnende absolute Höhe der Sternschnuppe bei ihrem Erlöschen in M.

Diese Höhe x kann man wie folgt berechnen:

In dem Dreieck ABm kennt man die Seite $\overline{AB} (= a)$, den Winkel mBA $(= \beta)$ und den Winkel mAB $(= 2R - \alpha)$; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde, die Seite Am $(= y)$ dieses

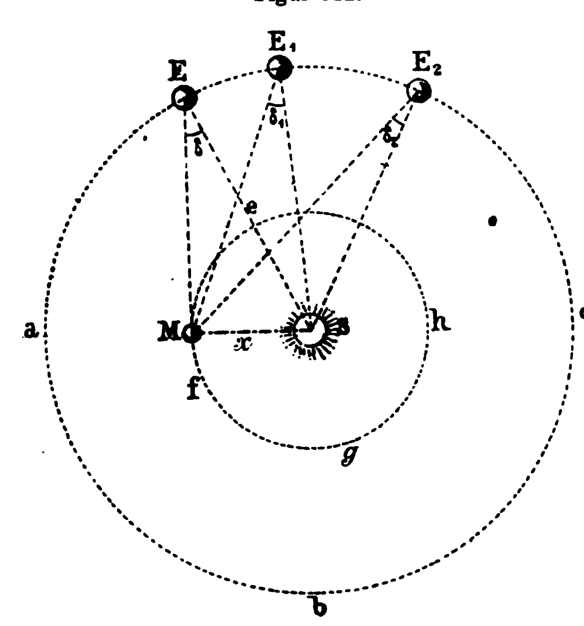
Erkl. 751. Unter dem „Azimut" eines Sterns versteht man den Bogen, der zwischen dem Südpunkt des Horizonts eines Beobachters und dem Durchschnittspunkt des Horizonts mit demjenigen Scheitelkreis des Beobachters liegt, der durch jenen Stern geht. Das Azimut wird vom Südpunkt ab nach und über Osten bis 180° und vom Südpunkt ab nach und über Westen bis 180° gezählt. Man unterscheidet demnach östliches und westliches Azimut.

Durch das Azimut eines Sterns und der Höhe eines Sterns über dem Horizont, d. i. derjenige Bogen des durch den Stern gehenden Scheitelkreises, der zwischen dem Schnittpunkt des Scheitelkreises mit dem Horizont und dem Stern liegt, ist die Lage eines Sterns in Bezug auf den Horizont eines Beobachters für eine gewisse Zeit (siehe Erkl. 747) vollkommen bestimmt.

Dreiecks in jene gegebenen Stücke ausdrücken. Hiernach kennt man von dem bei m rechtwinkligen Dreieck AmM die Seite y und den Höhenwinkel γ; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 4 gezeigt wurde, aus diesen Stücken die gesuchte Höhe x berechnen.

Aufgabe 1176. Man soll die Entfernung des unteren Planeten „Merkur" von der Sonne, aus dem Maximum seiner Elongation, welche $\delta = 17^0\ 54'\ 31''$ sei, und aus der geocentrischen Entfernung $e = 20665840$ geogr. Meilen der Sonne berechnen.

Figur 512.



Erkl. 752. Die Planeten (vom Griech., d. h. Wandelsterne) sind die Himmelskörper, die sich wie die Erde (welche zu den Planeten zählt) in kreisförmigen, nur wenig gegeneinander geneigten Bahnen um die Sonne bewegen und ihr Licht von derselben erhalten.

Die Hauptplaneten sind in der Reihenfolge ihres Abstandes von der Sonne: Merkur, Venus, Erde, Mars, die kleinen Planeten (auch Planetoiden oder Asteroiden genannt), Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun.

Die Planeten Merkur und Venus, deren Bahnen zwischen der Erdbahn und der Sonne liegen, heissen die „unteren" Planeten; die übrigen Planeten heissen die „oberen" Planeten. (Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Astronomie handeln.)

Andeutung. In Figur 512 sei S die Sonne, abc sei die Bahn der Erde, in welcher sich die Erde um die Sonne bewegt. Da nach der Erkl. 752 der Merkur zu den sogenannten unteren Planeten gehört, so muss er irgend eine Stellung innerhalb der um die Sonne S gehenden Erdbahn abc haben; angenommen er befinde sich in M und seine Bahn sei durch fgh dargestellt. Nach der Erkl. 753 muss für das Maximum der Elongation, wenn sich der Merkur in M befindet, die Erde sich in E befinden, so dass das Dreieck EMS ein bei M rechtwinkliges ist. Aus diesem Dreieck erhält man für die gesuchte Entfernung x des Merkur von der Sonne zu jener Zeit:

$$\sin\delta = \frac{x}{e}$$

und hieraus ergibt sich:

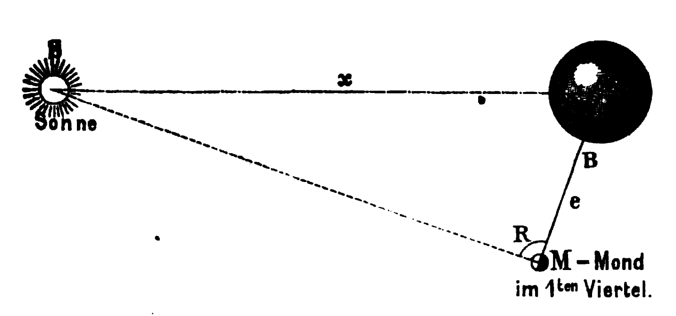
A) . . . $x = e \cdot \sin\delta$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und δ gegebenen Werte, die gesuchte Entfernung x berechnen kann.

Erkl. 753. Unter der „Elongation“ eines Planeten versteht man den Winkel, welchen die von der Erde nach der Sonne gehende Linie mit der von der Erde nach jenem Planeten gehenden Linie bildet. Die Elongation, welche also nichts anderes als die scheinbare Entfernung der Sonne von einem Planeten ist, wird am grössten, d. h. sie erreicht ihr Maximum, wenn der Planet scheinbar auf die Erde zuläuft, wenn also jene gedachte Verbindungslinie des Planeten mit der Erde Tangente an die Bahn des Planeten ist, wie in der Figur 512 durch EM angedeutet ist.

Aufgabe 1177. Man soll die Entfernung der Sonne von der Erde aus der Entfernung $e = 51166{,}8$ geogr. Meilen des Mondes von der Erde und aus dessen Elongation $\delta = 89^0\,51'\,50''$ zur Zeit des ersten oder letzten Viertels berechnen.

Figur 513.



Andeutung. Sieht ein Beobachter B auf der Erde das erste oder das letzte Viertel des Mondes (siehe Erkl. 754), so müssen Sonne, Mond und Erde die durch die Fig. 513 angedeutete Stellung zu einander haben, es muss nämlich die durch E, B und M gelegt gedachte Ebene, welche in der Figur 513 als die gerade Linie EM erscheint, senkrecht auf der Verbindungslinie SM stehen, indem diese Ebene die Trennungslinie des von der Sonne beleuchteten Teils des in seinem ersten Viertel stehenden Mondes und des unbeleuchteten Teils desselben enthält, wie in der Figur angedeutet ist, es muss also:

$$\sphericalangle EMS = R \text{ oder } = 90^0$$

sein.

Aus dem bei M rechtwinkligen Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\cos\delta = \frac{e}{x}$$

und hieraus erhält man:

$$\text{A)} \quad \ldots\ldots \quad x = \frac{e}{\cos\delta}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und δ (siehe Erkl. 753) gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Entfernung x berechnen kann. Da δ ein „nahe bei 90⁰ liegender Winkel ist, so setze man bei einer numerischen Berechnung nach Gleichung A):

$$\cos\delta = \sin(90^0 - \delta)$$

und beachte, da alsdann $\sin(90^0 - \delta)$ ein kleiner Winkel ist, im weiteren das in den Erkl. 660 bis 662 Gesagte.

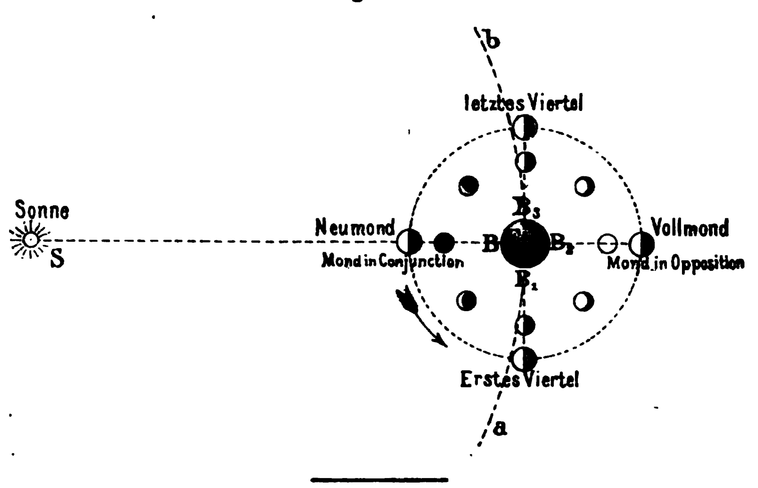
Erkl. 754. Unter „Mond“ (lat. luna) versteht man im allgemeinen jeden Trabanten eines Planeten d. i. ein Himmelskörper, welcher sich um einen Planeten bewegt. Im engeren Sinn versteht man unter „Mond“ den Trabanten der Erde, d. i. der Himmelskörper, welcher die Erde bei ihrem Umlauf um die Sonne stets begleitet und dabei die Erde selbst umkreist. Die Bahn, welche der Mond bei seinem Umlauf um die Erde durchläuft, ist (wie die Bahnen aller Himmelskörper) eine excentrische, und ist um ca. $5^0\,20'$ gegen die Erdbahn selbst geneigt.

Der Mond legt seine Bahn um die Erde in ca. 27 Tagen $7^3/_4$ Stunden zurück, welche Umlaufszeit der sogenannte Mondmonat ausmacht.

Der Mond hat kein eigenes Licht und wird von der Sonne beleuchtet. Stellt in der Fig. 514 S die Sonne, ab einen Teil der Erdbahn, E die Erde dar, so ist in der Zeit, in welcher sich der Mond zwischen Sonne und Erde befindet (in welcher er sich in Konjunktion befindet) einem Beobachter B auf der Erde der unsichtbare Teil des Mondes zugekehrt; in dieser Stellung sagt man, es ist „Neumond“.

Hat der Mond in der Richtung des Pfeils ¼ seines Umlaufs um die Erde vollendet (bei welcher Betrachtung, der Einfachheit halber, die Erde als feststehend in der Figur angenommen ist), so sieht ein Beobachter B_1 auf der Erde einen Teil des von der Sonne beleuchteten Mondes, und man sagt, der Mond ist zunehmend und steht in seinem ersten Viertel. Hat der Mond ein weiteres Viertel seines Umlaufes um die Erde vollendet (in welcher Stelle er sich in Opposition befindet), so sieht ein Beobachter B_2 auf der Erde den ganzen von der Sonne beleuchteten Mond, und man sagt, es ist „Vollmond". Hat der Mond abermals ein weiteres Viertel seines Umlaufes um die Erde vollendet, so sieht ein Beobachter B_3 auf der Erde wieder nur einen Teil des von der Sonne beleuchteten Mondes, und man sagt, der Mond ist abnehmend und steht in seinem letzten Viertel, wie in der Figur 514 angedeutet ist (siehe Andeutung 63).

Figur 514.



*** Aufgabe 1178.** Man soll die Entfernung des oberen Planeten „Jupiter" von der Sonne, aus seiner jährlichen Parallaxe $P = 11^0\,4'\,50''$ und der heliocentrischen Entfernung der Erde $e = 20665840$ Meilen bestimmen.

Andeutung. In Figur 515 stelle, in Rücksicht der Erkl. 752, S die Sonne, ab die Bahn der Erde E, cd die Bahn des Jupiters J dar. Nach dem, was in der Erkl. 746 über die jährliche Parallaxe gesagt ist, stellt $\sphericalangle\, EJE$ die jährliche Parallaxe P des Jupiters dar. Aus dem bei S rechtwinkligen Dreieck JSE ergibt sich die Relation:

$$\operatorname{tg}\frac{P}{2} = \frac{e}{x}$$

und hieraus erhält man:

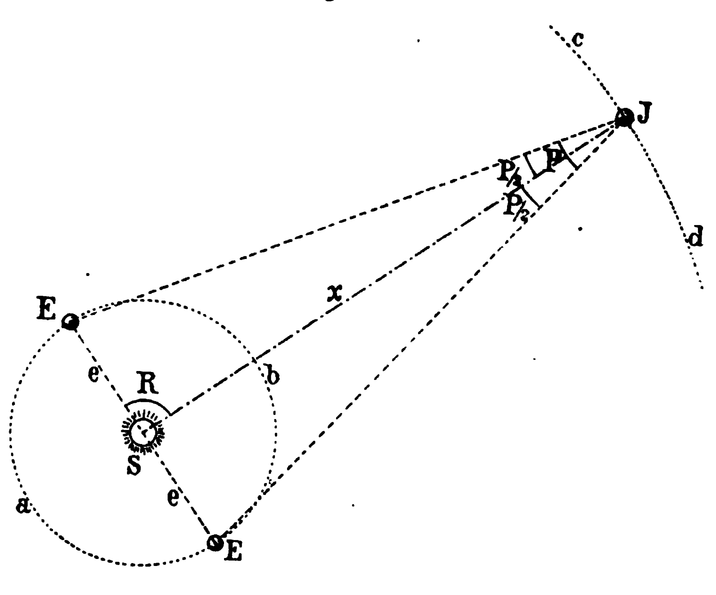
$$x = \frac{e}{\operatorname{tg}\frac{P}{2}}$$

oder nach der Erkl. 15:

A) . . . . $x = e \cdot \operatorname{ctg}\frac{P}{2}$

Nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und P gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Entfernung x des Jupiters J von der Sonne S berechnen kann.

Figur 515.



*** Aufgabe 1179.** Man nimmt an, dass Stern α in dem Sternbild des Centaur der Fixstern ist, welcher sich der Erde am nächsten befindet. Welche Entfernung muss dieser Fixstern von der Erde haben, wenn dessen jährliche Parallaxe $P = 0{,}96''$ beträgt und die geocentrische Fntfernung der Sonne 20 665 840 geogr. Meilen ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe. Stellt in Figur 515 J den Stern α in dem Sternbild des Centaur dar, so erhält man zur Berechnung der gesuchten Entfernung JE dieses Fixsterns von der Erde aus dem bei S rechtwinkligen Dreieck JES die Relation:

$$\sin\frac{P}{2} = \frac{e}{\overline{JE}}$$

und hieraus ergibt sich:

A) . . . $\overline{JE} = \frac{e}{\sin\frac{P}{2}}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für e und P gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Entfernung JE berechnen kann. Da $\frac{P}{2}$ gemäss der Aufgabe ein sehr kleiner Winkel, nämlich $= 0{,}48''$ ist, so setze man bei der numerischen Berechnung von JE nach den Erkl. 660 bis 662:

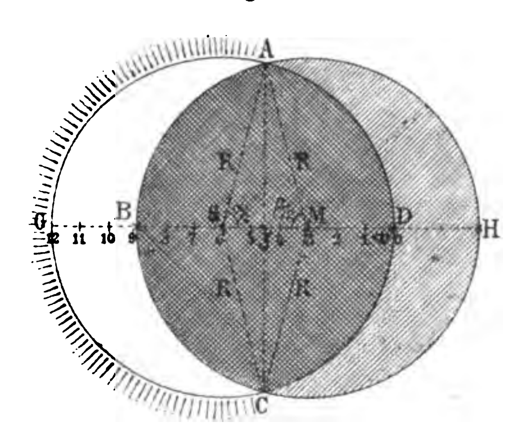
$$\sin 0{,}48'' = \operatorname{arc} 0{,}48'' \text{ oder } = 0{,}48 \cdot \operatorname{arc} 1''$$

$$\text{oder} = \frac{48}{100} \cdot 0{,}0000048481368110\text{9}$$

---

* **Aufgabe 1180.** Bei einer partiellen Sonnenfinsternis, welche zu einer bestimmten Zeit und an einem bestimmten Ort beobachtet wurde, hatten Sonnen- und Mondscheibe scheinbar gleichen Durchmesser, die Verfinsterung der Sonne betrug 9 Zoll, Der wievielte Teil der Sonnenscheibe war zur Zeit jener beobachteten Sonnenfinsternis noch sichtbar?

Figur 516.



Erkl. 755. Die Grösse einer partiellen Sonnenfinsternis (siehe Erkl. 756) wird bestimmt, indem man den scheinbaren Durchmesser der Sonnenscheibe in zwölf gleiche Teile teilt, einen solchen Teil einen Zoll nennt, und dann angibt, wieviele solche Teile, solcher Zolle von der Mondscheibe verdeckt (verdunkelt oder verfinstert) werden.

Andeutung. Bei einer Sonnenfinsternis erscheint es einem Beobachter auf der Erde, als ob die Mondscheibe M auf der Sonnenscheibe S läge. In Figur 516 stelle der Kreis um S die scheinbare Sonnenscheibe, der Kreis um M die scheinbare Mondscheibe dar. Diese beiden Kreise haben einen und denselben Radius R, da Sonnen- und Mondscheibe scheinbar gleichen Durchmesser zur Zeit der beobachteten Sonnenfinsternis hatten. Teilt man den Durchmesser GD der Sonnenscheibe in zwölf gleiche Teile, so stellt ein solcher Teil nach der Erkl. 755 einen der in der Aufgabe erwähnten Zolle dar. Da gemäss der Aufgabe die beobachtete Sonnenfinsternis 9 Zoll betrug, so muss nach der Erkl. 755 der Rand der Mondscheibe durch den 9. Teil des Durchmessers DG gehen, wie in der Figur 516 angedeutet ist. Das den beiden gleichen Kreisen um S und M gemeinsame Flächenstück $ABCD$ ist der von dem Mond bedeckte Teil der Sonnenscheibe. Für den Inhalt F desselben erhält man nach der in Andeutung zur Aufgabe 1038 aufgestellten Gleichung A), und in Rücksicht, dass in der Figur 516 die beiden Kreise einander gleich sind (vergleiche hiermit die Figur 390) und dass:

$$\triangle ASC \cong \triangle AMC$$

mithin:

$$\sphericalangle ASC = \sphericalangle AMC$$

oder:

$$\beta = \alpha$$

ist:

$$F = \frac{(R^2 \cdot \alpha + R^2 \cdot \alpha) \cdot \pi}{360} - \frac{R^2 \cdot \sin \alpha + R^2 \cdot \sin \alpha}{2}$$

oder:

$$F = \frac{2 R^2 \alpha \pi}{360} - \frac{2 R^2 \sin \alpha}{2}$$

Erkl. 756. Eine Sonnenfinsternis findet statt, wenn für einen Beobachter auf der Erde, der Mond zwischen dem Beobachtungsort auf der Erde und der Sonne steht, indem dadurch die Sonne von dem Mond (welcher ein nichtleuchtender Körper ist) verdeckt wird. Man sagt, es ist zentrale Sonnenfinsternis, wenn die Mittelpunkte der Sonnenscheibe und der Mondscheibe mit dem Beobachtungsort (bezw. mit dem Mittelpunkt der Erde) in einer geraden Linie liegen. Haben hierbei die Sonnen- und die Mondscheibe gleichen scheinbaren Durchmesser, so wird die ganze Sonnenscheibe von der Mondscheibe verdeckt, verfinstert, und man sagt, es ist totale Sonnenfinsternis; ist hingegen bei jener zentralen Sonnenfinsternis der scheinbare Durchmesser des Mondes kleiner als der scheinbare Durchmesser der Sonne, so sagt man, die Sonnenfinsternis ist eine ringförmige (die Sonne erscheint als ein leuchtender Ring). Man sagt, es ist partielle Sonnenfinsternis, wenn die Mittelpunkte der Sonnen- und der Mondscheibe mit dem Beobachtungsort (dem Mittelpunkt der Erde) nicht in gerader Linie liegen; hierbei können die scheinbaren Durchmesser der Sonnen- und Mondscheiben gleich oder auch ungleich sein (siehe Anmerkung 68).

mithin:

$$\text{a)} \ldots F = \frac{R^2 \alpha \pi}{180} - R^2 \sin \alpha$$

Da nun der ganze Inhalt S der Sonnenscheibe nach der Erkl. 487:

$$\text{b)} \ldots S = R^2 \pi$$

ist, so erhält man für den Inhalt F_1 des noch sichtbaren Teils $AGCB$ der Sonne:

$$F_1 = R^2 \pi - F$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$F_1 = R^2 \pi - \left(\frac{R^2 \alpha \pi}{180} - R^2 \sin \alpha\right)$$

oder:

$$F_1 = \frac{R^2 \pi \cdot 180}{180} - \frac{R^2 \alpha \pi}{180} + R^2 \sin \alpha$$

mithin:

$$\text{c)} \ldots F_1 = \frac{R^2 \pi (180 - \alpha)}{180} + R^2 \sin \alpha$$

Aus den Gleichungen b) und c) ergibt sich für das Verhältnis des Inhalts F_1 des noch sichtbaren Teils der Sonne zu dem ganzen Inhalt S der Sonnenscheibe:

$$F_1 : S = \left(\frac{R^2 \pi (180 - \alpha)}{180} + R^2 \sin \alpha\right) : R^2 \pi$$

und hieraus erhält man nach gehöriger Reduktion:

$$\text{d)} \ldots F_1 = \left[\frac{180 - \alpha}{180} + \frac{\sin \alpha}{\pi}\right] \cdot S$$

Die gesuchte Zahl x, welche angibt, der wievielte Teil der ganzen Sonnenscheibe zur Zeit der beobachteten Sonnenfinsternis noch sichtbar war, ist also:

$$\text{A)} \ldots x = \frac{180 - \alpha}{180} + \frac{\sin \alpha}{\pi}$$

Nach dieser Gleichung kann man, in Rücksicht, dass α die Anzahl der Grade des Winkels ASC, siehe Figur 516, bedeutet, x berechnen, sobald α bekannt ist. Den Winkel α kann man aber wie folgt berechnen:

In dem rechtwinkligen Dreieck AJS der Figur 516 ist:

$$\overline{SA} = R \text{ oder } = 6 \text{ Zoll (siehe Erkl. 755)}$$

$$\overline{SJ} = \frac{\overline{SM}}{2} \text{ oder } = \frac{3}{2} \text{ oder } = 1{,}5 \text{ Zoll}$$

und

$$\cos \frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{SJ}}{\overline{SA}}$$

und hieraus ergibt sich:

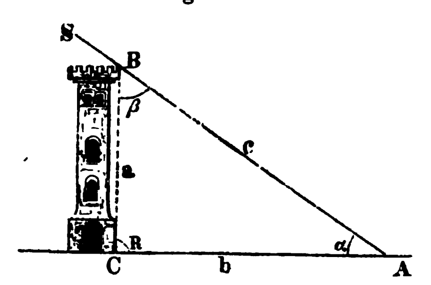
$$\text{A}_1) \ldots \cos \frac{\alpha}{2} = \frac{1{,}5}{6}$$

nach welcher Gleichung man den Winkel α berechnen kann.

d) Aufgaben, in welchen Bezug auf die Sonnenhöhe genommen ist.

* **Aufgabe 1181.** Ein auf horizontaler Ebene stehender Turm von $a = 36,83$ m Höhe wirft einen Schatten von $b = 25,72$ m Länge; unter welchem Winkel treffen in diesem Augenblick die Sonnenstrahlen die Erdoberfläche?

Figur 517.



Erkl. 757. In Rücksicht der grossen Entfernung der Sonne von der Erde, welche nach der Aufgabe 1164 über 20 000 000 geogr. Meilen beträgt, kann man die von der Sonne ausgehenden und zur Erde gelangenden Sonnenstrahlen als unter sich parallel annehmen, was bei den in diesem Abschnitt enthaltenen Aufgaben stets berücksichtigt werden muss.

Erkl. 758. Infolge der steten Rotation der Erde um ihre Achse (siehe die Erkl. 715 u. 747) treffen die Sonnenstrahlen den Horizont eines bestimmten Beobachters in jedem Augenblick unter einem anderen Winkel. Die Sonnenhöhe (siehe die Erkl. 747 und 751), d. i. der Winkel, unter welchem die Sonnenstrahlen einen bestimmten Horizont treffen, ist somit in jedem Augenblick eine andere.

Erkl. 759. Das in der Aufgabe 1181 vorgeführte Problem soll schon 600 v. Chr. durch Thales von Milet, allerdings in anderer Fassung und unter der Annahme, dass die Erde eine ruhende Ebene ist, über welcher sich die Sonne täglich erhebt, gelöst worden sein.

Andeutung. Denkt man sich durch die Achse des von der Sonne beleuchteten Turmes in der Hauptrichtung des Schattens, welchen dieser Turm auf die horizontale Ebene wirft, auf welcher er steht, eine vertikale Ebene gelegt, so enthält diese Vertikalebene als Durchschnittsfigur das durch die Figur 517 dargestellte rechtwinklige Dreieck ABC, in welchem die Kathete BC gleich der gegebenen Höhe a des Turmes, die Kathete AC gleich der in einem bestimmten Augenblick gemessenen Schattenlänge b des Turmes (siehe die Erkl. 757 und 758) ist; die Hypotenuse AB dieses Dreiecks wird gebildet durch die in jenem Augenblick die obersten Grenzen des Turmes tangierenden Sonnenstrahlen. Der Winkel α dieses Dreiecks ist der Winkel, welchen in jenem Augenblick diese Sonnenstrahlen mit der Erdoberfläche bilden. Zur Berechnung dieses Winkels ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB die Relation:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

Nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und b gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Winkel α berechnen kann (siehe Erkl. 759).

---

* **Aufgabe 1182.** Wie hoch steht die Sonne, wenn der Schatten eines Mannes

a) gleich der halben

und b) gleich der doppelten

Länge des Mannes ist?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1181. Man berechne den Winkel α in Figur 517, wenn in dieser Figur einmal:

$$\text{a)} \ldots b = \frac{a}{2}$$

ein andermal:

$$\text{b)} \ldots b = 2a \text{ ist.}$$

---

* **Aufgabe 1183.** Welche Länge hat der horizontale Schatten eines $a = 35$ m hohen Turmes, wenn die Sonnenhöhe $\alpha = 23^0\ 30'$ beträgt?

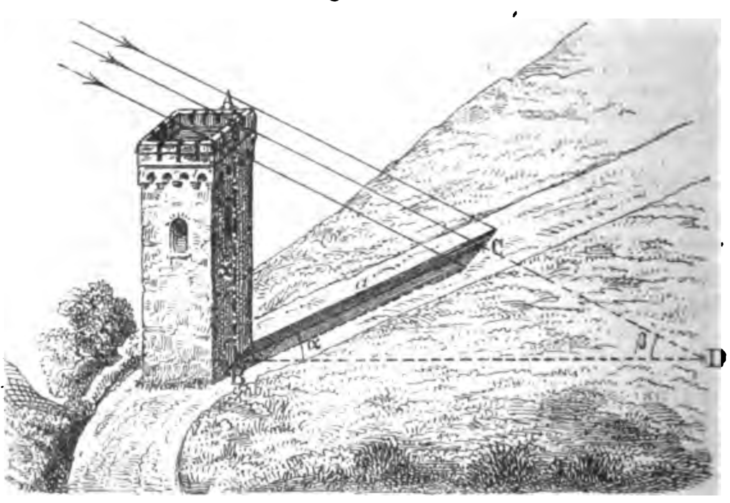
Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist im allgemeinen analog der Auflösung der Aufgabe 1181. Von dem rechtwinkligen Dreieck ABC der Figur 517

kennt man den Winkel α, derselbe ist gleich der gegebenen Sonnenhöhe (s. die Erkl. 758) und die Kathete a; man kann somit aus diesen Stücken leicht die Kathete b, d. i. die gesuchte Schattenlänge des Turmes berechnen.

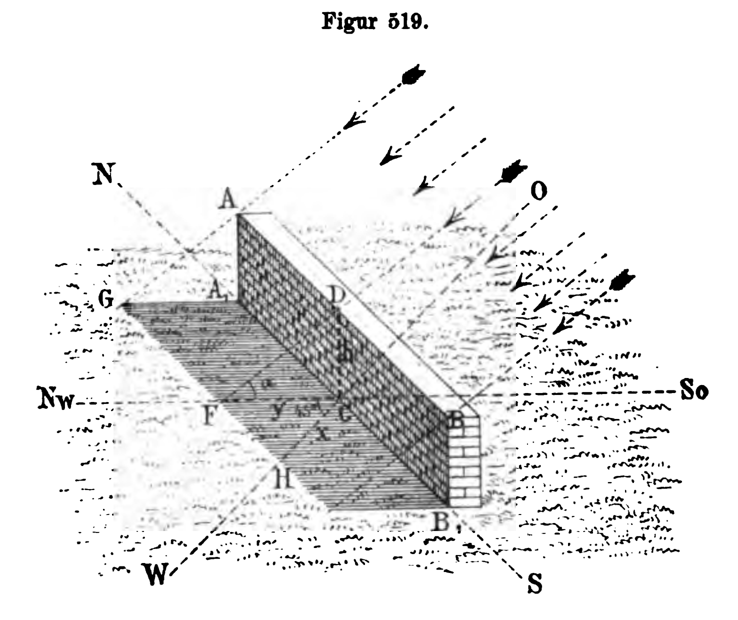
Aufgabe 1184. Am Fuss eines Berges steht eine Turm; derselbe wirft zu einer bestimmten Zeit einen Schatten von $a =$ 8,4 m Länge auf die Böschung des Berges. Welche Höhe hat dieser Turm, wenn an jener Stelle die Böschung des Berges unter einem Winkel $\alpha = 28^0\ 40'$ gegen die durch den Fusspunkt des Turms gelegt gedachte Horizontalebene ansteigt, und wenn in dem Augenblick, in welchem der Schatten des Turmes jene gegebene Länge a hat, die Sonnenhöhe, d. i. der Winkel, welchen die Sonnenstrahlen mit jener Horizontalebene bilden, $\beta = 46^0\ 30'$ beträgt?

Andeutung. Denkt man sich durch die Höhe des Turmes und durch die Richtung des Hauptschattens, welchen der Turm auf die Böschung des Berges wirft, eine Vertikalebene gelegt, so enthält diese Ebene, siehe Figur 518, das rechtwinklige Dreieck ABD und die schiefwinkligen Dreiecke BCA und BCD. In dem Dreieck BCD ist BC gleich der gegebenen Länge a des Schattens des Turmes auf die Böschung des Berges, α ist der gegebene Winkel, unter welchem die Böschung gegen die durch B gehende Horizontalebene ansteigt, und β ist der gegebene Winkel, unter welchem die Sonnenstrahlen in dem gedachten Augenblick jene Horizontalebene treffen. Wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt, kann man aus diesen Stücken die Seite BD des Dreiecks BCD berechnen. Ist diese Seite berechnet, so kennt man von dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABD die Seite BD, sowie den Winkel β; man kann somit, wie in Auflösung der Aufgabe 3 gezeigt, hieraus leicht die gesuchte Höhe x des Turmes berechnen.


Figur 518.



Figur 519.



*** Aufgabe 1185.** Welches muss die Breite des Schattens einer $h = 5$ m hohen, auf horizontaler Ebene stehenden und in nordsüdlicher Richtung sich hinziehenden Mauer in dem Augenblick sein, in welchem sich die Sonne genau im Südosten befindet und die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 54^0\,45'$ jene Horizontalebene treffen?

Erkl. 760. Die Richtung, in welcher die Sonne steht, wenn sie ihren höchsten Stand, ihren Kulminationspunkt erreicht hat, wenn sie sich also in dem Himmelsmeridian eines bestimmten Ortes befindet, heisst „Südgegend“ dieses Ortes, die entgegengesetzte „Nordgegend“; die hierzu senkrechte Richtung, wo die Sonne am Horizont aufgeht, heisst „Ostgegend“, die dieser entgegengesetzte „Westgegend“.

Dementsprechend nennt man die Punkte, in welchen der Himmelsmeridian eines Ortes den Horizont desselben scheinbar schneidet, bezw. „Süd- und Nordpunkt“ (ersterer liegt an der Süd-, letzterer in der Nordgegend). Die Verbindungslinie dieser beiden Punkte heisst „Mittagslinie“. Denkt man sich durch den Beobachtungsort eine Senkrechte zur Mittagslinie (zur Süd-Nordrichtung) dieses Ortes gezogen, so trifft dieselbe den Horizont bezw. in den sogenannten Ost- und Westpunkten (ersterer liegt in der Ost-, letzterer in der Westgegend).

Die Süd-, Nord-, Ost- und Westgegenden heissen die Hauptweltgegenden; die Süd-, Nord-, Ost- und Westpunkte heissen die Kardinalpunkte des Horizonts und werden allgemein, bezw. mit S, N, O und W bezeichnet, wie in der Figur 520 angedeutet ist.

Andeutung. In Figur 519 stelle AB die auf horizontaler Ebene stehende Mauer dar, welche sich in der Nordsüdrichtung hinzieht. Die durch irgend einen Punkt, wie z. B. C, des Fusspunktes der Mauer zu NS gezogene Senkrechte WO gibt auf der Horizontalebene, auf welcher sich die Mauer befindet, die Ostwestrichtung an, und die durch C gezogene Linie $N_w S_o$, welche den Winkel OCS halbiert, gibt nach der Erkl. 760 die Südost-Nordwestrichtung für den Punkt C an.

Steht die Sonne genau im Südosten (siehe Erkl. 760) und treffen die Sonnenstrahlen die Horizontalebene, auf welcher die Mauer steht, unter dem Winkel α, und man denkt sich durch irgend einen beliebigen Fusspunkt der Mauer, z. B. durch jenen Punkt C eine Vertikalebene und zwar in der Südost-Nordwestrichtung gelegt, so erhält man allemal ein rechtwinkliges Dreieck, welches dem rechtwinkligen Dreieck DCF kongruent ist; man erhält nämlich jedesmal ein rechtwinkliges Dreieck, in welchem die eine Kathete, wie CD, gleich der Höhe h der Mauer ist, in welchem die andere Kathete, wie CF, mit der Hypotenuse den Winkel α bildet, unter welchem die Sonnenstrahlen, wie DF, die Horizontalebene in dem gedachten Augenblick treffen, und in welchem jene zweite Kathete, wie CF, mit der Ostwestrichtung,

Aus den Gleichungen a) und b) folgt die Relation:

A) . . . $x = a\sqrt{2} \cdot \operatorname{tg} \varepsilon$

nach welcher Gleichung man die gesuchte Höhe x des Turmes aus der gegebenen Schattenlänge a und dem gegebenen Elevationswinkel ε berechnen kann.

*** Aufgabe 1188.** Die geographische Breite der Universitätsstadt Giessen im Grossherzogtum Hessen ist $\varphi = 50^0\ 35'\ 17''$ (nördlich). Wie lang muss der horizontale Schatten des $a = 45$ m hohen Turmes der alten Kirche St. Pancratii zu Giessen sein, und zwar:

a) am wahren Mittag des längsten Tages und

b) am wahren Mittag des kürzesten Tages, wenn die Schiefe der Ekliptik rund zu $23^0\ 30'$ angenommen wird?

Erkl. 761. Den zweimal im Jahr eintretenden Zeitpunkt, in welchem die Sonne am weitesten von dem Himmelsäquator entfernt ist, nennt man Sonnenwende oder Solstitium, da von dem Tag ab, an welchem ein solcher Zeitpunkt eintritt (und die Sonne sich scheinbar in einem Parallelkreis, einem Wendekreis des Himmels bewegt, siehe die Erkl. 715 747 und 762), die Sonne nach dem Aequator des Himmels wieder zurückzugehen, demselben sich wieder zuzuwenden scheint. Der eine dieser Zeitpunkte fällt mit dem 21. (22.) Juni der bürgerlichen Zeitrechnung zusammen und heisst Sommersolstitium, der andere jener Zeitpunkte fällt mit dem 21. (22.) Dezember zusammen und heisst Wintersolstitium. Zur Zeit des Sommersolstitiums ist der Tagebogen der Sonne am grössten und der betreffende Tag ist der längste; zur Zeit des Wintersolstitiums ist der Tagebogen der Sonne am kleinsten und der betreffende Tag ist der kürzeste (siehe die Erkl. 747 u. 762).

Erkl. 762. Bei Betrachtung der in voriger Erklärung erwähnten scheinbaren Bewegung der Sonne um die Erde nimmt man am besten an, dass die Erde um ihre Achse (als feste Achse) rotiere und dass sich die Sonne in einer Bahn (der Sonnenbahn oder Ekliptik, siehe Erkl. 735) bewege, welche gegen den Himmelsäquator um die Ekliptikschiefe geneigt ist.

In Figur 522 stelle der Punkt M die Erde bezw. einen Beobachter auf der Erde dar (siehe Erkl. 747 a), welche um ihre Achse von Westen nach Osten rotiere; $NWSO$ sei der astronomische Horizont dieses Beobachters (siehe Erkl. 747 a); AQ stelle den Himmelsäquator und KL die scheinbare Bahn der Sonne (die Ekliptik) dar. Hat die Sonne bei ihrem scheinbaren Lauf um die Erde den Punkt L ihrer Bahn erreicht, welcher am weitesten vom Aequator aq nach dem

Andeutung. Der längste Tag für die Universitätsstadt Giessen findet statt, wenn sich die Sonne am weitesten von dem Himmelsäquator entfernt hat, und zwar, da Giessen auf der nördlichen Hemisphäre der Erde liegt (siehe Erkl. 718), nach dem Nordpol der Himmelsachse zu, wenn sich also die Sonne, wie in den Erkl. 761 und 762 gesagt ist, in dem Sommersolstitium befindet.

Für den Turm der Kirche St. Pancratii zu Giessen findet wahrer Mittag an jenem längsten Tag statt, wenn die Sonne genau in dem Meridiankreis des Himmels steht dessen Ebene durch jenen Turm geht (siehe Erkl. 747). Da in diesem Augenblick der Bogen jenes gedachten Meridians, welcher zwischen der Sonne und dem Himmelsäquator liegt, gleich der Ekliptikschiefe ε ($= 23^0\ 30'$) ist, und da nach der in der Erkl. 764 aufgestellten Gleichung 3) die Aequatorhöhe (d. i. die Erhebung des Aequators über den Horizont eines Ortes, siehe Erkl. 764) gleich dem Komplement der geographischen Breite φ des Kirchturms zu Giessen, also $= 90^0 - \varphi$ ist, so erhält man für die Sonnenhöhe α am wahren Mittag des Kirchturmes zur Zeit des Sommersolstitiums (am längsten Tag):

a) . . . $\alpha = (90^0 - \varphi) + \varepsilon$

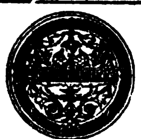
Aus diesem Winkel α, der bekannten Höhe a des Turmes kann man, wie in Andeutung zur Aufgabe 1183 gesagt, leicht die Länge des Schattens berechnen, welchen der Kirchturm zur Zeit des wahren Mittags am längsten Tag wirft.

In ganz analoger Weise kann man den Schatten berechnen, welchen der Kirchturm am wahren Mittag des kürzesten Tages wirft, wenn man berücksichtigt, dass zu dieser Zeit die Sonne um den Bogen ε des Meridians nicht über dem Aequator, sondern um den Bogen ε unter dem Aequator (im

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

368. Heft. Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 367. — Seite 865—880.
Mit 18 Figuren.

Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.**
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 367. — Seite 865—880. Mit 18 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.


Das vollständige Inhaltsverzeichnis der bis jetzt erschienenen Hefte kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie,** des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues,** des **konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere Anzahl** der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und **alsdann auch alle Teile der reinen und angewandten Mathematik** — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, **welche** der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die **Hand** des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der **mathematischen, technischen** und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, **zugleich aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden **kann, hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und **mit Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der **Verfasser, Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Nordpol Np hin entfernt ist, so steht sie im Sommersolstitium des Beobachters M; hat sie den Punkt K ihrer Bahn erreicht, welcher am weitesten vom Aequator nach dem Südpol Sp hin entfernt ist, so steht sie im Wintersolstitium. Die Zeit, welche die Sonne braucht, bis sie die ganze Bahn KL einmal scheinbar durchlaufen hat, nennt man ein Sonnenjahr.

Erkl. 763. Ist, siehe Figur 523, z ein Ort auf der Erdoberfläche (der Kugel um M), aq der Erdäquator, also AQ der Aequator des scheinbaren Himmelsgewölbes, und ist zz_1 der durch z gehende Parallelkreis der Erde, so ist der Bogen zq die geographische Breite des Ortes z, welche, im Winkelmass ausgedrückt, gleich dem Winkel φ und auch gleich dem Bogen ZQ des dem Ort z angehörenden Himmelsmeridians ist, welcher zwischen dem Zenith Z und dem Himmelsäquator AQ liegt.

Erkl. 764. Ist, siehe Figur 522, NS der astronomische Horizont eines Beobachters M (siehe Erkl. 747 a), Z der Zenith desselben und AQ der Himmelsäquator, so ist der im Winkelmass ausgedrückte Bogen ZQ nach der Erkl. 763 gleich der geographischen Breite φ des Beobachters M.

Dieser Bogen φ (die geographische Breite) beträgt mit der Aequatorhöhe γ, d. i. der Bogen SQ des Himmelsmeridians, der zwischen dem Horizont NS und dem Himmelsäquator AQ liegt, zusammen 90°, in Zeichen:

a) . . . $\varphi + \gamma = 90^0$

Der Bogen ZQ, d. i. die geographische Breite φ, beträgt ferner mit dem Bogen ZN_p ($= \varrho$), der zwischen dem Zenith des Beobachters M und dem Nordpol Np der Himmelsachse liegt, zusammen 90°, in Zeichen:

b) . . . $\varphi + \varrho = 90^0$

Ferner beträgt der Bogen ϱ mit dem Bogen N_pN ($= \psi$), der zwischen dem Nordpol Np und dem Horizont NS des Beobachters M liegt, d. i. die sogenannte Polhöhe ψ (d. i. die Erhebung des Nordpols über den Horizont eines Beobachters), ebenfalls zusammen 90°, in Zeichen:

c) . . . $\varrho + \psi = 90^0$

Aus den Gleichungen a) bis c) ergibt sich:

1) . . . $\varphi = \psi$

d. h. „die geographische Breite φ eines Ortes ist gleich der Polhöhe ψ dieses Ortes";

2) . . . $\gamma = 90^0 - \psi$

d. h. „für einen bestimmten Horizont ist die Aequatorhöhe γ gleich der Ergänzung der Polhöhe ψ zu 90°";

und

3) . . . $\gamma = 90^0 - \varphi$

d. h. „für den Horizont eines bestimmten Ortes auf der Erde ist die Aequatorhöhe γ gleich der Ergänzung der geographischen Breite φ des betreffenden Ortes zu 90°".

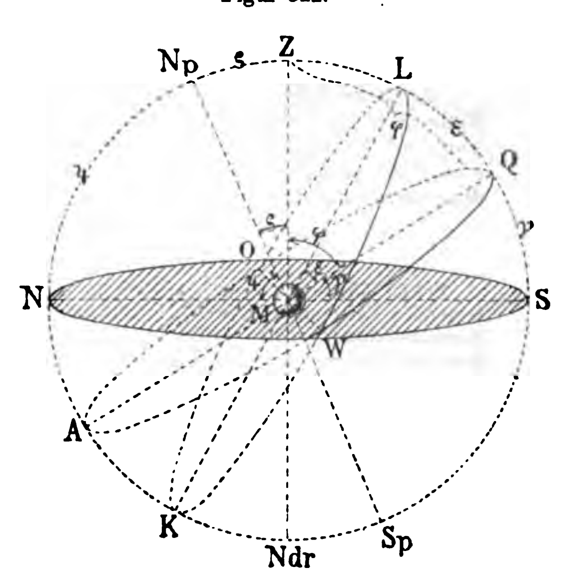
Die durch die Gleichungen 1) bis 3) ausgedrückten Beziehungen dienen dazu, die geo-

Wintersolstitium) steht, dass also die Sonnenhöhe α_1 am wahren Mittag des Kirchturmes zur Zeit des Wintersolstitiums (am kürzesten Tag) gleich der um ε verminderten Aequatorhöhe $(90^0 - \varphi)$ ist, dass also für diesen Augenblick die Sonnenhöhe:

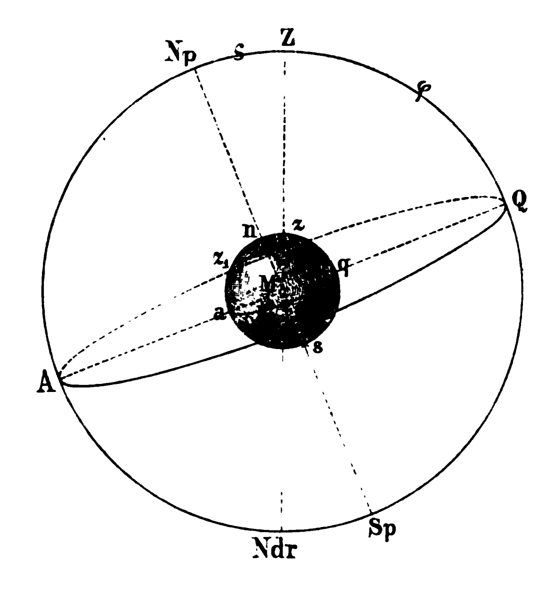
b) . . . $\alpha_1 = (90^0 - \varphi) - \varepsilon$

beträgt.

Figur 522.



Figur 523.



graphische Breite eines Ortes und die Aequatorhöhe desselben aus der Polhöhe zu bestimmen. Diese Polhöhe selbst kann mittels eines Winkelmessinstrumentes, sobald die Lage des Nordpols der Himmelsachse bekannt ist, gemessen werden. Der Nordpol der Himmelsachse fällt mit dem Stern (Polarstern alsdann genannt) zusammen, der an der scheinbaren Umdrehung des Himmelsgewölbes von Osten nach Westen (siehe Erkl. 747) keinen Teil nimmt und unbeweglich stets an derselben Stelle am Himmelsgewölbe zu verbleiben scheint.

---

* **Aufgabe 1189.** Eine $h = 15{,}8$ m hohe Säule wirft an einem Ort zur Mittagszeit der Tag- und Nachtgleichen einen Schatten von $b = 19{,}95$ m Länge; wie kann man hieraus die geographische Breite des Ortes berechnen.

Andeutung. Zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen steht die Sonne im Aequator (siehe Erkl. 765) zur Mittagszeit an dem Tag an welchem eine Tag- und Nachtgleiche stattfindet, steht die Sonne im Himmelsmeridian des Beobachters und im Himmelsäquator (siehe Erkl. 762), die Sonnenhöhe α ist also zu dieser Zeit gleich der Aequatorhöhe γ (siehe Erkl. 764) und zwischen der Aequatorhöhe γ und der gesuchten geographischen Breite φ besteht, nach der Gleichung 3) in Erkl. 764 die Relation:

$$\text{a)} \; . \; . \; . \; \gamma = 90^0 - \varphi$$

Man berechne hiernach, wie in Andeutung zur Aufgabe 1181 gesagt ist, aus h und b, die Sonnenhöhe α, d. i. für jene bestimmte Zeit die Aequatorhöhe γ. Dann bestimme man mittels vorstehender Gleichung a) aus γ ($= \alpha$) die gesuchte geographische Breite φ des Ortes.

Erkl. 765. Den zweimal im Jahr eintretenden Zeitpunkt, in welchem die Sonne im Himmelsäquator steht, nennt man Tag- und Nachtgleiche oder Aequinoktium, da an dem Tag, an welchem ein solcher Zeitpunkt eintritt (und in welchem scheinbar die Sonne sich in dem Himmelsäquator bewegt, siehe Erkl. 761 u. 762) die Tage- und Nachtbogen der Sonne (siehe Erkl. 747), also auch Tag und Nacht einander gleich sind. Der eine dieser Zeitpunkte fällt mit dem 21. März der bürgerlichen Zeitrechnung zusammen und heisst Frühlingsäquinoktium, der andere jener Zeitpunkte fällt mit dem 22. September zusammen und heisst Herbstäquinoktium.

---

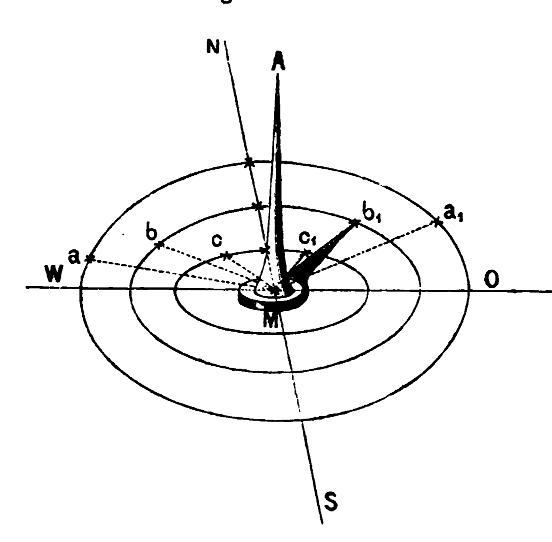
* **Aufgabe 1190.** Der Zeiger einer Sonnenuhr (in der Astronomie, griechisch Gnomon genannt), welcher $a = 120$ cm hoch ist, warf zur Zeit des Sommersolstitiums einen Schatten von $b = 22{,}5$ cm Länge, zur Zeit des Wintersolstitiums warf derselbe einen Schatten von $b_1 = 189{,}23$ cm Länge. Man soll aus diesen Angaben berechnen, wie hoch zu jener Zeit die Sonne stand und welches die Ekliptikschiefe ist.

Andeutung. Bezeichnet man den Winkel unter welchem zur Zeit des Sommersolstitiums, siehe Erkl. 761, die Sonnenstrahlen die Horizontalebene eines Beobachters bezw. eines Gnomons, dessen Zeiger vertikal steht, der also nach dem Zenith des Beobachters gerichtet ist (siehe Erkl. 766 und die Figur 524), treffen, d. i. die Sonnenhöhe zur Zeit des Sommersolstitiums, mit α, und bezeichnet man mit α_1 denselben Winkel oder die Sonnenhöhe zur Zeit des Wintersolstitiums, so bestehen nach dem in Andeutung zur Aufgabe 1181 Gesagten, zwischen der Höhe a des Gnomons, den betreffend-

Erkl. 766. In Figur 524 stellt AM einen auf horizontaler Ebene stehenden Gnomon dar. Mittels eines solchen kann man, wie in der Figur 524 angedeutet, leicht die Mittagslinie NS bestimmen, indem man die Spitze des Schattens des vertikalen Zeigers MA, wenn sie Vormittags auf einen der konzentrischen Kreise, z. B. in a, b und c zu liegen kommt, markiert, desgleichen die Spitze des Schattens, wenn sie Nachmittags auf diese Kreise,

z. B. in a_1, b_1 und c_1 zu liegen kommt, markiert, dann die Bogen aa_1, bb_1 und cc_1 halbiert, und berücksichtigt, dass diese Halbierungspunkte Punkte der Mittagslinie (der Südnordrichtung) sein müssen.

Figur 524.



Schattenlängen b und b_1 und jenen Winkeln zur Zeit der Solstitien, bezw. die Relationen:

$$\text{A)} \ldots \operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$

und

$$\text{B)} \ldots \operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{a}{b_1}$$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für a, b und b_1 gegebenen Zahlenwerte, die gesuchten Sonnenhöhen α und α_1 berechnen kann.

Berücksichtigt man nunmehr, dass zwischen der zur Zeit des Sommersolstitiums stattfindenden Sonnenhöhe α, der Aequatorhöhe γ und der Erhebung der Sonne über den Himmelsäquator zu jener Zeit, d. i. die Ekliptikschiefe ε, die Relation besteht:

$$\text{a)} \ldots \alpha = \gamma + \varepsilon$$

(siehe Figur 522, die Erkl. 764 und die Andeutung zur Aufgabe 1188)

und dass für denselben Horizont zwischen der zur Zeit des Wintersolstitiums stattfindenden Sonnenhöhe α_1, der Aequatorhöhe γ und der Erhebung des Himmelsäquators über der Sonne zu jener Zeit, d. i. die Ekliptikschiefe ε, die Relation besteht:

$$\text{b)} \ldots \alpha_1 = \gamma - \varepsilon$$

so ergibt sich hieraus, bezw. aus den Gleichungen a) und b):

$$\alpha_1 + \varepsilon = \alpha - \varepsilon$$

$$2\varepsilon = \alpha - \alpha_1$$

oder:

$$\text{C)} \ldots\ldots \varepsilon = \frac{\alpha - \alpha_1}{2}$$

Nach welcher Gleichung man die Ekliptikschiefe ε aus den nach Gleichungen A) und B) zu berechnenden Sonnenhöhen α und α_1 bestimmen kann.

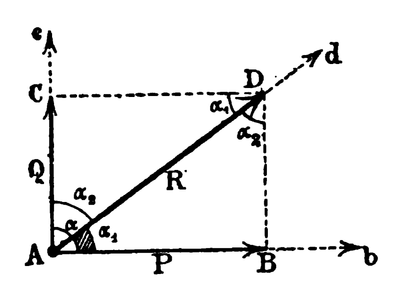
---

3) Vermischte Aufgaben aus verschiedenen Zweigen der Physik und der Technik.

***Aufgabe 1191.** Auf einen materiellen Punkt A wirkt nach einer bestimmten Richtung eine Kraft R von 12 kg. Diese Kraft R soll durch zwei rechtwinklig zu einander wirkende Seitenkräfte P und Q ersetzt werden, von welchen die Kraft P in einer Richtung wirkt, die mit der Richtung der Kraft R einen Winkel $\alpha_1 = 38^0 40' 26''$ bildet; wie gross muss jede dieser Kräfte P und Q sein?

Andeutung. Stellt, siehe Figur 525 und die Erkl. 767 und 768, die Strecke AD ihrer Richtung und ihrer Länge nach bezw. die Richtung und Grösse (siehe Erkl. 769) der gegebenen und auf den materiellen Punkt A wirkenden Kraft R graphisch dar, und ist

Figur 525.



Erkl. 767. Ein Satz aus der Mechanik heisst:

„Wird eine auf einen materiellen Punkt oder auf einen Punkt eines starren Körpers wirkende Kraft R ihrer Grösse nach (ihrer geleisteten Arbeit nach, s. Erkl. 768) und ihrer Richtung nach, bezw. durch Länge u. Lage einer bestimmten Strecke graphisch dargestellt, so kann man diese Kraft R stets durch zwei andere Kräfte P u. Q [Seitenkräfte oder Komponenten genannt, und zwar im Gegensatz zu jener Kraft, welche Resultante heisst], ersetzen, deren Grössen (geleistete Arbeiten) und Richtungen, bezw. durch die Längen und Lagen der zwei aneinanderstossenden Seiten eines solchen Parallelogramms bestimmt sind, in welchem die durch den gemeinschaftlichen Endpunkt dieser beiden Seiten gehende Diagonale gleich jener Strecke ist, durch deren Länge und Lage im allgemeinen jene Kraft R graphisch dargestellt wurde."

Dieser Satz ist eine Umkehrung des in der Mechanik unter dem Namen „das Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte" bekannten Satzes:

„Wirken, siehe Figur 526, zwei Kräfte P und Q (Seitenkräfte oder Komponenten genannt), deren Richtungen und Intensitäten (Stärken, Grössen oder geleistete Arbeiten), bezw. durch die Richtungen und Längen der Strecken AB und AC dargestellt sind, unter einem beliebigen Winkel α auf einen Punkt A eines starren Körpers, so können diese beiden Kräfte (in Bezug auf die von ihnen gemeinschaftlich geleistete Arbeit) durch eine einzige Kraft R (Resultante genannt) ersetzt werden, die ihrer Richtung und Intensität (geleisteten Arbeit) nach, bezw. durch die Lage und Länge der Diagonale AD des über den Linien AB und AC konstruierten Parallelogramms $ACDB$ bestimmt ist."

(Siehe Anmerkung 63, bezw. die Teile der Encyklopädie, welche über Mechanik, speziell die Statik und Dynamik handeln.)

Erkl. 768. In den Aufgaben 1191 bis 1196 ist die Grösse (Intensität) einer Kraft durch ein Gewicht (nämlich durch Kilogramm) ausgedrückt, wobei man ganz allgemein unter dem

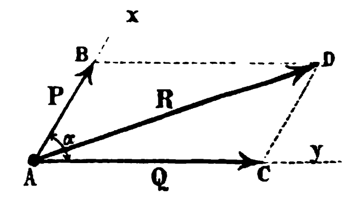
α_1 der gegebene Winkel, welchen die Richtung Ab der auf den Punkt A wirkend gedachten Kraft P mit der Richtung der Kraft R bildet, und man zieht Ac senkrecht Ab, DB parallel Ac und DC parallel Ab, so erhält man das Kräfteparallelogramm $ABDC$, dessen Seitenlängen AB und AC die zu bestimmenden Grössen der rechtwinklig zu einander wirkenden Kräfte P und Q, welche bei gleichzeitiger Wirkung auf den Punkt A die Kraft R ersetzen, graphisch darstellen.

Für die, allgemein durch P und Q bezeichneten Grössen der Kräfte P und Q erhält man aus den rechtwinkligen Dreiecken ABD und ACD bezw.:

A) . . . $P = R \cdot \cos\alpha_1$ Kilogramm
und
B) . . . $Q = R \cdot \cos\alpha_2$ „
(s. Erkl. 51 und 769)

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für R und α_1 gegebenen Zahlenwerte und in Rücksicht, dass $\alpha_2 = 90^0 - \alpha_1$ ist, die Grössen P und Q der mit denselben Buchstaben bezeichneten Kräfte P und Q berechnen kann.

Figur 526.



Gewicht den Druck versteht, welchen ein Körper auf seine Unterlage infolge der Anziehungskraft der Erde ausübt.

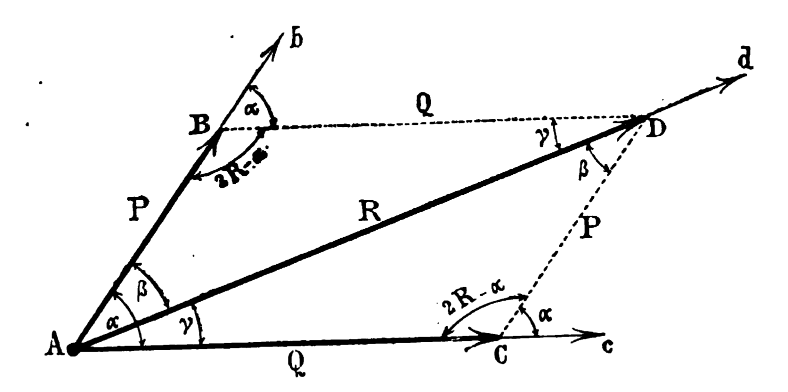
In der Mechanik wird die Grösse einer sog. Kraft gemessen durch die von ihr geleistete Arbeit. Als Einheit der Arbeit (als Arbeitseinheit) dient das Kilogramm-Meter (= kgm), worunter man die Arbeit versteht, die verbraucht (oder geleistet) wird, um in der Zeiteinheit, d. i. eine Sekunde, die Lasteinheit, d. i. ein Kilogramm, die Wegeinheit, d. i. ein Meter, hoch zu heben.

In der Technik spricht man vielfach noch von sog. Pferdekräften; eine solche Pferdekraft ist = 75 jener Arbeitseinheiten oder = 75 Kilogramm-Meter.

(Ausführliches über das Messen von Kräften findet man in dem Teil dieser Encyklopädie, welche speziell über: „die Masse in der Mechanik“ handelt.)

Erkl. 769. Ist in der Aufgabe 1191 die Grösse der Kraft R in die Arbeitseinheit, nämlich in Kilogramm-Meter ausgedrückt (siehe Erkl. 768), so drücken die nach umstehenden Gleichungen A) und B) für P und Q sich ergebenden Werte die von den Kräften P und Q zu leistenden Arbeiten aus, und zwar ausgedrückt in jene Arbeitseinheit, das Kilogramm-Meter.

Figur 527.



Aufgabe 1192. Auf einen materiellen Punkt A wirken zwei Kräfte P und Q unter einem Winkel $\alpha = 52' \, 20' \, 36''$. Die Grösse der Kraft P ist = 50 kg, die der Kraft Q = 36 kg. Diese beiden auf den Punkt A gleichzeitig wirkenden Kräfte sollen durch eine einzige Kraft ersetzt werden; in welcher Richtung muss diese Kraft auf den Punkt A wirken (in Bezug auf die Richtungen jener beiden Kräfte), und welches muss die Grösse dieser Kraft sein?

Andeutung. Stellt, siehe Figur 527, Ab die Richtung der auf den Punkt A wirkenden Kraft P, Ac die Richtung der auf den Punkt A wirkenden Kraft Q dar

welche Richtungen den gegebenen Winkel α bilden; stellen ferner AB und AC bezw. die Grössen der Kräfte P und Q graphisch dar, so stellt nach der Erkl. 767 die Länge der Diagonale AD des über BAC konstruierten Parallelogramms die Grösse x einer dritten Kraft R (der sog. Resultante) graphisch dar, durch welche Kraft jene beiden Kräfte P und Q ersetzt werden können. Die Winkel β und γ stellen die Winkel dar, welche die Richtung dieser dritten Kraft R mit den Richtungen der Kräfte P und Q bilden müssen. Da man z. B. von dem in der Figur 527 dargestellten Dreieck ACD die Seiten $AC\ (= Q)$, $CD\ (= P)$ und den von denselben eingeschlossenen Winkel $(180^0 - \alpha)$ kennt, indem AC die graphisch dargestellte und durch Q bezeichnete Grösse der Kraft Q und $CD\ (= AB)$ die durch P bezeichnete Grösse der Kraft P graphisch darstellt, indem ferner nach der Erkl. 385 $\sphericalangle DCA + \sphericalangle BAC = 180^0$, also $\sphericalangle DCA = 180^0 - \alpha$ ist, so kann man hieraus, wie in Auflösung der Aufgabe 118 gezeigt wurde, die Seite AD, d. i. die graphisch dargestellte, durch R bezeichnete Grösse der Kraft R, desgleichen die Winkel γ und β berechnen, welche die Richtung dieser Kraft R mit den Richtungen der Kräfte P u. Q bilden müssen, damit jenes auch stattfinden kann.

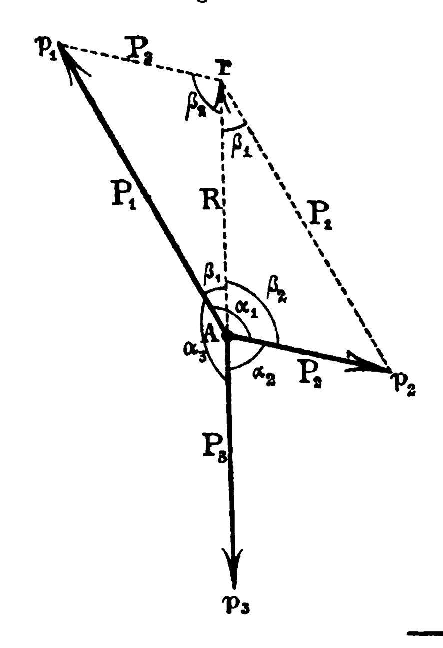
Aufgabe 1193. Drei auf einen materiellen Punkt A wirkende Kräfte P_1, P_2 und P_3, deren Grössen bezw. 2088, 927 und 1815 kg seien, wirken nach verschiedenen aber in einer und derselben Ebene liegenden Richtungen; welche Winkel müssen diese Richtungen mit einander bilden, damit der Punkt, auf welchen sie wirken, im Gleichgewicht bleibt, damit sich also die von den drei Kräften geleisteten Arbeiten aufheben.

Andeutung. Sollen, siehe Figur 528, die auf den Punkt A wirkenden Kräfte P_1, P_2 und P_3, deren Richtungen die Winkel α_1, α_2 und α_3 mit einander bilden und deren Intensitäten bezw. durch die Längen der Strecken Ap_1, Ap_2 und Ap_3 dargestellt sind, sich das Gleichgewicht halten, so muss irgend eine der drei Kräfte, z. B. die Kraft P_3 in entgegengesetzter Richtung wirken, als die Resultante R der beiden anderen Kräfte P_1 und P_2 und muss ihrer Intensität nach gleich jener Resultante R sein. Die Lage der Richtungen der drei Kräfte P_1, P_2 und P_3 zu einander muss so sein, dass jenes stattfindet. In Figur 528 muss also $\overline{Ar}$ oder $R = \overline{Ap_3}$ oder $= \ldots$ sein, ferner muss:

$$\alpha_3 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

sein.

Figur 528.



Da man z. B. von dem Dreieck Ap_2r die drei Seiten Ap_2 (= P_2), p_2r (= Ap_1 oder = P_1) und Ar (= R oder = P_3) kennt, indem diese Strecken bezw. gleich den graphisch dargestellten Intensitäten der einzelnen Kräfte sind, so kann man die Winkel β_2 und β_1 dieses Dreiecks berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 119 gezeigt wurde. Die Winkel α_2 und α_3 kann man alsdann im weiteren mittels der vorstehenden Relation:

$$\alpha_3 + \beta_1 = \alpha_2 + \beta_2$$

und mittels der aus der Figur sich ergebenden Relation:

$$\alpha_3 + \beta_1 + \beta_2 + \alpha_2 = 360^0$$

aus den berechneten Winkeln β_1 und β_2 leicht bestimmen.

Aufgabe 1194. Zwei Kräfte P_1 und P_2, welche auf einen materiellen Punkt A unter dem Winkel $\alpha_1 = 24^0\ 18'\ 22''$ gleichzeitig wirken, haben die Intensitäten von 16,45 und von 23,08 kg. Welche Richtung muss eine dritte Kraft R in Bezug auf die Richtungen jener Kräfte haben, und welches muss die Intensität derselben sein, damit sie jenen Kräften das Gleichgewicht hält, oder damit sie in derselben Zeit dasselbe leistet, als jene beiden Kräfte zusammen?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1193; man berechne, siehe Figur 528, wie in Andeutung zur Aufgabe 1192 gesagt, aus α_1, P_1 und P_2 die Resultante R dieser Kräfte und die Winkel β_1 und β_2, welche die Richtung dieser Resultante mit jeder der Richtungen der gegebenen Kräfte P_1 und P_2 bildet; beachte dann, dass die gesuchte Kraft $P_3 = R$ und dass:

$$\alpha_3 = 180^0 - \beta_1$$

und

$$\alpha_2 = 180^0 - \beta_2$$

ist.

---

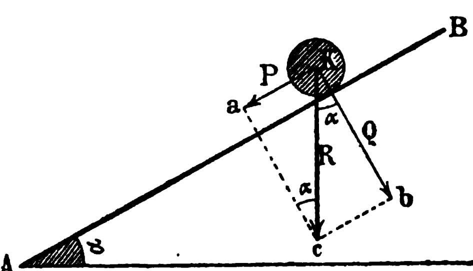
* **Aufgabe 1195.** Gegen eine horizontale Ebene ist eine andere Ebene um den Winkel $\alpha = 32^0\ 14'\ 10''$ geneigt; auf letzterer wird eine Kugel von $R = 25$ kg Gewicht aufgesetzt; mit welcher Kraft strebt diese Kugel jene schiefe Ebene hinabzurollen und welchen Druck übt sie auf diese Ebene aus?

Andeutung. In Figur 529 sei BAC der Durchschnitt einer Vertikalebene mit einer Horizontalebene AC und einer um den Winkel α gegen diese Horizontalebene geneigten anderen

(schiefen) Ebene AB. K sei die Kugel, deren Gewicht R gegeben ist.

Das Gewicht R der Kugel stellt im allgemeinen die Grösse der Schwerkraft (Anziehungskraft) der Erde dar, welche auf die Kugel wirkt und bestrebt ist, die Kugel in vertikaler oder lotrechter Richtung nach der Erde zu ziehen: die Grösse und Richtung dieser Kraft ist in der Figur 529 durch die Länge der lotrechten Strecke Kc ($= R$) graphisch dargestellt: diese Kraft kann man nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte in zwei Seitenkräfte (Komponenten) zerlegt denken, von welchen die eine ihrer Richtung nach senkrecht, die andere ihrer Richtung nach parallel zur schiefen Ebene AB wirkt.


Figur 529.



Die Richtungen und Intensitäten dieser Seitenkräfte sind in der Figur 529 durch die Richtungen und Längen der zu AB senkrechten, bezw. parallelen Strecken Kb ($= Q$) und Ka ($= P$) graphisch dargestellt.

Die Grösse der zur schiefen Ebene AB parallel wirkend gedachten Komponente P ist gleich der Grösse der Kraft, mit welcher sich die Kugel K jene Ebene hinab zu bewegen strebt (allerdings ohne Rücksicht der Reibung und des Luftwiderstandes) und die Grösse der zur schiefen Ebene AB senkrecht wirkend gedachten Komponente Q ist gleich der Grösse des Druckes, welchen die Kugel K auf die schiefe Ebene AB ausübt.

Berücksichtigt man, dass in der Figur 529

$$\overline{Kc} \perp \overline{AC}$$

$$\overline{ca} \perp AB$$

ist, dass also nach der Erkl. 293:

$$\sphericalangle Kca = \sphericalangle BAC \text{ oder } = \alpha$$

und auch:

$$\sphericalangle cKb = \alpha$$

ist, wie in der Figur 529 angedeutet, so erhält man aus den bei a, bezw. bei b rechtwinkligen Dreiecken Kac und Kbc zur Berechnung der gesuchten Grössen jener Kräfte P und Q:

$$\left.\begin{array}{l} \text{A)} \ldots P = R \cdot \sin\alpha \\ \text{und} \\ \text{B)} \ldots Q = R \cdot \cos\alpha \end{array}\right\} \text{(siehe Erkl. 50)}$$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für R und α gegebenen Zahlenwerte, und in Rücksicht, dass die Grösse der Kraft R in Kilogramm ausgedrückt ist, die Grössen der in Kilogramm ausgedrückten Kräfte P und Q berechnen kann.

---

* **Aufgabe 1196.** Ein Weg hat eine Steigung von $\alpha = 32^0\,40'$; auf demselben befindet sich ein belasteter Wagen von $R = 2000$ kg Gewicht; welche Kraft ist erforderlich, um den Wagen an dem Hinabrollen zu verhindern, wenn die Reibung unberücksichtigt bleibt?

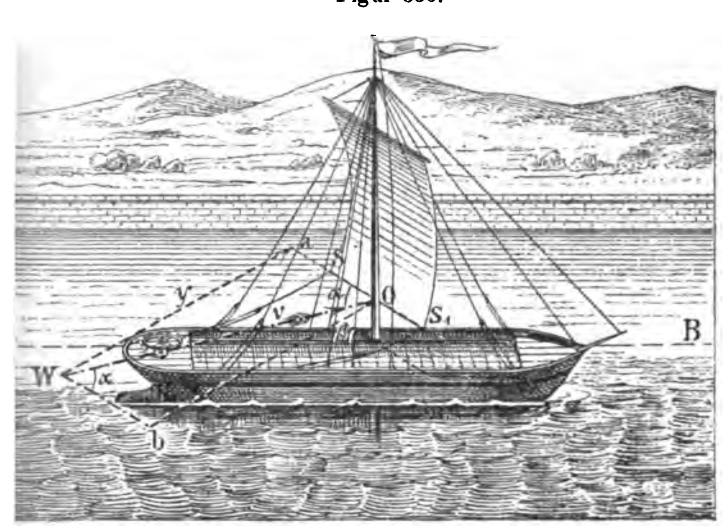
Andeutung. Man berechne, s. Fig. 529, wie in Andeutung zur vorigen Aufgabe 1195.

gesagt wurde, aus R und α die Kraft P, und beachte, dass die Grösse der Kraft, welche den Wagen (das Gewicht R) an dem Hinabrollen verhindern soll, mindestens gleich der Grösse der Kraft sein muss, mit welcher der Wagen die schiefe Ebene hinabrollen würde, dass sie aber eine Richtung haben muss, die der Richtung jener Kraft P entgegengesetzt ist.

---

* **Aufgabe 1197.** Ein segelndes Schiff wird von einem Wind fortgetrieben, dessen Geschwindigkeit $v = 4$ m pro Sekunde beträgt; wie gross wird die Geschwindigkeit des Schiffes sein, wenn das Segel mit der Richtung des Windes einen Winkel $\alpha = 70^0\ 40'$ und mit der Richtung des Schiffes einen Winkel $\beta = 61^0\ 15'$ bildet?

Figur 530.



Andeutung. In Fig. 530 sei AB die Richtung des Schiffes, SS_1 sei die Stellung des Segels, wenn es mit der Schiffsrichtung AB gemäss der Aufgabe den Winkel β bildet, und WO sei die Richtung des Windes, welcher mit der Richtung des Segels SS_1 gemäss der Aufgabe den Winkel α bildet.

Stellt die Strecke WO ihrer Richtung und Länge nach bezw. die Richtung und die durch die Geschwindigkeit v des Windes ausgedrückte Grösse der Windeskraft graphisch dar (siehe Erkl. 770), so kann man diese Kraft nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte in zwei rechtwinklig zu einander wirkende Komponenten zerlegt denken, von welchen die eine parallel, die andere senkrecht zu dem Segel SS_1 wirkt, wie in der Figur 530, bezw. durch die Strecken Wb und Wa graphisch angedeutet ist. Von diesen beiden Komponenten übt nur die zu dem Segel SS_1 senkrechte Komponente Wa $(= y)$ eine Wirkung aus, indem die andere als parallel dem Segel keine Wirkung auf dasselbe ausüben kann.

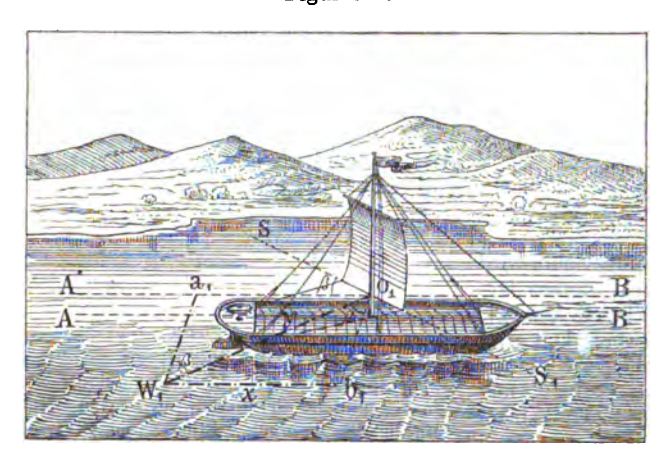
Für diese bei der Bewegung des Schiffes nur in Betracht kommende Komponente y ergibt sich aus dem bei a rechtwinkligen Dreieck WaO die Relation:

$$\text{a)} \ldots y = v \cdot \sin\alpha \quad \text{(Siehe Erkl. 50)}$$

Senkrecht auf das Segel wirkt also der Wind mit einer Kraft y, die nach vorstehender Gleichung a) in die gegebene Geschwindigkeit v des Windes ausgedrückt werden kann.

Diese senkrecht auf das Segel wirkende Kraft y sei ihrer Richtung und Grösse nach in der Figur 531 durch die Richtung und Länge

Figur 531.



der Strecke $W_1 O_1$ graphisch dargestellt. Diese Kraft y kann man nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte in zwei rechtwinklig zu einander wirkende Komponenten zerlegt denken, von welchen die eine parallel, bezw. in der Richtung des Schiffes, die andere aber senkrecht zu dieser Richtung wirkt, wie in der Figur 531, bezw. durch die Strecken $W_1 b_1$ und $W_1 a_1$ graphisch angedeutet ist. Von diesen beiden Komponenten übt die zu der Schiffsrichtung senkrechte Komponente $W_1 a_1$ keinen Einfluss auf die Fortbewegung des Schiffes in der Richtung AB aus, während die Komponente $W_1 b_1$ ($= x$ auch $= a_1 O_1$), als in der Schiffsrichtung wirkend, die Fortbewegung des Schiffes in der Richtung AB verursacht.

Da in der Figur 531:

$$O_1 b_1 \perp AB$$
$$O_1 W_1 \perp SS_1$$

mithin nach der Erkl. 293:

$$\sphericalangle b_1 O_1 W_1 = \sphericalangle A O_1 S \text{ oder } = \beta$$

ist, so ergibt sich aus dem bei b_1 rechtwinkligen Dreieck:

b) . . . $x = y \cdot \sin\beta$ (siehe Erkl. 50)

Aus den Gleichungen a) und b) erhält man somit für die in die gegebene Geschwindigkeit v des Windes ausgedrückte Grösse der Kraft x, mit welcher das Schiff unter den gegebenen Umständen fortgetrieben wird, allgemein:

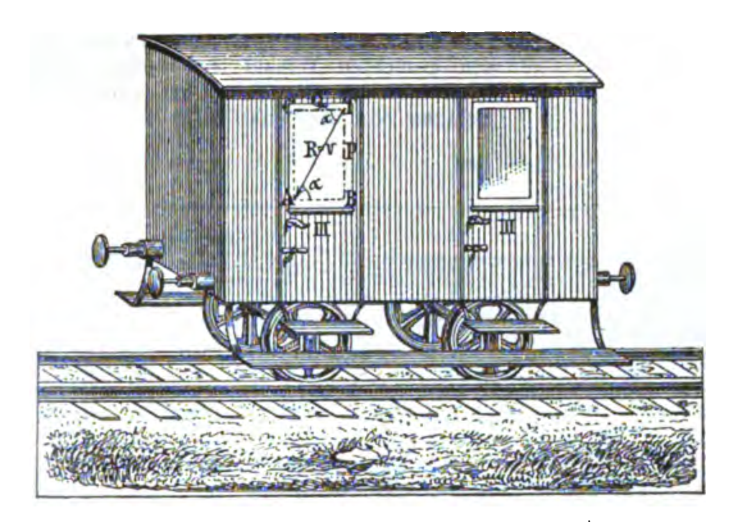
A) . . . $x = v \cdot \sin\alpha \cdot \sin\beta$

Erkl. 770. Unter der Geschwindigkeit eines in gleichförmiger Bewegung befindlichen Körpers versteht man den Weg, welchen der Körper in der Zeiteinheit (in der Sekunde) zurücklegt. Da die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen Körpers unter sonst gleichbleibenden Umständen um so grösser ist, je grösser die Kraft ist, welche dem Körper die Bewegung erteilt, so kann man die Grösse einer Kraft durch die Geschwindigkeit ausdrücken, welche sie einem Körper erteilt.

***Aufgabe 1198.** An den Fensterscheiben eines mit der Geschwindigkeit $v = 25$ m pro Sekunde auf horizontaler Bahn fahrenden Eisenbahnzuges laufen die Regentropfen unter einem Winkel $\alpha = 26^0$ gegen den unteren Rand der Scheiben hin; welche lotrechte Fallgeschwindigkeit haben die Regentropfen von dem Augenblick ab, in welchem sie auf die Fensterscheiben fallen?

Andeutung. In Figur 532 stelle die Richtung der Strecke TA die Richtung eines an einer Fensterscheibe des Eisenbahnzuges hinlaufenden Regentropfens dar; die Länge R dieser Strecke sei gleich dem Weg, welchen der Regentropfen in einer bestimmten Zeit, z. B. in der Sekunde zurücklegt, sie sei also gleich der Geschwindigkeit v, mit welcher der Regentropfen an der Scheibe fortläuft; die Grösse der Kraft, welche auf den Tropfen T in der Richtung TA wirkt (gemessen durch diese Geschwindigkeit v), wird somit durch die Länge R ($= v$) der Strecke TA graphisch dargestellt. Diese Kraft R kann man nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte

Figur 532.



wie in der Figur 532 angedeutet, in zwei zu einander rechtwinklig wirkende Seitenkräfte zerlegen, von welchen die eine TB (= P) eine lotrechte Richtung hat und von welchen die andere TC (= Q) eine wagerechte, der Bewegungsrichtung des Zuges entgegengesetzte Richtung hat. Von diesen beiden Kräften P und Q, welche, auf den Regentropfen T gleichzeitig eine Sekunde wirkend gedacht, die Wirkung der Kraft R ersetzen, ist die auf den Regentropfen T lotrecht wirkende Kraft P die gesuchte.

Aus dem bei B rechtwinkligen Dreieck TBA, in welchem α der gegebene Winkel ist, unter welchem der Regentropfen T nach dem horizontalen Rand der Fensterscheibe in Wirklichkeit hinläuft, ergibt sich die Relation:

A) . . . $P = R \cdot \sin \alpha$ (siehe Erkl. 50)

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für R (= v) und α gegebenen Zahlenwerte, die in die Geschwindigkeit v ausgedrückte Grösse der lotrecht wirkenden Kraft P, d. i. die gesuchte lotrechte Fallgeschwindigkeit des Regentropfens, berechnen kann.

---

* **Aufgabe 1199.** Die Stromschnelligkeit eines Flusses beträgt $v = 1{,}02$ m pro Sekunde; ein Kahn, welcher quer über den Fluss fährt, hat eine Geschwindigkeit von $v_1 = 0{,}6$ m pro Sekunde; wie gross ist der Winkel, um welchen der Kahn von seiner Querrichtung abgelenkt wird?

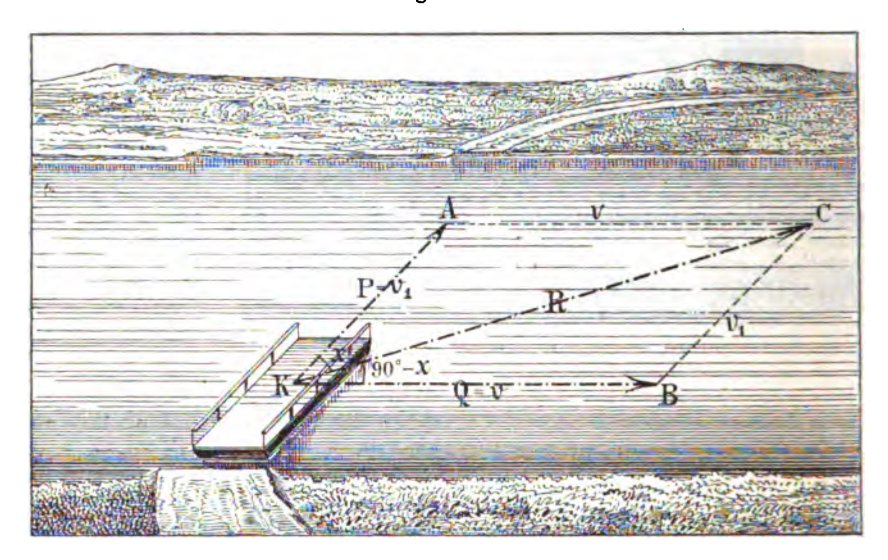
Andeutung. Auf den Kahn, bezw. auf irgend einen Punkt K desselben, s. Fig. 533, wirken zwei zu einander senkrechte Kräfte, nämlich der Strom in der Richtung KB des Flusses und die den Kahn quer über den Fluss treibende Kraft des Schiffers (Ruderers etc.) in der Richtung KA; infolge dieser gleichzeitigen Einwirkung dieser Kräfte auf den Punkt K wird der Punkt K nach dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte die Richtung KC annehmen, wenn die Strecke KB die in die Geschwindigkeit v (= 1,02 m) des Stroms ausgedrückte treibende Kraft des Stroms, KA aber die in die Geschwindigkeit v_1 (= 0,6 m) des Kahns ausgedrückte Kraft des Schiffers graphisch darstellt.

Aus dem bei A rechtwinkligen Dreieck KAC ergibt sich, in Rücksicht, dass $\overline{AC} = \overline{KB}$ oder $= v$ ist, die Relation:

$$A) \dots \operatorname{tg} x = \frac{v}{v_1}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für v und v_1 gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Winkel x berechnen kann, unter welchem der Kahn von seiner Querrichtung KA abgelenkt wird.

Figur 533.



Aufgabe 1200. Die Arme eines geraden zweiarmigen Hebels sind $a = 2,8$ und $b = 5,4$ dm lang, an dem Endpunkt des kürzeren Armes a wirkt eine Kraft $P = 50$ kg unter dem Winkel $\alpha = 116^0\ 40'$; unter welchem Winkel muss eine Kraft Q von 25 kg an dem Endpunkt des grösseren Hebelarmes b wirken, damit sich beide Kräfte P und Q das Gleichgewicht halten?

Andeutung. In Fig. 534 stelle AB einen geraden zweiarmigen Hebel dar, dessen Unterstützungspunkt in C liegt, dessen Arme AC und BC bezw. die gegebenen Längen a und b haben. An dem Endpunkt A des kleineren Armes a wirkt die Kraft P (deren Grösse im Gewicht ausgedrückt $= 50$ kg ist) unter dem Winkel α gegen den Arm a; in dem Endpunkt B des grösseren Armes BC wirkt die Kraft Q (deren Grösse im Gewicht ausgedrückt $= 25$ kg ist) unter einem solchen (zu berechnenden) Winkel x, dass sich beide Kräfte P und Q das Gleichgewicht halten.

Zur Berechnung des Winkels x verfahre man wie folgt:

Denkt man sich von dem Unterstützungspunkt C die Perpendikel m und n auf die Verlängerungen der Richtungen PA und QB der Kräfte P und Q gefällt, so halten

sich nach der Erkl. 771 die Kräfte P und Q das Gleichgewicht, wenn zwischen jenen Perpendikeln m und n und den durch P und Q bezeichneten Grössen der Kräfte P und Q die Relation besteht:

$$a) \ldots m \cdot P = n \cdot Q$$

d. h. wenn die Momente (statischen Momente) beider Kräfte einander gleich sind.

Setzt man in diese Gleichung für m und n die aus den rechtwinkligen Dreiecken ADC und BFC bezw. sich ergebenden Werte:

$$m = a \cdot \sin(2R - \alpha)$$
und
$$n = b \cdot \sin(2R - x) \quad \text{(siehe Erkl. 50)}$$

oder in Rücksicht der Erkl. 66:

$$b) \ldots m = a \cdot \sin\alpha$$
und
$$c) \ldots n = b \cdot \sin x$$

so erhält man in Bezug auf den gesuchten Winkel x die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$a \cdot \sin\alpha \cdot P = b \cdot \sin x \cdot Q$$

und hieraus ergibt sich:

$$A) \ldots \sin x = \frac{a \cdot \sin\alpha \cdot P}{b \cdot Q}$$

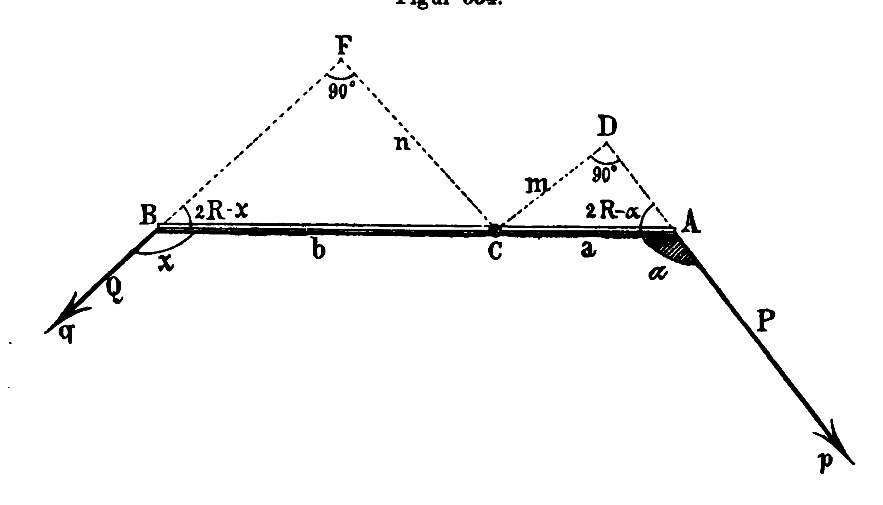
nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b, P, Q und α gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Winkel x, unter welchem die Kraft Q gegen den Hebelarm b angreifen muss, damit sich beide Kräfte P und Q unter den gegebenen Bedingungen das Gleichgewicht halten, berechnen kann.

Erkl. 771. Ein Satz aus der Mechanik heisst:

„Wirken zwei Kräfte an den Endpunkten eines (zweiarmigen) Hebels, so halten sich diese Kräfte das Gleichgewicht, wenn das Produkt aus der Grösse der einen Kraft und dem senkrechten Abstand der Richtung dieser Kraft vom Unterstützungspunkt des Hebels (das sog. Moment dieser Kraft) gleich ist dem Produkt aus der Grösse der anderen Kraft und dem senkrechten Abstand der Richtung dieser Kraft von dem Unterstützungspunkt des Hebels (also gleich ist dem Moment dieser Kraft)."

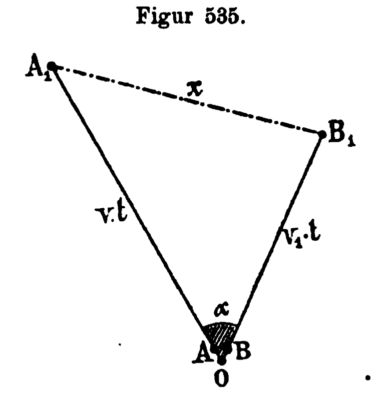
(Ausführliches hierüber findet man in den Teilen der Encyklopädie, welche über Mechanik, speziell über die Statik fester Körper handeln.)

Figur 534.



Aufgabe 1201. Zwei materielle Punkte A und B bewegen sich von einem und demselben Ort O aus nach zwei unter dem Winkel $\alpha = 38^0\,21'\,42''$ zu einander geneigten Richtungen; der Punkt A legt pro Sekunde $v = 4{,}2$ m, der Punkt B legt pro Sekunde $v_1 = 3{,}5$ m zurück; welche Entfernung werden diese beiden Punkte nach $t = 22$ Sekunden von einander haben?

Figur 535.



Andeutung. Der von dem Ort O ausgehende Punkt A, siehe Figur 535, legt gemäss der Aufgabe pro Sekunde v (= 4,2 m) zurück, nach t (= 22) Sekunden hat er somit einen Weg $\overline{OA_1}$ von $v \cdot t$ Meter zurückgelegt. Der von demselben Ort O ausgehende Punkt B bewegt sich gemäss der Aufgabe in einer unter dem Winkel α (= $38^0\,21'\,42''$) gegen $\overline{OA_1}$ geneigten Bahn, und legt auf derselben pro Sekunde v_1 (= 3,5) Meter, also in t (= 22) Sekunden einen Weg OB_1 von $v_1 \cdot t$ Meter zurück. Die gesuchte Entfernung A_1B_1 der beiden Punkte nach jenen t Sekunden sei durch x bezeichnet. Da man von dem Dreieck OA_1B_1 die zwei Seiten OA_1 (= $v \cdot t$ Meter) und OB_1 (= $v_1 \cdot t$ Meter), sowie den von denselben eingeschlossenen Winkel α kennt, so kann man zur Berechnung der gesuchten Entfernung x verfahren, wie in einer der Auflösungen 1 bis 3 der Aufgabe 118 gezeigt wurde.

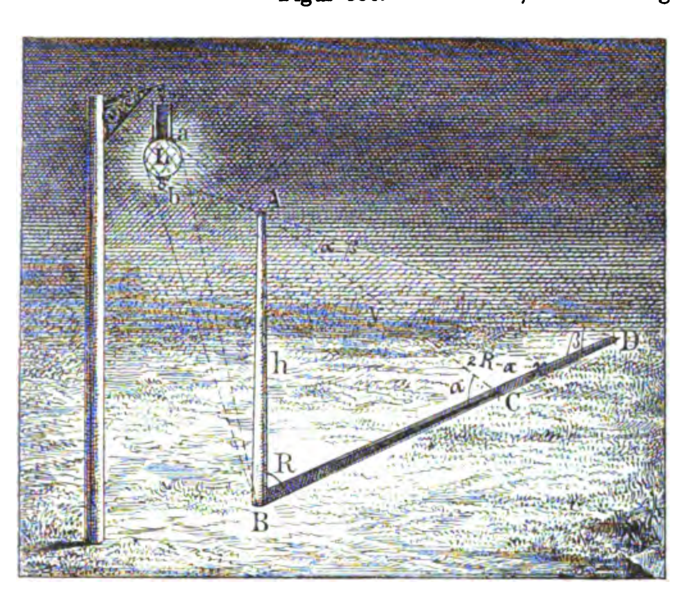
Aufgabe 1202. Man soll die Länge des Halbschattens einer $h = 8{,}4$ m hohen Stange berechnen, welche von einem Körper beleuchtet wird, der eine solche Stellung zu jener Stange hat, dass die von dem obersten Punkt desselben aus- und durch die Spitze der Stange gehenden Lichtstrahlen die durch deren Fusspunkt gelegt gedachte Horizontalebene unter einem Winkel $\alpha = 38^0\,40'$ treffen, und dass die von dem untersten Punkt jenes leuchtenden Körpers aus- und durch die Spitze der Stange gehenden Lichtstrahlen jene Horizontalebene unter dem Winkel $\beta = 21^0\,35'$ treffen.

Andeutung. Stellt in Figur 536 AB die auf horizontaler Ebene senkrecht stehende Stange und L den leuchtenden Körper dar und denkt man sich durch AB und L eine Ebene senkrecht zu jener Horizontalebene gelegt, so liegen in dieser Vertikalebene die von dem höchsten Punkt a, bezw. von dem niedersten Punkt b des leuchtenden Körpers ausgehenden Lichtstrahlen, welche durch die Spitze A gehen und bezw. jene Horizontalebene unter den gegebenen Winkeln α und β treffen, wie in der Figur 536 angedeutet ist; ebenso liegen in dieser Ebene die von a und b kommenden Lichtstrahlen, welche den Fusspunkt B der Stange treffen.

Nach dem in der Erkl. 772 Gesagten stellt der Teil BC des Schattens der Stange, welcher zwischen den Lichtstrahlen aC und bB liegt, den Kernschatten der Stange dar; ferner

stellt der Teil des Schattens der Stange, welcher zwischen den Lichtstrahlen aC und bD liegt, den **Halbschatten** der Stange dar, dessen Länge x berechnet werden soll.

Figur 536.



Diese Länge x kann man wie folgt berechnen:

Von dem bei B rechtwinkligen Dreieck ABC kennt man die Kathete h und den Winkel α; man erhält aus diesem Dreieck:

$$\sin\alpha = \frac{h}{y}$$

oder:

$$\text{a)} \;\ldots\; y = \frac{h}{\sin\alpha}$$

Da hiernach y als bekannt vorausgesetzt werden darf, so kennt man von dem schiefwinkligen Dreieck ACD die Seite y, sowie die Winkel ACD $(= 2R - \alpha)$, $ADC (= \beta)$ und $CAD (= \alpha - \beta$, siehe Erkl. 113); nach dem Sinussatz ergibt sich aus diesem Dreieck:

$$\text{b)} \;\ldots\; \frac{x}{y} = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin\beta}$$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich für x die Bestimmungsgleichung:

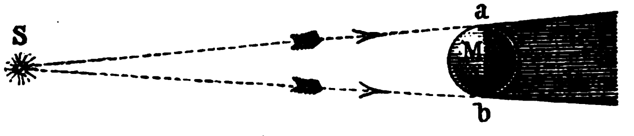
$$\text{A)} \;\ldots\; x = \frac{h \cdot \sin(\alpha - \beta)}{\sin\alpha \cdot \sin\beta}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für h, α und β gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Länge x des **Halbschattens** der Stange berechnen kann.

Erkl. 772. Die auf einen undurchsichtigen Körper fallenden Lichtstrahlen können sich hinter dem Körper **nicht** (oder nur zum Teil) **weiter verbreiten**. Den Raum hinter einem beleuchteten Körper, in welchem eine weitere Verbreitung der Lichtstrahlen nicht stattfindet, nennt man im allgemeinen den **Schatten** des Körpers.

Gehen die auf einen Körper fallenden Lichtstrahlen alle von **einem Punkt** aus (oder sind dieselben parallel, wie gewöhnlich die Sonnenstrahlen angenommen werden, welche **einzelne** Gegenstände **auf der Erdoberfläche** treffen), so wird der **Schatten des Körpers** von der Gesamtheit der Lichtstrahlen begrenzt, welche den Körper berühren.

Figur 537.

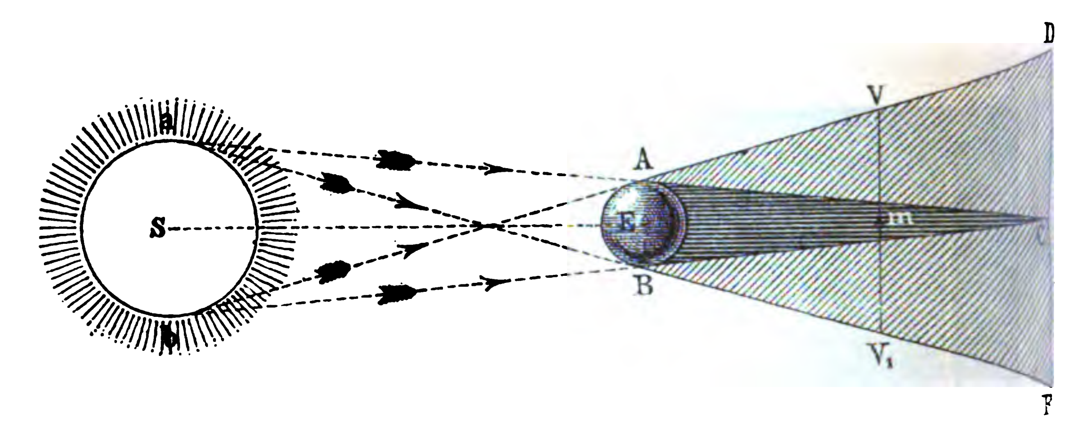


In Figur 537 z. B. ist der hinter der Kugel M liegende und dunkel schattierte Raum **der Schatten der Kugel** M, wenn angenommen wird, dass die Lichtstrahlen, welche die Kugel M beleuchten, alle von einem **Punkt** S, oder von einem Körper kommen, der **sehr klein** im Verhältnis zu dem von ihm beleuchteten Körper ist (oder auch **sehr weit** von demselben entfernt ist).

Hat der leuchtende Körper im Verhältnis zu einem von ihm beleuchteten Körper eine grössere Ausdehnung, so unterscheidet man ausser jenem Schatten noch einen zweiten Schatten, den sog. **Halbschatten** und zwar im Gegensatz zu jenem Schatten, welcher der **Kernschatten** genannt wird.



Figur 538.

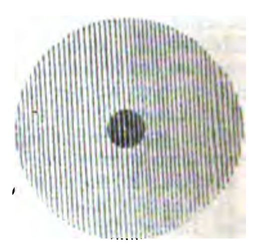


Der **Kernschatten** ist der hinter dem beleuchteten Körper liegende Raum, in welchen durchaus kein Lichtstrahl von dem leuchtenden Körper gelangen kann; der **Halbschatten** ist der hinter dem beleuchteten Körper liegende Raum, in welchen noch **ein Teil** der von dem leuchtenden Körper ausgehenden Lichtstrahlen gelangen.

Ist z. B. in der Figur 538 S eine leuchtende Kugel, E eine kleinere undurchsichtige Kugel, welche von S beleuchtet wird, so stellt ABC den **Kernschatten** dar, d. i. der Raum hinter der Kugel, in welchen durchaus kein Lichtstrahl gelangt; ferner ist der um diesen Kernschatten liegende Raum $ACBFDA$, in welchen noch **ein Teil** der von S ausgehenden Lichtstrahlen (z. B. die von a und b ausgehenden Lichtstrahlen) gelangen, der **Halbschatten** der Kugel E.

Denkt man sich, siehe Fig. 538, senkrecht zur Zentrallinie SE die Ebene VV_1 gelegt, so erhält man den Schatten, welchen die Kugel E auf diese Ebene VV_1 wirft und wie er in der Figur 539 dargestellt ist. In dieser Figur 539 stellt der schwarze Kreis den **Durchschnitt jener Ebene** VV_1 **mit dem Kernschatten** dar; das konzentrische hellere Ringstück stellt den **Durchschnitt jener Ebene** VV_1 **mit dem Halbschatten** der Kugel E dar.

Figur 539.



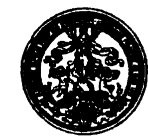
Wie sich aus den Figuren 538 und 539 ergibt, wird der **Kernschatten** von allen denjenigen von dem leuchtenden Körper ausgehenden und den anderen Körper berührenden Lichtstrahlen **begrenzt**, welche sich **zwischen** den beiden Körpern **nicht schneiden**, während der **Halbschatten** einesteils von allen denjenigen von dem leuchtenden Körper ausgehenden und den anderen Körper berührenden Lichtstrahlen begrenzt wird, **welche sich zwischen** den beiden Körpern **schneiden**, andernteils von dem Kernschatten selbst begrenzt wird.

(Ausführliches über die Wirkung des Lichtes findet man in den Teilen der Encyklopädie, welche über die **Fortpflanzung des Lichtes** deln, siehe Anmerkung 63.)

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

374. Heft. Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 368. — Seite 881—896.
Mit 15 Figuren.




Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie**; des **Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's**; der **Konstruktionslehren** als: **darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur **Forthülfe** bei Schularbeiten und zur **rationellen Verwertung** der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in **Frankfurt a. M.**

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 368. — Seite 881—896. Mit 15 Figuren.

Inhalt:

Vermischte Aufgaben aus verschiedenen Zweigen der Physik und der Technik, Fortsetzung.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches zur Seite steht**, erscheint **monatlich in 3—4 Heften** zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form**, mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in Fragen mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann **auch alle** Teile der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen **selbständigen** Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen**, etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten **Theorien** etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden** der **Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich **aber** auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der **mathematischen** Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine Zeit** erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, entsprechende **Aufgaben zu lösen, die** gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

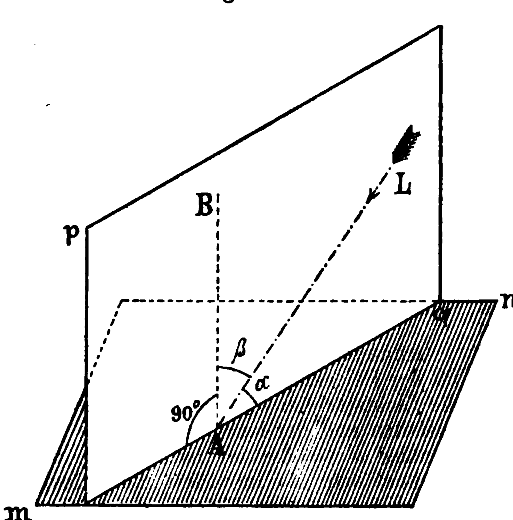
Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige** Kraft **verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt **der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M.** Fischerfeldstrasse 16, entgegen und **wird deren Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

***Aufgabe 1203.** Auf einer ebenen Fläche von bestimmter Grösse fallen die Sonnenstrahlen senkrecht auf; die Beleuchtung, welche hierdurch jene ebene Fläche erhält, habe die Stärke (Intensität) 1; welches muss die in diese Einheit ausgedrückte Beleuchtungsstärke derselben ebenen Fläche sein, wenn die Sonnenstrahlen diese Ebene unter dem Winkel $\alpha = 32^0\ 48'\ 22''$ treffen?

Figur 540.



Erkl. 773. Denkt man sich, siehe Figur 540, in einem Punkt A, in welchem ein Lichtstrahl LA eine ebene Fläche mn trifft, die Linie AB senkrecht zu dieser ebenen Fläche errichtet, so heisst diese Linie AB das Einfallslot; die durch das Einfallslot und den Lichtstrahl bestimmte Ebene pq heisst „Einfallsebene"; der in dieser Ebene liegende Winkel β, gebildet von dem Lichtstrahl und dem Einfallslot, heisst „Einfallswinkel".

Erkl. 774. Ein Gesetz aus der Optik heisst: „Die Beleuchtungsintensitäten einer und derselben ebenen Fläche sind proportional den Kosinus der Einfallswinkel der Lichtstrahlen."

Fallen die Sonnenstrahlen einmal unter dem Winkel α auf eine ebene Fläche, ein andermal unter dem Winkel α_1 auf dieselbe Fläche, und bezeichnet man die Stärke der jeweiligen Beleuchtungen bezw. mit i und i_1, so besteht nach diesem Satz die Relation:

$$i : i_1 = \cos\alpha : \cos\alpha_1$$

(Siehe Anmerkung 63, bezw. die Teile der Encyklopädie, welche über Optik handeln.)

Auflösung. Fallen auf eine Ebene die Sonnenstrahlen senkrecht, so fällt das Einfallslot eines jeden dieser Strahlen mit dem betreffenden Lichtstrahl zusammen (siehe Erkl. 773). Der Einfallswinkel dieser Strahlen ist somit $= 0^0$ (siehe Erkl. 773). Fallen auf eine Ebene die Sonnenstrahlen unter dem Winkel α auf, wie der Strahl LA in Figur 540, so ist der Einfallswinkel $\beta = 90^0 - \alpha$.

Ist nun die Intensität der Beleuchtung einer ebenen Fläche, wenn die Sonnenstrahlen senkrecht auf dieselbe fallen, wenn der Einfallswinkel also $= 0^0$ ist, $= 1$ und wird die Intensität der Beleuchtung derselben ebenen Fläche, wenn die Sonnenstrahlen unter dem Winkel α auf dieselbe fallen, wenn also nach vorstehendem der Einfallswinkel $= 90^0 - \alpha$ ist, mit x bezeichnet, so besteht nach dem in der Erkl. 774 angeführten optischen Gesetz die Relation:

a) . . . $1 : x = \cos 0^0 : \cos(90^0 - \alpha)$

Berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 99:

$$\cos 0^0 = 1$$

und dass nach der Erkl. 19:

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

ist, so geht in Rücksicht dessen Gleichung a) über in:

$$1 : x = 1 : \sin\alpha$$

und hieraus erhält man allgemein:

A) . . . $x = \sin\alpha$ jener Intensitätseinheiten

oder in Rücksicht des für α gegebenen Wertes:

$x = \sin 32^0\ 40'$ jener Intensitätseinheiten

Nimmt man den Wert für $\sin 32^0\ 40'$ aus einer trigonometrischen Tafel, so erhält man:

1) . . . $x = 0{,}53975$ jener Intensitätseinheiten

Fallen die Sonnenstrahlen unter dem Winkel $32^0\ 40'$ auf die gedachte ebene Fläche auf, so ist also die Beleuchtung derselben nur 0,53975 mal so stark, als wenn sie senkrecht auf jene Ebene fallen.

***Aufgabe 1204.** Die Stärke der Beleuchtung einer ebenen Fläche, auf welche die Sonnenstrahlen **senkrecht** fallen, sei $= i$; unter welchem Winkel müssen die Sonnenstrahlen auf dieselbe ebene Fläche fallen, wenn sie:

a) . . . nur $\frac{1}{2}$

b) . . . nur $\frac{1}{3}$

und

c) . . . allgemein nur $\frac{1}{n}$ mal

so stark beleuchtet sein soll?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgab ist analog der Auflösung der vorigen Aufgab 1203; man benutze das in der Erkl. 774 an geführte optische Gesetz.

***Aufgabe 1205.** Auf eine ebene Fläche fallen **parallele** Lichtstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 45^0$; die Entfernung der Lichtquelle, von welcher die als unter sich **parallel angenommenen** Lichtstrahlen kommen, sei $a = 500$ m. Wenn nun die Lichtquelle von der Ebene die Entfernung $b = 1000$ m hat, unter welchem Winkel müssten alsdann die unter sich **parallel** angenommenen Lichtstrahlen die Ebene treffen, damit die Beleuchtungsstärke dieselbe wie vorher sei?

Erkl. 775. Ein Gesetz aus der Optik heisst:

„Die Beleuchtungsintensitäten einer beleuchteten Fläche nehmen (unter sonst gleichbleibenden Umständen) in dem Verhältnis ab, in welchem das Quadrat der Entfernung der Lichtquelle wächst."

Befindet sich einmal in der Entfernung d, ein andermal in der Entfernung d_1 von einer Fläche ein leuchtender Körper und bezeichnet man die Intensität (Stärke) der in beiden Fällen hervorgerufenen Beleuchtung der Fläche bezw. mit i und i_1, so besteht, unter sonst ganz gleichbleibenden Umständen und unter der Voraussetzung, dass d_1 **grösser** als d ist, nach vorstehendem Gesetz zwischen d, d_1, i und i_1 die Beziehung:

$$i : i_1 = d_1^2 : d^2$$

(Siehe Anmerkung 63, bezw. die Teile der Encyklopädie, welche über Optik handeln.)

Andeutung. Bezeichnet man die Intensität der Beleuchtung der ebenen Fläche, wenn die Lichtstrahlen unter dem Winkel $\alpha = 45^0$ auffallen und der leuchtende Körper die Entfernung a ($= 500$ m) hat, mit i, und bezeichnet man die Intensität der Beleuchtung **derselben** ebenen Fläche, wenn die Lichtstrahlen unter dem Winkel x auffallen und der leuchtende Körper die grössere Entfernung b ($= 1000$ m) hat, mit i_1, so besteht in Rücksicht, dass die **Einfallswinkel** der Lichtstrahlen (wie in Auflösung der Aufgabe 1203 gezeigt, siehe Erkl. 773) bezw. $= 90^0 - \alpha$ und $= 90^0 - x$ sind, nach dem in der Erkl. 774 angeführten optischen Gesetz die Relation:

a) . . . $i : i_1 = \cos(90^0 - \alpha) : \cos(90^0 - x)$

Ferner besteht, in Rücksicht, dass gemäss der Aufgabe die Entfernung b **grösser** als die Entfernung a ist, nach dem in der Erkl. 775 angeführten optischen Gesetz die weitere Relation:

b) . . . $i : i_1 = b^2 : a^2$

Da nun der Winkel x so gross sein soll, dass die Beleuchtungsintensitäten i und i_1 einander gleich sind, so besteht noch die weitere Relation:

c) . . . $i = i_1$

In Rücksicht der Gleichung c) sind die Quotienten $i : i_1$ in den Gleichungen a) und b) einander gleich und daher ergibt sich aus den Gleichungen a) und b), wenn man noch nach der Erkl. 19:

$$\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$$

und

$$\cos(90^0 - x) = \sin x$$

setzt; für x die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$\sin\alpha : \sin x = b^2 : a^2$$

und hieraus erhält man:

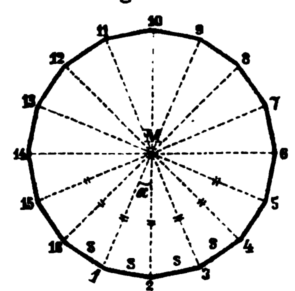
$$\text{A)} \ldots \sin x = \frac{a^2 \cdot \sin\alpha}{b^2}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b und α gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Winkel x berechnen kann.

---

* **Aufgabe 1206.** Welchen Inhalt hat die Bodenfläche des regulär gebauten 16-eckigen National-Cirkus (Cirque national) in den elysäischen Feldern (Champs élysées) zu Paris, von welchem jede Seite eine Länge von 6,12 m hat?

Figur 541.



Andeutung. Die Bodenfläche des 16-eckigen National-Cirkus bildet ein reguläres 16-Eck, siehe Figur 541, dessen Seite $s_{16} = 6{,}12$ m misst. Nach der in Aufgabe 978 vorgeführten Relation 8) besteht zur Berechnung des gesuchten Inhalts F_{16} dieses regulären 16-Ecks die Relation:

$$\text{A)} \ldots F_{16} = \frac{16 \cdot s_{16}^2}{4} \cdot \operatorname{ctg}\frac{180^0}{16}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für s_{16} gegebenen Zahlenwertes, den gesuchten Inhalt der Bodenfläche jenes regulär gebauten Cirkus berechnen kann, analog wie in den Andeutungen zu den Aufgaben 981 und 982 gesagt wurde.

---

* **Aufgabe 1207.** Der Fussboden eines Saales hat die Gestalt eines regulären Polygons; der Rand desselben ist mit Trapezen ausgetäfelt, deren jedes an der längeren Parallelseite $a = 4{,}41$ m, an der kürzeren Seite $b = 3{,}675$ m misst, während jede der nicht parallelen Seiten $c = 2$ m lang ist. Wie viel Seiten hat der Saal und wie weit sind die Ecken des Saales vom Mittelpunkt desselben entfernt?

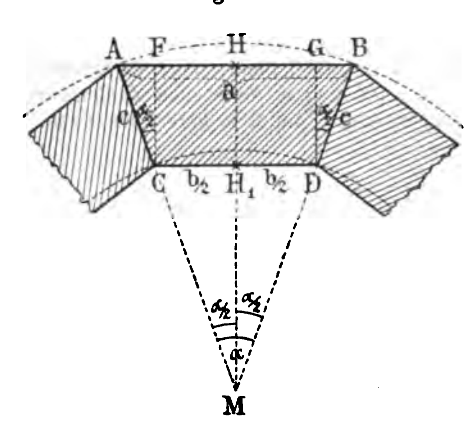
Andeutung. In Figur 542 sei $ABDC$ eines der Trapeze, aus welchen der Rand, der sog. Fries, des Fussbodens des regulär gebauten Saales gebildet ist. Die äusseren Seiten der Trapeze bilden ein reguläres Polygon, dessen Seitenzahl dieselbe ist als die desjenigen regulären Polygons, welches von den inneren Seiten der Trapeze gebildet wird.

Bezeichnet man den zu einer jenen parallelen Seiten AB oder CD gehörigen Centriewinkel mit α, so ergibt sich jene Seitenzahl x aus der Relation:

$$\text{a)} \ldots x = \frac{360^0}{\alpha^0}$$

Zur Bestimmung des Winkels α, welcher noch unbekannt ist, ziehe man in Figur 542 MH senkrecht AB, CF und DG parallel MH.

Figur 542.



Wie leicht aus der Figur ersichtlich, ist:

$$\sphericalangle ACF = \sphericalangle AMH \text{ oder } = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\overline{AF} = \frac{a-b}{2}$$

Aus dem bei F rechtwinkligen AFC (oder aus dem diesem kongruenten Dreieck BGD) erhält man somit und in Rücksicht, dass:

$$\overline{AC} = \overline{BD} \text{ oder } = c$$

ist, die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a-b}{2} : c$$

oder:

$$\text{b)} \; \ldots \; \sin\frac{\alpha}{2} = \frac{a-b}{2c}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b und c gegebenen Zahlenwerte, den Centriewinkel α berechnen kann.

Verwandelt man diesen hiernach zu berechnenden Winkel in Grad und dividiert damit nach Gleichung a) in 360 (oder verwandelt man den Winkel α in Minuten, bezw. in Sekunden, und dividiert damit in 360.60, bezw. in 360.60.60), so erhält man die gesuchte Seitenzahl x des regulären Polygons, welches den Fussboden des Saales bildet (damit zugleich auch die Anzahl der Trapeze, aus welchen der Fries dieses Fussbodens hergestellt ist).

Ist einmal der Winkel α berechnet, so kann man leicht aus den rechtwinkligen Dreiecken MHB und MH_1D, in welchen bezw. $BH = \frac{a}{2}$ und $DH_1 = \frac{b}{2}$ ist, die Strecken MB und MD, d. s. die gesuchten Entfernungen der Ecken der Trapeze (des Saales) von dem Mittelpunkt des Saales, berechnen.

***Aufgabe 1208.** Der Querschnitt des Dachstuhls eines sog. Satteldaches bildet ein gleichschenkliges Dreieck; die Grundfläche des Daches hat eine Breite von $a = 7{,}5$ m und der Dachwinkel soll $\alpha = 42^0$ werden; welche Länge müssen die Dachsparren von der Traufe bis zum Forst haben?

Andeutung. Stellt in Figur 543 ACB einen Querschnitt des Satteldaches dar, so ist, siehe die Erkl. 776 bis 781, die Grundlinie AB des gleichschenkligen Dreiecks ABC, die gegebene Breite a der Grundfläche des Daches, der Winkel CAB (oder CBA) ist der gegebene Dachwinkel α. Denkt man sich die Dachhöhe CD gefällt, so erhält man die rechtwinkligen Dreiecke ADC und BDC, aus jedem derselben erhält man zur Berechnung der gesuchten Länge AC ($= s$, oder $BC = s$) eines der Dachsparren

von der Traufe A (B) bis zum First C die Relation:

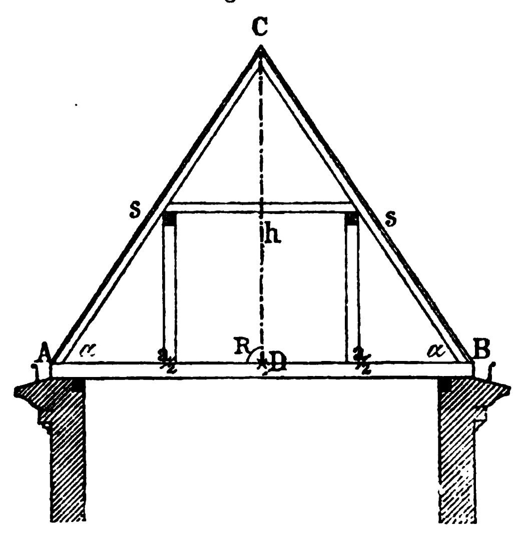
$$\cos\alpha = \frac{a}{2} : s$$

oder:

$$\text{A)} \ldots .\ s = \frac{a}{2 \cdot \cos\alpha}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte, die Sparrenlänge s berechnen kann.

Figur 543.



Erkl. 776. Jedes Dach besteht aus zwei Hauptbestandteilen, nämlich aus der äusseren Decke, Dacheindeckung genannt, und dem Gerüste, welches als Stütze der Dacheindeckung dient und Dachstuhl genannt wird.

(Ausführliches über Dachkonstruktionen findet man in den Teilen dieser Encyklopädie, welche über Hochbau handeln, siehe Anmerkung 63.)

Erkl. 777. Unter einem Satteldach (oder einem zweihängigen Dach) versteht man ein solches Dach, welches aus zwei in der sogenannten Forstlinie (auch Forst oder First genannt, siehe Erkl. 778) zusammenstossenden Dachflächen besteht, wie das durch die Figur 543 im Querschnitt dargestellte Dach.

Erkl. 778. Unter der Dachtraufe oder Traufe versteht man die untere Linie einer Dachfläche; unter Forst oder First versteht man die oberste Linie, in welcher die Längsseiten der Dachflächen zusammenstossen.

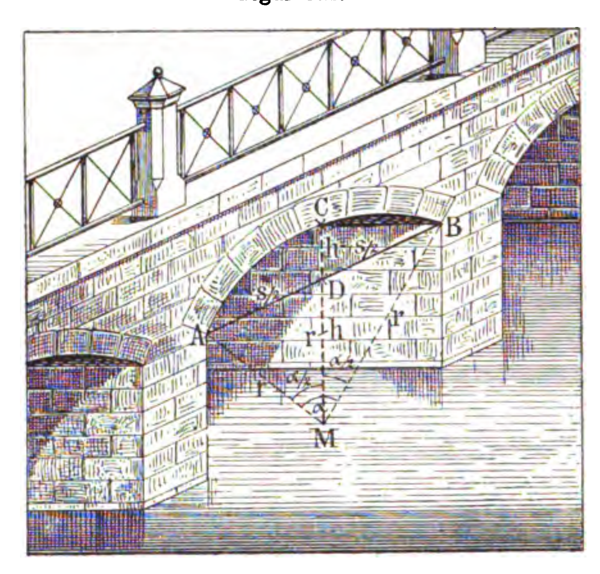
Erkl. 779. Unter Dachhöhe versteht man die Senkrechte von dem Forst auf die Grundfläche des Daches, welche durch das Gebälk gebildet wird.

Erkl. 780. Unter Abfall, Rösche oder Dachwinkel versteht man den Winkel, welchen die Dachfläche mit der Grundfläche des Daches, dem Gebälk bildet.

Erkl. 781. Die Sparren eines Daches, allgemein Dachsparren genannt, bilden die Unterlage, auf welcher die Holzverschalung (Lattung) befestigt wird, die zur Befestigung der Dachziegel (Schiefer oder sonstigen Deckmaterials) dient; je zwei der Sparren liegen in einer (vertikalen) Ebene, sitzen mit dem unteren Ende auf einem und demselben horizontalliegenden Balken (Bundbalken genannt) und stossen mit ihren oberen Enden aneinander (wobei sie auf verschiedenartige Weise miteinander befestigt werden).

***Aufgabe 1209.** Die Oeffnungen einer Brücke mit flachen Bogen haben je eine Spannung von $s = 12{,}5$ m; welche Länge hat jeder der Brückenbogen, wenn die Höhe eines solchen Bogens $h = 3{,}2$ m misst?

Figur 544.



Erkl. 782. Unter einem flachen Gewölbe (Brückenbogen) versteht man einen solchen, bei welchem der Querschnitt der inneren Wölbung (auch untere Gewölbefläche genannt) ein flacher Kreisbogen (auch einfacher Stichbogen genannt), nämlich ein solcher Kreisbogen ist, der kleiner als ein Halbkreis ist. In Figur 544 ist ACB der Querschnitt der inneren Wölbung eines Bogens der durch diese Figur dargestellten Brücke. Dieser Querschnitt ist ein (flacher) Bogen des Kreises um M.

(Ausführliches über Brücken und Gewölbe überhaupt, findet man in den Teilen der Encyklopädie, welche über Brückenbau, Gewölbebau etc. handeln, siehe auch Anmerkung 63.)

Erkl. 783. Unter der Spannung, Weite oder der Sprengung eines Gewölbes (z. B eines Brückenbogens), versteht man die Entfernung der sog. Kämpfer, d. s. die Teile (wie A und B in Figur 544) der Pfeiler oder der Widerlager, an welchen das Gewölbe (der Bogen) beginnt.

Erkl. 784. Den höchsten Punkt (wie z. B. den Punkt C in Figur 544) eines Gewölbes nennt man den Scheitel oder den Schluss des Gewölbes. Die Erhebung (wie CD in Figur 544) des Scheitels eines Gewölbes über die Kämpfer heisst die Höhe, auch Pfeilhöhe des Gewölbes.

Andeutung. Stellt in Figur 544 ACB den Querschnitt eines der Brückenbogen dar, so ist, siehe die Erkl. 782 bis 784, AB die gegebene Spannung s, der Bogen ACB ist ein Bogen des Kreises um M und CD ist die gegebene Höhe h. Zur Berechnung der gesuchten Länge x des Bogens ACB verfahre man wie folgt:

Man berechne zunächst mittels der aus dem bei D rechtwinkligen Dreieck ADM sich ergebenden Relation:

a) . . . $r^2 = \left(\frac{s}{2}\right)^2 + (r-h)^2$

den Radius r des dem Bogen ACB zugehörigen Kreises um M. Ist hiernach r berechnet, so berechne man mittels der aus jenem Dreieck sich ergebenden Relation:

b) . . . $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{s}{2} : r$

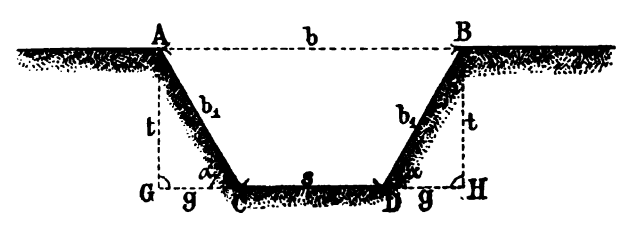
den Centriewinkel α; dann bestimme man mittels der Relation:

c) . . . $\text{bog}\, ACB : 2r\pi = \alpha^0 : 360$

die Länge des Bogens ACB, wie in der Auflösung zur Aufgabe 801 gezeigt wurde.

***Aufgabe 1210.** Die obere Breite eines Grabens misst $b = 7{,}8$ m, die untere Breite s (Sohlbreite) $= 3{,}2$ m und die Breite der Böschung (die Böschungslinie misst $b_1 =$ 2,8 m; wie gross ist der Neigungswinkel der Böschung (der Böschungswinkel), und welches ist die Tiefe des Grabens?


Figur 545.



Andeutung. Denkt man sich senkrecht zur Längsrichtung des Grabens eine vertikale Ebene gelegt, so erhält man das durch die Figur 545 dargestellte Querprofil des Grabens.

In dieser Durchschnittsfigur bedeutet:

$\overline{AB} = b$ die obere Breite,

$\overline{CD} = s$ die untere Breite oder die Sohlbreite,

$\overline{AC} = \overline{BD} = b_1$ die Breite der Böschung, auch Böschungslinie genannt,

$\overline{DH} = \overline{CG} = g$ die rechtwinklige Projektion der Böschungslinie auf die durch die Sohle gehende horizontale Ebene, auch Anlage oder Böschungsgrundlinie genannt,

$\sphericalangle BDH = \sphericalangle ACG = \alpha$ den Neigungswinkel der Böschung, auch Böschungswinkel genannt,

$\overline{BH} = \overline{AG} = t$ die Tiefe des Grabens; die (kongruenten) rechtwinkligen Dreiecke BHD und AGC heissen die Böschungsdreiecke.

Aus der Figur ergibt sich die Relation:

$$b = g + s + g$$

und hieraus erhält man:

$$\text{a)} \ldots g = \frac{b - s}{2}$$

Aus jedem der (rechtwinkligen) Böschungsdreiecke ergeben sich die Relationen:

$$\text{c)} \ldots \cos\alpha = \frac{g}{b_1}$$

und

$$\text{d)} \ldots t = \sqrt{b_1^2 - g^2}$$

Setzt man in den Gleichungen c) und d) den Wert für g aus Gleichung a) ein, so erhält man bezw.:

$$\text{A)} \ldots \cos\alpha = \frac{b - s}{2 \cdot b_1}$$

und

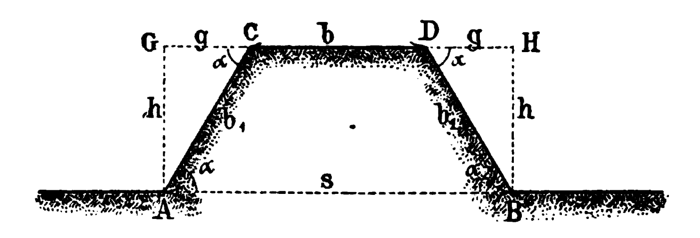
$$\text{B)} \ldots t = \sqrt{b_1^2 - \left(\frac{b - s}{2}\right)^2}$$

nach welchen Gleichungen man, in Rücksicht der für s, b und b_1 gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Böschungswinkel α und die gesuchte Tiefe t des Grabens berechnen kann.

* **Aufgabe 1211.** Die Breite eines Eisenbahndammes misst $b = 10{,}2$ m, seine Böschung hat einen Neigungswinkel $\alpha = 35^0\ 28'$ und eine Breite von $b_1 = 15{,}08$ m; wie gross ist die Breite der Basis s, und welches ist die Höhe h des Eisenbahndammes?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der Aufgabe 1210, vergleiche die Figuren 545 und 546.

Figur 546.



* **Aufgabe 1212.** Die eine Böschung eines Eisenbahndammes hat einen Neigungswinkel $\alpha = 28^0\ 56'\ 40''$ und eine Breite $b_1 = 9{,}38$ m; die andere Böschung hat einen Neigungswinkel $\alpha_1 = 52^0\ 10'\ 8''$; welches ist die Breite b_2 dieser Böschung?

Andeutung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck AGC, siehe Figur 547, ergibt sich die Relation:

$$\text{a)} \ldots h = b_1 \cdot \sin\alpha \quad \text{(siehe Erkl. 50)}$$

Ferner ergibt sich aus dem rechtwinkligen Dreieck BHD die Relation:

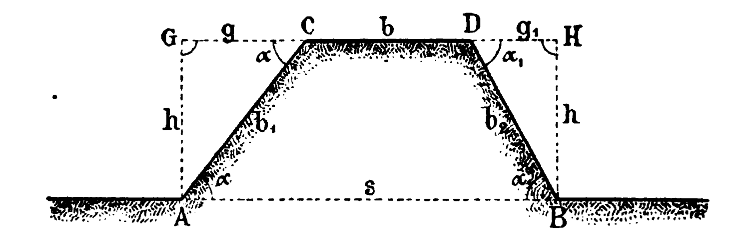
$$\text{b)} \ldots b_2 = \frac{h}{\sin\alpha_1} \quad \text{(siehe Erkl. 42)}$$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

$$\text{A)} \ldots b_2 = \frac{b_1 \cdot \sin\alpha}{\sin\alpha_1}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für b_1, α und α_1 gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Breite b_2 der anderen Böschung des Eisenbahndammes berechnen kann.

Figur 547.



***Aufgabe 1213.** Die Böschungen eines Grabens, dessen obere Breite $b = 1{,}82$ m misst, haben eine Neigung $\alpha = 98^0\ 56'\ 58''$ gegen den Horizont. Dem Auge eines Beobachters, welches sich in einer Entfernung von $c = 1{,}2$ m vom oberen Rand des Grabens und in einer vertikalen Erhebung von $d = 0{,}75$ m befindet, verschwindet gerade der Boden des Grabens; wie kann man aus diesen Angaben die Tiefe des Grabens berechnen?

Figur 548.

Andeutung. In Figur 548 sei $ACDB$ das Querprofil des Grabens (d. i. die Durchschnittsfigur einer senkrecht zur Längsrichtung des Grabens durch denselben gelegt gedachten Vertikalebene). In der horizontalen Entfernung $BF = c$ vom Rand des Grabens in der Höhe FJ ($= d$) befindet sich das Auge eines Beobachters, welchem der Boden des Grabens gerade verschwindet, dessen Sehstrahlen also gerade die äusserste Grenze des Bodens treffen, wie mittels der durch B gehenden Geraden JC in der Fig. 548 angedeutet ist. Fällt man BH und AG senkrecht zur Strecke CD, bezw. zu deren Verlängerungen, so erhält man die kongruenten rechtwinkligen Dreiecke AGC und BHD (Böschungsdreiecke genannt), in welchen α den Neigungswinkel (den sog. Böschungswinkel) der Böschungslinien AC und BD gegen den Horizont darstellt, und in welchen BH ($= AG$) die gesuchte Tiefe t des Grabens ist. Bezeichnet man die Breite (Sohlbreite) CD des Bodens des Grabens (der Sohle) mit s, die horizontale Projektion (auch Anlage der Böschungsgrundlinie genannt) DH oder CG mit g, so besteht, da $\overline{GH} = \overline{AB}$ oder $= b$ ist, die Relation:

$$s + 2g = b$$

oder:

a) . . . $s = b - 2g$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck BHD ergibt sich die Relation:

b) . . . $g = t \cdot \text{ctg}\,\alpha$ (siehe Erkl. 43)

und aus der Aehnlichkeit der Dreiecke JFB und BHC erhält man die weitere Relation:

c) . . . $d : c = t : (s + g)$

Aus den Gleichungen a) und b) ergibt sich zunächst:

d) . . . $s = b - 2t \cdot \text{ctg}\,\alpha$

Setzt man die Werte für s und g aus den Gleichungen a) und d) in Gleichung c), so erhält man in Bezug auf x die Bestimmungsgleichung:

f) . . . $d : c = t : (b - 2t \cdot \text{ctg}\,\alpha + t \cdot \text{ctg}\,\alpha)$

Erkl. 785. Aus der nebenstehenden Gleichung f) erhält man t wie folgt:

$$d : c = t : (b - t \cdot \text{ctg}\,\alpha)$$
$$c \cdot t = d \cdot b - d \cdot t \cdot \text{ctg}\,\alpha$$
$$c \cdot t + d \cdot t \cdot \text{ctg}\,\alpha = d \cdot b$$
$$t\,(c + d \cdot \text{ctg}\,\alpha) = d \cdot b$$

mithin:

$$t = \frac{d \cdot b}{c + d \cdot \text{ctg}\,\alpha}$$

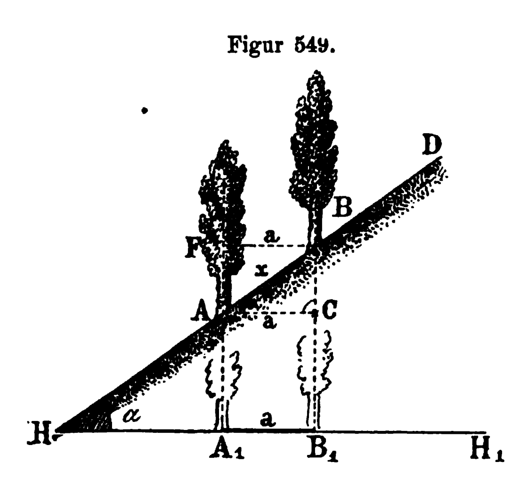
und aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 785:

$$\text{A)} \ldots t = \frac{d \cdot b}{c + d \cdot \operatorname{ctg} \alpha}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für b, c, d und α gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Tiefe t des Grabens berechnen kann.

Aufgabe 1214. Bei der Ausholzung eines auf **horizontaler** Ebene befindlichen Forstes soll darauf gesehen werden, dass die Stämme der stehen bleibenden Bäume eine gegenseitige Entfernung von $a = 1,5$ m haben; welche Entfernung müssten alsdann die Baumstämme haben, wenn sich der Forst auf einem Bergabhange befindet, der eine Neigung $\alpha = 35^0\ 40'$ gegen den Horizont hat, und wenn bei der Ausholzung desselben jener Verordnung entsprochen werden soll?

Figur 549.



Andeutung. Sind, siehe Figur 549, A_1 und B_1 zwei Bäume eines Forstes, welcher sich auf der horizontalen Ebene HH_1 befindet, so soll deren **Entfernung** der Verordnung gemäss a' (= 1,5 m) betragen. Steht der Forst auf einem Bergabhang HD, der um den Winkel α gegen jene Horizontalebene geneigt ist, und soll bei der Ausholzung jener Verordnung entsprochen werden, so muss die **horizontale** Entfernung der Bäume B und A gleich jener **horizontalen** Entfernung A_1B_1, also $= a$ sein. Zur Bestimmung der Entfernung x der auf dem Abhang HD befindlichen Bäume A und B ergibt sich aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck ACB die Relation:

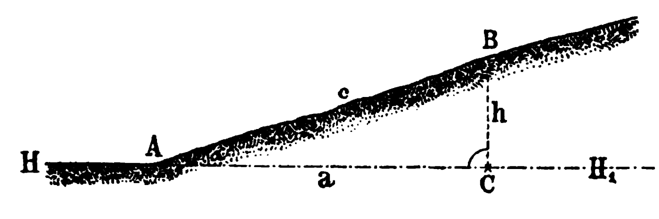
$$\text{A)} \ldots x = \frac{a}{\cos \alpha} \quad \text{(siehe Erkl. 47)}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a und α gegebenen Zahlenwerte die gesuchte Entfernung x, welche nach der Ausholzung irgend zwei Bäume des den Abhang bedeckenden Forstes haben müssen berechnen kann.

---

* **Aufgabe 1215.** Eine Strasse führt unter einem Winkel $\alpha = 8^0\ 42'$ auf eine Anhöhe; wieviel $^0/_0$ Steigung hat diese Strasse?

Figur 550.



Andeutung. Denkt man sich durch irgend einen Punkt A der Strasse eine horizontale Ebene und senkrecht zu dieser durch die Längsrichtung der Strasse eine zweite Ebene, eine Vertikalebene gelegt, so erhält diese Vertikalebene die durch die Figur 550 dargestellte Durchschnittsfigur, in welcher $\sphericalangle BAC$ der gegebene Winkel α ist, unter welchem die Strasse auf die Anhöhe führt.

Erkl. 786. Man sagt: eine Strasse (ein Weg etc.) hat p Prozent Steigung, bezw. hat ein Gefälle von p %, wenn bei einer Entfernung von 100 irgend welcher Längeneinheiten zweier Punkte der Strassenachse der eine derselben um p jener Längeneinheiten höher, bezw. tiefer liegt als der andere.

Zur Bestimmung der gesuchten und in Prozenten auszudrückenden Steigung der Strasse beachte man, dass, wenn nach der Erkl. 786 AB $(=c)$ hundert Längeneinheiten misst, BC $(=h)$ die gesuchte und in Prozenten auszudrückende Steigung darstellt; setzt man somit in der aus dem bei C rechtwinkligen Dreieck sich ergebenden Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h}{c}$$

$c = 100$ und $h = x$, so erhält man für die gesuchte Steigung x:

A) . . . $x = 100 \cdot \sin\alpha$ Prozent

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht des für α gegebenen Zahlenwertes, die in Prozenten ausgedrückte Steigung berechnen kann.

***Aufgabe 1216.** Eine Landstrasse hat 5 % Steigung; wie gross ist ihr Neigungswinkel?

Andeutung. Die Auflösung dieser Aufgabe ist analog der Auflösung der vorigen Aufgabe 1215; ist in Figur 550:

$$c = 100 \text{ irgend welcher Längeneinheiten}$$

und

$$h = 5 \text{ derselben Längeneinheiten}$$

so hat die Strassenachse AB 5 % Steigung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ACB ergibt sich die Relation:

$$\sin\alpha = \frac{h}{c}$$

oder:

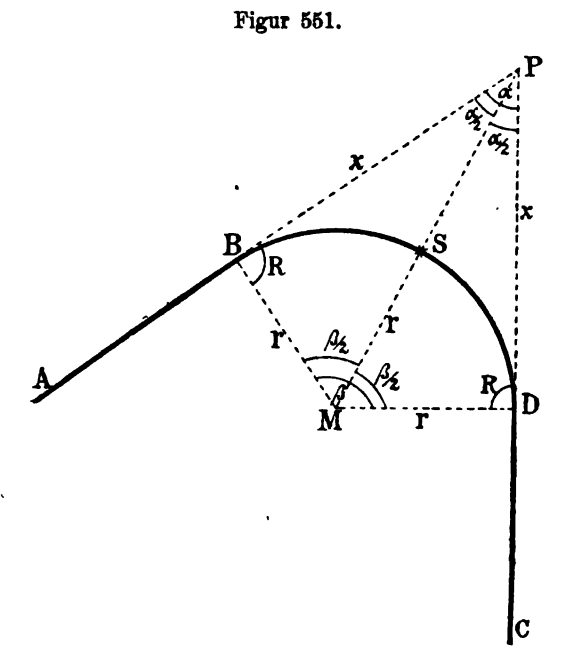
A) . . . $\sin\alpha = \frac{5}{100}$

nach welcher Gleichung man leicht mittels einer trig. Tafel (oder mittels einer log.-trig. Tafel) den gesuchten Winkel α berechnen kann.

***Aufgabe 1217.** Zwei Strassenlinien (Absteckliinien, Spuren oder Tracen zweier Strassen) bilden einen Winkel $\alpha = 40^0\ 36'\ 20''$ miteinander; diese Strassenlinien sollen durch eine krumme Linie (eine Kurve) und zwar durch einen Kreisbogen, dessen Radius $r = 35$ m misst, miteinander stetig verbunden werden, d. h. so verbunden werden, dass die Strassenlinien Tangenten an die Kurve sind; man soll die Lage der sog. Kurvenanfangspunkte in Bezug auf den Durchschnittspunkt der Strassenlinien, sowie die Länge der Kurve berechnen.

Andeutung. In Figur 551 stellen AP und CP die Strassenlinien dar, die sich unter dem gegebenen Winkel α in P schneiden, und welche durch den Kreisbogen BSD, dessen Radius r gegeben ist, so verbunden sind, dass die Strassenlinien AP und CP Tangenten an den Kreisbogen BSD, bezw. an den Kreis um M sind.

Figur 551.



Da PB und PD Tangenten von dem Punkt P an den Kreis um M sind, so ist nach der Erkl. 465:

$$\overline{PB} = \overline{PD} \text{ oder } = x$$

und

$$\sphericalangle BPM = \sphericalangle DPM \text{ oder } = \frac{\alpha}{2}$$

und

$$\sphericalangle MBP = \sphericalangle MDP \text{ oder } = 90^0$$

Aus jedem der kongruenten rechtwinkligen Dreiecke MBP und MDP ergibt sich die Relation:

A) . . . $x = r \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$ (siehe Erkl. 43)

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r und α gegebenen Zahlenwerte, die gesuchte Entfernung x der Kurvenanfangspunkte B und D von dem Punkt P berechnen kann.

Da ferner in dem Viereck $BMDP$:

$$\beta = 180^0 - \alpha$$

ist, also leicht bestimmt werden kann, so kann man aus β und r die gesuchte Länge des Bogens BSD (der Kurve) berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 801 gezeigt wurde.

---

* **Aufgabe 1218.** Die Verlängerungen zweier Strassenlinien bilden einen Winkel $\alpha = 40^0\ 36'\ 20''$ miteinander; diese beiden Strassenlinien sollen mittels einer Kurve und zwar mittels eines Kreisbogens, dessen Radius $r = 35$ m misst, so verbunden werden, dass die Strassenlinien Tangenten an den Kreisbogen sind.

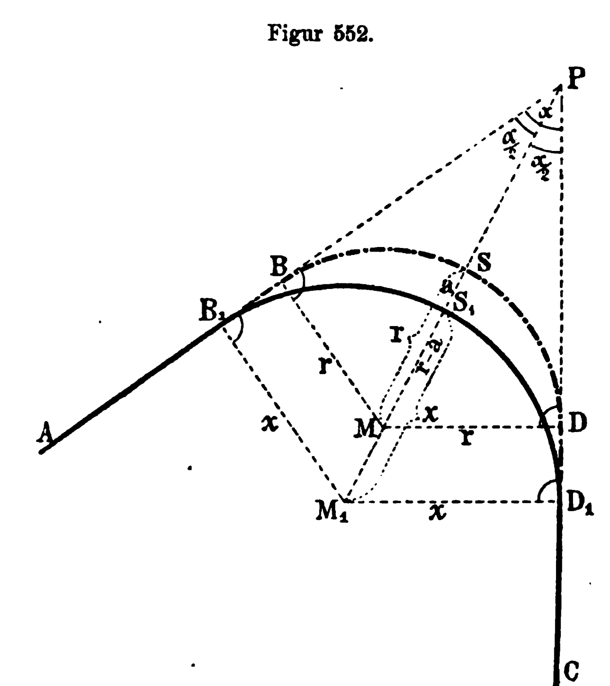
Später ergab sich, dass bei diesem Entwurf (der sog. Tracierung) die die Strassenlinie verbindende Kurve (Krümmung) besonderer örtlicher Umstände halber zu weit herausrücken würde, und es soll deshalb der Scheitel der Kurve gegen den Scheitel der vorher projektierten Kurve um $a = 2{,}5$ m zurückverlegt werden: welches muss alsdann der Radius des die Kurve bildenden Kreisbogens sein?

Andeutung. In Figur 552 seien AB und CD die Strassenlinien, deren Verlängerungen sich unter dem gegebenen Winkel α schneiden, und welche, wie zuerst vorgesehen (projektiert) war, durch den dieselben berührenden Kreisbogen BSD des Kreises um M (dessen Radius gegeben ist) verbunden sind.

Der Bogen $B_1 S_1 D_1$ des Kreises um M_1, dessen Radius x bestimmt werden soll, sei der Verbindungsbogen der beiden Strassenlinien, der ebenfalls diese Strassenlinien berührt, dessen Scheitel S_1 aber gegen den Scheitel S jenes ersten Verbindungsbogens um a (= 2,5 m) zurückliegt.

Zur Bestimmung des gesuchten Radius kann man wie folgt verfahren:

Figur 552.



Aus dem bei D_1 rechtwinkligen Dreieck ergibt sich die Relation:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{\overline{M_1 D_1}}{\overline{PM_1}}$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass $M_1 D_1 = x$ ist:

a) . . . $x = \overline{PM_1}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

Ferner ergibt sich aus der Figur:

α) . . . $\overline{PM_1} = \overline{PM} + \overline{MM_1}$

oder, da, wie sich aus dem rechtwinkligen Dreieck PMD ergibt:

β) . . . $\overline{PM} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}$ (siehe Erkl. 42)

und da, wie aus der Figur ersichtlich:

$$\overline{MM_1} = \overline{M_1S_1} - \overline{MS_1}$$

oder:

γ) . . . $\overline{MM_1} = x - (r - a)$

ist:

b) . . . $\overline{PM_1} = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + x - (r - a)$

Aus den Gleichungen a) und b) folgt:

c) . . . $x = \left(\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} + x - r + a\right)\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$

und hieraus ergibt sich nach der Erkl. 787:

A) . . . . $x = r + \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für r, a und α gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Radius x des neuen Verbindungsbogens berechnen kann.

Erkl. 787. Aus nebenstehender Gleichung c) ergibt sich x wie folgt:

$$x = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + x\cdot\sin\frac{\alpha}{2} - r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + a\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$x - x\sin\frac{\alpha}{2} = r - r\cdot\sin\frac{\alpha}{2} + a\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$x\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) = r\left(1 - \sin\frac{\alpha}{2}\right) + a\sin\frac{\alpha}{2}$$

mithin:

$$x = r + \frac{a\sin\frac{\alpha}{2}}{1 - \sin\frac{\alpha}{2}}$$

Aufgabe 1219. Die Endpunkte A und B weier vorgesehenen (projektierten) Eisenbahninien (Tracen, auch Spuren der gedachten Eisenbahnen genannt) AC und BD, siehe 'igur 553, sollen durch eine krumme Linie, nd zwar durch eine sog. S-Kurve, welche us Bogen zweier sich gegenseitig berühreneı Kreise besteht, deren Radien r und r_1 ı dem Verhältnis 2:3 stehen, so verbunen werden, dass jene Eisenbahnlinien Tanenten an diese krumme Verbindungslinie nd (oder wie man zu sagen pflegt, dass iese krumme Verbindungslinie jene Eisen-

bahnlinien **stetig** verbindet). Durch Messung wurden bestimmt:

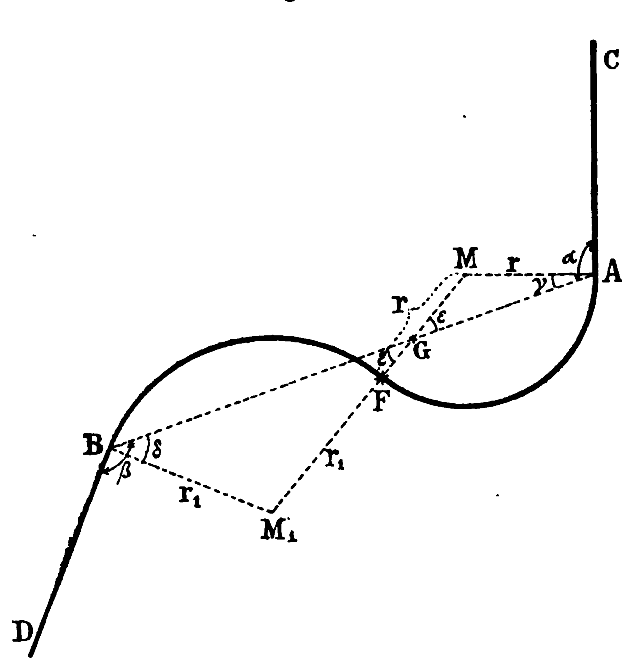
a) die Länge $a = 950$ m der geraden Verbindungslinie der Endpunkte A und B der Eisenbahnlinien,

b) der Winkel $\alpha = 132^0\,23'\,16''$, welchen die Eisenbahnlinie CA mit der Verbindungslinie AB bildet und

c) der Winkel $\beta = 151^0\,20'\,34''$, welchen die Eisenbahnlinie DB mit der Verbindungslinie AB bildet.

Man soll aus diesen Messungen die Radien r und r_1 der Kreisbogen berechnen, durch welche jene S-Kurve bestimmt ist.

Figur 553.



Andeutung. In Figur 553 seien AC und BD die Eisenbahnlinien, deren Endpunkte A und B durch die krumme Verbindungslinie AFB so verbunden sind, dass der Teil AF dieser Kurve ein Bogen des Kreises um M (mit dem Radius r) ist, welcher die Eisenbahnlinie AC in A berührt, und dass der Teil BF jener Kurve ein Bogen des Kreises um M_1 (mit dem Radius r_1) ist, welcher die Eisenbahnlinie DB in dem Endpunkt B und den Kreis um M in F berührt.

Der durch den Punkt A gezogene Radius MA des Kreises um M muss nach der Erkl. 464 **senkrecht** zu AC, desgleichen muss M_1B **senkrecht** zu DB sein. Die Verbindungslinie MM_1 (die Zentrale der beiden Kreise) muss nach der Erkl. 617 durch den Berührungspunkt F dieser beiden Kreise gehen.

Die gesuchten Radien r und r_1 kann man unter anderem wie folgt berechnen:

Gemäss der Aufgabe besteht die Relation:

$$r : r_1 = 2 : 3$$

Hieraus ergibt sich:

$$\text{a)} \ldots r_1 = \frac{3}{2} r$$

Aus der Figur 553 ergibt sich:

$$\gamma = \sphericalangle BAC - \sphericalangle MAC$$

oder:

$$\alpha) . \gamma = \alpha - 90^0$$

und

$$\delta = \sphericalangle ABD - \sphericalangle M_1BD$$

oder:

$$\beta) \ldots \delta = \beta - 90^0$$

nach welchen Gleichungen man γ und δ lern bestimmen kann.

Aus dem Dreieck MAG ergibt sich nach der Sinusregel, wenn man den Winkel, welchen die Zentrale MM_1 mit der Verbindungslinie AB durch ε bezeichnet:

$$\overline{MG} : r = \sin\gamma : \sin\varepsilon$$

Erkl. 788. Der nebenstehenden Gleichung:

$$A) \ldots \sin\varepsilon = \frac{2}{5}\left(\sin\gamma + \frac{3}{2}\sin\delta\right)$$

kann man eine logarithmisch-bequemere Form geben, wie folgt:

$$\sin\varepsilon = \frac{2}{5}\left(\sin\gamma + \frac{3\sin\delta\cdot\sin\gamma}{2\cdot\sin\gamma}\right)$$

$$a) \ldots \sin\varepsilon = \frac{2\sin\gamma}{5}\left(1 + \frac{3\sin\delta}{2\sin\gamma}\right)$$

Setzt man nunmehr nach der Erkl. 140:

$$1) \ldots \frac{3\sin\delta}{2\sin\gamma} = \operatorname{tg}^2\psi$$

so erhält man:

$$\sin\varepsilon = \frac{2\sin\gamma}{5}(1 + \operatorname{tg}^2\psi)$$

oder, da nach der Erkl. 141:

$$1 + \operatorname{tg}^2\psi = \frac{1}{\cos^2\psi}$$

ist:

$$2) \ldots \sin\varepsilon = \frac{2\sin\gamma}{5\cos^2\psi}$$

Hat man also nach Gleichung 1) den Hülfswinkel ψ berechnet, so kann man nach Gleichung 2) den Winkel ε berechnen:

Erkl. 789. Aus nebenstehender Gleichung i) erhält man:

$$a\cdot\sin\varepsilon = r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma) + r_1\cdot\sin(\varepsilon+\delta)$$

oder:

$$r_1 = \frac{3}{2}r$$

gesetzt:

$$a\cdot\sin\varepsilon = r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma) + \frac{3}{2}r\cdot\sin(\varepsilon+\delta)$$

Diese Gleichung in Bezug auf r aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$2a\cdot\sin\varepsilon = 2r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma) + 3r\cdot\sin(\varepsilon+\delta)$$

$$r\cdot[2\sin(\varepsilon+\gamma) + 3\cdot\sin(\varepsilon+\delta)] = 2a\cdot\sin\varepsilon$$

oder:

$$1) \ldots r = \frac{2a\cdot\sin\varepsilon}{2\sin(\varepsilon+\gamma) + 3\sin(\varepsilon+\delta)}$$

Erkl. 790. Sind in der Figur 553 die Radien r und r_1 einander gleich, so vereinfacht sich die Aufgabe wesentlich.

Sind die Kreisbogen, aus welchen die S-Kurve besteht, einander gleich, so muss die Verbindungslinie AB durch den sogenannten Wendepunkt der S-Kurve AFB gehen (siehe die beiden folgenden Aufgaben).

oder:

$$b) \ldots \overline{MG} = \frac{r\cdot\sin\gamma}{\sin\varepsilon}$$

In analoger Weise ergibt sich aus dem Dreieck M_1BG:

$$c) \ldots \overline{M_1G} = \frac{r_1\cdot\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

Durch Addition der Gleichungen b) und c) erhält man:

$$\overline{MG} + \overline{M_1G} = \frac{r\cdot\sin\gamma}{\sin\varepsilon} + \frac{r_1\cdot\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

oder, da:

$$\overline{MG} + \overline{M_1G} = r + r_1$$

ist:

$$d) \ldots r + r_1 = \frac{r\cdot\sin\gamma}{\sin\varepsilon} + \frac{r_1\cdot\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

Setzt man hierin den Wert für r_1 aus Gleichung a), so ergibt sich:

$$r + \frac{3}{2}r = \frac{r\cdot\sin\gamma}{\sin\varepsilon} + \frac{3r}{2}\cdot\frac{\sin\delta}{\sin\varepsilon}$$

oder:

$$\frac{5}{2}r = \frac{r}{\sin\varepsilon}\left(\sin\gamma + \frac{3}{2}\sin\delta\right)$$

und hieraus erhält man:

$$A) \ldots \sin\varepsilon = \frac{2}{5}\left(\sin\gamma + \frac{3}{2}\sin\delta\right)$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der nach den Gleichungen α) und β) leicht zu berechnenden Winkel δ und γ, den Winkel ε zunächst berechnen kann (siehe Erkl. 788).

Aus dem Dreieck MAG ergibt sich ferner:

$$\overline{AG} : \overline{MA} = \sin[2R - (\varepsilon+\gamma)] : \sin\varepsilon$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass:

$$\overline{MA} = r$$

und dass nach der Erkl. 66:

$$\sin[2R - (\varepsilon+\gamma)] = \sin(\varepsilon+\gamma)$$

ist:

$$f) \ldots \overline{AG} = \frac{r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma)}{\sin\varepsilon}$$

In analoger Weise erhält man aus dem Dreieck M_1BG:

$$g) \ldots \overline{BG} = \frac{r_1\cdot\sin(\varepsilon+\delta)}{\sin\varepsilon}$$

Addiert man die Gleichungen f) und g), so erhält man:

$$\overline{AG} + \overline{BG} = \frac{r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma) + r_1\sin(\varepsilon+\delta)}{\sin\varepsilon}$$

oder, da gemäss der Aufgabe:

$$h) \ldots \overline{AG} + \overline{BG} = a$$

ist:

$$i) \ldots a = \frac{r\cdot\sin(\varepsilon+\gamma) + r_1\sin(\varepsilon+\delta)}{\sin\varepsilon}$$

Setzt man hierin nach Gleichung a):

$$r_1 = \frac{3}{2}r$$

so erhält man in Bezug auf r eine Bestimmungsgleichung, aus welcher sich nach der Erkl. 789:

$$\text{B)} \ldots r = \frac{2a \cdot \sin\varepsilon}{2\sin(\varepsilon+\gamma)+3\sin(\varepsilon+\delta)}$$

ergibt. Nach dieser Gleichung kann man, in Rücksicht des nach Gleichung A) zu berechnenden Winkels ε, in Rücksicht der für β und γ aus den Gleichungen α) und β) sich ergebenden Werte und in Rücksicht des für a gegebenen Zahlenwertes, den gesuchten Radius r berechnen; den Radius r_1 kann man alsdann nach Gleichung a) berechnen (siehe Erkl. 790).

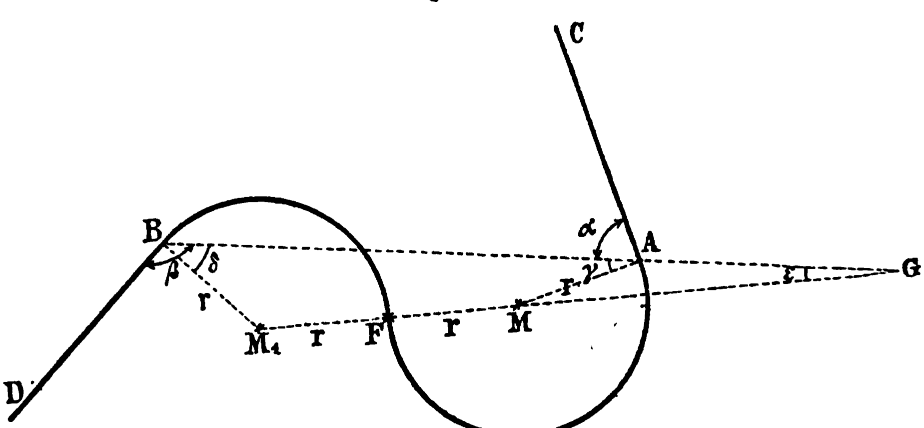
Aufgabe 1220. Die Eisenbahnlinien AC und BD, siehe Figur 554, sind durch die S-Kurve AFB stetig verbunden (siehe Aufgabe 1219), welche aus zwei Kreisbogen besteht, die zwei Kreisen mit gleichen Radien r angehören. Durch Messung wurden bestimmt:

$$\overline{AB} = a = 2050 \text{ m}$$
$$\alpha = 38^0\ 26'\ 32''$$
$$\beta = 162^0\ 0'\ 14''$$

Wie gross muss der Radius r sein?

Andeutung. Man verfahre in analoger Weise, wie in Andeutung zur Aufgabe 1219 gesagt wurde, indem man, siehe Figur 554, zunächst den Winkel ε berechnet, welchen die Zentrallinie der beiden gleichen Kreise um M und M_1 mit der Verlängerung der Verbindungslinie AB des Anfang- und des Endpunktes der S-Kurve bildet (siehe Erkl. 790).

Figur 554.



---

* **Aufgabe 1221.** Zwei parallele Eisenbahnlinien AC und BD, siehe Figur 555, sind durch eine S-Kurve verbunden, welche aus zwei gleichen Kreisbogen besteht. Durch Messung wurden bestimmt:

$$\overline{AB} = a = 1232 \text{ m}$$

und

$$\alpha = 122^0\ 36'\ 44''$$

Wie gross muss der Radius eines jeden der Kreisbogen sein?

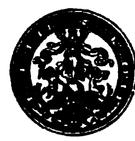
Andeutung. Man bestimme zunächst, siehe Figur 555, den Winkel β; beachte dann, dass $BF = AF = \frac{a}{2}$ ist, dass man somit von jedem der gleichschenkligen Dreiecke MAF und M_1BF die Basis und die Basiswinkel β kennt (siehe Erkl. 790).

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

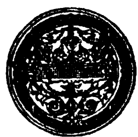
375. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 374. — Seite 897—912.
Mit 17 Figuren.



Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung



— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 374. — Seite 897—912. Mit 17 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, **erscheint monatlich** in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch alle **Teile der reinen und angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben** beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den **Schulunterricht** benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren Auffinden der Lösungen** derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen zu lösen haben, zugleich** aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

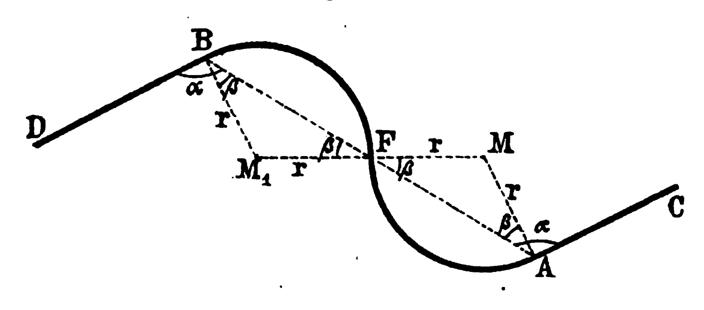
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze für den** Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der **mathematischen** Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft **keine** Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen **häuslichen Arbeiten eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust,** Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt werden.**

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller **Art, Militär** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht **vergessenen** mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und **praktische** Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit **Angabe der** Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und **wird** deren **Erledigung** thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

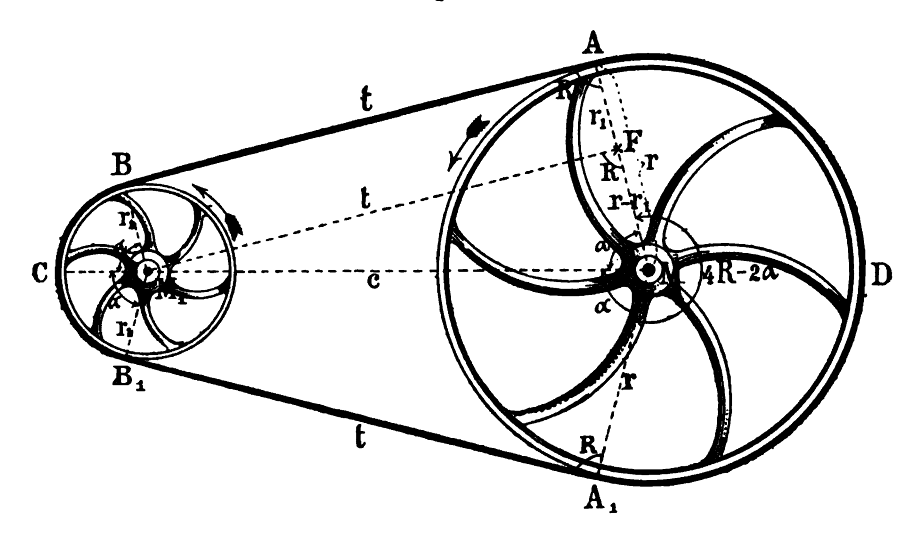
Figur 555.



* **Aufgabe 1222.** Die Radien zweier Riemenscheiben sind $r = 3$ m und $r_1 = 1$ m, die Entfernung ihrer Mittelpunkte ist $c = 6$ m. Man soll die Länge des um diese Riemenscheiben gehenden Treibriemens berechnen.

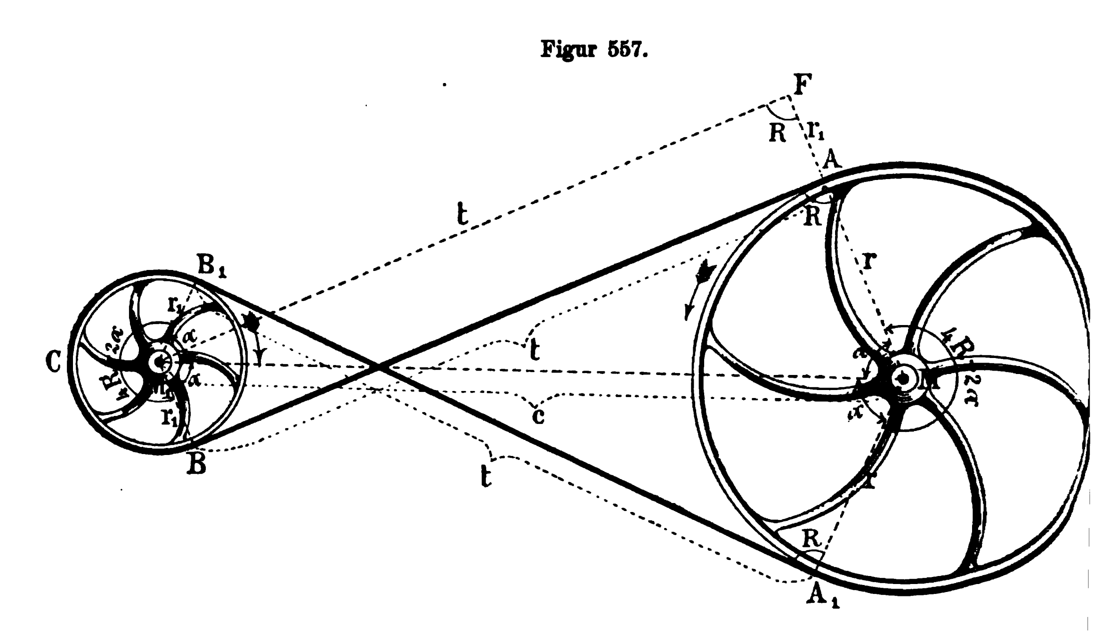
Andeutung. In den Figuren 556 und 557 seien die äussersten Kreislinien um M und M_1 die Umfänge zweier Riemenscheiben, über welche in sich selbst zurücklaufende Riemen gelegt sind, die zur Uebertragung der Bewegung einer der Riemenscheiben auf die andere Riemenscheibe dienen (daher auch Treibriemen genannt werden, siehe Erkl. 791). Soll die Bewegung beider Riemenscheiben in gleichem Sinne erfolgen, wie in der Figur 556 durch Pfeile angedeutet, so müssen die Teile der Treibriemen, welche zwischen den beiden Riemenscheiben (zwischen den sog. Ablaufstellen der Riemen) liegen, äussere Tangenten an die Riemenscheiben (auch Rollenscheiben genannt) sein; ein solcher Riemenbetrieb heisst ein offener Riemenbetrieb. Soll hingegen die Bewegung beider

Figur 556.



Riemenscheiben in entgegengesetztem Sinne erfolgen, wie in der Figur 557 durch Pfeile angedeutet, so müssen die Teile der Treibriemen, welche zwischen beiden Riemenscheiben (zwischen den sog. Ablaufstellen der Riemen) liegen, innere Tangenten an die Riemenscheiben sein; ein solcher Riemenbetrieb heisst ein geschränkter oder gekreuzter Riemenbetrieb.

Figur 557.



Zur Berechnung der gesuchten Länge der um die beiden Riemenscheiben gehenden und in sich selbst zurückkehrenden Treibriemen kann man wie folgt verfahren:

In den Figuren 556 und 557 sind A[illegible] und $A_1 B_1$ Tangenten an die beiden äussersten Kreise um M und M_1, deren Radien bezw. $= r$ und r_1 gegeben sind; in jeder di[illegible] Figuren ist $AB = A_1 B_1$ oder bezw. $= t$ (siehe die Erkl. 614 und 615).

Für die gesuchte Länge x der Treibriemen ergibt sich aus den Figuren [illegible] und 557 allgemein:

a) . . . $x = 2t + \text{bog}\, BCB_1 + \text{bog}\, ADA_1$

in welcher Gleichung die Länge t der Tangenten AB und $A_1 B_1$, sowie die Länge der Bogen BCB_1 und ADA_1 noch zu bestimmende Grössen sind.

Zieht man in den Figuren 556 und [illegible] $M_1 F$ parallel AB bis zum Durchschnitt mit dem Radius MA (bezw. mit dessen Verlängerung in Figur 557), und bezeichnet [illegible] den Winkel, welchen die gegebene Cent[illegible]

linie c der Kreise um M und M_1 mit jenem Radius MA bildet, mit α, so ergeben sich aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck MFM_1, in Rücksicht, dass in beiden Figuren 556 und 557:

$$\overline{M_1F} = \overline{BA} \text{ oder } = t$$

und dass in der Figur 556:

$$\overline{MF} = \overline{MA} - \overline{FA}$$
$$= \overline{MA} - \overline{M_1B} \text{ oder } = r - r_1$$

in Figur 557 aber:

$$\overline{MF} = \overline{MA} + \overline{FA}$$
$$= \overline{MA} + \overline{M_1B} \text{ oder } = r + r_1$$

ist, bezw. die Relationen:

b) . . . $t = c \cdot \sin\alpha$ (s. Erkl. 50)
1) . . . $\cos\alpha = \frac{r - r_1}{c}$
} ergeben sich aus Fig. 556

und

b_1) . . . $t = c \cdot \sin\alpha$ (s. Erkl. 50)
1a) . . . $\cos\alpha = \frac{r + r_1}{c}$
} ergeben sich aus Fig. 557

Berücksichtigt man ferner, dass in beiden Figuren 556 und 557 der Centriewinkel, welcher zu dem Bogen ADA_1 gehört $= 4R - 2\alpha$ oder $= 2(180^0 - \alpha)$, dass in der Figur 556 der Centriewinkel, welcher zu dem Bogen BCB_1 gehört $= 2\alpha$ und dass in Figur 557 der Centriewinkel, welcher zu dem Bogen BCB_1 gehört $= (4R - 2\alpha)$ oder $= 2(180^0 - \alpha)$ ist, wie in den Figuren entsprechend angedeutet, so erhält man hiernach und nach der Erkl. 461 für die Längen dieser Bogen:

c) . . . $\text{bog}\, ADA_1$ (in beiden Figuren) $= r\pi \cdot \frac{2(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$

d) . . . $\text{bog}\, BCB_1$ (in Figur 556) $= r_1\pi \cdot \frac{2\alpha^0}{180^0}$

und

d_1) . . . $\text{bog}\, BCB_1$ (in Figur 557) $= r_1\pi \cdot \frac{2(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$

In Rücksicht der Gleichungen b), c) und d) erhält man aus der **allgemeinen** Gleichung a) für die Länge x des Treibriemens bei **offenem** Riemenbetrieb, wie durch die Figur 556 dargestellt:

$$x = 2c \cdot \sin\alpha + r_1\pi \cdot \frac{2 \cdot \alpha^0}{180^0} + r\pi \cdot \frac{2(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$$

oder:

A) . . . $x = 2c \cdot \sin\alpha + \frac{\alpha^0}{90^0} \cdot r_1\pi + \frac{180^0 - \alpha^0}{90^0} \cdot r\pi$

in welcher Gleichung α ein Winkel ist, der nach Gleichung 1) mittels der Relation:

A_1) . . . $\cos\alpha = \frac{r - r_1}{c}$

aus den gegebenen Grössen r, r_1 und c berechnet werden kann.

Erkl. 791. Riemenscheiben oder Riemenräder dienen dazu, die drehende Bewegung eines Rades (oder einer Welle) einem anderen Rad (oder einer anderen Welle) durch aufgelegte Riemen, welche in sich selbst zurücklaufen, d. h. ohne Ende sind, zu übertragen oder mitzuteilen.

Sind die Entfernungen beider Wellen nicht sehr gross, so bedient man sich, statt jener Riemen (oder Schnuren und Drahtseile) vorzugsweise der verzahnten Räder (Zahn- oder Kammräder genannt).

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Maschinenbau und Maschinenlehre handeln).

Erkl. 792. Sind die in der Aufgabe 1222 erwähnten Riemenscheiben gleich gross, ist also $r = r_1$, so vereinfacht sich die Auflösung dieser Aufgabe wesentlich.

In Rücksicht der Gleichungen b_1), c) und d_1) erhält man aus der allgemeinen Gleichung a) für die Länge x_1 des Treibriemens bei geschränktem oder gekreuztem Riemenbetrieb, wie durch die Figur 557 dargestellt:

$$x = 2c \cdot \sin\alpha + r_1\pi \cdot \frac{2\,(180^0 - \alpha^0)}{180^0} + r\pi \cdot \frac{2\,(180^0 - \alpha^0)}{180^0}$$

oder:

$$x_1 = 2c \cdot \sin\alpha + \frac{180^0 - \alpha^0}{90^0} \cdot r_1\pi + \frac{180^0 - \alpha^0}{90^0} \cdot r\pi$$

oder auch:

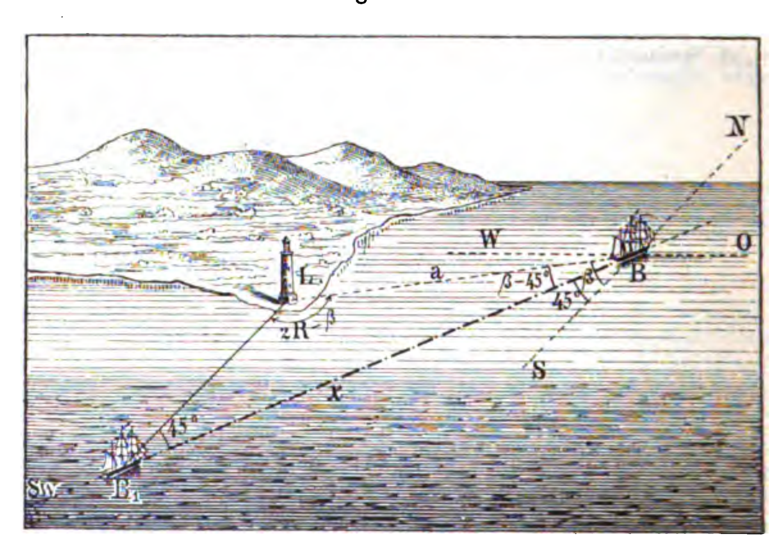
$$\text{B)} \; \ldots \; x_1 = 2c \cdot \sin\alpha + \frac{180^0 - \alpha^0}{90^0}\,(r + r_1)\pi$$

in welcher Gleichung α ein Winkel ist, der nach Gleichung 1a) mittels der Relation:

$$\text{B}_1) \; \ldots \; \cos\alpha = \frac{r + r_1}{c}$$

aus den gegebenen Grössen r, r_1 und c berechnet werden kann (siehe Erkl. 792).

Figur 558.



Aufgabe 1223. Einem Beobachter auf einem Schiff erscheint in der West-Süd-Westrichtung ein Leuchtturm in der Entfernung von $a = 7^1/_2$ Seemeilen unter dem Winkel $\beta = 62^0\,54'$ gegen die Südrichtung. Wie viel Meilen muss das Schiff gerade nach Südwesten segeln, damit der Leuchtturm im Norden stehe.

Andeutung. Ist, siehe Figur 558, B der Ort des Schiffes, L der um $a = 45$ Seemeilen von dem Schiff entfernte Leuchtturm (siehe Erkl. 707), so ist β der gemessene Winkel, unter welchem der Aufgabe gemäss das Schiff gegen die Südrichtung BS erscheint. Soll nun das Schiff gerade nach Südwesten segeln, so muss es seine Richtung in der den rechten Winkel WBS

halbierenden geraden Linie BS_w nehmen (siehe Erkl. 760), soll es ferner nur soweit segeln, dass der Leuchtturm L in der Nordrichtung erscheint, so muss es bis an den Punkt B_1 segeln, dessen Verbindungslinie B_1L mit L parallel der Nord-Südrichtung NS ist. Man erhält hiernach das Dreieck BLB_1, in welchem $BL = a$:

$$\sphericalangle LB_1B = \sphericalangle B_1BS \text{ oder } = 45^0$$

$$\sphericalangle LBB_1 = \beta - 45^0$$

und

$$\sphericalangle B_1LB = 2R - 45^0 - (\beta - 45^0) \text{ oder } = 2R - \beta$$

ist. Nach dem Sinussatz ergibt sich hiernach aus diesem Dreieck für die gesuchte Entfernung BB_1 $(= x)$ die Bestimmungsgleichung:

$$\frac{x}{a} = \frac{\sin(2R - \beta)}{\sin 45^0}$$

und hieraus erhält man, in Rücksicht, dass nach der Erkl. 66:

$$\sin(2R - \beta) = \sin\beta$$

und dass nach der Erkl. 216:

$$\sin 45^0 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

ist:

$$x = \frac{a \cdot \sin\beta}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

oder:

$$x = \frac{2a \cdot \sin\beta}{\sqrt{2}} \text{ oder } = \frac{2\sqrt{2} \cdot a \sin\beta}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}$$

mithin:

A) . . . $x = a\sqrt{2} \cdot \sin\beta$

nach welcher Gleichung man, aus a und β die gesuchte Strecke x berechnen kann.

---

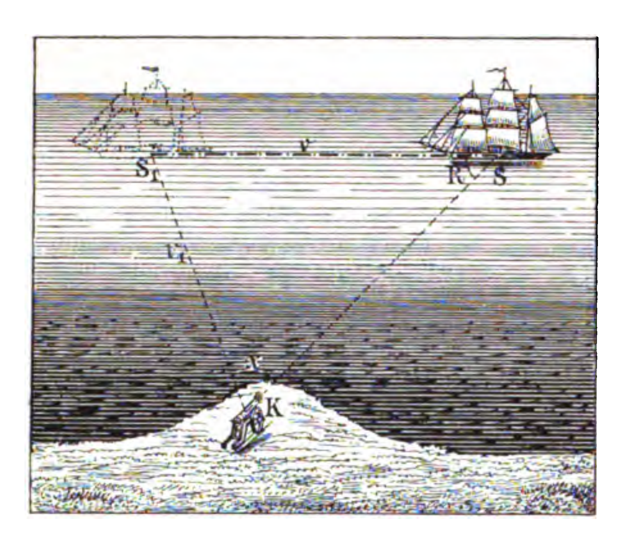
* **Aufgabe 1224**. In einem bestimmten Augenblick ist auf eine gewisse Stelle eines $v = 12{,}5$ m pro Sekunde zurücklegenden Schiffes ein Geschütz so gerichtet, dass Geschütz- und Schiffsrichtung senkrecht zu einander stehen. Unter welchem Winkel muss das Geschützrohr gedreht werden, damit das Geschoss, welches eine Geschwindigkeit von $v = 560$ m pro Sekunde hat, jene Stelle des Schiffes trifft?

Andeutung. In Figur 559 sei S der Punkt eines in Bewegung befindlichen Schiffes, auf welchen das Geschütz K so gerichtet ist, dass Schiffsrichtung und Geschützrohrrichtung senkrecht zu einander sind, wie in Figur angedeutet.

Soll nun ein von dem Geschütz K abgegebenes Geschoss das in Bewegung befindliche Schiff in dem Punkt S treffen, so kann die Geschützrohrrichtung KS nicht beibehalten werden, indem sich bis zu der Zeit,

in welcher ein Geschoss bei S ankommt, dieser Punkt S des Schiffes infolge der Bewegung desselben bereits an einem anderen in der Schiffsrichtung gelegenen Ort befinden würde. Deshalb muss das Geschützrohr um einen solchen Winkel x nach der Schiffsrichtung gedreht werden, damit zu derselben Zeit, in welcher der Punkt S des Schiffes z. B. in S_1 ankommt, auch ein Geschoss des Geschützes K in S_1 ankommt; in diesem Fall würde das Geschoss genau den Punkt S des Schiffes (im Ort S_1) treffen.

Figur 559.



Hat hiernach der Punkt S des Schiffes gemäss der Aufgabe in einer Sekunde den Weg SS_1 oder v (= 12,5 m) zurückgelegt, so muss das Geschoss in derselben Zeit, also ebenfalls in einer Sekunde, den Weg KS_1 oder v_1 (= 560 m) zurücklegen.

Aus dem bei S rechtwinkligen Dreieck ergibt sich somit zur Berechnung des gesuchten Winkels x:

$$\text{A)} \ldots \sin x = \frac{v}{v_1}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für v und v_1 gegebenen Zahlenwerte, den Winkel x, um welchen das Geschützrohr gedreht werden muss, berechnen kann.

Aufgabe 1225. Ein feindliches Schiff wird von den Führern zweier in einer gegenseitigen Entfernung von $a = 800$ m am Strand aufgestellten Geschütze A und B beobachtet. Der Geschützführer bei A beobachtet die Abweichung des Schiffes und des Geschützes B von der durch die Magnetnadel angegebenen Nordrichtung und findet für beide eine östliche Abweichung und zwar für das Schiff eine solche von $\delta = 10^0\ 40'$ und für das Geschütz B eine solche von $\delta_1 = 112^0\ 30'$; der Geschützführer bei B beobachtet eine westliche Abweichung $\delta_2 = 12^0\ 20'$ des Schiffes von der durch eine Magnetnadel angegebenen Nordrichtung.

Welche Entfernung muss nach diesen Angaben das Schiff von jedem der Geschütze A und B haben?

Andeutung. In Figur 560 seien A und B die um a (= 800 m) von einander entfernten Geschütze; NS und N_1S_1 seien die von der Magnetnadel angegebenen Nordrichtungen bei A und B, P sei das Schiff, δ sei die östliche Abweichung des Schiffes und δ_1 die östliche Abweichung des Geschützes B von der Nordrichtung bei dem Geschütz A, schliesslich sei δ_2 die westliche Abweichung des Schiffes von der Nordrichtung bei dem

Erkl. 798. Ein planimetrischer Lehrsatz heisst:

„Werden zwei Parallelen von einer dritten Geraden durchschnitten, so betragen je zwei der inneren Gegenwinkel zusammen $2R$ oder 180°."

Nach diesem Satz muss in der Figur 560:

$$\sphericalangle NAB + \sphericalangle N_1BA = 2R \text{ oder } = 180^0$$

also:

$$\sphericalangle N_1BA = 2R - \sphericalangle NAB \text{ oder } = 2R - \delta_1$$

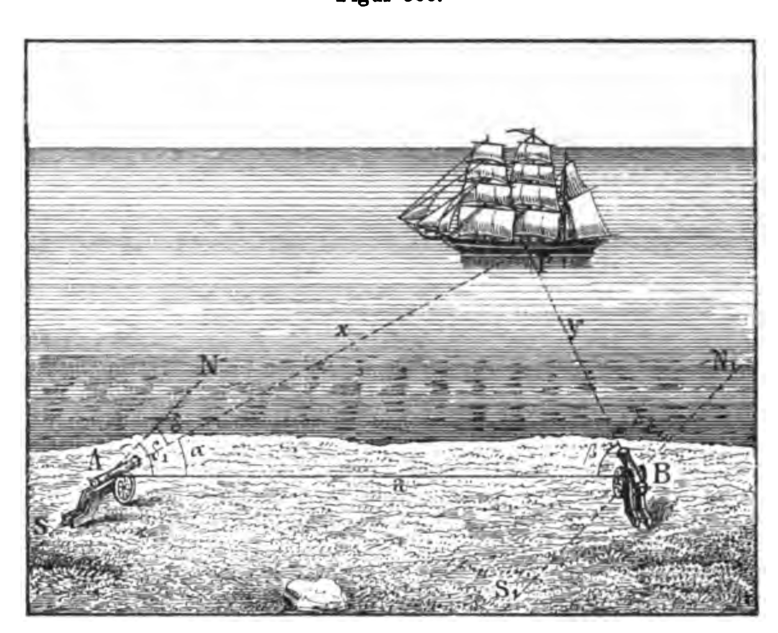
sein.

(Siehe die Teile der Encyklopädie, welche über Planimetrie handeln.)

Geschütz B; x und y seien bezw. die gesuchten Entfernungen des Schiffes von den Geschützen A und B.

Von dem Dreieck ABP kennt man die Seite $\overline{AB} = a$ (= 800 m), den Winkel PAB (= α), derselbe ist nämlich $= \delta_1 - \delta$, und den Winkel PBA (= β), derselbe ist = $\sphericalangle N_1BA - \sphericalangle N_1BP$ oder nach der Erkl. 793 $= 2R - \delta_1 - \delta_2$. Man kann somit aus diesen Stücken die gesuchten Entfernungen x und y berechnen, wie in Auflösung der Aufgabe 117 gezeigt wurde.

Figur 560.



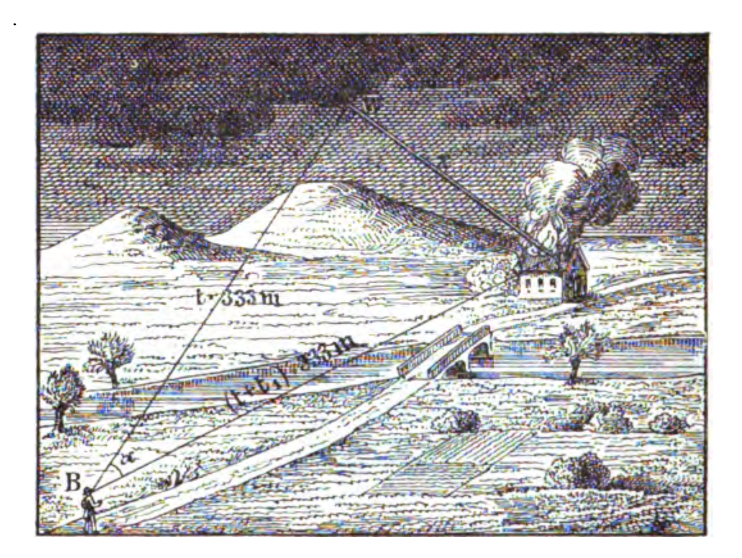
Aufgabe 1226. Ein Beobachter sieht bei einem Gewitter wie ein Blitz von einer Wolke in gerader Richtung in ein Haus einschlägt und beobachtete, dass der Sehwinkel der geradlinigen Bahn des Blitzes $\alpha = 46^0\,30'$ war, dass die Zeit zwischen Blitz und Donner $t = 18''$, die Dauer des Donners selbst $t_1 = 2$ Sekunden betrug. Wie kann man aus diesen Angaben die Länge des von dem Blitz durcheilten Weges, sowie die Entfernung des Hauses von dem Beobachter berechnen, in welches der Blitz eingeschlagen hat.

Andeutung. In Figur 561 sei W der von einem Beobachter beobachtete Punkt einer Wolke, von welchem aus der Blitz in gerader Richtung auf einen Punkt H eines Hauses übersprang, also in dasselbe einschlug; α sei der Sehwinkel, unter welchem dem Beobachter die geradlinige Bahn WH des Blitzes erschien.

Von dem Moment des (sichtbaren) Aufleuchtens des Blitzes bei W bis zu dem

Moment, in welchem der **Anfang** des Donners (d. i. der den Blitz begleitende Schall) zum Ohr des Beobachters gelangte, vergingen t (= 18) Sekunden; da nun der Schall pro Sekunde 333 m zurücklegt, so musste der Anfang des Donners, bis er von W zum Ohr des Beobachters B gelangte, einen Weg von $t \cdot 333$ Meter zurücklegen.

Figur 561.



Von dem Moment des (sichtbaren) Einschlagens des Blitzes bei H bis zu dem Moment, in welchem das **Ende** des Donners zum Ohr des Beobachters gelangte, vergingen, da jener Moment infolge der grossen Geschwindigkeit des Blitzes mit dem Moment des Aufleuchtens bei W als zusammenfallend angenommen werden kann (indem Aufleuchten und Einschlagen des Blitzes **scheinbar** in demselben Moment erfolgt) und die Dauer des Donners t_1 (= 2″) betrug, im ganzen $(t + t_1)$ Sekunden; da nun der Schall pro Sekunde 333 m zurücklegt, so musste das Ende des Donners, bis es von H zu dem Ohr des Beobachters B gelangte, den Weg $(t + t_1) \cdot 333$ Meter zurücklegen.

Für die gesuchte Länge x der geradlinigen Bahn des Blitzes ergibt sich somit aus dem Dreieck WHB nach dem Projektionssatz:

$$x^2 = (t \cdot 333)^2 + [(t + t_1) \cdot 333]^2 - 2 \cdot t \cdot 333 \cdot (t + t_1) \cdot 333 \cdot \cos\alpha$$

oder:

$$x^2 = 333^2\,[t^2 + (t + t_1)^2 - 2t \cdot (t + t_1)\cos\alpha]$$

mithin:

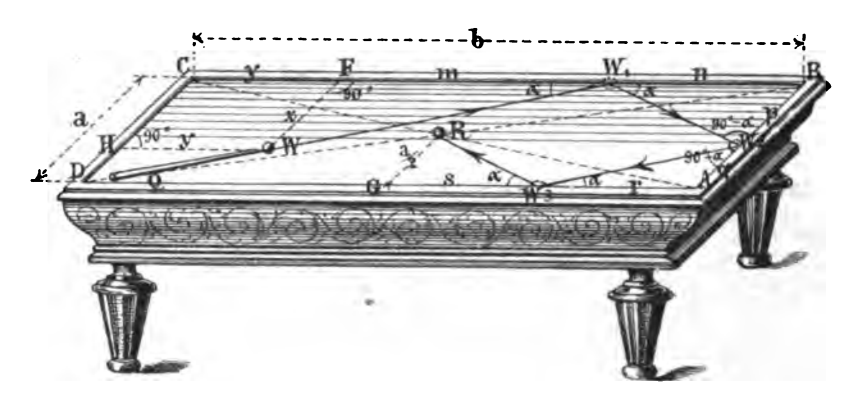
$$\text{A)} \ldots x = 333\sqrt{t^2 + (t + t_1)^2 - 2t\,(t + t_1)\cos\alpha} \text{ Meter}$$

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für t, t_1 und α gegebenen Werte die gesuchte Länge x berechnen kann.

Für die gesuchte Entfernung BH (= y) des Beobachters B von dem Haus H, in welches der Blitz einschlug, ergibt sich aus der Figur 561:

$$\text{B)} \ldots y = (t + t_1) \cdot 333 \text{ Meter}$$

Figur 562.



Aufgabe 1227. Auf einem Billard, dessen Länge $b = 2,4$ m und dessen Breite $a = 1,2$ m misst, befinden sich zwei Bälle (Kugeln von Elfenbein), ein roter Ball R und ein weisser Ball W; der Ball R steht genau in der Mitte des Billards, der weisse (der sog. Spielball) hat von einer der Längsseiten des Billards eine senkrechte Entfernung $x = 0,85$ m und von einer der Breitseiten eine senkrechte Entfernung $y = 0,72$ m. Ein Spieler will durch einen centralen Stoss auf den weissen Ball W, denselben so in Bewegung setzen, dass dieser Ball W, nachdem er der Reihe nach an drei aufeinanderfolgenden Seiten (Bande des Billards) angeschlagen, sich also der Reihe nach in vier Richtungen bewegt hat (oder wie man zu sagen pflegt, quadrupliert hat), schliesslich den in der Mitte des Billards stehenden roten Ball trifft.

Unter welchem Winkel gegen die Bande, an welche der Ball zuerst anschlagen soll, muss das Queue (d. i. ein besonders angefertigter Stock, welches sich der Spieler zum Stoss auf den Spielball bedient) gerichtet werden, oder was dasselbe ist, unter welchem Winkel gegen jene Bande muss der in Bewegung gesetzte Ball W anschlagen, damit er den vorgeschriebenen Weg durchläuft und schliesslich den roten Ball R trifft?

Andeutung. In Figur 562 stelle $ABCD$ das Billard dar, dessen Länge AD (oder BC) $= b$ und dessen Breite AB (oder CD) $= a$ sei. In der Mitte, d. i. in dem Durchschnitt der Diagonalen des Rechtecks, welches die Spielfläche des Billards bildet, befindet sich gemäss der Aufgabe der rote Ball R. W sei der Spielball, der von der Längsseite BC die gegebene senkrechte Entfernung x, von der Breitseite CD die gegebene senkrechte Entfernung y habe. Q sei das Queue des Spielers, das, da der Stoss gegen den Ball W ein centraler sein soll, so gerichtet sein muss, dass die Längsachse des Queues horizontal ist und in ihrer gedachten Verlängerung genau durch den Mittelpunkt des Spielballs W geht. Bei dieser Lage des Queues, welche der Spieler dem Queue zu geben hat, wird sich der Ball W, nach einem Stoss mittels des Queues auf denselben, gerade in der Richtung der Längsachse des Queues fortbewegen und z. B. an der Längs-

Erkl. 794. Bewegt sich eine (elastische) Kugel in einer solchen Richtung gegen eine elastische Ebene (wie z. B. gegen die Bande eines Billards), welche unter dem Winkel α gegen diese Ebene geneigt ist, so prallt die Kugel von der Ebene ab und nimmt eine andere Richtung an, die (unter bestimmten Bedingungen) einen solchen Winkel mit der Ebene bildet, der gleich jenem Winkel α ist.

Dieses Gesetz kann man auch kurz wie folgt ausdrücken:

„Der Winkel, unter welchem eine auf horizontaler Ebene sich bewegende Kugel gegen eine elastische vertikale Ebene anschlägt, ist (unter bestimmten Bedingungen) gleich dem Winkel, unter welchem die Kugel von dieser Ebene abprallt."

Bei Annahme dieses Gesetzes muss die Kugel in ihrer Bewegung gegen die elastische Ebene einer Kraft folgen, deren Richtung (horizontal) durch den Mittelpunkt der Kugel und den Anschlagpunkt geht, die Kugel selbst darf also, wie man sich beim Billardspiel auszudrücken pflegt, keinen Effekt haben, d. h. das Queue, mit welchem der der Kugel die Bewegung erteilende Stoss ausgeführt wird, muss so gehalten werden, dass die Richtung desselben mit der durch jene beiden Punkte bestimmten Richtung zusammenfällt, dass der Stoss centrisch (central) und nicht excentrisch ist.

Die durch einen excentrischen Stoss auf die Kugel hervorgerufene Wirkung heisst Effekt.

Erkl. 795. Da nach der Erkl. 15:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$$

ist, so ergibt sich hieraus, dass:

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

ist.

bande BC unter einem Winkel α anschlagen, welcher gleich dem Winkel ist, welchen die Richtung des Queues mit jener Bande bildet.

Soll nach jenem Stoss der Ball W gemäss der Aufgabe quadruplieren und den Ball R treffen, so muss er den in der Figur 562 durch $W W_1 W_2 W_3 R$ angedeuteten Weg zurücklegen (siehe Erkl. 797).

Zur Berechnung des gesuchten Winkels α, welchen hierbei die Richtung des Queues mit der Bande BC bilden muss, bezw. zur Berechnung des Winkels α, unter welchem der Ball W in der Richtung WW_1 gegen die Bande BC anschlagen muss, beachte man zunächst folgendes:

Nach dem in der Erkl. 794 angeführten Gesetz ist (unter den gegebenen Umständen) der Winkel α, unter welchem der Ball an die Bande BC anschlägt, gleich dem Winkel BW_1W_2, unter welchem er abprallt; hiernach muss $\sphericalangle BW_1W_2$ ebenfalls $= \alpha$ sein. Da nun α ein spitzer Winkel des rechtwinkligen Dreiecks W_1BW_2 ist, so muss in diesem Dreieck $W_1W_2B = 90^0 - \alpha$ sein, d. h. der in W_1 unter α abgeprallte Ball muss an die folgende Bande AB unter dem Winkel $90^0 - \alpha$ anschlagen. Nach dem vorhin erwähnten Gesetz prallt der Ball in W_2 unter demselben Winkel $90^0 - \alpha$ ab, und schlägt unter dem Winkel α in W_3 an die Bande AD an (da in dem rechtwinkligen Dreieck W_2AW_3 $\sphericalangle AW_3W_2$ ein Komplementwinkel des Winkels AW_2W_3 oder des Winkels $90^0 - \alpha$ sein muss); da hiernach der Ball an die dritte Bande AD in W_3 unter dem Winkel α anschlägt, so muss er auch nach jenem Gesetz unter demselben Winkel α in W_3 abprallen, und schliesslich, wenn jener Winkel α entsprechend gewählt wurde, in R ankommen.

In Rücksicht der in der Aufgabe gegebenen Stellung der beiden Bälle auf dem Billard kann man diesen Winkel α wie folgt berechnen:

Aus dem bei F rechtwinkligen Dreieck WFW_1 ergibt sich die Relation:

a) . . . $m = x \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (siehe Erkl. 43)

Fällt man von R die Senkrechte RG auf AD und berücksichtigt man, dass nach der Erkl. 376:

$$\overline{RG} = \frac{a}{2}$$

ist, so ergibt sich aus dem hierdurch erhaltenen rechtwinkligen Dreieck RGW_3 die Relation:

b) . . . $s = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$ (siehe Erkl. 43)

Da $\overline{AG} = \frac{b}{2}$ ist, so ergibt sich aus der Figur 562:

$$s + r = \frac{b}{2}$$

oder in Rücksicht der Gleichung b):

$$1) \ldots \frac{a}{2} \cdot \operatorname{ctg} \alpha + r = \frac{b}{2}$$

Ferner ergibt sich aus der Figur 562, da:

$$\overline{BC} = b$$

und

$$\overline{FC} = \overline{WH} \text{ oder } = y$$

ist:

$$n = b - m - y$$

oder in Rücksicht der Gleichung a):

$$b) \ldots n = b - x \cdot \operatorname{ctg} \alpha - y$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $W_1 B W_2$ ergibt sich ferner:

$$p = n \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ (siehe Erkl. 46)}$$

oder in Rücksicht der Gleichung b):

$$p = b \cdot \operatorname{tg} \alpha - x \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha - y \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder nach der Erkl. 795:

$$c) \ldots p = b \cdot \operatorname{tg} \alpha - x - y \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Da ferner in Figur 562:

$$\overline{AB} = a$$

also:

$$q = a - p$$

ist, so ergibt sich hieraus und in Rücksicht der Gleichung c):

$$d) \ldots q = a - b \cdot \operatorname{tg} \alpha + x + y \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

Aus dem rechtwinkligen Dreieck $W_2 A W_3$ ergibt sich weiter:

$$r = q \cdot \operatorname{ctg} \alpha \text{ (siehe Erkl. 48)}$$

oder in Rücksicht der Gleichung d):

$$r = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - b \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha + x \operatorname{ctg} \alpha + y \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

oder nach der Erkl. 795:

$$2) \ldots r = a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - b + x \cdot \operatorname{ctg} \alpha + y$$

Setzt man nunmehr den Wert für r aus dieser Gleichung in Gleichung 1), so erhält man schliesslich in Bezug auf α die goniometrische Bestimmungsgleichung:

$$3) \ldots \frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha + a \cdot \operatorname{ctg} \alpha - b + x \operatorname{ctg} \alpha + y = \frac{b}{2}$$

und aus dieser Gleichung ergibt sich nach der Erkl. 796:

$$A) \ldots \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{3b}{2} - y}{\frac{3a}{2} + x}$$

Erkl. 796. Nebenstehende Gleichung 3) in Bezug auf $\operatorname{ctg} \alpha$ aufgelöst, gibt der Reihe nach:

$$\frac{a}{2} \operatorname{ctg} \alpha + a \operatorname{ctg} \alpha + x \operatorname{ctg} \alpha = \frac{b}{2} + b - y$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{a}{2} + a + x\right) = \frac{b + 2b}{2} - y$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{a + 2a}{2} + x\right) = \frac{3b}{2} - y$$

$$\operatorname{ctg} \alpha \left(\frac{3a}{2} + x\right) = \frac{3b}{2} - y$$

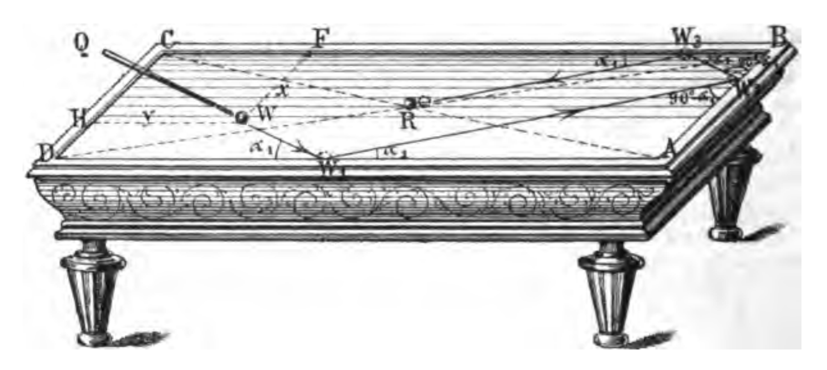
mithin:

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\frac{3b}{2} - y}{\frac{3a}{2} + x}$$

Erkl. 797. Um mit dem Ball W nach den in der Aufgabe 1227 gegebenen Bedingungen den Ball R, siehe Figur 562, zu treffen, nachdem er quadrupliert hat, kann man denselben auch nach der in der Figur 563 angedeuteten Weise spielen, nämlich so, dass er zunächst nicht an die Längsbande BC, sondern an die andere Längsbande AD des Billards anschlägt. Die Berechnung des Winkels α_1, unter welchem in diesem Fall der Ball an die erste Bande anschlagen muss, ist analog wie in nebenstehender Andeutung für den durch die Figur 562 angedeuteten Fall gesagt wurde.

nach welcher Gleichung man, in Rücksicht der für a, b, x und y gegebenen Zahlenwerte, den gesuchten Winkel α berechnen kann, unter welchem der Ball W an die Längsbande BC anschlagen muss, damit er, nachdem er quadrupliert hat, den Ball R trifft (siehe Erkl. 797).

Figur 563.



Anmerkung 64. Wie in den Anmerkungen 61 und 63 erwähnt, haben die vorstehenden Aufgaben aus der angewandten Mathematik nur den Zweck, an einzelnen Beispielen zu zeigen, wie die goniometrischen und trigonometrischen Sätze und Formeln zur Lösung wichtiger Probleme aus anderen Wissenschaften benutzt werden, sie haben somit zugleich den Zweck, dem Studierenden die Wichtigkeit der trigonometrischen Lehren darzuthun und ihn anzuspornen, dem Studium der Geometrie, von welcher die Trigonometrie nur ein besonderer Zweig ist, die grösstmögliche Aufmerksamkeit zu widmen.

Weitere trigonometrische Aufgaben aus der angewandten Mathematik sind in den Teilen dieser Encyklopädie enthalten, welche über besondere Zweige der exakten Naturwissenschaften und der Technik handeln.

Anmerkung 65. Aufgaben und Sätze über Vierecke und Vielecke, welche mittels trig. Sätze gelöst, bezw. hergeleitet werden, sind in diesem Buch nur in beschränktem Mass aufgenommen, da solche in ausführlicher Weise in den Teilen dieser Encyklopädie enthalten sind, welche über Polygonometrie handeln.

Aufgaben und Sätze über Körper, welche mittels trig. Sätze gelöst, bezw. hergeleitet werden, sind in ausführlicher Weise in den Teilen dieser Encyklopädie enthalten, welche über Stereometrie, Körperberechnungen und über die sphärische Trigonometrie handeln.

Aufgaben und Sätze über den Einfluss fehlerhafter trigonometrischer Daten auf Resultate, sind in den Teilen dieser Encyklopädie enthalten, welche über die Ausgleichungsrechnungen handeln.

Aufgaben und Sätze über die Konstruktion trigonometrischer Ausdrücke sind in den Teilen der Encyklopädie enthalten, welche über „Konstruktionsaufgaben, gelöst mit trigonometrischer Analysis", handeln.

Aufgaben und Sätze über die Bestimmung von Maxima und Minima mittels trig. Sätze sind in den Teilen der Encyklopädie enthalten, welche über Maxima und Minima handeln.

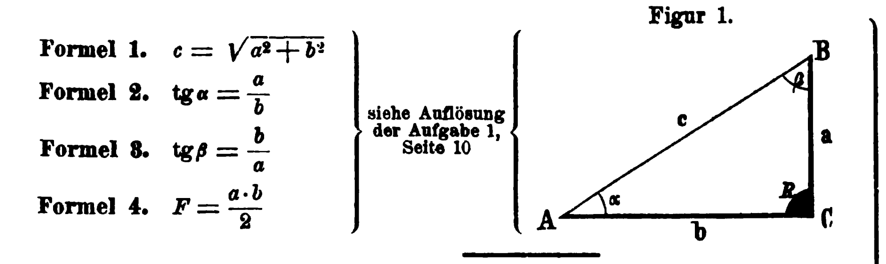
Formelnverzeichnis,

eine Zusammenstellung der **wichtigsten** der in diesem Buch entwickelten Formeln.

A) Grundformeln über das Dreieck.

1) Grundformeln zur Berechnung des rechtwinkligen Dreiecks aus gegebenen Seiten und Winkeln.

a) Gegeben die beiden Katheten, siehe Figur 1.



Formel 1. $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Formel 2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

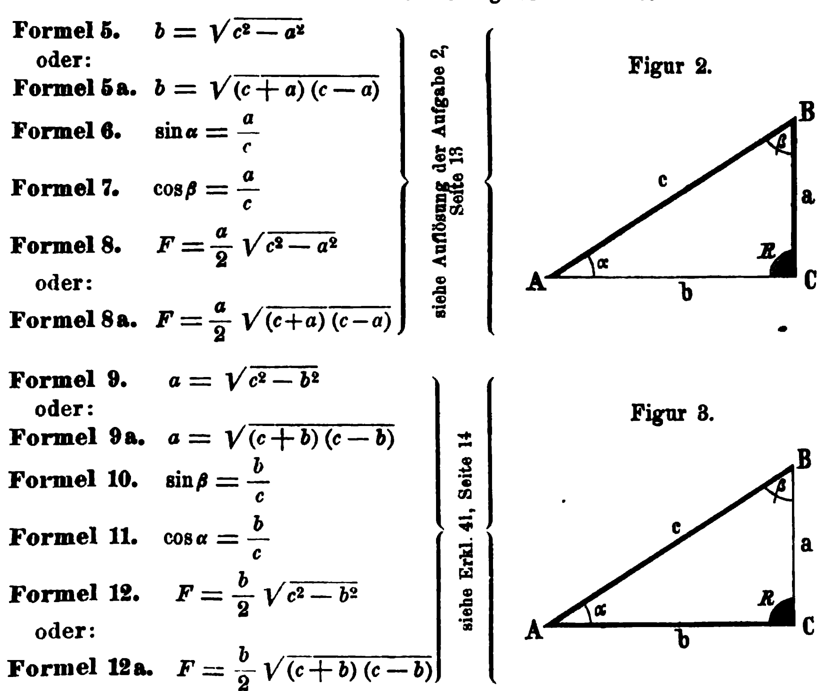
Formel 3. $\operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$

Formel 4. $F = \frac{a \cdot b}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 1, Seite 10

---

b) Gegeben eine Kathete und die Hypotenuse, siehe die Figuren 2 und 3.



Formel 5. $b = \sqrt{c^2 - a^2}$

oder:

Formel 5a. $b = \sqrt{(c + a)(c - a)}$

Formel 6. $\sin \alpha = \frac{a}{c}$

Formel 7. $\cos \beta = \frac{a}{c}$

Formel 8. $F = \frac{a}{2} \sqrt{c^2 - a^2}$

oder:

Formel 8a. $F = \frac{a}{2} \sqrt{(c+a)(c-a)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 2, Seite 13

Formel 9. $a = \sqrt{c^2 - b^2}$

oder:

Formel 9a. $a = \sqrt{(c + b)(c - b)}$

Formel 10. $\sin \beta = \frac{b}{c}$

Formel 11. $\cos \alpha = \frac{b}{c}$

Formel 12. $F = \frac{b}{2} \sqrt{c^2 - b^2}$

oder:

Formel 12a. $F = \frac{b}{2} \sqrt{(c + b)(c - b)}$

siehe Erkl. 41, Seite 14

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α und β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

---

c) Gegeben eine Kathete und ein Winkel, siehe die Figuren 4 bis 7.

Formel 13. $\beta = 90^0 - \alpha$

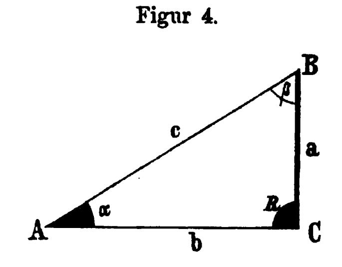
Formel 14. $c = \dfrac{a}{\sin\alpha}$

Formel 15. $b = a \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

Formel 16. $F = \dfrac{a^2}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

siehe Auflösung der Aufgabe 3, Seite 15

Figur 4.



Formel 17. $\alpha = 90^0 - \beta$

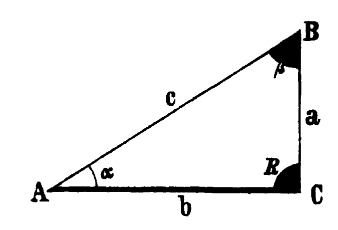
Formel 18. $c = \dfrac{b}{\sin\beta}$

Formel 19. $a = b \cdot \operatorname{ctg}\beta$

Formel 20. $F = \dfrac{b^2}{2} \operatorname{ctg}\beta$

siehe Erkl. 45, Seite 17

Figur 5.



Formel 21. $\alpha = 90^0 - \beta$

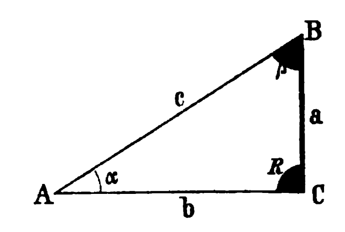
Formel 22. $b = a \cdot \operatorname{tg}\beta$

Formel 23. $c = \dfrac{a}{\cos\beta}$

Formel 24. $F = \dfrac{a^2}{2} \operatorname{tg}\beta$

siehe Auflösung der Aufgabe 4. Seite 17

Figur 6.



Formel 25. $\beta = 90^0 - \alpha$

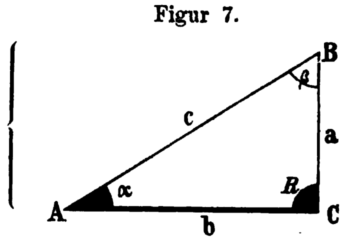
Formel 26. $a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$

Formel 27. $c = \dfrac{b}{\cos\alpha}$

Formel 28. $F = \dfrac{b^2}{2} \operatorname{tg}\alpha$

siehe Erkl. 49, Seite 19

Figur 7.



d) Gegeben die Hypotenuse und ein Winkel, siehe die Figuren 8 und 9.

Formel 29. $\beta = 90^0 - \alpha$

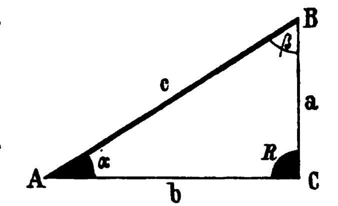
Formel 30. $a = c \cdot \sin\alpha$

Formel 31. $b = c \cdot \cos\alpha$

Formel 32. $F = \dfrac{c^2}{4} \cdot \sin 2\alpha$

siehe Auflösung der Aufgabe 5, Seite 19

Figur 8.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α und β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

Der **ausführliche Prospekt** und das **ausführliche Inhaltsverzeichnis** der „vollständig gelösten Aufgabensammlung von Dr. Ad. Kleyer“ kann von jeder Buchhandlung, sowie von der Verlagshandlung **gratis und portofrei** bezogen werden.

Bemerkt sei hier nur:

1). Jedes Heft ist aufgeschnitten und gut brochiert, um den **sofortigen** und **dauernden** Gebrauch zu gestatten.

2). Jedes Kapitel enthält sein besonderes Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und Erklärungen am Schlusse desselben.

3). Auf jedes einzelne Kapitel kann abonniert werden.

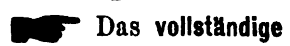
4). Monatlich erscheinen 3—4 Hefte zu dem **Abonnementspreise** von 25 Pfg. pro Heft.

5). Die **Reihenfolge** der Hefte im nachstehenden, kurz angedeuteten Inhaltsverzeichnis ist, **wie aus dem Prospekt ersichtlich, ohne jede Bedeutung** für die Interessenten.

6). Das Werk enthält **Alles**, was sich überhaupt auf mathematische Wissenschaften bezieht, alle Lehrsätze, Formeln und Regeln etc. mit Beweisen, alle praktischen Aufgaben in vollständig gelöster Form mit Anhängen ungelöster analoger Aufgaben und vielen vortrefflichen Figuren.

7). Das Werk ist ein **praktisches Lehrbuch für Schüler aller Schulen, das beste Handbuch** für Lehrer und Examinatoren, **das vorzüglichste Lehrbuch zum Selbststudium, das vortrefflichste Nachschlagebuch** für Fachleute und Techniker jeder Art.

8). Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen.

 Das vollständige

Inhaltsverzeichnis

der bis jetzt erschienenen Hefte

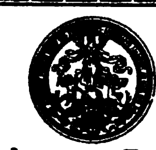
kann durch jede Buchhandlung bezogen werden.

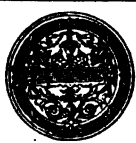
Halbjährlich erscheinen Nachträge über die inzwischen neu erschienenen Hefte.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

376. Heft. Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 375. — Seite 913—928.
Mit 34 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —
mit
Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln, in Fragen und Antworten
erläutert durch
viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,
aus allen Zweigen
der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspektive, Schattenkonstruktionen etc. etc.
für
Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.
zum einzig richtigen und erfolgreichen
Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,
herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,
Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse
in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 375. — Seite 913—928. Mit 34 Figuren.

Inhalt:

Stuttgart 1887.
Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, **erscheint monatlich in 3—4 Heften** zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik**, Physik, **Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine grössere Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen und erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ordn., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen** aller Arten, **gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten** aller Arten als z. B. für das **Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste**, Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

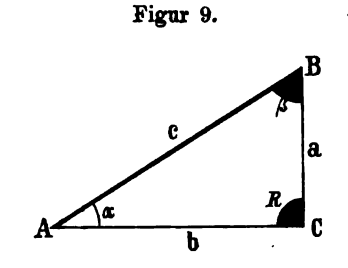
Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schul-Unterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teils** der mathematischen Disciplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten **eine** vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten.** Lust, Liebe und Verständnis für den Schulunterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und Fachgenossen aller **Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapital lebendige** Kraft verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser Dr. Kleyer, Frankfurt a. M., Fischerfeldstrasse 16, entgegen, und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Figur 9.



Formel 33. $\alpha = 90^0 - \beta$

Formel 34. $a = c \cdot \cos\beta$

Formel 35. $b = c \cdot \sin\beta$

Formel 36. $F = \frac{c^2}{4} \cdot \sin 2\beta$

siehe Erkl. 53, Seite 21

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, und β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren. F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

---

2) Grundformeln zur Berechnung des gleichschenkligen Dreiecks aus gegebenen Seiten und Winkeln und der gegebenen Höhe.

a) Gegeben ein Schenkel und die Basis, siehe Figur 10.

Formel 37. $h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

oder:

Formel 37a. $h = \sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(a - \frac{b}{2}\right)}$

Formel 38. $\cos\alpha = \frac{b}{2a}$

Formel 39. $\sin\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2a}$

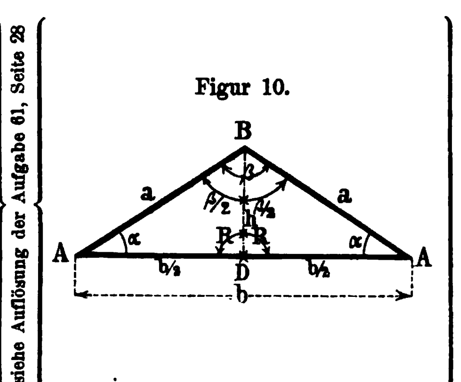
Formel 40. $F = \frac{b}{2}\sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

oder:

Formel 40a. $F = \frac{b}{2}\sqrt{\left(a + \frac{b}{2}\right)\left(a - \frac{b}{2}\right)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 61, Seite 28

Figur 10.



---

b) Gegeben die Basis und die Höhe, siehe Figur 11.

Formel 41. $a = \sqrt{h^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$

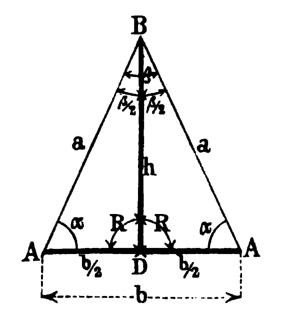
Formel 42. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2h}{b}$

Formel 43. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{b}{2h}$

Formel 44. $F = \frac{b \cdot h}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 62, Seite 30

Figur 11.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und h; α und β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren. F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

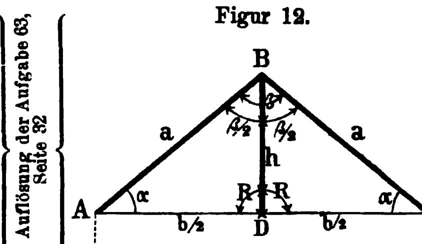
---

c) Gegeben ein Schenkel und die Höhe, siehe Figur 12.

Formel 45. $b = 2\sqrt{a^2 - h^2}$
oder:
Formel 45a. $b = 2\sqrt{(a+h)(a-h)}$
Formel 46. $\sin\alpha = \frac{h}{a}$
Formel 47. $\cos\frac{\beta}{2} = \frac{h}{a}$
Formel 48. $F = h\sqrt{a^2 - h^2}$
oder:
Formel 48a. $F = h\sqrt{(a+h)(a-h)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 63, Seite 32

Figur 12.

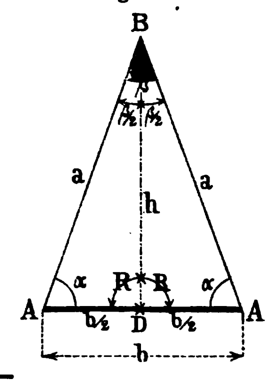


d) Gegeben der Scheitelwinkel und die Basis, siehe Figur 13.

Formel 49. $\alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}$
Formel 50. $a = \frac{b}{2\sin\frac{\beta}{2}}$
Formel 51. $h = \frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$
Formel 52. $F = \frac{b^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 64, Seite 34

Figur 13.

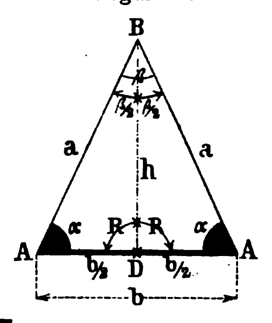


e) Gegeben ein Basiswinkel und die Basis, siehe Figur 14.

Formel 53. $\beta = 2(90^0 - \alpha)$
Formel 54. $a = \frac{b}{2\cos\alpha}$
Formel 55. $h = \frac{b}{2}\operatorname{tg}\alpha$
Formel 56. $F = \frac{b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$

siehe Erkl. 64, Seite 35

Figur 14.

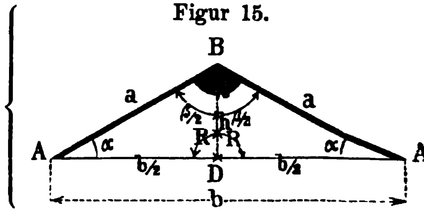


f) Gegeben der Scheitelwinkel und ein Schenkel, siehe Figur 15.

Formel 57. $\alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}$
Formel 58. $b = 2a\cdot\sin\frac{\beta}{2}$
Formel 59. $h = a\cdot\cos\frac{\beta}{2}$
Formel 60. $F = \frac{a^2}{2}\cdot\sin\beta$

siehe Auflösung der Aufgabe 65, Seite 36

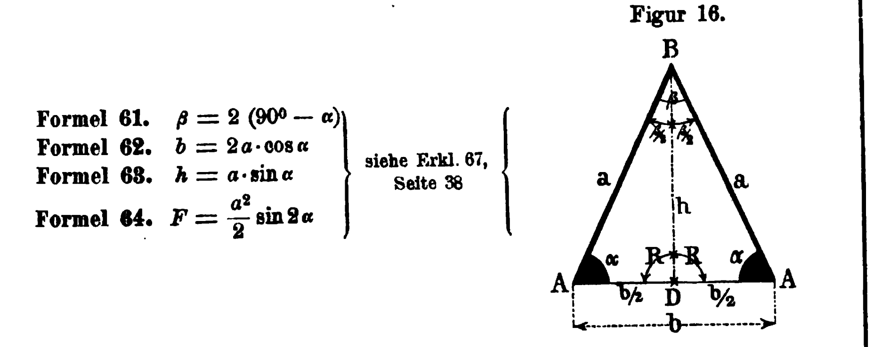
Figur 15.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und h; α und β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren. F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

g) Gegeben ein Basiswinkel und ein Schenkel, siehe Figur 16.

Figur 16.



Formel 61. $\beta = 2\,(90^0 - \alpha)$

Formel 62. $b = 2a \cdot \cos\alpha$

Formel 63. $h = a \cdot \sin\alpha$

Formel 64. $F = \frac{a^2}{2} \sin 2\alpha$

} siehe Erkl. 67, Seite 38

h) Gegeben der Scheitelwinkel und die Höhe, siehe Figur 17.

Figur 17.

Formel 65. $\alpha = 90^0 - \frac{\beta}{2}$

Formel 66. $b = 2h \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$

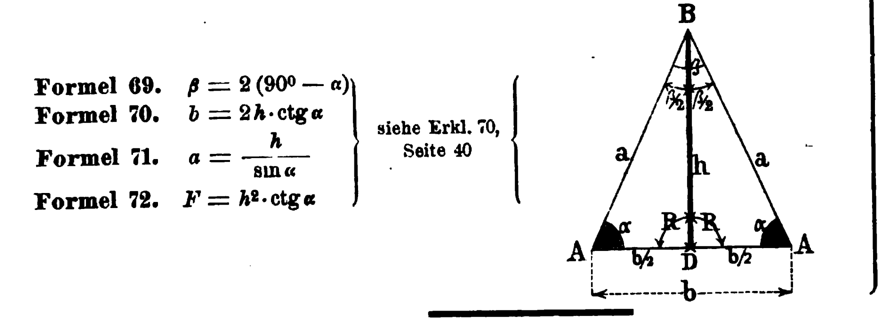
Formel 67. $a = \frac{h}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Formel 68. $F = h^2 \cdot \mathrm{tg}\,\frac{\beta}{2}$

} siehe Aufgabe 66, Seite 38

i) Gegeben ein Basiswinkel und die Höhe, siehe Figur 18.

Figur 18.



Formel 69. $\beta = 2\,(90^0 - \alpha)$

Formel 70. $b = 2h \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$

Formel 71. $a = \frac{h}{\sin\alpha}$

Formel 72. $F = h^2 \cdot \mathrm{ctg}\,\alpha$

} siehe Erkl. 70, Seite 40

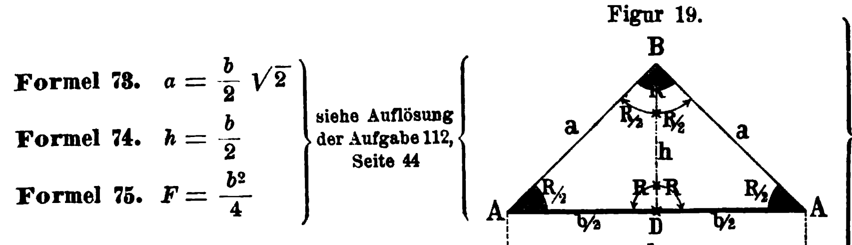
Die Bedeutung der Buchstaben a, b u. h; α u. β ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

3) Grundformeln zur Berechnung des rechtwinklig-gleichschenkligen Dreiecks aus gegebenen Seiten und der gegebenen Höhe.

a) Gegeben die Hypotenuse, siehe Figur 19.

Figur 19.



Formel 73. $a = \frac{b}{2}\sqrt{2}$

Formel 74. $h = \frac{b}{2}$

Formel 75. $F = \frac{b^2}{4}$

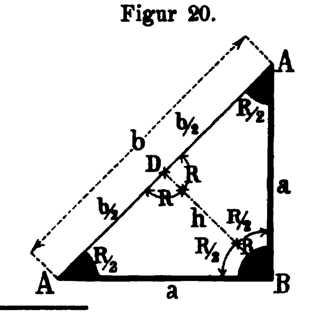
} siehe Auflösung der Aufgabe 112, Seite 44

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und h ergibt sich aus der beigegebenen Figur.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

b) Gegeben eine Kathete, siehe Figur 20.

Figur 20.



Formel 76. $b = a\sqrt{2}$

Formel 77. $h = \frac{a}{2}\sqrt{2}$

Formel 78. $F = \frac{a^2}{2}$

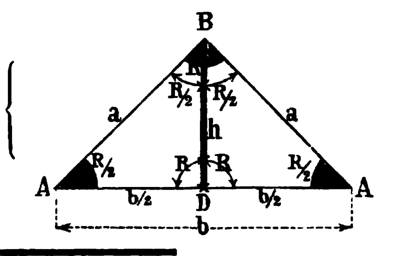
siehe Auflösung der Aufgabe 113, Seite 45

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und h ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

c) Gegeben die Höhe, siehe Figur 21.

Figur 21.



Formel 79. $b = 2h$

Formel 80. $a = h\sqrt{2}$

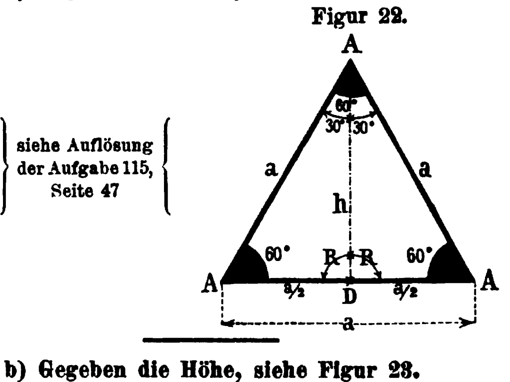
Formel 81. $F = h^2$

siehe Auflösung der Aufgabe 114, Seite 46

4) Grundformeln zur Berechnung des gleichseitigen Dreiecks aus der gegebenen Seite und der Höhe.

a) Gegeben die Seite, siehe Figur 22.

Figur 22.



Formel 82. $h = \frac{a}{2}\sqrt{3}$

Formel 83. $F = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$

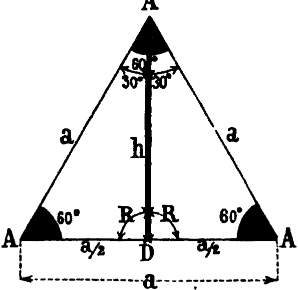
siehe Auflösung der Aufgabe 115, Seite 47

Die Bedeutung der Buchstaben a und h ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

b) Gegeben die Höhe, siehe Figur 23.

Figur 23.

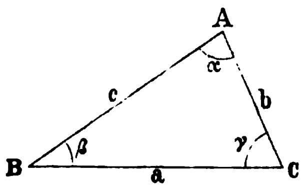


Formel 84. $a = \frac{2h}{3}\sqrt{3}$

Formel 85. $F = \frac{2h^2}{6}\sqrt{3}$

siehe Auflösung der Aufgabe 116, Seite 48

5) Hülfsformeln, welche zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks erforderlich sind.



Figur 24.

Formel 86. $a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$ [1]

oder:

Formel 86a. $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

} siehe Antw. auf Frage 18 und Antw. auf Frage 19, Seite 51

Formel 86b. $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ [1]

Formel 86c. $a : c = \sin\alpha : \sin\gamma$

Formel 86d. $b : c = \sin\beta : \sin\gamma$

} siehe Erkl. 80, Seite 51

[1]) Durch die Formeln 86 bis 86d wird der sog. Sinusregel Ausdruck verliehen (siehe Antwort auf Frage 18, Seite 51).

Formel 87. $a = b\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\beta$ [2]

Formel 87a. $b = a\cdot\cos\gamma + c\cdot\cos\alpha$

Formel 87b. $c = a\cdot\cos\beta + b\cdot\cos\alpha$

} siehe Antw. auf Frage 18 und Antw. auf Frage 20, Seite 57

[2]) Durch die Formeln 87 bis 87b wird der sog. Kosinusregel Ausdruck verliehen (siehe Antwort auf Frage 18, Seite 51).

Formel 88. $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$ [3]

Formel 88a. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cdot\cos\beta$

Formel 88b. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\gamma$

} siehe Antw. auf Frage 21 und Antw. auf Frage 22, Seite 59

[3]) Durch die Formeln 88 bis 88b wird dem sog. Projektions- oder dem Carnotschen Satz oder dem allgemeinen pythagoreischen Lehrsatz Ausdruck verliehen (siehe Antwort auf Frage 21, Seite 59).

Formel 88c. $a^2 = (b-c)^2 + 4bc\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}$ [4]

Formel 88d. $a^2 = (b-c)^2 + \left(2\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{bc}\right)^2$

Formel 88e. $a^2 = (b+c)^2 - 4bc\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$

Formel 88f. $a^2 = (b+c)^2 - \left(2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)^2$

Formel 88g. $a^2 = \left(b + c + 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)\cdot\left(b + c - 2\cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{bc}\right)$

Formel 88h. $a^2 = \left[(b+c)\sin\frac{\alpha}{2}\right]^2 + \left[(b-c)\cos\frac{\alpha}{2}\right]^2$

Formel 88i. $b^2 = (a-c)^2 + 4ac\sin^2\frac{\beta}{2}$

Formel 88k. $b^2 = (a-c)^2 + \left(2\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{ac}\right)^2$

Formel 88l. $b^2 = (a+c)^2 - 4ac\cos^2\frac{\beta}{2}$

Formel 88m. $b^2 = (a+c)^2 - \left(2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac}\right)^2$

Formel 88n. $b^2 = \left(a + c + 2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac}\right)\cdot\left(a + c - 2\cos\frac{\beta}{2}\sqrt{ac}\right)$

Formel 88o. $b^2 = \left[(a+c)\sin\frac{\beta}{2}\right]^2 + \left[(a-c)\cos\frac{\beta}{2}\right]^2$

} [4]) siehe Erkl. 101, Seite 61

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der Figur 24.

Formel 88p. $c^2 = (a-b)^2 + 4ab\sin^2\frac{\gamma}{2}$

Formel 88q. $c^2 = (a-b)^2 + \left(2\sin\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)^2$

Formel 88r. $c^2 = (a+b)^2 - 4ab\cos^2\frac{\gamma}{2}$

Formel 88s. $c^2 = (a+b)^2 - \left(2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)^2$

Formel 88t. $c^2 = \left(a+b+2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)\cdot\left(a+b-2\cos\frac{\gamma}{2}\sqrt{ab}\right)$

Formel 88u. $c^2 = \left[(a+b)\sin\frac{\gamma}{2}\right]^2 + \left[(a-b)\cos\frac{\gamma}{2}\right]^2$

[4] siehe Erkl. 101, Seite 61

[4]) Die Formeln 88c bis 88u sind Umformungen der Formeln 88 bis 88b (siehe Erkl. 101, Seite 61).

Formel 89. $(a+b):c = \cos\frac{\alpha-\beta}{2} : \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 89a. $(a+c):b = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} : \cos\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 89b. $(b+c):a = \cos\frac{\beta-\gamma}{2} : \cos\frac{\beta+\gamma}{2}$

[5]) siehe Antwort auf Frage 21 und Antwort auf Frage 23, Seite 66

Formel 90. $(a-b):c = \sin\frac{\alpha-\beta}{2} : \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$

Formel 90a. $(a-c):b = \sin\frac{\alpha-\gamma}{2} : \sin\frac{\alpha+\gamma}{2}$

Formel 90b. $(b-c):a = \sin\frac{\beta-\gamma}{2} : \sin\frac{\beta+\gamma}{2}$

[5]) siehe Antwort auf Frage 21 und Antwort auf Frage 24, Seite 69

[5]) Durch die Formeln 89 bis 89b und 90 bis 90b wird den Mollweideschen Sätzen Ausdruck verliehen (siehe Antwort auf Frage 21, Seite 59).

Formel 91. $(a+b):(a-b) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}$

Formel 91a. $(a+c):(a-c) = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\alpha-\gamma}{2}$

Formel 91b. $(b+c):(b-c) = \operatorname{tg}\frac{\beta+\gamma}{2} : \operatorname{tg}\frac{\beta-\gamma}{2}$

[6]) siehe Antwort auf Frage 21 und Antwort auf Frage 25, Seite 71

[6]) Durch die Formeln 91 bis 91b wird dem sog. Tangenten-Satz Ausdruck verliehen (siehe Antwort auf Frage 21, Seite 59).

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der Figur 24.

6) Grundformeln zur Berechnung des schiefwinkligen Dreiecks aus gegebenen Seiten und Winkeln.

a) Gegeben eine Seite und zwei Winkel, siehe die Figuren 25 bis 28.

Formel 92. $\gamma = 2R - (\alpha+\beta)$

Formel 93. $b = \frac{a\cdot\sin\beta}{\sin\alpha}$

Formel 94. $c = \frac{a\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$

Formel 95. $F = \frac{a^2\cdot\sin(\alpha+\beta)\sin\beta}{2\sin\alpha}$

s. Auflösung 1 der Aufgabe 117, Seite 75

Figur 25.

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

Formel 96. $b + c = a \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} : \cos\frac{\beta + \gamma}{2}$

Formel 96a. $b - c = a \cdot \sin\frac{\beta - \gamma}{2} : \sin\frac{\beta + \gamma}{2}$

siehe Auflösung 2 der Aufgabe 117, Seite 77

Formel 97. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

Formel 98. $b = \frac{a \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin\alpha}$

Formel 99. $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

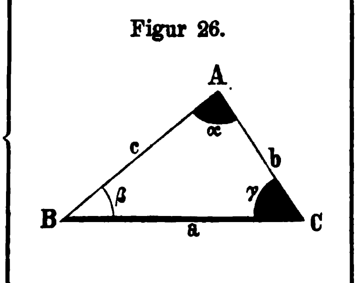
Formel 100. $F = \frac{a^2 \cdot \sin(\alpha + \gamma) \cdot \sin\gamma}{2 \sin\alpha}$

Formel 100a. $b + c = a \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} : \cos\frac{\beta + \gamma}{2}$

Formel 100b. $b - c = a \cdot \sin\frac{\beta - \gamma}{2} : \sin\frac{\beta + \gamma}{2}$

siehe Erkl. 129, Seite 80

Figur 26.



Formel 101. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

Formel 102. $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin(\beta + \gamma)}$

Formel 103. $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin(\beta + \gamma)}$

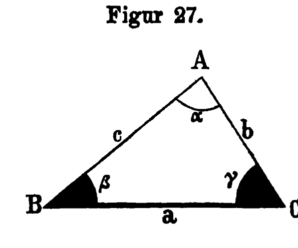
Formel 104. $F = \frac{a^2 \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma}{2 \sin(\beta + \gamma)}$

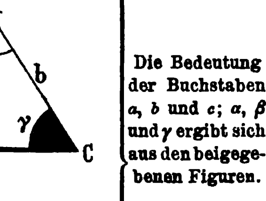
Formel 104a. $b + c = a \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2} : \cos\frac{\beta + \gamma}{2}$

Formel 104b. $b - c = a \cdot \sin\frac{\beta - \gamma}{2} : \sin\frac{\beta + \gamma}{2}$

siehe Erkl. 130, Seite 80

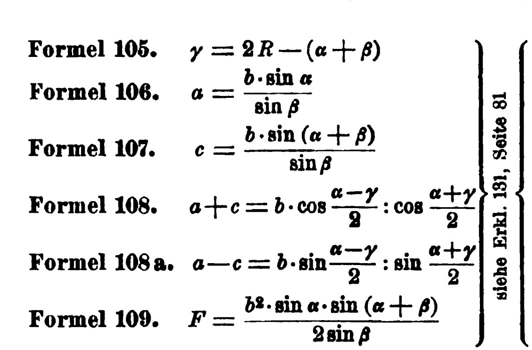
Figur 27.





Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.



Formel 105. $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

Formel 106. $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$

Formel 107. $c = \frac{b \cdot \sin(\alpha + \beta)}{\sin\beta}$

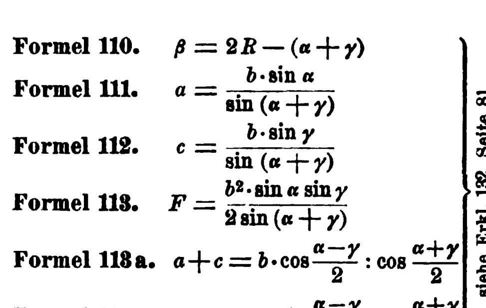
Formel 108. $a + c = b \cdot \cos\frac{\alpha - \gamma}{2} : \cos\frac{\alpha + \gamma}{2}$

Formel 108a. $a - c = b \cdot \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin\frac{\alpha + \gamma}{2}$

Formel 109. $F = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\beta}$

siehe Erkl. 131, Seite 81

Figur 28.



Formel 110. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

Formel 111. $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha + \gamma)}$

Formel 112. $c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin(\alpha + \gamma)}$

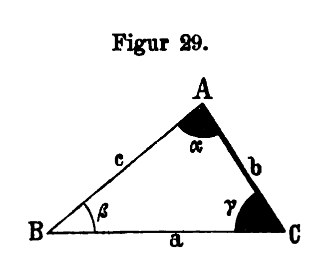
Formel 113. $F = \frac{b^2 \cdot \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin(\alpha + \gamma)}$

Formel 113a. $a + c = b \cdot \cos\frac{\alpha - \gamma}{2} : \cos\frac{\alpha + \gamma}{2}$

Formel 113b. $a - c = b \cdot \sin\frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin\frac{\alpha + \gamma}{2}$

siehe Erkl. 132, Seite 81

Figur 29.



Formel 114. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

Formel 115. $a = \frac{b \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \beta}$

Formel 116. $c = \frac{b \cdot \sin \gamma}{\sin \beta}$

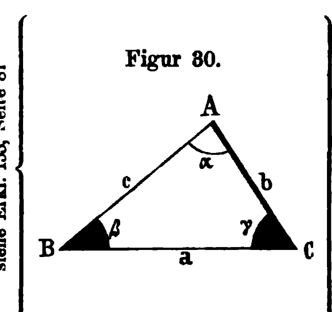
Formel 117. $F = \frac{b^2 \cdot \sin \gamma \sin(\beta + \gamma)}{2 \cdot \sin \beta}$

Formel 117a. $a + c = b \cdot \cos \frac{\alpha - \gamma}{2} : \cos \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Formel 117b. $a - c = b \cdot \sin \frac{\alpha - \gamma}{2} : \sin \frac{\alpha + \gamma}{2}$

siehe Erkl. 133, Seite 81

Figur 30.



Formel 118. $\gamma = 2R - (\alpha + \beta)$

Formel 119. $a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin(\alpha + \beta)}$

Formel 120. $b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin(\alpha + \beta)}$

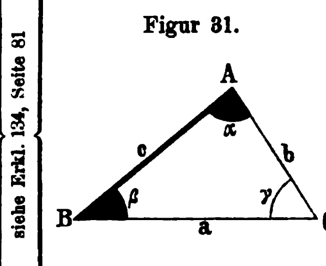
Formel 121. $a + b = c \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

Formel 121a. $a - b = c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$

Formel 122. $F = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}$

siehe Erkl. 134, Seite 81

Figur 31.



Formel 123. $\beta = 2R - (\alpha + \gamma)$

Formel 124. $a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma}$

Formel 125. $b = \frac{c \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{\sin \gamma}$

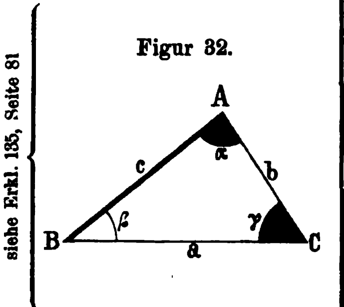
Formel 126. $F = \frac{c^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \cdot \sin \gamma}$

Formel 126a. $a + b = c \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

Formel 126b. $a - b = c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$

siehe Erkl. 135, Seite 81

Figur 32.



Formel 127. $\alpha = 2R - (\beta + \gamma)$

Formel 128. $a = \frac{c \cdot \sin(\beta + \gamma)}{\sin \gamma}$

Formel 129. $b = \frac{c \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$

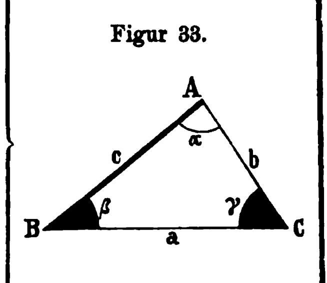
Formel 130. $F = \frac{c^2 \cdot \sin \beta \cdot \sin(\beta + \gamma)}{2 \sin \gamma}$

Formel 130a. $a + b = c \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2} : \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$

Formel 130b. $a - b = c \cdot \sin \frac{\alpha - \beta}{2} : \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$

siehe Erkl. 136, Seite 82

Figur 33.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus den beigegebenen Figuren.

F bedeutet den Inhalt des betreffend. Dreiecks.

b) Gegeben zwei Seiten und der von beiden eingeschlossene Winkel, siehe die Figuren 34 bis 36.

Formel 131. $\alpha + \beta = 2R - \gamma$

Formel 131a. $\operatorname{tg}\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{a - b}{a + b} \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha + \beta}{2}$

Formel 132. $c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma}$

Formel 133. $F = \frac{ab}{2} \cdot \sin\gamma$

} siehe die Auflösung 1 der Aufgabe 118, Seite 82

Statt der Formel 132 kann man auch die Formel:

Formel 134. $c = \sqrt{(a + b + m)(a + b - m)}$

in welcher Formel

Formel 134a. $m = 2\sqrt{ab} \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$

} siehe Erkl. 139, Seite 86

ist; oder die

Formel 135. $c = \frac{a - b}{\cos\varphi}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 135a. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\gamma}{2}}{a - b}\sqrt{ab}$

ergibt; oder die

Formel 136. $c = (a + b) \cdot \cos\varphi$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 136a. $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\gamma}{2}}{a + b}\sqrt{ab}$

ergibt, benutzen.

} siehe die Auflösung 2 der Aufgabe 118, Seite 85

Statt der Formeln 131 und 131a kann man auch die

Formel 137. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{b - a \cdot \cos\gamma}$

oder die

Formel 138. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 138a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{a \cdot \sin\gamma}$

ergibt; und die

Formel 139. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{a - b \cdot \cos\gamma}$

oder die

Formel 140. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\gamma \cdot \sin\varphi}{\sin(\gamma - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 140a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{b \cdot \sin\gamma}$

ergibt, benutzen.

} *) siehe die Auflösung 3 der Aufgabe 118, Seite 88

*) Sind die Winkel α und β mittels der vorstehend angeführten Formeln berechnet, so kann man auch zur Berechnung der dritten Seite c statt der Formeln 132, 134, 135 und 136 eine der Formeln:

Formel 141. $c = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha}$

oder:

Formel 142. $c = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\beta}$

oder:

Formel 143. $c = (a + b)\cos\frac{\alpha + \beta}{2} : \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

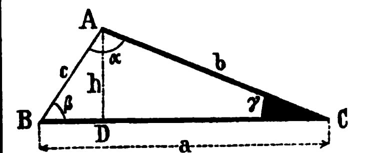
oder:

Formel 144. $c = (a - b) \cdot \sin\frac{\alpha + \beta}{2} : \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

benutzen.

} siehe Erkl. 143, Seite 89.

Figur 34.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der beigegebenen Figur 34.

F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

Formel 145. $\alpha + \gamma = 2R - \beta$

Formel 145a. $\operatorname{tg} \frac{\alpha - \gamma}{2} = \frac{a - c}{a + c} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha + \gamma}{2}$

Formel 146. $b = \sqrt{a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta}$

Formel 147. $F = \frac{ac}{2} \cdot \sin\beta$

siehe Erkl. 155, Seite 92

Statt der Formel 146 kann man auch die Formel:

Formel 148. $b = \sqrt{(a + c + m)(a + c - m)}$

in welcher Formel

Formel 148a. $m = 2\sqrt{ac} \cdot \cos \frac{\beta}{2}$

ist; oder die

Formel 149. $b = \frac{a - c}{\cos\varphi}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 149a. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2 \sin \frac{\beta}{2}}{a - c} \sqrt{ac}$

ergibt; oder die

Formel 150. $b = (a + c) \cdot \cos\varphi$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 150a. $\sin\varphi = \frac{2 \cos \frac{\beta}{2}}{a + c} \sqrt{ac}$

ergibt, benutzen.

siehe Erkl. 155, Seite 92

Statt der Formeln 145 und 145a kann man auch die

Formel 151. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a \sin\beta}{c - a \cos\beta}$

oder die

Formel 152. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\beta \cdot \sin\varphi}{\sin(\beta - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 152a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{c}{a \sin\beta}$

ergibt; und die

Formel 153. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{a - c \cos\beta}$

oder die

Formel 154. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\beta \sin\varphi}{\sin(\beta - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 154a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{a}{c \sin\beta}$

ergibt, benutzen. *)

siehe Erkl. 155, Seite 92

*) Sind die Winkel α und γ mittels der vorstehend angeführten Formeln berechnet, so kann man auch zur Berechnung der dritten Seite b statt der Formeln 146, 148, 149 und 150 eine der Formeln:

Formel 155. $b = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\alpha}$

Formel 156. $b = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma}$

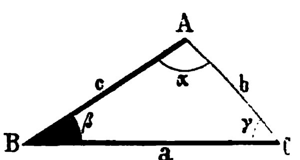
Formel 157. $b = (a + c) \cdot \cos \frac{\alpha + \gamma}{2} : \cos \frac{\alpha - \gamma}{2}$

Formel 158. $b = (a - c) \cdot \sin \frac{\alpha + \gamma}{2} : \sin \frac{\alpha - \gamma}{2}$

benutzen.

siehe Erkl. 155, Seite 92

Figur 35.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der beigegebenen Figur 35.

F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

Formel 159. $\beta + \gamma = 2R - \alpha$

Formel 159a. $\operatorname{tg}\frac{\beta - \gamma}{2} = \frac{b - c}{b + c} \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta + \gamma}{2}$

Formel 160. $a = \sqrt{b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha}$

Formel 161. $F = \frac{bc}{2} \cdot \sin\alpha$

siehe Erkl. 156, Seite 93

Statt der Formel 160 kann man auch die Formel:

Formel 162. $a = \sqrt{(b + c + m)(b + c - m)}$

in welcher Formel

Formel 162a. $m = 2\sqrt{bc} \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$

ist; oder die

Formel 163. $a = \frac{b - c}{\cos\varphi}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 163a. $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}}{b - c}\sqrt{bc}$

ergibt; oder die

Formel 164. $a = (b + c) \cdot \cos\varphi$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 164a. $\sin\varphi = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}}{b + c}\sqrt{bc}$

ergibt, benutzen.

siehe Erkl. 156, Seite 93

Statt der Formeln 159 und 159a kann man auch die

Formel 165. $\operatorname{tg}\beta = \frac{b\sin\alpha}{c - b\cos\alpha}$ *)

oder die

Formel 166. $\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 166a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{c}{b\sin\alpha}$

und die

Formel 167. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{c\sin\alpha}{b - c\cos\alpha}$

oder die

Formel 168. $\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha \cdot \sin\varphi}{\sin(\alpha - \varphi)}$

in welcher Formel φ einen Hülfswinkel bedeutet, der sich aus

Formel 168a. $\operatorname{ctg}\varphi = \frac{b}{c\sin\alpha}$

ergibt, benutzen.

siehe Erkl. 156, Seite 93

*) Sind die Winkel β und γ mittels der vorstehend angeführten Formeln berechnet, so kann man auch zur Berechnung der dritten Seite a statt der Formeln 160, 162, 163 und 164 eine der Formeln:

Formel 169. $a = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\beta}$

Formel 170. $a = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma}$

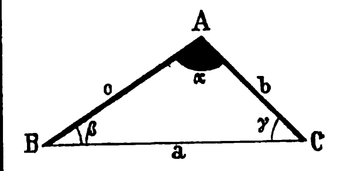
Formel 171. $a = (b + c) \cdot \cos\frac{\beta + \gamma}{2} : \cos\frac{\beta - \gamma}{2}$

Formel 172. $a = (b - c) \cdot \sin\frac{\beta + \gamma}{2} : \sin\frac{\beta - \gamma}{2}$

benutzen.

siehe Erkl. 156, Seite 93

Figur 36.

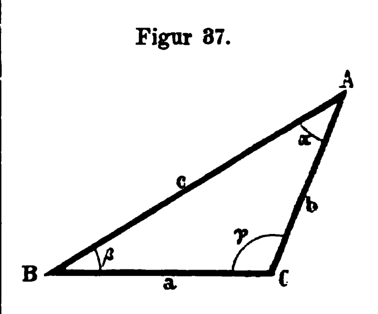


Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der beigegebenen Figur 36.

F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

c) Gegeben die drei Seiten, siehe die Figur 87.

Figur 87.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b u. c, α, β u. γ ergibt sich aus der Figur 87.

s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten a, b u. c,
also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Formel 173. $\cos\alpha = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

Formel 174. $\cos\beta = \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$

Formel 175. $\cos\gamma = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 119, Seite 94

Statt dieser Formeln kann man auch, wenn:

$$\frac{a+b+c}{2} = s$$

ist, die Formeln:

Formel 176. $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$ [7])

Formel 177. $\sin\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{ac}}$

Formel 178. $\sin\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{ab}}$

} siehe Erkl. 160, Seite 96

oder die Formeln:

Formel 179. $\cos\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-a)}{bc}}$ [7])

Formel 180. $\cos\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-b)}{ac}}$

Formel 181. $\cos\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{s(s-c)}{ab}}$

} siehe Erkl. 161, Seite 97

oder die Formeln:

Formel 182. $\sin\alpha = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [7])

Formel 183. $\sin\beta = \dfrac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

Formel 184. $\sin\gamma = \dfrac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

} siehe Erkl. 162, Seite 99

oder die Formeln:

Formel 185. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$ [7])

Formel 186. $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$

Formel 187. $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$

} siehe Erkl. 164, Seite 100

oder die Formeln:

Formel 188. $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{s-a}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$ [7])

Formel 189. $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2} = \dfrac{1}{s-b}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

Formel 190. $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{s-c}\sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

} siehe Erkl. 165, Seite 101

oder, wenn man in diesen Formeln 188 bis 190:

$$\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}} = r$$

setzt, die Formeln:

Formel 191. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{s-a}$

Formel 192. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{r}{s-b}$

Formel 193. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{r}{s-c}$

[7]) siehe Erkl. 166, Seite 102

Formel 194. $F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ — [7]) siehe die Erkl. 170 u. 171, Seite 104

benutzen.

[7]) Bei Benutzung der Formeln 176 bis 194 ist wohl zu beachten, dass:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

ist.

Die Bedeutung der Buchstaben a, b u. c; α, β u. γ ergibt sich aus der Figur 37.

F bedeutet den Inhalt des betreffenden Dreiecks.

r bedeutet den Radius des dem betreffenden Dreieck umbeschriebenen Kreises; man hat für denselben:

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

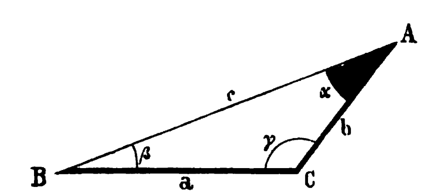
s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten a, b u. c, also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

---

d) Gegeben zwei Seiten und der der grösseren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel, siehe die Figuren 38 bis 43.

Figur 38.



Formel 195. $\sin\beta = \frac{b\cdot\sin\alpha}{a}$

Formel 196. $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{(a^2-(b\sin\alpha)^2} + \frac{b\cdot\sin 2\alpha}{2a}$

oder:

Formel 196a. $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)} + \frac{b\cdot\sin 2\alpha}{2a}$

Formel 197. $c = \sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2} + b\cdot\cos\alpha$

oder:

Formel 197a. $c = \sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)} + b\cdot\cos\alpha$

Formel 198. $F = \frac{b\sin\alpha}{2}\sqrt{a^2-(b\sin\alpha)^2} + \frac{b^2\sin 2\alpha}{4}$

oder:

Formel 198a. $F = \frac{b\sin\alpha}{2}\sqrt{(a+b\sin\alpha)(a-b\sin\alpha)} + \frac{b^2\sin 2\alpha}{4}$

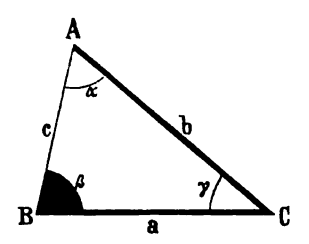
[8]) siehe Auflösung der Aufgabe 120, Seite 107

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der Figur 38.

F bedeutet den Inhalt des betreff. Dreiecks.

[8]) Bei Anwendung der Formeln 195 bis 198a wird vorausgesetzt, dass die Seite a grösser als die Seite b ist.

Figur 39.



Formel 199. $\sin\alpha = \frac{a\cdot\sin\beta}{b}$ [9]

Formel 200. $\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{b^2-(a\sin\beta)^2}+\frac{a\sin 2\beta}{2b}$

oder:

Formel 200 a. $\sin\gamma = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{(b+a\sin\beta)(b-a\sin\beta)}+\frac{a\sin 2\beta}{2b}$

Formel 201. $c = \sqrt{b^2-(a\sin\beta)^2}+a\cdot\cos\beta$

oder:

Formel 201 a. $c = \sqrt{(b+a\sin\beta)(b-a\sin\beta)}+a\cdot\cos\beta$

Formel 202. $F = \frac{a\sin\beta}{2}\sqrt{b^2-(a\sin\beta)^2}+\frac{a^2\sin 2\beta}{4}$

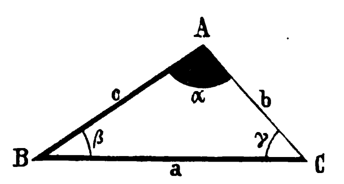
oder:

Formel 202 a. $F = \frac{a\sin\beta}{2}\sqrt{(b+a\sin\beta)(b-a\sin\beta)}+\frac{a^2\sin 2\beta}{4}$

siehe Erkl. 182, Seite 113

[9]) Bei Anwendung der Formeln 199 bis 202a wird vorausgesetzt, dass die Seite b **grösser** als die Seite a ist.

Figur 40.



Formel 203. $\sin\gamma = \frac{c\cdot\sin\alpha}{a}$ [10]

Formel 204. $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{a^2-(c\sin\alpha)^2}+\frac{c\cdot\sin 2\alpha}{2a}$

oder:

Formel 204 a. $\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{a}\sqrt{(a+c\sin\alpha)(a-c\sin\alpha)}+\frac{c\sin 2\alpha}{2a}$

Formel 205. $b = \sqrt{a^2-(c\sin\alpha)^2}+c\cdot\cos\alpha$

oder:

Formel 205 a. $b = \sqrt{(a+c\sin\alpha)(a-c\sin\alpha)}+c\cdot\cos\alpha$

Formel 206. $F = \frac{c\sin\alpha}{2}\sqrt{a^2-(c\sin\alpha)^2}+\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$

oder:

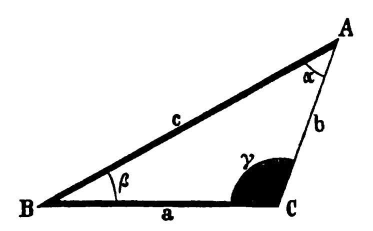
Formel 206 a. $F = \frac{c\sin\alpha}{2}\sqrt{(a+c\sin\alpha)(a-c\sin\alpha)}+\frac{c^2\sin 2\alpha}{4}$

siehe Erkl. 183, Seite 113

[10]) Bei Anwendung der Formeln 203 bis 206a wird vorausgesetzt, dass die Seite a **grösser** als die Seite c ist.

Die Bedeutung d… Buchstaben a, … und c; α, β und … ergibt sich aus de… Figuren 39 und 4… F bedeutet den I… halt des betr… Dreiecks.

Figur 41.



Formel 207. $\sin\alpha = \frac{a \cdot \sin\gamma}{c}$

Formel 208. $\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{c^2 - (a\sin\gamma)^2} + \frac{a\sin 2\gamma}{2c}$

oder:

Formel 208a. $\sin\beta = \frac{\sin\gamma}{2}\sqrt{(c + a\sin\gamma)(c - a\sin\gamma)} + \frac{a\sin 2\gamma}{2c}$

Formel 209. $b = \sqrt{c^2 - (a\sin\gamma)^2} + a \cdot \cos\gamma$

oder:

Formel 209a. $b = \sqrt{(c + a\sin\gamma)(c - a\sin\gamma)} + a \cdot \cos\gamma$

Formel 210. $F = \frac{a\sin\gamma}{2}\sqrt{(c^2 - a\sin\gamma)^2} + \frac{a^2\sin 2\gamma}{4}$

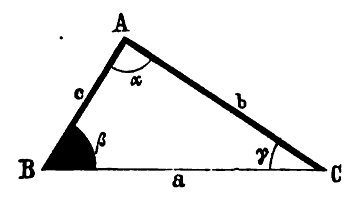
oder:

Formel 210a. $F = \frac{a\sin\gamma}{2}\sqrt{(c + a\sin\gamma)(c - a\sin\gamma)} + \frac{a^2\sin 2\gamma}{4}$

[11]) siehe Erkl. 184, Seite 114

[11]) Bei Anwendung der Formeln 207 bis 210a wird vorausgesetzt, dass die Seite *c* grösser als die Seite *a* ist.

Figur 42.



Formel 211. $\sin\gamma = \frac{c \cdot \sin\beta}{b}$

Formel 212. $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{b^2 - (c\sin\beta)^2} + \frac{c \cdot \sin 2\beta}{2b}$

oder:

Formel 212a. $\sin\alpha = \frac{\sin\beta}{b}\sqrt{(b + c\sin\beta)(b - c\sin\beta)} + \frac{c\sin 2\beta}{2b}$

Formel 213. $a = \sqrt{b^2 - (c\sin\beta)^2} + c \cdot \cos\beta$

oder:

Formel 213a. $a = \sqrt{(b + c\sin\beta)(b - c\sin\beta)} + c \cdot \cos\beta$

Formel 214. $F = \frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{b^2 - (c\sin\beta)^2} + \frac{c^2\sin 2\beta}{4}$

oder:

Formel 214a. $F = \frac{c\sin\beta}{2}\sqrt{(b + c\sin\beta)(b - c\sin\beta)} + \frac{c^2\sin 2\beta}{4}$

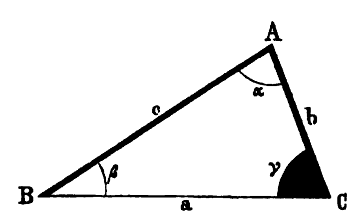
[12]) siehe Erkl. 185, Seite 114

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus den Figuren 41 und 42.

F bedeutet den Inhalt des betreff. Dreiecks.

[12]) Bei Anwendung der Formeln 211 bis 214a wird vorausgesetzt, dass die Seite *b* grösser als die Seite *c* ist.

Figur 43.



Formel 215. $\sin\beta = \frac{b \cdot \sin\gamma}{c}$

Formel 216. $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{c^2 - (b\sin\gamma)^2} + \frac{b \cdot \sin 2\gamma}{2c}$

oder:

Formel 216a. $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma}{c}\sqrt{(c + b\sin\gamma)(c - b\sin\gamma)} + \frac{b\sin 2\gamma}{2c}$

Formel 217. $a = \sqrt{c^2 - (b\sin\gamma)^2} + b \cdot \cos\gamma$

oder:

Formel 217a. $a = \sqrt{(c + b\sin\gamma)(c - b\sin\gamma)} + b\cos\gamma$

Formel 218. $F = \frac{b\sin\gamma}{2}\sqrt{c^2 - (b\sin\gamma)^2} + \frac{b^2\sin 2\gamma}{4}$

oder:

Formel 218a. $F = \frac{b\sin\gamma}{2}\sqrt{(c + b\sin\gamma)(c - b\sin\gamma)} + \frac{b^2\sin 2\gamma}{4}$

[13]) siehe Erkl. 186, Seite 114

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; α, β und γ ergibt sich aus der Figur 43.

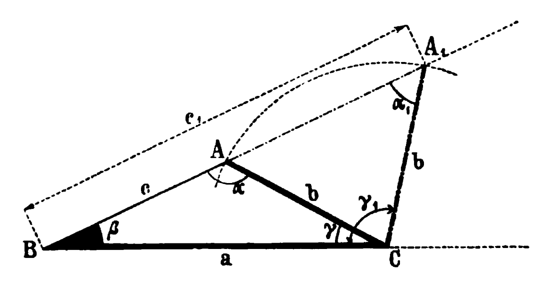
F bedeutet den Inhalt des betreff. Dreiecks.

[13]) Bei Anwendung der Formeln 215 bis 218a wird vorausgesetzt, dass die Seite c grösser als die Seite b ist.

---

e) Gegeben zwei Seiten und der der kleineren dieser Seiten gegenüberliegende Winkel, siehe z. B. die Figur 44.

Figur 44.



Man benutze, wenn, wie z. B. in Figur 44 angedeutet, die Seiten a und b sowie der der kleineren dieser Seiten, nämlich der der Seite b gegenüberliegende Winkel β gegeben ist, die unter d) angeführten Formeln 199 bis 202a (vergleiche die Figur 44 mit der Figur 39), oder, wenn die Seite a die kleinere Seite ist und der Winkel α gegeben ist, die unter d) angeführten Formeln 195 bis 198a oder wenn zwei andere Seiten und der der kleineren gegenüberliegende Winkel gegeben sind, die entsprechenden der unter d) angeführten Formeln 203 bis 218a. beachte hierbei jedoch, dass nach den Erkl. 180 und 189 der goniometrischen Funktion Sinus eines jeden der beiden zu berechnenden Winkel zwei, zwischen 0 und 180° liegende Winkelwerte entsprechen; siehe die Auflösung der Aufgabe 121 Seite 115.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

377. Heft.

Preis des Heftes 25 Pf.

Ebene Trigonometrie.
Forts. v. Heft 376. — Seite 929—944.
Mit 8 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der Rechenkunst, der niederen (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. höheren Mathematik (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus allen Zweigen der Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie; des Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's; der Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar- u. Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 376. — Seite 929—944. Mit 8 Figuren.

Inhalt:

Formelnverzeichnis, Fortsetzung. — Besondere Formeln über das Dreieck.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3–4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben** aus dem **Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form, mit vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln** in **Fragen** mit **Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile der reinen** und **angewandten** Mathematik — **nach besonderen selbständigen Kapiteln** angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten** Aufgaben beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen, techn. Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die **gehabten Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen** in **allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft** verleihen und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen** geben.

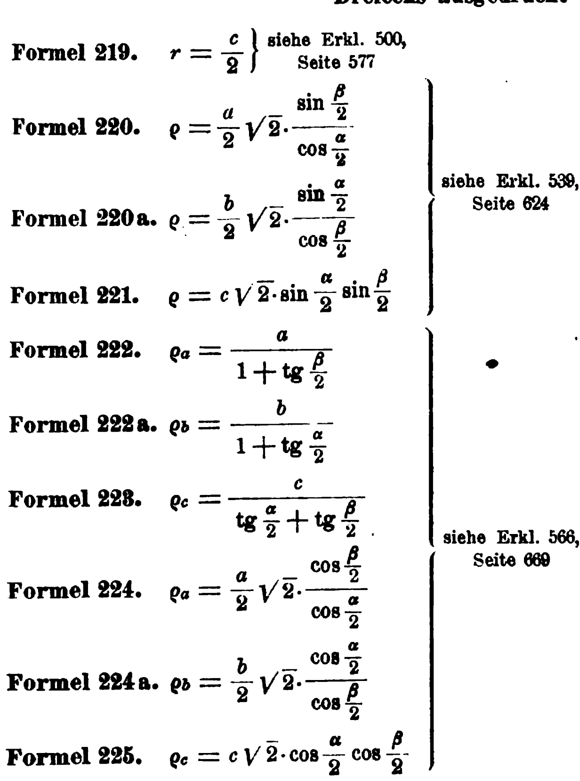
Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, **Dr. Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

B) Besondere Formeln über das Dreieck.

1) Besondere Formeln über das rechtwinklige Dreieck.

a) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem rechtwinkligen Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreise, den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.



Formel 219. $r = \frac{c}{2}$ } siehe Erkl. 500, Seite 577

Formel 220. $\varrho = \frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Formel 220a. $\varrho = \frac{b}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Formel 221. $\varrho = c\sqrt{2}\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}$

(Formel 220 bis 221: siehe Erkl. 539, Seite 624)

Formel 222. $\varrho_a = \frac{a}{1+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

Formel 222a. $\varrho_b = \frac{b}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Formel 223. $\varrho_c = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

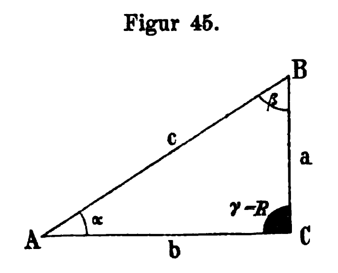
Formel 224. $\varrho_a = \frac{a}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Formel 224a. $\varrho_b = \frac{b}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Formel 225. $\varrho_c = c\sqrt{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$

(Formel 222 bis 225: siehe Erkl. 566, Seite 669)

Figur 45.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α und β ergibt sich aus der Figur 45.

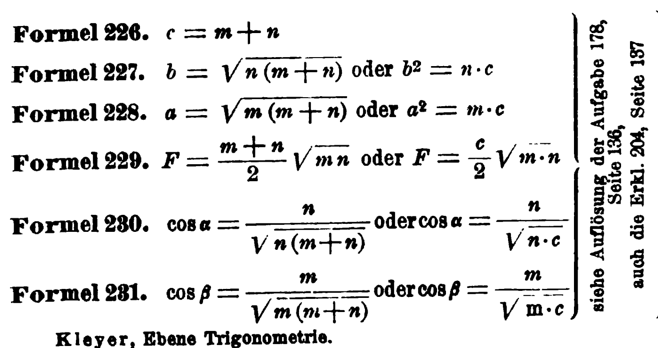
r bedeutet den Radius des dem rechtwinkligen Dreieck umbeschriebenen Kreises.

ϱ bedeutet den Radius des dem rechtwinkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der drei äusseren Berührungskreise, welche bezw. die Kathete a, die Kathete b und die Hypotenuse c berühren (siehe Figur 364, Seite 670).

---

b) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen der zur Hypotenuse gehörigen Höhe, den durch diese Höhe gebildeten Abschnitten der Hypotenuse, den Seiten und Winkeln des rechtwinkligen Dreiecks ausgedrückt werden.



Formel 226. $c = m + n$

Formel 227. $b = \sqrt{n(m+n)}$ oder $b^2 = n\cdot c$

Formel 228. $a = \sqrt{m(m+n)}$ oder $a^2 = m\cdot c$

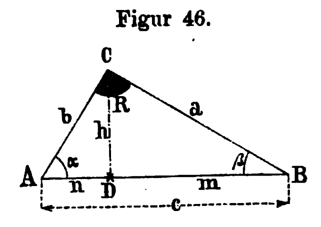
Formel 229. $F = \frac{m+n}{2}\sqrt{mn}$ oder $F = \frac{c}{2}\sqrt{m\cdot n}$

Formel 230. $\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{n(m+n)}}$ oder $\cos\alpha = \frac{n}{\sqrt{n\cdot c}}$

Formel 231. $\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{m(m+n)}}$ oder $\cos\beta = \frac{m}{\sqrt{m\cdot c}}$

(siehe Auflösung der Aufgabe 178, Seite 136, auch die Erkl. 204, Seite 137)

Figur 46.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, m, n, und α und β ergibt sich aus der Figur 46.

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks.

Formel 232. $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{m}{n}}$

Formel 233. $h = \sqrt{m \cdot n}$ oder $h^2 = m \cdot n$

} siehe Auflösung der Aufgabe 244, Seite 168

Formel 234. $h^2 = m(c - m)$

Formel 235. $h^2 = n(c - n)$

} siehe Auflösung der Aufgabe 249, Seite 171

Formel 236. $h = \frac{c \cdot \sin 2\alpha}{2}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 248, Seite 170

Formel 237. $h = c \cdot \sin \alpha \sin \beta$

siehe Erkl. 237, Seite 179

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, m, n, h, α und β ergibt sich aus der Figur 46.

2) Besondere Formeln über das gleichschenklige Dreieck.

a) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem gleichschenkligen Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreise, den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 238. $r = \frac{a}{2 \sin \alpha}$

Formel 239. $r = \frac{b}{2 \sin \beta}$

} siehe Erkl. 501, Seite 577

Formel 240. $\varrho = \frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha + \beta}{2}}$

Formel 241. $\varrho = \frac{b}{2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$

Formel 241a. $\varrho = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

} siehe Erkl. 540, Seite 625

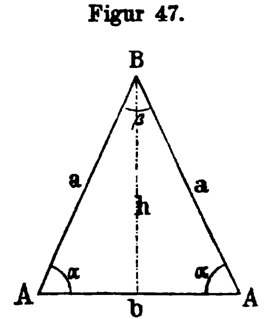
Formel 242. $\varrho_a = \frac{a}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg} \frac{\beta}{2}}$

Formel 243. $\varrho_a = a \cdot \cos \frac{\beta}{2}$

Formel 244. $\varrho_b = \frac{b}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$

} siehe Erkl. 567, Seite 671

Figur 47.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, α und β ergibt sich aus der Figur 47.

r bedeutet den Radius des dem gleichschenkligen Dreieck umbeschriebenen Kreises.

ϱ bedeutet den Radius des dem gleichschenkligen Dreieck einbeschriebenen Kreises.

ϱ_a und ϱ_b bedeuten die Radien der dem gleichschenkligen Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche die Schenkel a, bezw. die Basis b berühren.

(siehe Figur 365, Seite 671)

3) Besondere Formeln über das gleichseitige Dreieck.

a) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem gleichseitigen Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreise, den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 245. $r = \frac{a}{3} \sqrt{3}$ } siehe Erkl. 502, Seite 578

Formel 246. $\varrho = \frac{a}{2\sqrt{3}}$ oder $\varrho = \frac{a}{6} \sqrt{3}$ } siehe Erkl. 541, Seite 626

Formel 247. $\varrho_a = \frac{a}{2} \sqrt{3}$ } siehe Erkl. 568, Seite 673

a bedeutet die Seite des gleichseitigen Dreiecks;

r bedeutet den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises;

ϱ bedeutet den Radius des einbeschriebenen Kreises und

ϱ_a bedeutet den Radius eines der anbeschriebenen Kreise.

(siehe Figur 366, Seite 67.)

4) Besondere Formeln über das schiefwinklige Dreieck.

a) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Seiten und Winkeln, sowie dem Inhalt des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 248. $r = \frac{a}{2\sin\alpha}$

Formel 248a. $r = \frac{b}{2\sin\beta}$

Formel 248b. $r = \frac{c}{2\sin\gamma}$

Formel 249. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+b}{\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Formel 249a. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\gamma}{2}}$

Formel 249b. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{b+c}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$

Formel 250. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{a-b}{\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}$

Formel 250a. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{a-c}{\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\gamma}{2}}$

Formel 250b. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{b-c}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}}$

Formel 251. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

Formel 252. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{s-a}{\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

Formel 252a. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{s-b}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

Formel 252b. $r = \frac{1}{4}\cdot\frac{s-c}{\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}$

Formel 253. $r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{\sin\gamma\sin(\alpha-\beta)}}$

Formel 253a. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2-c^2}{\sin\beta\sin(\alpha-\gamma)}}$

Formel 253b. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2-c^2}{\sin\alpha\sin(\beta-\gamma)}}$

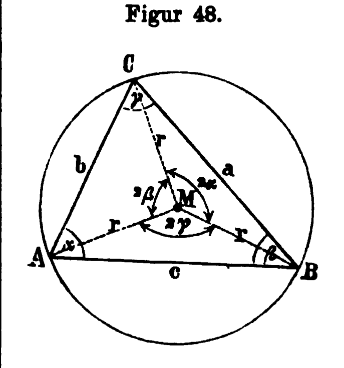
Formel 254. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+b^2}{1+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)}}$

Formel 254a. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a^2+c^2}{1+\cos\beta\cos(\alpha-\gamma)}}$

Formel 254b. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2+c^2}{1+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 842, Seite 574

Figur 48.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α, β und γ ergibt sich aus der Figur 48.
r bedeutet den Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.
s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten a, b, c;
also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Formel 255. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+b^2-c^2}{\sin\alpha \sin\beta \cos\gamma}}$

Formel 255a. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2+c^2-b^2}{\sin\alpha \sin\gamma \cos\beta}}$

Formel 255b. $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{b^2+c^2-a^2}{\sin\beta \sin\gamma \cos\alpha}}$

Formel 256. $r = \sqrt{\frac{ab}{2[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]}}$

Formel 256a. $r = \sqrt{\frac{ac}{2[\cos(\alpha-\gamma)-\cos(\alpha+\gamma)]}}$

Formel 256b. $r = \sqrt{\frac{bc}{2[\cos(\beta-\gamma)-\cos(\beta+\gamma)]}}$

Formel 257. $r = \frac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

(Formeln 255 bis 257: siehe Auflösung der Aufgabe 842, Seite 574)

Formel 258. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\right)}$

(siehe Andeutung zur Aufgabe 861, Seite 586)

Formel 259. $r = \frac{abc}{4F}$

Formel 260. $r = \sqrt{\frac{F}{2\sin\alpha \sin\beta \sin\gamma}}$

Formel 261. $r = \sqrt{\frac{c^2+4F\cdot\operatorname{ctg}\gamma}{1+\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)}}$

Formel 261a. $r = \sqrt{\frac{b^2+4F\cdot\operatorname{ctg}\beta}{1+\cos\beta\cdot\cos(\alpha-\gamma)}}$

Formel 261b. $r = \sqrt{\frac{a^2+4F\cdot\operatorname{ctg}\alpha}{1+\cos\alpha\cos(\beta-\gamma)}}$

Formel 262. $r = \frac{F}{a\sin\beta\sin\gamma}$

Formel 262a. $r = \frac{F}{b\sin\alpha\sin\gamma}$

Formel 262b. $r = \frac{F}{c\sin\alpha\sin\beta}$

(Formeln 259 bis 262b: siehe Auflösung der Aufgabe 868, Seite 589)

Die Bedeutung der Buchstaben $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ ergibt sich aus der Figur 48.
r bedeutet den Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.
s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten a, b, c; also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks.

---

b) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Seiten und Winkeln, sowie den Höhen des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 263. $r = \frac{h_a}{2\sin\beta\sin\gamma}$

Formel 263a. $r = \frac{h_b}{2\sin\alpha\sin\gamma}$

Formel 263b. $r = \frac{h_c}{2\sin\alpha\sin\beta}$

Formel 264. $r = \frac{ab}{2\cdot h_c}$

Formel 264a. $r = \frac{ac}{2\cdot h_b}$

Formel 264b. $r = \frac{bc}{2\cdot h_a}$

(siehe Auflösung der Aufgabe 872, Seite 591)

Die Bedeutung der Buchstaben $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ und r ist dieselbe, als wie in den Formeln 248 bis 262b (siehe Figur 48).
h_a, h_b und h_c bedeuten bezw. die zu den Seiten a, b und c gehörigen Höhen des Dreiecks.

Formel 265. $r = \dfrac{h_a + h_b}{8 \sin\frac{\gamma}{2} \cos^2\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}}$

Formel 265a. $r = \dfrac{h_a + h_c}{8 \sin\frac{\beta}{2} \cos^2\frac{\beta}{2} \cos\frac{\alpha - \gamma}{2}}$

Formel 265b. $r = \dfrac{h_b + h_c}{8 \sin\frac{\alpha}{2} \cos^2\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta - \gamma}{2}}$

Formel 266. $r = \dfrac{h_a + h_b}{4 \cos^2\frac{\gamma}{2} (\cos\alpha + \cos\beta)}$

Formel 266a. $r = \dfrac{h_a + h_c}{4 \cos^2\frac{\beta}{2} (\cos\alpha + \cos\gamma)}$

Formel 266b. $r = \dfrac{h_b + h_c}{4 \cos^2\frac{\alpha}{2} (\cos\beta + \cos\gamma)}$

Formel 267. $r = \dfrac{h_a - h_b}{8 \sin^2\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\beta - \alpha}{2}}$

Formel 267a. $r = \dfrac{h_a - h_c}{8 \sin^2\frac{\beta}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma - \alpha}{2}}$

Formel 267b. $r = \dfrac{h_b - h_c}{8 \sin^2\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma - \beta}{2}}$

Formel 268. $r = \dfrac{h_a - h_b}{4 \sin^2\frac{\gamma}{2} (\cos\alpha - \cos\beta)}$

Formel 268a. $r = \dfrac{h_a - h_c}{4 \sin^2\frac{\beta}{2} (\cos\alpha - \cos\gamma)}$

Formel 268b. $r = \dfrac{h_b - h_c}{4 \sin^2\frac{\alpha}{2} (\cos\beta - \cos\gamma)}$

Formel 269. $r = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{h_a^2 - h_b^2}{\sin^3\gamma \sin(\beta - \alpha)}}$

Formel 269a. $r = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{h_a^2 - h_c^2}{\sin^3\beta \sin(\gamma - \alpha)}}$

Formel 269b. $r = \dfrac{1}{2} \sqrt{\dfrac{h_b^2 - h_c^2}{\sin^3\alpha \sin(\gamma - \beta)}}$

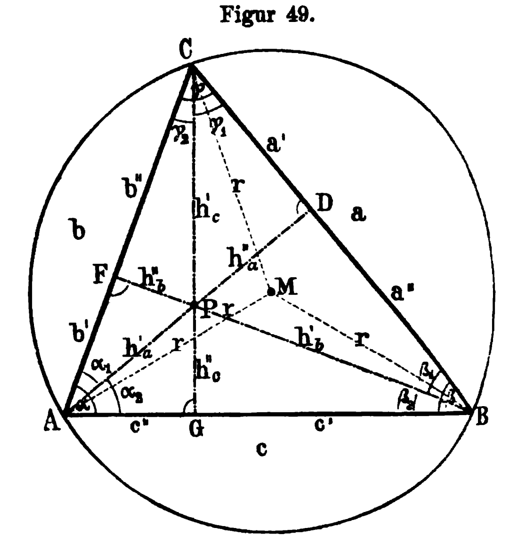
siehe Auflösung der Aufgabe 872, Seite 591

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α, β, γ und r ist dieselbe, als wie in den Formeln 248 bis 262b (siehe Figur 48).

h_a, h_b und h_c bedeuten bezw. die zu den Seiten a, b und c gehörigen Höhen des Dreiecks.

c) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Winkeln, sowie den durch die Höhen gebildeten Seitenabschnitten des Dreiecks ausgedrückt werden.

Figur 49.



Formel 270. $r = \frac{a'}{2\sin\beta\cos\gamma}$

Formel 270a. $r = \frac{a''}{2\sin\gamma\cos\beta}$

Formel 270b. $r = \frac{b'}{2\sin\gamma\cos\alpha}$

Formel 270c. $r = \frac{b''}{2\sin\alpha\cos\gamma}$

Formel 270d. $r = \frac{c'}{2\sin\alpha\cos\beta}$

Formel 270e. $r = \frac{c''}{2\sin\beta\cos\alpha}$

Formel 271. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{a' - a''}{\sin(\beta - \gamma)}$

Formel 271a. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{b' - b''}{\sin(\gamma - \alpha)}$

Formel 271b. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{c' - c''}{\sin(\alpha - \beta)}$

siehe Auflösung zur Aufgabe 881, Seite 587

Die Bedeutung der Buchstaben a', a'', b', b'', c', c'', α, β, γ und r ergibt sich aus der Figur 49.

---

d) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Seiten und Winkeln, sowie den Höhenabschnitten des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 272. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h'_a}{\cos\alpha}$

Formel 272a. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h'_b}{\cos\beta}$

Formel 272b. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h'_c}{\cos\gamma}$

Formel 273. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h''_a}{\cos\beta\cos\gamma}$

Formel 273a. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h''_b}{\cos\alpha\cos\gamma}$

Formel 273b. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h''_c}{\cos\alpha\cos\beta}$

Formel 274. $r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{a^2 + h'^2_a}$

Formel 274a. $r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{b^2 + h'^2_b}$

Formel 274b. $r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{c^2 + h'^2_c}$

Formel 275. $r = \frac{1}{2}\cdot\frac{h'_a + h'_b + h'_c}{1 + 4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}$

Formel 276. $r = \frac{1}{2}\cdot\sqrt[3]{\frac{(h'_a\cdot h'_b\cdot h'_c)^2}{h''_a\cdot h''_b\cdot h''_c}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 887, Seite 601

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α, β, γ, h'_a, h''_a, h'_b, h''_b, h'_c, h''_c und r ergibt sich aus der Figur 49.

Formel 277. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_b}{h''_c}$	siehe Auflösung der Aufgabe 887, Seite 601	Die Bedeutung der Buchstaben $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma, h'_a, h''_a, h'_b, h''_b, h'_c, h''_c$ und r ergibt sich aus der Figur 49.
Formel 277a. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a \cdot h'_c}{h''_b}$		
Formel 277b. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b \cdot h'_c}{h''_a}$		
Formel 278. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_b}{h''_a + h''_b} \cdot h'_c$		
Formel 278a. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a + h'_c}{h''_a + h''_c} \cdot h'_b$		
Formel 278b. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b + h'_c}{h''_b + h''_c} \cdot h'_a$		
Formel 279. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a - h'_b}{h''_b - h''_a} \cdot h'_c$		
Formel 279a. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_a - h'_c}{h''_c - h''_a} \cdot h'_b$		
Formel 279b. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{h'_b - h'_c}{h''_c - h''_b} \cdot h'_a$		

---

e) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Schwer- oder Mittellinien und den Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 280. $r = \frac{s_a}{\sqrt{2\sin^2\beta + 2\sin^2\gamma - \sin^2\alpha}}$	siehe Auflösung der Aufgabe 889, Seite 606	Die Bedeutung der Buchstaben α, β, γ und r ergibt sich aus der Figur 48. Die Buchstaben s_a, s_b und s_c bedeuten die Schwer- oder Mittellinien des Dreiecks, welche bezw. zu den Seiten a, b und c des Dreiecks gehören (siehe Figur 349, Seite 606).
Formel 280a. $r = \frac{s_b}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\gamma - \sin^2\beta}}$		
Formel 280b. $r = \frac{s_c}{\sqrt{2\sin^2\alpha + 2\sin^2\beta - \sin^2\gamma}}$		

---

f) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck umbeschriebenen Kreises, den Winkeln und den winkelhalbierenden Transversalen des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 281. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\alpha}{\sin\beta\sin\gamma} \cdot \cos\frac{\beta - \gamma}{2}$	siehe Auflösung der Aufgabe 892, Seite 608.	α, β und γ bedeuten die drei Winkel eines Dreiecks; w_α, w_β und w_γ bedeuten bezw. die diese Winkel halbierenden Transversalen; r bedeutet den Radius des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises.
Formel 281a. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\beta}{\sin\alpha\sin\gamma} \cdot \cos\frac{\alpha - \gamma}{2}$		
Formel 281b. $r = \frac{1}{2} \cdot \frac{w_\gamma}{\sin\alpha\sin\beta} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$		

---

c) Formeln, durch welche Bezieh beschriebenen Kreises, den Seitenabschni

Formel 270. $r = \frac{a'}{2\sin\beta\cos\gamma}$

Formel 270a. $r = \frac{a''}{2\sin\gamma\cos}$

Formel 270b. $r = \frac{b'}{2\sin\gamma}$

Formel 270c. $r = \frac{b''}{2\sin\alpha}$

Formel 270d. $r = \frac{c'}{2\sin}$

Formel 270e. $r = \frac{}{2\sin}$

Formel 271. $r = \frac{1}{2}$

Formel 271a. $r = 1$

Formel 271b. $r =$

d) Formeln, dur beschrieben

Formel 272.

Formel 272a.

Formel 272b.

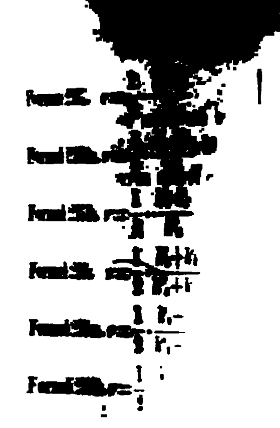
Formel 273.

Formel 273a.

Formel 273b.

Formel 274.

Formel 274a.



…he Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck …ises, den Seiten und den in den Mitten der Seiten des …richteten Perpendikeln ausgedrückt werden.

$\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + p_a^2}$ $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + p_b^2}$ $\sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + p_c^2}$	siehe Auflösung der Aufgabe 897, Seite 613	Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und r ergibt sich aus der Figur 48. Die Buchstaben p_a, p_b und p_c bedeuten bezw. die in den Mitten der Seiten a, b und c errichteten Perpendikel bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitt. (Siehe Figur 352, Seite 614).

…welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck ein…kreises, den Seiten und Winkeln, sowie dem Inhalt des Dreiecks ausgedrückt werden.

$$= \frac{a}{\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{b}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}$$

$$= \frac{c}{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}$$

$$= \frac{a \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\varrho = \frac{b \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$$

… $\varrho = \frac{c \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

… $\varrho = (s-a) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

…8a. $\varrho = (s-b) \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

…88b. $\varrho = (s-c) \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

…289. $\varrho = \frac{F}{s}$

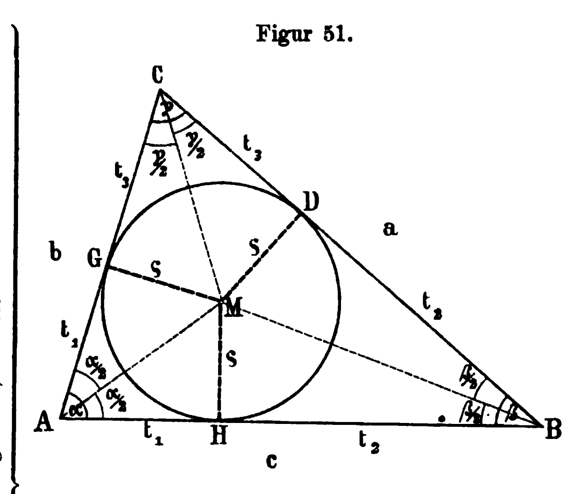
…l 290. $\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$

…el 291. $\varrho = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

…el 292. $\varrho = \sqrt{F \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 904, Seite 618

Figur 51.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α, β, γ und ϱ ergibt sich aus der Figur 51.

s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten, also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

Der Buchstabe F bedeutet den Inhalt des Dreiecks

---

l) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Radius des einem Dreieck einbeschriebenen Kreises, den Winkeln und der Höhe des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 293. $\varrho = \frac{h_a}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$

Formel 293a. $\varrho = \frac{h_b}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)$

Formel 293b. $\varrho = \frac{h_c}{2}\left(1 - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\right)$

} siehe Auflösung der Aufgabe 905, Seite 621

Formel 294. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{h_a - 2\varrho}{h_a}$

Formel 294a. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{h_b - 2\varrho}{h_b}$

Formel 294b. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{h_c - 2\varrho}{h_c}$

} siehe Erkl. 538, Seite 623

Formel 295. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 906, Seite 623

Die Bedeutung der Buchstaben α, β und γ ergibt sich aus der Figur 51.

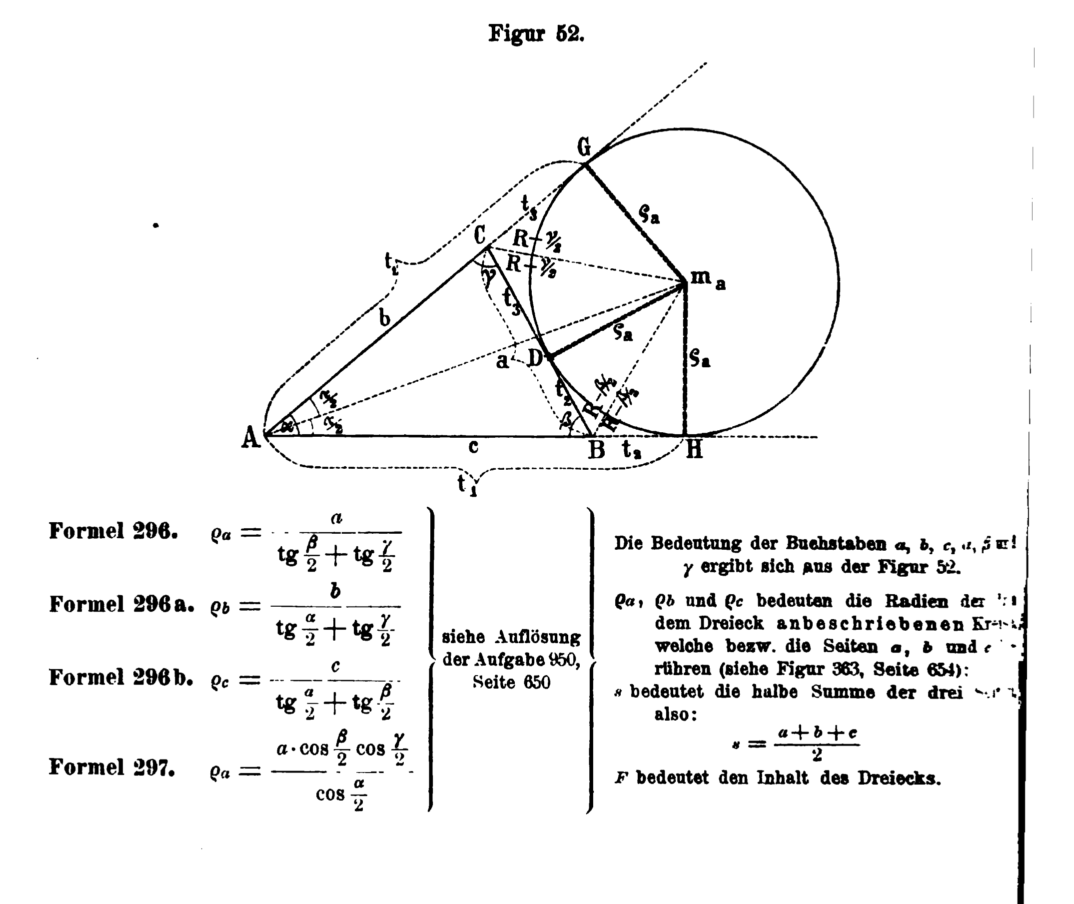
ϱ bedeutet den Radius des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises.

h_a, h_b und h_c bedeuten bezw. die zu den Seiten a, b und c des Dreiecks gehörigen Höhen.

---

m) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem Dreieck anbeschriebenen Kreise, den Seiten und Winkeln, sowie dem Inhalt des Dreiecks ausgedrückt werden.

Figur 52.



Formel 296. $\varrho_a = \frac{a}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

Formel 296a. $\varrho_b = \frac{b}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}$

Formel 296b. $\varrho_c = \frac{c}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 950, Seite 650

Formel 297. $\varrho_a = \frac{a \cdot \cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c, α, β u[illegible] γ ergibt sich aus der Figur 52.

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der [illegible] dem Dreieck anbeschriebenen Kr[illegible], welche bezw. die Seiten a, b und c [illegible] rühren (siehe Figur 363, Seite 654):

s bedeutet die halbe Summe der drei [illegible], also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks.

Formel 297a. $\varrho_b = \dfrac{b \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Formel 297b. $\varrho_c = \dfrac{c \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

Formel 298. $\varrho_a = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

Formel 298a. $\varrho_b = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$

Formel 298b. $\varrho_c = s \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$

Formel 299. $\varrho_a = (s-b) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Formel 299a. $\varrho_a = (s-c) \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

Formel 299b. $\varrho_b = (s-a) \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Formel 299c. $\varrho_b = (s-c) \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

Formel 299d. $\varrho_c = (s-a) \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

Formel 299e. $\varrho_c = (s-b) \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$

Formel 300. $\varrho_a = \dfrac{F}{s-a}$

Formel 300a. $\varrho_b = \dfrac{F}{s-b}$

Formel 300b. $\varrho_c = \dfrac{F}{s-c}$

Formel 301. $\varrho_a = \sqrt{\dfrac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$

Formel 301a. $\varrho_b = \sqrt{\dfrac{s(s-c)(s-a)}{s-b}}$

Formel 301b. $\varrho_c = \sqrt{\dfrac{s(s-a)(s-b)}{s-c}}$

Formel 302. $\varrho_a = (s-a) \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Formel 302a. $\varrho_b = (s-b) \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$

Formel 302b. $\varrho_c = (s-c) \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 950, Seite 650

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c, α, β und γ ergibt sich aus der Figur 52.

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der drei dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren (siehe Fig. 363, Seite 654); s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten, also:

$$s = \frac{a+b+c}{2}$$

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks

---

n) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem Dreieck anbeschriebenen Kreise und den Höhen des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 303. $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_b} - \dfrac{1}{h_c} = \dfrac{1}{\varrho_c}$

Formel 303a. $\dfrac{1}{h_a} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_b} = \dfrac{1}{\varrho_b}$

Formel 303b. $\dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} - \dfrac{1}{h_a} = \dfrac{1}{\varrho_a}$

siehe Auflösung der Aufgabe 958, Seite 666

Die Buchstaben ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren (siehe Figur 363, Seite 654)

Die Buchstaben h_a, h_b und h_c bedeuten die Höhen des Dreiecks, welche bezw. zu den Seiten a, b und c des Dreiecks gehören.

Formel 804. $\frac{1}{h_a} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}\right)$

Formel 804a. $\frac{1}{h_b} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_c}\right)$

Formel 804b. $\frac{1}{h_c} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b}\right)$

siehe Auflösung der Aufgabe 958, Seite 666

Die Buchstaben ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren (siehe Figur 363, Seite 654)

Die Buchstaben h_a, h_b und h_c bedeuten die Höhen des Dreiecks, welche bezw. zu den Seiten a b und c des Dreiecks gehören.

---

o) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Radien der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreise, sowie den Winkeln, den Seiten, dem Inhalt und den Höhenabschnitten des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 805. $\varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$

Formel 806. $\varrho = \frac{F}{4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 936, Seite 640

Formel 807. $\varrho_a = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$

Formel 807a. $\varrho_b = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}$

Formel 807b. $\varrho_c = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}$

Formel 808. $\varrho_a = \frac{F}{4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$

Formel 808a. $\varrho_b = \frac{F}{4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2}}$

Formel 808b. $\varrho_c = \frac{F}{4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\gamma}{2}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 956, Seite 662

Formel 809. $\varrho_a - \varrho = 4r \cdot \sin^2\frac{\alpha}{2}$

Formel 809a. $\varrho_b - \varrho = 4r \cdot \sin^2\frac{\beta}{2}$

Formel 809b. $\varrho_c - \varrho = 4r \cdot \sin^2\frac{\gamma}{2}$

Formel 810. $\varrho_a + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cos\frac{\beta - \gamma}{2}$

Formel 810a. $\varrho_b + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cos\frac{\alpha - \gamma}{2}$

Formel 810b. $\varrho_c + \varrho = 4r \cdot \sin\frac{\gamma}{2} \cos\frac{\alpha - \beta}{2}$

Formel 811. $\varrho_a - \varrho_b = 4r \cdot \cos\frac{\gamma}{2} \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$

Formel 811a. $\varrho_a - \varrho_c = 4r \cdot \cos\frac{\beta}{2} \sin\frac{\alpha - \gamma}{2}$

Formel 811b. $\varrho_b - \varrho_c = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2}$

Formel 812. $\varrho_a + \varrho_b = 4r \cdot \cos^2\frac{\gamma}{2}$

Formel 812a. $\varrho_a + \varrho_c = 4r \cdot \cos^2\frac{\beta}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 957, Seite 663

a, b und c bedeuten die drei Seiten des Dreiecks;

α, β und γ bedeuten die diesen Seiten bezw. gegenüberliegenden Winkel.

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks;

r bedeutet den Radius des umbeschriebenen Kreises;

ϱ bedeutet den Radius des einbeschriebenen Kreises;

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren, wie die Figur 363, Seite 654 zeigt.

Formel 812 b. $\varrho_b + \varrho_c = 4r \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2}$

Formel 813. $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c = 2r \cdot \left(\cos^2 \frac{\alpha}{2} + \cos^2 \frac{\beta}{2} + \cos^2 \frac{\gamma}{2}\right)$

Formel 814. $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = 4r$

Formel 815. $\frac{\varrho_a + \varrho}{\varrho_b - \varrho_c} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\beta - \gamma}{2}$

Formel 815 a. $\frac{\varrho_b + \varrho}{\varrho_a - \varrho_c} = \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \gamma}{2}$

Formel 815 b. $\frac{\varrho_c + \varrho}{\varrho_a - \varrho_b} = \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{\alpha - \beta}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 957, Seite 663

Formel 816. $\varrho \cdot \varrho_a = (s - b)(s - c)$

Formel 816 a. $\varrho \cdot \varrho_b = (s - a)(s - c)$

Formel 816 b. $\varrho \cdot \varrho_c = (s - a)(s - b)$

Formel 817. $\varrho_a \cdot \varrho_b = s(s - c)$

Formel 817 a. $\varrho_b \cdot \varrho_c = s(s - a)$

Formel 817 b. $\varrho_a \cdot \varrho_c = s(s - b)$

Formel 818. $\varrho \cdot \varrho_a + \varrho_b \cdot \varrho_c = bc$

Formel 818 a. $\varrho \cdot \varrho_b + \varrho_a \cdot \varrho_c = ac$

Formel 818 b. $\varrho \cdot \varrho_c + \varrho_a \cdot \varrho_b = ab$

Formel 819. $\varrho \cdot \varrho_a + \varrho \cdot \varrho_b + \varrho \cdot \varrho_c + \varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho_a \cdot \varrho_c + \varrho_b \cdot \varrho_c = ab + ac + bc$

Formel 820. $\varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho_a \cdot \varrho_c + \varrho_b \cdot \varrho_c - \varrho \cdot \varrho_a - \varrho \cdot \varrho_b - \varrho \cdot \varrho_c = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$

Formel 821. $\varrho_a \cdot \varrho_b - \varrho \cdot \varrho_c = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$

Formel 821 a. $\varrho_a \cdot \varrho_c - \varrho \cdot \varrho_b = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}$

Formel 821 b. $\varrho_b \cdot \varrho_c - \varrho \cdot \varrho_a = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}$

Formel 822. $(\varrho_a - \varrho_b)(\varrho + \varrho_c) = a^2 - b^2$

Eormel 822 a. $(\varrho_a - \varrho_c)(\varrho + \varrho_b) = a^2 - c^2$

Formel 822 b. $(\varrho_b - \varrho_c)(\varrho + \varrho_a) = b^2 - c^2$

siehe Auflösung der Aufgabe 951, Seite 655

Formel 823. $\varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho_a \cdot \varrho_c + \varrho_b \cdot \varrho_c = s^2$

Formel 824. $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F \cdot s$

Formel 825. $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = \varrho \cdot s^2$

Formel 826. $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b = (s - c) \cdot F$

Formel 826 a. $\varrho \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = (s - a) \cdot F$

Formel 826 b. $\varrho \cdot \varrho_c \cdot \varrho_a = (s - b) \cdot F$

Formel 827. $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b + \varrho \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c + \varrho \cdot \varrho_c \cdot \varrho_a + \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = 2F \cdot s$

Formel 828. $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = F^2$

siehe Auflösung der Aufgabe 952, Seite 657

Formel 829. $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_a} + \frac{1}{\varrho_b} + \frac{1}{\varrho_c}$

Formel 830. $\varrho = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_a \varrho_c}$

Formel 831. $\varrho_a = \frac{\varrho \varrho_b \varrho_c}{\varrho_b \varrho_c - \varrho \varrho_b - \varrho \varrho_c}$

siehe Auflösung der Aufgabe 953, Seite 659

a, b und c bedeuten die drei Seiten des Dreiecks;

α, β und γ bedeuten die diesen Seiten bezw. gegenüberliegenden Winkel;

F bedeutet den Inhalt;

s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten, also: $s = \frac{a + b + c}{2}$;

r bedeutet den Radius des umbeschriebenen Kreises;

ϱ bedeutet den Radius des einbeschriebenen Kreises;

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren, wie die Fig. 363, Seite 654. zeigt.

Formel 331a. $\varrho_c = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_b}{\varrho_a \varrho_b - \varrho \varrho_a - \varrho \varrho_b}$

Formel 331b. $\varrho_b = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_c}{\varrho_a \varrho_c - \varrho \varrho_a - \varrho \varrho_c}$

siehe Auflösung der Aufgabe 953, Seite 659

Formel 332. $\varrho_a - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$

Formel 332a. $\varrho_b - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$

Formel 332b. $\varrho_c - \varrho = \frac{s \cdot \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$

Formel 333. $\varrho_a + \varrho_b = \frac{s \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}}$

Formel 333a. $\varrho_a + \varrho_c = \frac{s \cdot \cos \frac{\beta}{2}}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$

Formel 333b. $\varrho_b + \varrho_c = \frac{s \cdot \cos \frac{\alpha}{2}}{\cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$

Formel 334. $\varrho_a + \varrho_b + \varrho_c - \varrho = \frac{s}{\cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}}$

Formel 335. $\varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = a b c \cdot \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}$

Formel 336. $\varrho \cdot \varrho_a \cdot \varrho_b \cdot \varrho_c = s \cdot a b c \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}$

Formel 337. $\frac{\varrho_a - \varrho}{\varrho_b + \varrho_c} = \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}$

Formel 337a. $\frac{\varrho_b - \varrho}{\varrho_a + \varrho_c} = \operatorname{tg}^2 \frac{\beta}{2}$

Formel 337b. $\frac{\varrho_c - \varrho}{\varrho_a + \varrho_b} = \operatorname{tg}^2 \frac{\gamma}{2}$

siehe Auflösung der Aufgabe 955, Seite 660

Formel 338. $F = \frac{\varrho_a \varrho_b \varrho_c}{\sqrt{\varrho_a \varrho_b + \varrho_b \varrho_c + \varrho_a \varrho_c}}$

Formel 338a. $F = \frac{\varrho \varrho_b \varrho_c}{\sqrt{\varrho_b \varrho_c - \varrho (\varrho_b + \varrho_c)}}$

Formel 338b. $F = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_b}{\sqrt{\varrho_a \varrho_b - \varrho (\varrho_a + \varrho_b)}}$

Formel 338c. $F = \frac{\varrho \varrho_a \varrho_c}{\sqrt{\varrho_a \varrho_c - \varrho (\varrho_a + \varrho_c)}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 954, Seite 660

Formel 339. $h'_a + h'_b + h'_c = 2 (\varrho + r)$

Formel 340. $h'_a + h'_b - h'_c = 2 (\varrho_c - r)$

Formel 340a. $h'_a + h'_c - h'_b = 2 (\varrho_b - r)$

Formel 340b. $h'_b + h'_c - h'_a = 2 (\varrho_a - r)$

siehe Auflösung der Aufgabe 959, Seite 668

a, b und c bedeuten die drei Seiten des Dreiecks;

α, β und γ bedeuten die diesen Seiten bezw. gegenüberliegenden Winkel;

F bedeutet den Inhalt;

s bedeutet die halbe Summe der drei Seiten, also:

$$s = \frac{a + b + c}{2};$$

h_a', h_b' und h_c' bedeuten die Abschnitte der drei Höhen des Dreiecks, welche zwischen dem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt und bezw. den Scheiteln der Winkel α, β und γ des Dreiecks liegen, wie in Figur [illegible] Seite 934 angedeutet ist;

r bedeutet den Radius des umbeschriebenen Kreises;

ϱ bedeutet den Radius des einbeschriebenen Kreises;

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren, wie die Figur 363, Seite 654, zeigt.

p) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Entfernungen der Mittelpunkte der einem Dreieck um-, ein- und anbeschriebenen Kreise, den Radien dieser Kreise, sowie den Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 841.	$\overline{mm_a} = 4r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$	
Formel 841a.	$\overline{mm_b} = 4r \cdot \sin\frac{\beta}{2}$	siehe Auflösung der Aufgabe 975, Seite 681
Formel 841b.	$\overline{mm_c} = 4r \cdot \sin\frac{\gamma}{2}$	
Formel 842.	$\overline{m_a m_b} = 4r \cdot \cos\frac{\gamma}{2}$	
Formel 842a.	$\overline{m_a m_c} = 4r \cdot \cos\frac{\beta}{2}$	siehe Auflösung der Aufgabe 976, Seite 682
Formel 842b.	$\overline{m_b m_c} = 4r \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$	
Formel 843.	$\overline{Mm}^2 = r^2 - 2r \cdot \varrho$	siehe Auflösung der Aufgabe 947, Seite 647
Formel 844.	$\overline{Mm_a}^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_a$	
Formel 844a.	$\overline{Mm_b}^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_b$	
Formel 844b.	$\overline{Mm_c}^2 = r^2 + 2r \cdot \varrho_c$	siehe Auflösung der Aufgabe 977, Seite 684
Formel 845.	$\overline{Mm}^2 + \overline{Mm_a}^2 + \overline{Mm_b}^2 + \overline{Mm_c}^2 = 12r^2$	

r und ϱ bedeuten die Radien der Kreise, welche einem Dreieck bezw. um- und einbeschrieben sind.

ϱ_a, ϱ_b und ϱ_c bedeuten die Radien der Kreise, welche einem Dreieck anbeschrieben sind und bezw. die Seiten a, b und c desselben berühren.

M bedeutet den Mittelpunkt des dem Dreieck umbeschriebenen Kreises:

m bedeutet den Mittelpunkt des dem Dreieck einbeschriebenen Kreises;

m_a, m_b und m_c bedeuten die Mittelpunkte der dem Dreieck anbeschriebenen Kreise, welche bezw. die Seiten a, b und c berühren.

---

q) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen der Summe oder Differenz der drei Seiten eines Dreiecks, den Winkeln und Seiten des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 846.	$\frac{a+b+c}{a} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$
Formel 846a.	$\frac{a+b+c}{b} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$
Formel 846b.	$\frac{a+b+c}{c} = \frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\sin\frac{\gamma}{2}}$
Formel 847.	$\frac{a+b-c}{a} = \frac{2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$
Formel 847a.	$\frac{a+b-c}{b} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$
Formel 847b.	$\frac{a+b-c}{c} = \frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$
Formel 847c.	$\frac{a-b+c}{a} = \frac{2\cos\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

siehe Erkl. 344, Seite 319

a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks;

α, β und γ bedeuten bezw. die jenen Seiten gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks.

Formel 347d. $\frac{a-b+c}{b}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\beta}{2}}$

Formel 347e. $\frac{a-b+c}{c}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

Formel 347f. $\frac{-a+b+c}{a}=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

Formel 347g. $\frac{-a+b+c}{b}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}$

Formel 347h. $\frac{-a+b+c}{c}=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}}{\cos\frac{\gamma}{2}}$

Formel 348. $\frac{a+b-c}{a+b+c}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$

(Formel 347d–348:) siehe Erkl. 344, Seite 319

a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks.
α, β und γ bedeuten bezw. die jenen Seiten gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks.

---

r) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Höhen, den Seiten und den Winkeln eines Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 349. $a:b=h_b:h_a$

Formel 349a. $a:c=h_c:h_a$

Formel 349b. $b:c=h_c:h_b$

Formel 350. $\sin\alpha:\sin\beta=h_b:h_a$

Formel 350a. $\sin\alpha:\sin\gamma=h_c:h_a$

Formel 350b. $\sin\beta:\sin\gamma=h_c:h_b$

(Formel 349–350b:) siehe Erkl. 295, Seite 248

Formel 351. $h_c=\frac{c}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 388, Seite 249

Formel 352. $h_c=\frac{c\cdot\sin\alpha\sin\beta}{\sin\gamma}$

Formel 353. $h_c=\frac{c}{2\sin\gamma}\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos\gamma\right]$

(Formel 352–353:) siehe Auflösung der Aufgabe 349, Seite 233

Formel 354. $\cos\alpha=\frac{h_a^2\cdot h_b^2+h_a^2\cdot h_c^2-h_b^2\cdot h_c^2}{2h_a^2\cdot h_b\cdot h_c}$

Formel 354a. $\cos\beta=\frac{h_a^2\cdot h_b^2+h_b^2\cdot h_c^2-h_a^2\cdot h_c^2}{2h_b^2\cdot h_a\cdot h_c}$

Formel 354b. $\cos\gamma=\frac{h_a^2\cdot h_c^2+h_b^2\cdot h_c^2-h_a^2\cdot h_b^2}{2h_c^2\cdot h_a\cdot h_b}$

(Formel 354–354b:) siehe Auflösung der Aufgabe 391, Seite 251

Formel 355. $\sin\beta=\frac{h_a+h_c}{a+c}$

Formel 355a. $\sin\gamma=\frac{h_a+h_b}{a+b}$

Formel 355b. $\sin\alpha=\frac{h_b+h_c}{b+c}$

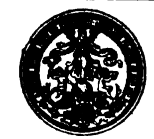
(Formel 355–355b:) siehe Auflösung der Aufg. 528, Seite 343 auch die Auflösung der Aufgabe 598, Seite 379, und die Auflösung der Aufgabe 879, Seite 596

Formel 356. $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=(h_a+h_b+h_c)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)$ — siehe Auflösung der Aufgabe 882, Seite 598

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks;
die Buchstaben α, β und γ bedeuten bezw. die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks.
die Buchstaben h_a, h_b und h_c bedeuten die bezw. zu den Seiten a, b und c gehörigen Höhen des Dreiecks.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

384. Heft. | Preis des Heftes 25 Pf. | Ebene Trigonometrie. Forts. v. Heft 377. — Seite 945—960. Mit 5 Figuren.





Vollständig gelöste Aufgaben-Sammlung

— nebst Anhängen ungelöster Aufgaben, für den Schul- & Selbstunterricht —

mit

Angabe und Entwicklung der benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen und Antworten

erläutert durch

viele Holzschnitte & lithograph. Tafeln,

aus allen Zweigen

der **Rechenkunst**, der **niederen** (Algebra, Planimetrie, Stereometrie, ebenen u. sphärischen Trigonometrie, synthetischen Geometrie etc.) u. **höheren Mathematik** (höhere Analysis, Differential- u. Integral-Rechnung, analytische Geometrie der Ebene u. des Raumes etc.); — aus **allen Zweigen** der **Physik, Mechanik, Graphostatik, Chemie, Geodäsie, Nautik, mathemat. Geographie, Astronomie;** des **Maschinen-, Strafsen-, Eisenbahn-, Wasser-, Brücken- u. Hochbau's;** der **Konstruktionslehren als: darstell. Geometrie, Polar-** u. **Parallel-Perspective, Schattenkonstruktionen** etc. etc.

für

Schüler, Studierende, Kandidaten, Lehrer, Techniker jeder Art, Militärs etc.

zum einzig richtigen und erfolgreichen

Studium, zur Forthülfe bei Schularbeiten und zur rationellen Verwertung der exakten Wissenschaften,

herausgegeben von

Dr. Adolph Kleyer,

Mathematiker, vereideter königl. preuss. Feldmesser, vereideter grossh. hessischer Geometer I. Klasse

in Frankfurt a. M.

unter Mitwirkung der bewährtesten Kräfte.

Ebene Trigonometrie.

Fortsetzung von Heft 377. — Seite 945—960. Mit 5 Figuren.

Inhalt:

Formelnverzeichnis, Fortsetzung. — Besondere Formeln über das Dreieck, Fortsetzung. — Formeln über das zu einem Dreieck gehörige Höhendreieck. — Formeln über das Viereck; Formeln über die verschiedenen Arten von Parallelogrammen und Trapezen; Formeln über das Trapezoid und Formeln über das Kreis-, das Tangenten- und das Sehnenviereck. — Formeln über die regelmässigen Vielecke. — Formeln über den Kreis. — Berichtigungen.

Stuttgart 1887.

Verlag von Julius Maier.

Preisgekrönt in Frankfurt a. M. 1881.

PROSPEKT.

Dieses Werk, welchem **kein ähnliches** zur Seite steht, erscheint monatlich in 3—4 Heften zu dem **billigen Preise** von 25 ₰ pro Heft und bringt eine Sammlung der wichtigsten und praktischsten **Aufgaben aus dem Gesamtgebiete der Mathematik, Physik, Mechanik, math. Geographie, Astronomie, des Maschinen-, Strassen-, Eisenbahn-, Brücken- und Hochbaues, des konstruktiven Zeichnens** etc. etc. und zwar in **vollständig gelöster Form,** mit **vielen Figuren, Erklärungen** nebst **Angabe** und **Entwickelung** der **benutzten Sätze, Formeln, Regeln in Fragen mit Antworten** etc., so dass die Lösung jedermann verständlich sein kann, bezw. wird, wenn eine **grössere** Anzahl der Hefte erschienen ist, **da dieselben sich in ihrer Gesamtheit ergänzen** und alsdann auch **alle Teile** der **reinen** und **angewandten** Mathematik — nach besonderen selbständigen Kapiteln angeordnet — vorliegen.

Fast jedem Hefte ist ein **Anhang** von **ungelösten Aufgaben** beigegeben, welche der eigenen Lösung (in analoger Form, wie die bezüglichen gelösten Aufgaben) des Studierenden überlassen bleiben, und zugleich von den Herren Lehrern für den Schulunterricht benutzt werden können. — Die **Lösungen** hierzu werden später in besonderen Heften für die Hand des Lehrers erscheinen. Am Schlusse eines jeden Kapitels gelangen: **Titelblatt, Inhaltsverzeichnis, Berichtigungen** und **erläuternde Erklärungen über das betreffende Kapitel** zur Ausgabe.

Das Werk behandelt zunächst den Hauptbestandteil des mathematisch-naturwissenschaftlichen Unterrichtsplanes folgender Schulen: **Realschulen I. und II. Ord., gleichberechtigten höheren Bürgerschulen, Privatschulen, Gymnasien, Realgymnasien, Progymnasien, Schullehrer-Seminaren, Polytechniken, Techniken, Baugewerkschulen, Gewerbeschulen, Handelsschulen,** techn. **Vorbereitungsschulen aller Arten, gewerbliche Fortbildungsschulen, Akademien, Universitäten, Land- und Forstwissenschaftsschulen, Militärschulen, Vorbereitungs-Anstalten aller Arten** als z. B. **für das Einjährig-Freiwillige- und Offiziers-Examen,** etc.

Die **Schüler, Studierenden** und **Kandidaten** der mathematischen, technischen und naturwissenschaftlichen Fächer, werden durch diese, **Schritt für Schritt gelöste,** Aufgabensammlung **immerwährend** an ihre in der Schule erworbenen oder nur gehörten Theorien etc. erinnert und wird ihnen hiermit der Weg zum **unfehlbaren** Auffinden der Lösungen derjenigen Aufgaben gezeigt, welche sie bei ihren **Prüfungen** zu lösen haben, zugleich aber auch die **überaus grosse Fruchtbarkeit** der mathematischen Wissenschaften vorgeführt.

Dem **Lehrer** soll mit dieser Aufgabensammlung eine **kräftige Stütze** für den Schulunterricht geboten werden, indem zur Erlernung des **praktischen Teiles** der mathematischen Disziplinen — **zum Auflösen von Aufgaben** — in den meisten Schulen oft keine Zeit erübrigt werden kann, **hiermit** aber dem Schüler bei seinen häuslichen Arbeiten eine vollständige Anleitung in die Hände gegeben wird, **entsprechende Aufgaben zu lösen,** die gehabten **Regeln, Formeln, Sätze** etc. **anzuwenden** und **praktisch zu verwerten. Lust, Liebe** und **Verständnis** für den Schul-Unterricht wird dadurch **erhalten** und **belebt** werden.

Den **Ingenieuren, Architekten, Technikern** und **Fachgenossen aller Art, Militärs** etc. etc. soll diese Sammlung **zur Auffrischung** der erworbenen und vielleicht vergessenen mathematischen Kenntnisse dienen und zugleich durch ihre **praktischen in allen Berufszweigen vorkommenden Anwendungen** einem **toten Kapitale lebendige Kraft verleihen** und somit den **Antrieb** zu weiteren **praktischen Verwertungen** und **weiteren Forschungen geben.**

Alle Buchhandlungen nehmen Bestellungen entgegen. Wichtige und praktische Aufgaben werden mit Dank von der Redaktion entgegengenommen und mit Angabe der Namen verbreitet. — Wünsche, Fragen etc., welche die Redaktion betreffen, nimmt der Verfasser, Dr. **Kleyer,** Frankfurt a. M. Fischerfeldstrasse 16, entgegen und wird deren Erledigung thunlichst berücksichtigt.

Stuttgart. **Die Verlagshandlung.**

Formel 857. $\frac{h_a^2}{h_b h_c} + \frac{h_b^2}{h_a h_c} + \frac{h_c^2}{h_a h_b} = \frac{bc}{a^2} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ab}{c^2}$

Formel 858. $h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{a^2 b^2}{c} \sin^3\gamma$

Formel 858a. $h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{a^2 c^2}{b} \sin^3\beta$

Formel 858b. $h_a \cdot h_b \cdot h_c = \frac{b^2 c^2}{a} \sin^3\alpha$

siehe Auflösung der Aufgabe 882, Seite 598

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks. Die Buchstaben α, β und γ bedeuten bezw. die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel desselben. Die Buchstaben h_a, h_b und h_c bedeuten die bezw. zu den Seiten a, b und c gehörigen Höhen.

s) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen dem Inhalt, den Höhen und den Winkeln eines Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 859. $F = \frac{h_c^2 \cdot \sin(\alpha + \beta)}{2 \sin\alpha \sin\beta}$

Formel 859a. $F = \frac{h_a^2 \cdot \sin(\beta + \gamma)}{2 \sin\beta \sin\gamma}$

Formel 859b. $F = \frac{h_b^2 \cdot \sin(\alpha + \gamma)}{2 \sin\alpha \sin\gamma}$

siehe Auflösung der Aufgabe 343, Seite 230

Formel 860. $F = \frac{h_a \cdot h_b}{2} \sin\gamma$

siehe Auflösung der Aufgabe 587, Seite 373

Formel 861. $F = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}-\frac{1}{h_c}\right)}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{h_a}-\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)\left(-\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}\right)}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 381, Seite 251

Die Buchstaben α, β und γ bedeuten die drei Winkel eines Dreiecks. Die Buchstaben h_a, h_b und h_c bedeuten die Höhen des Dreiecks, welche bezw. zu den jenen Winkeln gegenüberliegenden Seiten a, b und c gehören. Der Buchstabe F bedeutet den Inhalt des Dreiecks.

t) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den durch Höhen gebildeten Seitenabschnitten eines Dreiecks, den Seiten und den Winkeln desselben ausgedrückt werden.

Formel 862. $\frac{a}{b} = \frac{b''}{a'}$

Formel 862a. $\frac{a}{c} = \frac{c'}{a''}$

Formel 862b. $\frac{b}{c} = \frac{c''}{b'}$

siehe Auflösung der Aufgabe 882, Seite 598

Formel 863. $c' : c'' = \operatorname{tg}\alpha : \operatorname{tg}\beta$

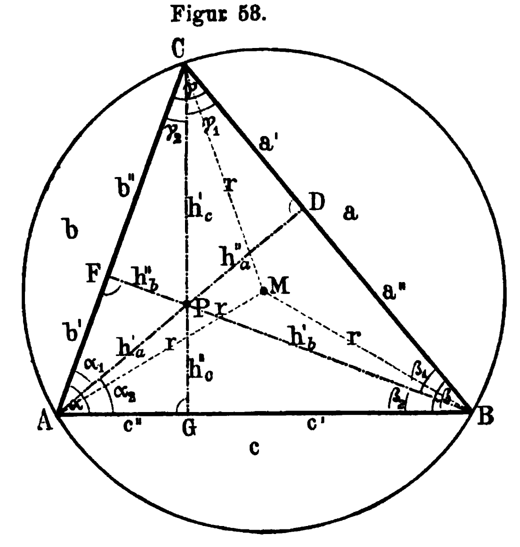
Formel 864. $\sin(\alpha - \beta) = \frac{c' - c''}{c' + c''} \sin\gamma$

siehe Auflösung der Aufgabe 367, Seite 240

Formel 865. $\cos\gamma = \frac{1}{c^2}\left(-a'b' \pm \sqrt{(b'^2 + a'^2)c^2 + a'^2 b'^2}\right)$

siehe Auflösung der Aufgabe 380, Seite 250

Figur 53.



Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich aus der Figur 53.

u) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Höhenabschnitten, den Seiten und Seitenabschnitten eines Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 866. $h'_a \cdot h''_a = h'_b \cdot h''_b$ oder $= h'_c \cdot h''_c$

Formel 867. $a \cdot a'' = h_b \cdot h'_b$

Formel 867 a. $b \cdot b'' = h_c \cdot h'_c$

Formel 867 b. $c \cdot c'' = h_a \cdot h'_a$

Formel 867 c. $a \cdot a' = h_c \cdot h'_c$

Formel 867 d. $b \cdot b' = h_a \cdot h'_a$

Formel 867 e. $c \cdot c' = h_b \cdot h'_b$

Formel 868. $a' \cdot a'' = h_a \cdot h''_a$

Formel 868 a. $b' \cdot b'' = h_b \cdot h''_b$

Formel 868 b. $c' \cdot c'' = h_c \cdot h''_c$

Formel 869. $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2 h_a \cdot h'_a$

Formel 869 a. $b^2 = a^2 + c^2 \pm 2 h_b \cdot h'_b$

Formel 869 b. $c^2 = a^2 + b^2 \pm 2 h_c \cdot h'_c$

Formel 870. $\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} = h_a \cdot h'_a + h_b \cdot h'_b + h_c \cdot h'_c$

} siehe Auflösung der Aufgabe 888, Seite 605 } Die Bedeutung der Buchstaben ergibt sich aus der Figur 53.

---

v) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen zwei ganz beliebigen Winkeltransversalen eines Dreiecks, den Seiten und den Seitenabschnitten ausgedrückt werden.

Formel 871. $W^2_\gamma = \frac{a^2 \cdot c''_w + b^2 \cdot c'_w - c \cdot c'_w \cdot c''_w}{c}$

Formel 871 a. $W^2_\alpha = \frac{b^2 \cdot a''_w + c^2 \cdot a'_w - a \cdot a'_w \cdot a''_w}{a}$

Formel 871 b. $W^2_\beta = \frac{c^2 \cdot b''_w + a^2 \cdot b'_w - b \cdot b'_w \cdot b''_w}{b}$

} siehe Erkl. 317, Seite 283 }

Die Buchstaben W_α, W_β und W_γ bedeuten ganz beliebige Transversalen eines Dreiecks, welche bez. durch die Scheitel der Winkel α, β und γ gehen (dieselben können Höhen, Schwerlinien, winkelhalbierende Transversalen etc. sein).

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten des Dreiecks, welche bez. den Winkeln α, β und γ gegenüberliegen.

Die Buchstaben a'_w, a''_w, b'_w, b''_w, c'_w und c''_w bedeuten die Abschnitte der Seiten a, b und c, gebildet von jenen Transversalen; die Buchstaben a'_w, b'_w und c'_w bedeuten hierbei die rechter Hand, die Buchstaben a''_w, b''_w und c''_w bedeuten die linker Hand liegenden Seitenabschnitte (siehe z. B. Figur 53)

---

w) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Mittel- oder Schwerlinien eines Dreiecks, den Seiten und dem Inhalt des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 872. $a^2 + b^2 = 2\left[s^2_c + \left(\frac{c}{2}\right)^2\right]$

Formel 872 a. $a^2 + c^2 = 2\left[s^2_b + \left(\frac{b}{2}\right)^2\right]$

Formel 872 b. $b^2 + c^2 = 2\left[s^2_a + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right]$

} siehe Erkl. 300, Seite 256

Formel 873. $\cos\alpha = \frac{c^2 + 4(b^2 - s^2_c)}{4bc}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 395, Seite 257

Formel 874. $a = \sqrt{c^2 + \frac{4}{3}(s^2_c - s^2_a)}$

Formel 875. $b = \sqrt{\frac{2}{3}(s^2_c + 2s^2_a) - \frac{1}{2}c^2}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 427, Seite 276

} a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks.

s_a, s_b und s_c bedeuten die Mittel- oder Schwerlinien des Dreiecks, welche bezw. zu den Seiten a, b und c gehören.

Formel 876. $a = \frac{2}{3} \sqrt{2(s^2_b + s^2_c) - s^2_a}$

Formel 876a. $b = \frac{2}{3} \sqrt{2(s^2_a + s^2_c) - s^2_b}$

Formel 876b. $c = \frac{2}{3} \sqrt{2(s^2_a + s^2_b) - s^2_c}$

Formel 877. $F = \frac{1}{3} \sqrt{(s_a + s_b + s_c) \cdot (s_a + s_b - s_c)(s_a - s_b + s_c)(-s_a + s_b + s_c)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 429, Seite 278

a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks,

s_a, s_b und s_c bedeuten die Mittel- oder Schwerlinien des Dreiecks, welche bezw. zu den Seiten a, b und c gehören.

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks.

---

x) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den winkelhalbierenden Transversalen eines Dreiecks, den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 878. $w_\gamma = \frac{a \cdot \sin\beta}{\sin\left(\alpha + \frac{\gamma}{2}\right)}$ oder: $w_\gamma = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\beta + \frac{\gamma}{2}\right)}$

Formel 878a. $w_\alpha = \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\left(\gamma + \frac{\alpha}{2}\right)}$ oder: $w_\alpha = \frac{b \cdot \sin\gamma}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}$

Formel 278b. $w_\beta = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\left(\gamma + \frac{\beta}{2}\right)}$ oder: $w_\beta = \frac{a \cdot \sin\gamma}{\sin\left(\alpha + \frac{\beta}{2}\right)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 435, Seite 287

Formel 879. $w_\gamma = \frac{1}{a+b} \sqrt{ab\,(a+b+c)\,(a+b-c)}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 436, Seite 288

Formel 880. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{w_\gamma \cdot \sin\frac{\gamma}{2}}{b - w_\gamma \cdot \cos\frac{\gamma}{2}}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 430, Seite 280

Formel 881. $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{(a+b)\,w_\gamma}{2ab}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 433, Seite 282

Formel 882. $\cos\frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{c}\left(w_\gamma \cos\frac{\gamma}{2} \pm \sqrt{c^2 + w^2_\gamma \cos^2\frac{\gamma}{2}}\right)$ — siehe Auflösung der Aufgabe 434, Seite 285

Formel 883. $c^2 = (a+b)\left(a+b-2\,w_\gamma \cos\frac{\gamma}{2}\right)$ — siehe Erkl. 320, Seite 286

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks.

Die Buchstaben α, β und γ bedeuten die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Die Buchstaben w_α, w_β und w_γ bedeuten die winkelhalbierenden Transversalen des Dreiecks, welche bezw. die Winkel α, β und γ des Dreiecks halbieren.

y) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den winkelhalbierenden Transversalen, den Seiten, den durch jene Transversalen gebildeten Seitenabschnitten und den Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 884. $w^2_\gamma = ab - c'_w \cdot c''_w$

Formel 884 a. $w^2_\alpha = bc - a'_w \cdot a''_w$

Formel 884 b. $w^2_\beta = ac - b'_w \cdot b''_w$

siehe Erkl. 314, Seite 282

Formel 885. $c'_w \cdot c''_w = a : b$

siehe Erkl. 315, Seite 282

Formel 886. $c'_w = \frac{ac}{a+b}$

Formel 886 a. $c''_w = \frac{bc}{a+b}$

siehe Erkl. 316, Seite 283

Formel 887. $c = c'_w + c''_w$

Formel 888. $a = \sqrt{\frac{c'_w}{c''_w}\left(w^2_\gamma + c'_w \cdot c''_w\right)}$

Formel 888 a. $b = \sqrt{\frac{c''_w}{c'_w}\left(w^2_\gamma + c'_w \cdot c''_w\right)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 442, Seite 293

Formel 889. $a'_w \cdot b'_w \cdot c'_w = a''_w \cdot b''_w \cdot c''_w$

Formel 890. $\frac{a''_w \cdot b''_w}{a'_w \cdot b'_w} = \frac{a}{b}$

Formel 890 a. $\frac{a''_w \cdot c''_w}{a'_w \cdot c'_w} = \frac{a}{c}$

Formel 890 b. $\frac{b''_w \cdot c''_w}{b'_w \cdot c'_w} = \frac{b}{c}$

siehe Auflösung der Aufgabe 894, Seite 611

Formel 891. $\operatorname{tg}(\beta - \alpha) = \frac{c''_w + c'_w}{c''_w - c'_w} \operatorname{ctg} \gamma$

siehe Auflösung der Aufgabe 447, Seite 296

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks.

Die Buchstaben α, β und γ bedeuten die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Die Buchstaben w_α, w_γ und w_β bedeuten die Transversalen des Dreiecks, welche bezw. die Winkel α, β und γ halbieren.

Die Buchstaben a'_w, a''_w, b'_w, b''_w, c'_w und c''_w bedeuten die Abschnitte der Dreiecksseiten, gebildet von jenen Transversalen; hierbei bedeuten a'_w, b'_w und c'_w die rechter Hand liegenden, a''_w, b''_w und c''_w die linker Hand liegenden Abschnitte.

---

z) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den in den Mitten der drei Seiten eines Dreiecks errichteten Perpendikel, den Seiten und Winkeln des Dreiecks ausgedrückt werden.

Formel 892. $\sin\alpha = \frac{c^2 + 4(p^2_b - p^2_a)}{4cp_b}$

Formel 892 a. $\sin\beta = \frac{c^2 + 4(p^2_a - p^2_b)}{4cp_a}$

Formel 892 b. $\cos\gamma = \frac{c^2 - 4(p^2_a + p^2_b)}{8p_a \cdot p_b}$

siehe Auflösung der Aufgabe 461, Seite 305

Die Buchstaben a, b und c bedeuten die drei Seiten eines Dreiecks.

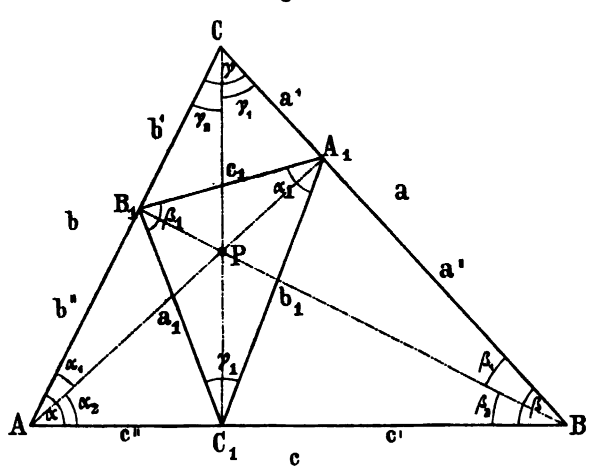
Die Buchstaben α, β und γ bedeuten die diesen Seiten gegenüberliegenden Winkel.

Die Buchstaben p_a und p_b bedeuten die bezw. in den Mitten der Seiten a und b errichteten Perpendikel bis zu ihrem gemeinsamen Durchschnitt.

C) Formeln über das zu einem Dreieck gehörige Höhendreieck.

a) Formeln, durch welche Beziehungen zwischen den Bestimmungsstücken eines Dreiecks und den Bestimmungsstücken des zugehörigen Höhendreiecks ausgedrückt werden.

Figur 54.



Formel 893.	$\alpha_1 = 2R - \alpha$	siehe Auflösung der Aufgabe 649, Seite 404
Formel 893a.	$\beta_1 = 2R - \beta$	
Formel 893b.	$\gamma_1 = 2R - \gamma$	
Formel 894.	$c_1 = \frac{c\,(a^2 + b^2 - c^2)}{2ab}$	siehe Auflösung der Aufgabe 648, Seite 402
Formel 894a.	$b_1 = \frac{b\,(a^2 - b^2 + c^2)}{2ac}$	
Formel 894b.	$a_1 = \frac{a\,(-a^2 + b^2 + c^2)}{2bc}$	
Formel 895.	$a = \frac{a_1}{\cos\alpha}$	siehe Auflösung der Aufgabe 650, Seite 405 und Erkl. 367, Seite 406
Formel 895a.	$b = \frac{b_1}{\cos\beta}$	
Formel 895b.	$c = \frac{c_1}{\cos\gamma}$	
Formel 896.	$r = \frac{a_1}{\sin 2\alpha}$	siehe Auflösung der Aufgabe 899, Seite 615
Formel 896a.	$r = \frac{b_1}{\sin 2\beta}$	
Formel 896b.	$r = \frac{c_1}{\sin 2\gamma}$	
Formel 897.	$r_1 = \frac{1}{2}\,r$	siehe Auflösung der Aufgabe 900, Seite 615
Formel 898.	$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{a \cdot h'_a}{a_1}$	siehe Auflösung der Aufgabe 901, Seite 616
Formel 898a.	$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{b \cdot h'_b}{b_1}$	
Formel 898b.	$r = \frac{1}{2} \cdot \frac{c \cdot h'_c}{c_1}$	
Formel 899.	$r = \frac{F}{s_1}$	siehe Auflösung der Aufgabe 902, Seite 617

Die Bedeutung der Buchstaben a, b und c; a_1, b_1 und c_1; α, β und γ; α_1, β_1 und γ_1 ergibt sich aus der Figur 54.

r bedeutet den Radius des dem Dreieck ABC umbeschriebenen Kreises.

r_1 bedeutet den Radius des dem Höhendreieck $A_1B_1C_1$ umbeschriebenen Kreises.

F bedeutet den Inhalt des Dreiecks ABC.

s_1 bedeutet die halbe Summe der Seiten a_1, b_1 und c_1 des Höhendreiecks, also:

$$s_1 = \frac{a_1 + b_1 + c_1}{2}$$

h'_a, h'_b und h'_c bedeuten die Höhenabschnitte der Höhen des Dreiecks ABC und zwar diejenigen Abschnitte, welche nach den Ecken A, B und C dieses Dreiecks hin liegen.
(siehe die Figuren 54 und 53)

D) Formeln über das Viereck.

1) Formeln über das rechtwinklig-gleichseitige Parallelogramm, das Quadrat.

Formel 400. $F = s^2$ — siehe Erkl. 378, Seite 415

F bedeutet den Inhalt,
s die Seite eines Quadrats.

---

2) Formeln über das rechtwinklig-ungleichseitige Parallelogramm das Rechteck.

Formel 401. $F = a \cdot b$ — siehe Erkl. 381, Seite 417

Formel 402. $F = \frac{d^2}{2} \cdot \sin 2\alpha$ — siehe Auflösung der Aufgabe 662, Seite 417

Formel 403. $F = \frac{d^2}{2} \cdot \sin \delta$ — siehe Auflösung der Aufgabe 665, Seite 419

F bedeutet den Inhalt,
a und b bedeuten die Seiten,
d bedeutet eine Diagonale eines Rechtecks,
α bedeutet den Winkel, welchen die Diagonale mit einer Seite bildet und
δ bedeutet den Winkel, welchen die beiden Diagonalen des Rechtecks miteinander bilden.

---

3) Formeln über das schiefwinklig-gleichseitige Parallelogramm, das Rhombus oder die Raute.

Formel 404. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = d_1 : d$ — siehe Andeutung zur Aufgb. 670, Seite 422

Formel 405. $d_1 = 2a \cdot \sin \frac{\alpha}{2}$

Formel 406. $d = 2a \cdot \cos \frac{\alpha}{2}$

Formel 407. $a = \frac{d + d_1}{2\sqrt{2} \cdot \sin\left(45^0 + \frac{\alpha}{2}\right)}$

(Formel 405–407: siehe Andeutung zur Aufgabe 672, Seite 423)

Formel 408. $F = a^2 \cdot \sin \alpha$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 667, Seite 420

a bedeutet eine Seite,
α ein spitzer Winkel einer Raute
d und d_1 bedeuten die Diagonalen und
F bedeutet den Inhalt der Raute.

---

4) Formeln über das schiefwinklig-ungleichseitige Parallelogramm, das Rhomboid oder Rautling.

Formel 409. $d = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \alpha}$

Formel 410. $d_1 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cdot \cos \alpha}$

Formel 411. $F = ab \cdot \sin \alpha$

(Formel 409–411: siehe Andeutung zur Aufgabe 675, Seite 426)

Formel 412. $F = \frac{d \cdot d_1}{2} \cdot \sin \delta$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 685, Seite 431

a und b bedeuten zwei aneinanderstossende Seiten eines Rhomboids,
α bedeutet den von denselben eingeschlossenen Winkel,
d bedeutet die Diagonale, welche dem Winkel α gegenüberliegt
d_1 bedeutet die Diagonale, welche durch den Winkel α geht,
δ bedeutet den Winkel, welchen die Diagonalen einschliessen,
F bedeutet den Inhalt des Rhomboids.

---

5) Formeln über das gerade oder das gleichschenklige Trapez, das Antiparallelogramm.

Formel 413. $\cos\alpha = \frac{a-b}{2c}$ — siehe Andeutung zur Aufg. 700, Seite 444

Formel 414. $\sin\alpha = \frac{h}{c}$ — siehe Andeutung zur Aufg. 713, Seite 454

Formel 415. $\sin\alpha = \frac{2h}{a-b}$ — siehe Andeutung zur Aufg. 718, Seite 457

Formel 416. $d = \sqrt{\left(\frac{a-b}{2\cos\alpha}\right)^2 + ab}$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 700, Seite 444

Formel 417. $F = \frac{a+b}{4}\sqrt{(2c+a-b)\,(2c-a+b)}$ — s. Andeutung zur Aufgabe 704, Seite 448

Formel 418. $F = (a - \sqrt{c^2 - h^2})\cdot h$ — s. Andeutung zur Aufgabe 713, Seite 454

Formel 419. $F = \frac{a^2 - b^2}{4}\operatorname{tg}\alpha$ — s. Andeutung zur Aufgabe 700, Seite 444

Formel 420. $F = (a - c\cdot\cos\alpha)\cdot c\cdot\sin\alpha$ — s. Andeutung zur Aufgabe 702, Seite 447

Formel 421. $F = \frac{1}{2}\,d^2\cdot\sin\delta$ — siehe Andeutung zur Aufg. 710, Seite 452

Formel 422. $F = \frac{1}{2}\,(d_1 + d_2)^2 \sin\delta$ — s. Andeutung zur Aufgabe 709, Seite 451

a und b bedeuten die parallelen Seiten;
c bedeutet eine der nicht parallelen Seiten eines Antiparallelogramms;
α bedeutet den Winkel, welchen die grössere der parallelen Seiten a mit einer der dritten Seiten c bildet;
h bedeutet die Höhe, d. i. der senkrechte Abstand der beiden parallelen Seiten a und b;
d bedeutet eine der Diagonalen;
d_1 und d_2 bedeuten die Abschnitte, in welche sich die Diagonalen gegenseitig zerlegen;
δ bedeutet den Winkel, welchen die Diagonalen miteinander bilden und
F bedeutet den Inhalt des Antiparallelogramms.

6) Formeln über das doppelt-gleichschenklige Viereck, das Deltoid.

Formel 423. $F = \frac{d\cdot d_1}{2}$ — siehe Andeutung zur Aufg. 722, Seite 460

d und d_1 bedeuten die zu einander senkrecht stehenden Diagonalen,
F bedeutet den Inhalt eines Deltoids.

7) Formeln über das Kreisviereck.

Formel 424. $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{bc}{ad}}$ oder $= \frac{1}{ad}\sqrt{abcd}$

Formel 424a. $\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{cd}{ab}}$ oder $= \frac{1}{ab}\sqrt{abcd}$

Formel 424b. $\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{ad}{bc}}$ oder $= \frac{1}{bc}\sqrt{abcd}$

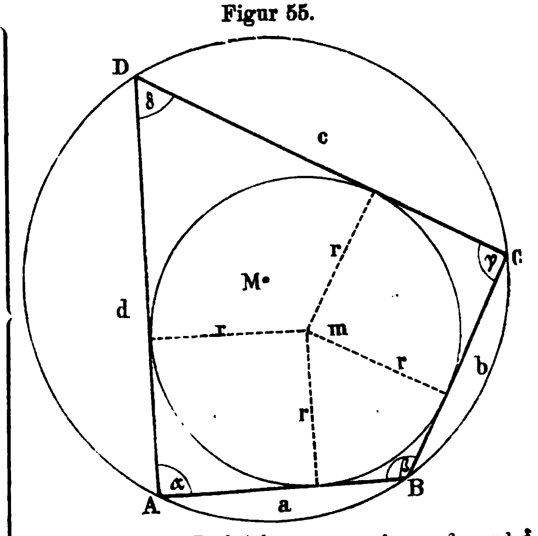
Formel 424c. $\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{ab}{cd}}$ oder $= \frac{1}{cd}\sqrt{abcd}$

Formel 425. $F = \sqrt{abcd}$

Formel 426. $r = \frac{\sqrt{abcd}}{a+c}$ oder $= \frac{\sqrt{abcd}}{b+d}$

siehe Auflösung der Aufgabe 1034, Seite 726

Figur 55.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d; α, β, γ und δ ergibt sich aus der Figur 55.
r bedeutet den Radius des einem Kreisviereck einbeschriebenen Kreises;
F bedeutet den Inhalt des Kreisvierecks.

Formel 427. $\alpha + \gamma = \delta + \beta$ oder $= 2R$ oder $= 180^0$ — siehe Erkl. 607, Seite 727 und Erkl. 596, S. 710

Formel 428. $a + c = b + d$ — siehe Erkl. 607, Seite 727 und Erkl. 606, S. 726

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d; α, β, γ und δ ergibt sich aus der Figur 55.

---

8) Formeln über das allgemeine Trapez.

Formel 429. $\cos\alpha = \frac{(a-c)^2 + d^2 - b^2}{2d\,(a-c)}$

Formel 429a. $\cos\beta = \frac{(a-c)^2 + b^2 - d^2}{2b\,(a-c)}$

Formel 430. $d_1^2 + d_2^2 = b^2 + d^2 + 2ac$

Formel 431. $d_1^2 - d_2^2 = \frac{a+c}{a-c}\,(d^2 - b^2)$

(Formel 429 bis 431: s. Andeutung zur Aufgabe 739, Seite 473)

Formel 432. $b = (a-c)\,\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)}$

Formel 432a. $d = (a-c)\,\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$

(Formel 432 und 432a: s. Andeutung zur Aufgabe 731, Seite 468)

Formel 433. $(b-d):(b+d) = \operatorname{tg}\frac{\delta-\beta}{2} : \operatorname{tg}\frac{\delta+\beta}{2}$ — s. Andeutung zur Aufgabe 737, Seite 472

Formel 434. $h = \frac{(a-c)\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$ — s. Andeutung zur Aufgabe 733, Seite 486

Formel 435. $F = \frac{a+c}{2}\cdot h$ — siehe Erkl. 404, Seite 446

Formel 436. $F = \frac{(a+c)(a-c)\sin\alpha\sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$ — s. Andeutung zur Aufgabe 731, Seite 468

Formel 437. $F = \frac{a+c}{2}\cdot b\sin\beta$ — s. Andeutung zur Aufgabe 734, Seite 470

Formel 438. $F = \frac{d}{2}\sin\alpha\,(2a - d\cos\alpha - \sqrt{b^2 - d^2\sin\alpha})$ — s. Andeutung zur Aufgabe 728, Seite 466

Formel 439. $F = \frac{1}{4}\cdot\frac{a+c}{a-c}\sqrt{[(b+d)+(a-c)]}\cdot\sqrt{[(b+d)-(a-c)]}\cdot\sqrt{[(a-c)+(b-d)]}\cdot\sqrt{[(a-c)-(b-d)]}$ — s. Andeutung zur Aufgabe 739, Seite 473

Formel 440. $F = \left[a - \frac{h}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\right]\cdot h$ — s. Andeutung zur Aufgabe 742, Seite 478 und die Erkl. 421, S. 479

Formel 441. $F = d\sin\alpha\left(a - \frac{d}{2}\cdot\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}\right)$ — s. Andeutung zur Aufgabe 743, Seite 481

a und c bedeuten die beiden parallelen Seiten eines Trapezes;
b und d bedeuten die nicht parallelen Seiten desselben;
α und β bedeuten die der Seite a anliegenden Winkel;
d_1 bedeutet die Diagonale, welche die Endpunkte der Seiten a und b verbindet;
d_2 bedeutet die andere Diagonale, welche die Endpunkte der Seiten a und d verbindet;
δ bedeutet den dem Winkel β gegenüberliegenden Winkel;
h bedeutet die Höhe, d. i. der senkrechte Abstand der beiden parallelen Seiten a und c;
F bedeutet den Inhalt des Trapezes.

---

9) Formeln über das Sehnenviereck.

Formel 442. $\cos\alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}$

Formel 442a. $\cos\beta = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}$

Formel 442b. $\cos\gamma = \frac{b^2 + c^2 - a^2 - d^2}{2(bc + ad)}$

Formel 442c. $\cos\delta = \frac{c^2 + d^2 - a^2 - b^2}{2(cd + ab)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 1013, Seite 710

Formel 443. $\alpha + \gamma = 2R$ oder $= 180^0$

Formel 443a. $\beta + \delta = 2R$ oder $= 180^0$

s. Erkl. 596, Seite 710

Formel 444. $\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{ad+bc}}$

Formel 444a. $\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab+cd}}$

Formel 444b. $\sin\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc+ad}}$

Formel 444c. $\sin\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{cd+ab}}$

Formel 445. $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{ad+bc}}$

Formel 445a. $\cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{ab+cd}}$

Formel 445b. $\cos\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{bc+ad}}$

Formel 445c. $\cos\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{cd+ab}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 1014, Seite 711

Formel 446. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-d)}{(s-b)(s-c)}}$

Formel 446a. $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{(s-c)(s-d)}}$

Formel 446b. $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{(s-a)(s-d)}}$

Formel 446c. $\operatorname{tg}\frac{\delta}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-d)}{(s-a)(s-b)}}$

Formel 447. $\sin\alpha = \frac{2}{ad+bc}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

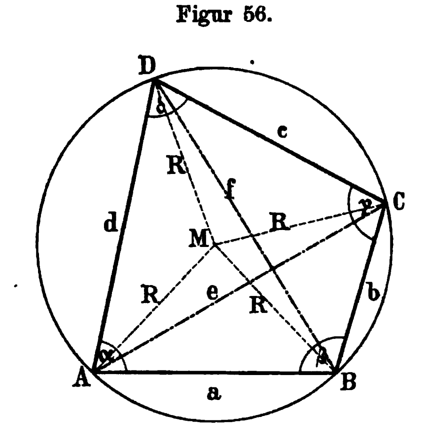
Formel 447a. $\sin\beta = \frac{2}{ab+cd}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Formel 447b. $\sin\gamma = \frac{2}{bc+ad}\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

Formel 447c. $\sin\delta = \frac{2}{cd+ab}\sqrt{(c-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

siehe Auflösung der Aufgabe 1015, Seite 712

Figur 56.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d: α, β, γ und δ ergibt sich aus der Figr 56.

s bedeutet die halbe Summe der vier Seiten, also:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

Formel 448. $e = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}$

Formel 448a. $f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 1016, Seite 713

Formel 449. $e \cdot f = a \cdot c + b \cdot d$ } siehe Erkl. 599, Seite 713

Formel 450. $e : f = (ad+bc) : (ab+cd)$ } siehe Erkl. 600, Seite 714

Formel 451. $R = \frac{e}{2 \sin \beta}$ oder $= \frac{e}{2 \sin \delta}$

Formel 451a. $R = \frac{f}{2 \sin \alpha}$ oder $= \frac{f}{2 \sin \gamma}$

Formel 452. $R = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 1017, Seite 714

Formel 453. $F = \frac{ab+cd}{2} \cdot \sin \beta$

Formel 453a. $F = \frac{ab+cd}{2} \cdot \sin \delta$

Formel 453b. $F = \frac{ad+bc}{2} \cdot \sin \alpha$

Formel 453c. $F = \frac{ad+bc}{2} \cdot \sin \gamma$

Formel 454. $F = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 1018, Seite 715

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d; α, β, γ und δ; e und f ergibt sich aus der Figur 56.

s bedeutet die halbe Summe der vier Seiten, also:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

R bedeutet den Radius des dem Sehnenviereck umbeschriebenen Kreises;

F bedeutet den Inhalt des Sehnenvierecks.

10) Formeln über das Tangentenviereck.

Formel 455. $r = \frac{a}{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$

Formel 455a. $r = \frac{b}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}}$

Formel 455b. $r = \frac{c}{\operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\delta}{2}}$

Formel 455c. $r = \frac{d}{\operatorname{ctg} \frac{\delta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}$

Formel 456. $r = \frac{a \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2}}{\sin \frac{\alpha+\beta}{2}}$

Formel 456a. $r = \frac{b \cdot \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}}{\sin \frac{\beta+\gamma}{2}}$

Formel 456b. $r = \frac{c \cdot \sin \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\delta}{2}}{\sin \frac{\gamma+\delta}{2}}$

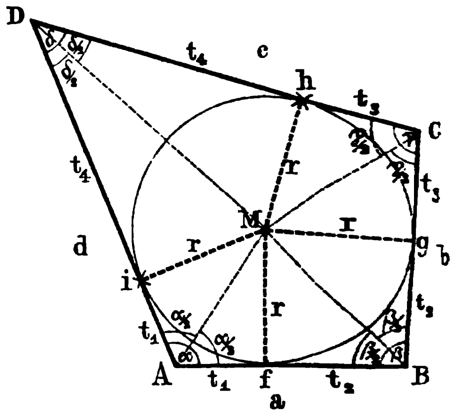
Formel 456c. $r = \frac{d \cdot \sin \frac{\delta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\sin \frac{\delta+\alpha}{2}}$

Formel 457. $F = r \cdot s$

} siehe Auflösung der Aufgabe 1030, Seite 722

Formel 458. $a + c = b + d$ siehe Erkl. 606, S. 726

Figur 57.



Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d; α, β, γ und δ ergibt sich aus der Figur 57.

r bedeutet den Radius des dem Tangentenviereck einbeschriebenen Kreises;

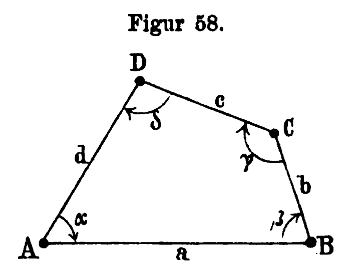
F bedeutet den Inhalt des Tangentenvierecks;

s bedeutet die halbe Summe der vier Seiten a und d, also:

$$s = \frac{a+b+c+d}{2}$$

11) Formeln über das allgemeine Viereck, das Trapezoid.

Figur 58.



Formel 459. $a = d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\alpha+\delta) + b\cdot\cos\beta$ *)

Formel 459a. $b = a\cdot\cos\beta - d\cdot\cos(\alpha+\beta) + c\cdot\cos\gamma$

Formel 459b. $c = b\cdot\cos\gamma - a\cdot\cos(\beta+\gamma) + d\cdot\cos\delta$

Formel 459c. $d = c\cdot\cos\delta - b\cdot\cos(\delta+\gamma) + a\cdot\cos\alpha$

Formel 459d. $a = d\cdot\cos\alpha - c\cdot\cos(\beta+\gamma) + b\cdot\cos\beta$

Formel 459e. $b = a\cdot\cos\beta - d\cdot\cos(\delta+\gamma) + c\cdot\cos\gamma$

Formel 459f. $c = b\cdot\cos\gamma - a\cdot\cos(\alpha+\delta) + d\cdot\cos\delta$

Formel 459g. $d = c\cdot\cos\delta - b\cdot\cos(\alpha+\beta) + a\cdot\cos\alpha$

Formel 460. $d\cdot\sin\alpha = c\cdot\sin(\alpha+\delta) + b\cdot\sin\beta$

Formel 460a. $a\cdot\sin\beta = d\cdot\sin(\alpha+\beta) + c\cdot\sin\gamma$

Formel 460b. $b\cdot\sin\gamma = a\cdot\sin(\beta+\gamma) + d\cdot\sin\delta$

Formel 460c. $c\cdot\sin\delta = b\cdot\sin(\gamma+\delta) + a\cdot\sin\alpha$

Formel 460d. $d\cdot\sin\alpha = -c\cdot\sin(\beta+\gamma) + b\cdot\sin\beta$

Formel 460e. $a\cdot\sin\beta = -d\cdot\sin(\gamma+\delta) + c\cdot\sin\gamma$

Formel 460f. $b\cdot\sin\gamma = -a\cdot\sin(\alpha+\delta) + d\cdot\sin\delta$

Formel 460g. $c\cdot\sin\delta = -b\cdot\sin(\alpha+\beta) + a\cdot\sin\alpha$

(Formeln 459 bis 460g: siehe Auflösung der Aufgabe 775, Seite 507 und die Erkl. 436, S. 510)

Formel 460h. $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 4R$ oder $= 360^0$ (siehe Erkl. 332, Seite 305)

(Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d; α, β, γ und δ in den Formeln 459 bis 470 ergibt sich aus der Figur 58 (siehe die Anmerkungen 34 bis 41, Seite 489 bis 493).)

*) Diese Formeln enthalten die **allgemeinen Beziehungen** zwischen den vier Winkeln und den vier Seiten eines beliebigen Vierecks (siehe auch die Erkl. 433, Seite 509).

Formel 461. $$\cos\gamma = \frac{b^2+c^2-a^2-d^2+2ad\cos\alpha}{2bc}$$

Formel 462. $$\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c)^2-(d-a)^2-4ad\sin^2\frac{\alpha}{2}}{bc}}$$

Formel 463. $$\sin\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(d-a)^2-(b-c)^2+4ad\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}}{bc}}$$

(Formeln 461 bis 463: siehe Andeutung zur Aufgabe 767, Seite 498)

Formel 464. $$\sin\beta = \frac{1}{2(ab-cd)}\cdot\sqrt{(a+b+c+d)(b+c-a-d)(a+c-d-b)(a+b-c-d)}$$
siehe Andeutung zur Aufgabe 771, Seite 503

Formel 465. $$d = \sqrt{a^2+b^2+c^2-2[ab\cos\beta+bc\cos\gamma-ac\cos(\beta+\gamma)]}$$

Formel 466. $$\cos\alpha = \frac{a+c\cdot\cos(\beta+\gamma)-b\cdot\cos\beta}{\sqrt{a^2+b^2+c^2-2[ab\cdot\cos\beta+bc\cdot\cos\gamma+ac\cdot\cos(\beta+\gamma)]}}$$

(Formeln 465 und 466: siehe Andeutung zur Aufgabe 776, Seite 511)

Formel 467. $$d = \pm\sqrt{c^2-[a\sin\alpha-b\sin(\alpha+\beta)]^2}-b\cos(\alpha+\beta)+a\cos\alpha$$

Formel 468. $$\sin(\alpha+\beta+\gamma) = \frac{b\sin(\alpha+\beta)-a\sin\alpha}{c}$$

(Formeln 467 und 468: s. Andeutung zur Aufg. 777, Seite 512)

Formel 469. $$d = c\cos\delta \mp \sqrt{b^2-(c\sin\delta-a\sin\alpha)^2}+a\cdot\cos\alpha$$

Formel 470. $$\sin\beta = \frac{d\cdot\sin\alpha-c\cdot\sin(\alpha+\delta)}{b}$$

(Formeln 469 und 470: siehe Andeutung zur Aufgabe 778, Seite 514)

Formel 471. $c = \frac{b \cdot \sin(\gamma + \delta) + a \sin\alpha}{\sin\delta}$

Formel 471a. $d = \frac{b \cdot \sin\gamma + a \sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta}$

} siehe Andeutung zur Aufgabe 780, Seite 515

Formel 472. $b = \frac{c \cdot \sin\delta - a \cdot \sin\alpha}{\sin(\gamma + \delta)}$

Formel 472a. $d = \frac{c \cdot \sin\gamma - a \cdot \sin\beta}{\sin(\gamma + \delta)}$

} siehe Andeutung zur Aufgabe 781, Seite 516

Formel 473. $F = \frac{1}{2}(ad \cdot \sin\alpha + bc \cdot \sin\gamma)$ } siehe Andeutung zur Aufgabe 767, Seite 498

Formel 474. $F = \frac{1}{4} \cdot \frac{ab + cd}{ab - cd} \cdot \sqrt{(a+b+c+d)(b+c-a-d)} \cdot \sqrt{(a+c-d-b)(a+b-c-d)}$
siehe Andeutung zur Aufgabe 771, Seite 503

Formel 475. $F = \frac{e \cdot f}{2} \sin\varepsilon$ } siehe Andeutung zur Aufgabe 771, Seite 504

Formel 476. $F = \frac{1}{2}[ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta + \gamma)]$ } s. Andeutung zur Aufgb. 776, Seite 511

Formel 477. $F = \frac{2ab \cdot \sin\alpha \sin\gamma + a^2 \cdot \sin\alpha \sin(\alpha + \delta) + b^2 \cdot \sin\gamma \sin(\gamma + \delta)}{2 \sin\delta}$
siehe Andeutung zur Aufgabe 780, Seite 515

Formel 478. $F = \frac{c^2 \cdot \sin\delta \sin\gamma - a^2 \cdot \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin(\gamma + \delta)}$ } siehe Andeutung zur Aufgabe 781, Seite 516

Formel 479. $F = \frac{b^2 + d^2 - a^2 - c^2}{4} \cdot \operatorname{tg}\varepsilon$ } siehe Andeutung zur Aufgabe 782, Seite 516

Formel 480. $F = \frac{\sin(\beta + \gamma)}{2}[ab \cdot \sin\beta + bc \cdot \sin\gamma - ac \cdot \sin(\beta + \gamma)]$ } s. Andeutung zur Aufgb. 783, Seite 517

Formel 481. $F = \frac{f^2}{2}\left[\frac{\sin\beta_1 \sin\delta_2}{\sin(\beta_1 + \delta_2)} + \frac{\sin\beta_2 \sin\delta_1}{\sin(\beta_2 + \delta_1)}\right]$ } siehe Andeutung zur Aufgabe 760, Seite 495

Die Bedeutung der Buchstaben a, b, c und d: α, β, γ und δ ergibt sich aus der Figur 58.
F bedeutet den Inhalt;
e und f bedeuten die Diagonalen des Vierecks;
ε bedeutet den Winkel, welchen die Diagonalen einschliessen;
$\beta_1, \beta_2, \delta_1$ und δ_2 bedeuten die Winkel, welchen die Diagonale f (siehe Figur 280, Seite 49.) mit den vier Seiten bilden.

E) Formeln über die regelmässigen Vielecke.

Formel 482. $R = \frac{s}{2 \sin \frac{180^0}{n}}$

Formel 482a. $s = 2R \cdot \sin \frac{180^0}{n}$

Formel 483. $r = \frac{s}{2} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$

Formel 483a. $s = 2r \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$

Formel 484. $r = R \cdot \cos \frac{180^0}{n}$

Formel 484a. $R = \frac{r}{\cos \frac{180^0}{n}}$

Formel 485. $F = \frac{n \cdot s \cdot r}{2}$

Formel 486. $F = \frac{n \cdot s^2}{4} \cdot \operatorname{ctg} \frac{180^0}{n}$

Formel 487. $F = \frac{n \cdot R^2}{2} \cdot \sin \frac{360^0}{n}$

Formel 488. $F = n \cdot r^2 \cdot \operatorname{tg} \frac{180^0}{n}$

} siehe Auflösung der Aufgabe 978, Seite 686

s bedeutet die Seite eines regelmässigen Vielecks (eines regulären Polygons);
n bedeutet dessen Seitenzahl;
R bedeutet den Radius des demselben umbeschriebenen Kreises;
r bedeutet den Radius des demselben einbeschriebenen Kreises;
F bedeutet den Inhalt des Polygons.

Formel 489. $s = S \cdot \cos\frac{180^0}{n}$

Formel 490. $S = \frac{s}{\cos\frac{180^0}{n}}$

siehe Auflösung der Aufgabe 979, Seite 690

S bedeutet eine Seite eines einem Kreis umbeschriebenen regulären Polygons;
s bedeutet eine Seite des demselben Kreis einbeschriebenen regulären Polygons;
n bedeutet die Seitenzahl eines jeden dieser Polygone.

Formel 491. $s_n = \frac{s_{2n}}{R}\sqrt{4R^2 - s_{2n}^2}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 980, Seite 690

Formel 491a. $s_{2n} = \sqrt{2R\left(R - \sqrt{R^2 - \frac{s_n^2}{4}}\right)}$ — siehe Erkl. 583, Seite 691

R bedeutet den Radius eines Kreises;
s_n bedeutet eine Seite des diesem Kreis einbeschriebenen Polygons mit der Seitenzahl n.
s_{2n} bedeutet eine Seite des diesem Kreis einbeschriebenen Polygons mit der doppelten Seitenzahl $2n$.

Formel 492. $u_n = n \cdot s_n$

Formel 493. $U_n = n \cdot S_n$

siehe Erkl. 586, Seite 693

u_n bedeutet den Umfang eines einem Kreis einbeschriebenen regulären Polygons mit der Seitenzahl n;
s_n bedeutet eine Seite desselben.
U_n bedeutet den Umfang eines einem Kreis umbeschriebenen regulären Polygons mit der Seitenzahl n;
S_n bedeutet eine Seite desselben;
n bedeutet stets die Seitenzahl des betreffenden Polygons.

F) Formeln über den Kreis.

Formel 494. $s = 2r \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 797, Seite 530

Formel 494a. $s = 2 \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$ für den Radius $r = 1$

Formel 494b. $s = \sin\frac{\alpha}{2}$ für den Durchmesser $2r = 1$

siehe Erkl. 454, Seite 532

Formel 495. $s = 2a \cdot \text{tg}\frac{\alpha}{2}$

Formel 496. $r = \frac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

siehe Andeutung zur Aufgabe 799, Seite 533

Formel 497. $2r\pi : \text{bog}\,\alpha = 360^0 : \alpha^0$ — siehe Erkl. 459, Seite 535

Formel 497a. $\text{bog}\,\alpha = 2r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$

oder:

Formel 497b. $\text{bog}\,\alpha = r\pi \cdot \frac{\alpha^0}{180^0}$

siehe Andeutung zur Auflösung der Aufgabe 801, Seite 534 und die Erkl. 461, Seite 536

Formel 498. $\text{bog}\,\alpha = \frac{\pi \cdot s}{\sin\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 802, Seite 537

(Formeln 497a bis 498: Längeneinheiten des Radius)

Formel 499. $U = 2r\pi$ — siehe Erkl. 460, Seite 536

Formel 500. $F = r^2\pi$ — siehe Erkl. 487, Seite 557

Formel 501. $\text{Sektor} = r^2\pi \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$ — siehe Erkl. 486, Seite 556

Formel 502. $\text{Sektor} = \frac{\pi s^2}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\alpha^0}{360^0}$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 824, Seite 556

Formel 503. $\text{Sektor} = \frac{r}{2} \cdot \text{bog}\,\alpha$ — siehe Erkl. 488, Seite 557

r bedeutet den Radius eines Kreises,
s eine Sehne desselben;
α den zu dieser Sehne gehörigen Centriewinkel;
a den Abstand der Sehne s vom Kreismittelpunkt;
bog α bedeutet den zu dem Centriewinkel α gehörigen Bogen;
U bedeutet den Umfang des Kreises;
F bedeutet den Inhalt des Kreises;
arc α bedeutet den Bogen eines Kreises, welcher zu dem Centriewinkel α eines Kreises gehört, dessen Radius = 1 ist;
π bedeutet die irrationale Zahl 3,14159265 . . . .

Formel 504. $\text{Segment} = \frac{r^2}{2}\left(2\pi\cdot\frac{\alpha^0}{360^0} - \sin\alpha\right)$ — siehe Auflösung der Aufgabe 826, Seite 559 und die Erkl. 491, Seite 560 oder: **Formel 504 a.** $\text{Segment} = \frac{r^2}{2}\left(\pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0} - \sin\alpha\right)$ **Formel 505.** $\text{Segment} = \frac{r^2}{2}(\text{arc}\,\alpha - \sin\alpha)$ — siehe Erkl. 492, Seite 561 worin: **Formel 505 a.** $\text{arc}\,\alpha = \pi\cdot\frac{\alpha^0}{180^0}$ — siehe Erkl. 493, Seite 561 **Formel 506.** $\text{Segment} = F\cdot\left(\frac{\alpha^0}{360^0} - \frac{\sin\alpha}{2\pi}\right)$ — siehe Andeutung zur Aufgabe 835, Seite 567		r bedeutet den Radius eines Kreises, α einen Centriewinkel desselben; F bedeutet den Inhalt des Kreises; $\text{arc}\,\alpha$ bedeutet den Bogen, welcher zu dem Centriewinkel α eines Kreises gehört, dessen Radius $= 1$ ist; π bedeutet die irrationale Zahl 3,14159265 . . . .
Formel 507. $F = \frac{(R^2\cdot\alpha + r^2\cdot\beta)\cdot\pi}{360} - \frac{R^2\sin\alpha + r^2\sin\beta}{2}$. — siehe Auflösung der Aufg. 1038, Seite 729		R und r bedeuten die Radien zweier sich schneidender Kreise; α und β bedeuten bezw. die in Grad ausgedrückten Centriewinkel, welche zu der gemeinschaftlichen Sehne jener sich schneidenden Kreise gehören; F bedeutet den Inhalt des beiden Kreisen gemeinschaftlichen Flächenstücks; π bedeutet die irrationale Zahl 3,14159265 . . .
Formel 508. $c = \sqrt{R^2 + r^2 + 2Rr\cdot\cos\varepsilon}$ — siehe Auflösung der Aufgabe 1043, Seite 734		R und r bedeuten die Radien zweier sich schneidender Kreise; ε bedeutet den Winkel, unter welchem sich diese Kreise schneiden (siehe Erkl. 515, Seite 735); c bedeutet die Centrale beider Kreise.

Berichtigungen.*)

*) **Die nachstehenden bis jetzt gefundenen Berichtigungen sind vor dem Gebrauch des Buches an den betreffenden Stellen einzutragen.**

Seite 14. In Erkl. 41 soll es in Formel 11 heissen: $\cos\alpha$ statt: $\cos\ a$

Seite 36. In Aufgabe 65 soll es heissen: in einem gleichschenkligen, statt: in einem rechtwinkligen.

Seite 48. In Auflösung der Aufgabe 116 muss der Nenner der vorletzten Gleichung heissen: 2 statt: 3
ferner muss der Nenner der Formel 85 heissen: 6 statt: 9

Seite 80. In Erkl. 130 soll die linke Seite der Formel 103 heissen: c statt: a

Seite 81. In Erkl. 131 soll es auf der rechten Seite der Formel 106 heissen: $\sin\alpha$ statt: $\sin\cdot\alpha$

Seite 92. In Erkl. 155 sollen die linken Seiten der Formeln 151 und 152 heissen: $\mathrm{tg}\,\alpha$ statt: $\mathrm{tg}\,\beta$
ferner soll es in Formel 150 heissen: $(a+c)\cos\varphi$ statt: $(a-c)\cos\varphi$

Seite 93. In Erkl. 156 soll es auf der rechten Seite der Formel 164 heissen: $(b+c)\cos\varphi$ statt: $(b-c)\cos\varphi$
ferner soll es im Nenner auf der rechten Seite der Formel 166a heissen: $b\cdot\sin\alpha$ statt: $b\cdot\mathrm{cin}\,\alpha$

Seite 95. In Formel 181 soll es im Nenner unter der Wurzel heissen: ab, statt: ac

Seite 97. In Erkl. 161 soll es in der Formel 179 heissen: $\cos\frac{\alpha}{2}$ statt: $\cos\frac{a}{2}$

Seite 102. In den Erkl. 166 und 167 soll es heissen: einbeschriebenen, statt: umbeschriebenen.

Seite 113. In Formel 202a soll es im Nenner des letzten Gliedes heissen: 4, statt: 2a

Seite 205. Ueber der Andeutung zur Aufgabe 306 soll es heissen:

Gegeben $\left\{ a = 40{,}281\,m \right.$ statt: Gegeben $\left\{ \alpha = 40{,}281\,m \right.$

Seite 212. Ueber der Andeutung zur Aufgabe 316 soll es heissen:

Gegeben $\left\{ h = 15\,m \right.$ statt: Gegeben $\left\{ k = 15\,m \right.$

Seite 217. Der Abschnittstitel soll die Nr. 9 statt Nr. 8 haben.

Seite 217. In der Aufgabe 324 soll es heissen: der Gegenwinkel β der Seite b ist doppelt so gross als der Gegenwinkel α der Seite a, statt: der Gegenwinkel α der Seite a ist doppelt so gross als der Gegenwinkel β der Seite b. (Eingesandt von Kartograph Mühe in Glogau.)

Seite 272. In Andeutung zur Aufgabe 420 soll es in der fünften Zeile heissen: Endpunkt G statt: F

Seite 283. In Erkl. 317 müssen folgende Berichtigungen vorgenommen werden:

a) die rechte Seite der Gleichung c) muss heissen: $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

b) die **rechten** Seiten der Gleichungen d) und d_1) müssen heissen: $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

c) der in der **rechten** Seite der Gleichung e) enthaltene Quotient muss heissen: $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

d) der in der **rechten** Seite der Gleichung f) enthaltene Quotient muss heissen: $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$

e) die rechte Seite der Relation 3) muss heissen: $\frac{c^2 b''_w + a^2 b'_w - b \cdot b'_w \cdot b''_w}{b}$

(Eingesandt von C. Kreeter, cand. math. in Fürstenwalde.)

Seite 319. In der Erkl. 344 soll es in Gleichung 2) heissen: $\frac{a + b + c}{b}$ statt: $\frac{a + b + c}{a}$

Seite 352. In der fünften Zeile des Abschnittstitels X) soll es heissen: **und die Differenz und zweier von** statt: und zwei von.

Seite 411. Ueber der Andeutung zur Aufgabe 657a soll es heissen: (siehe Erkl. 230) statt: (siehe Erkl. 203).

Seite 420. In der Ueberschrift des Abschnitts c) soll es heissen: schiefwinklig-**gleichseitige**, statt: schiefwinklig-gleichschenklige.

Seite 493. In Anmerkung 41 soll es in der letzten Zeile auf Seite 493 heissen: der Aufgabe 775, statt: der Aufgabe 767.

Seite 509. In der Erkl. 433 soll es in Gleichung 1a) heissen: $= 0$ statt: $- 0$.
ferner soll es in Gleichung a_1) heissen:
$a \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$ statt: $\alpha \cdot \cos(\alpha + \beta + \gamma + \delta)$

Seite 516. In Andeutung zur Aufgabe 781 soll es in der Gleichung B) heissen: $\sin(\gamma + \delta)$ statt: $\sin(\gamma + d)$

Seite 598. In der Aufgabe 882 soll es auf der rechten Seite der Relation 6) heissen:
$\frac{a^2 b^2}{c} \sin^3\gamma$ statt: $\frac{a^2 b}{c} \sin^3\gamma$

Seite 615. In der Aufgabe 899 soll es in Relation 3) heissen: $\frac{c_1}{\sin 2\gamma}$ statt: $\frac{c_1}{\sin 2\alpha}$

Seite 655. In der Aufgabe 951 soll es in Relation 12) heissen: $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$
ferner soll es in Relation 17) heissen: ϱ_a statt ϱ^a

Seite 673. In Erkl. 568 soll es in Gleichung 1) heissen: $\frac{a}{2}\sqrt{3}$ statt: $\frac{\alpha}{2}\sqrt{3}$

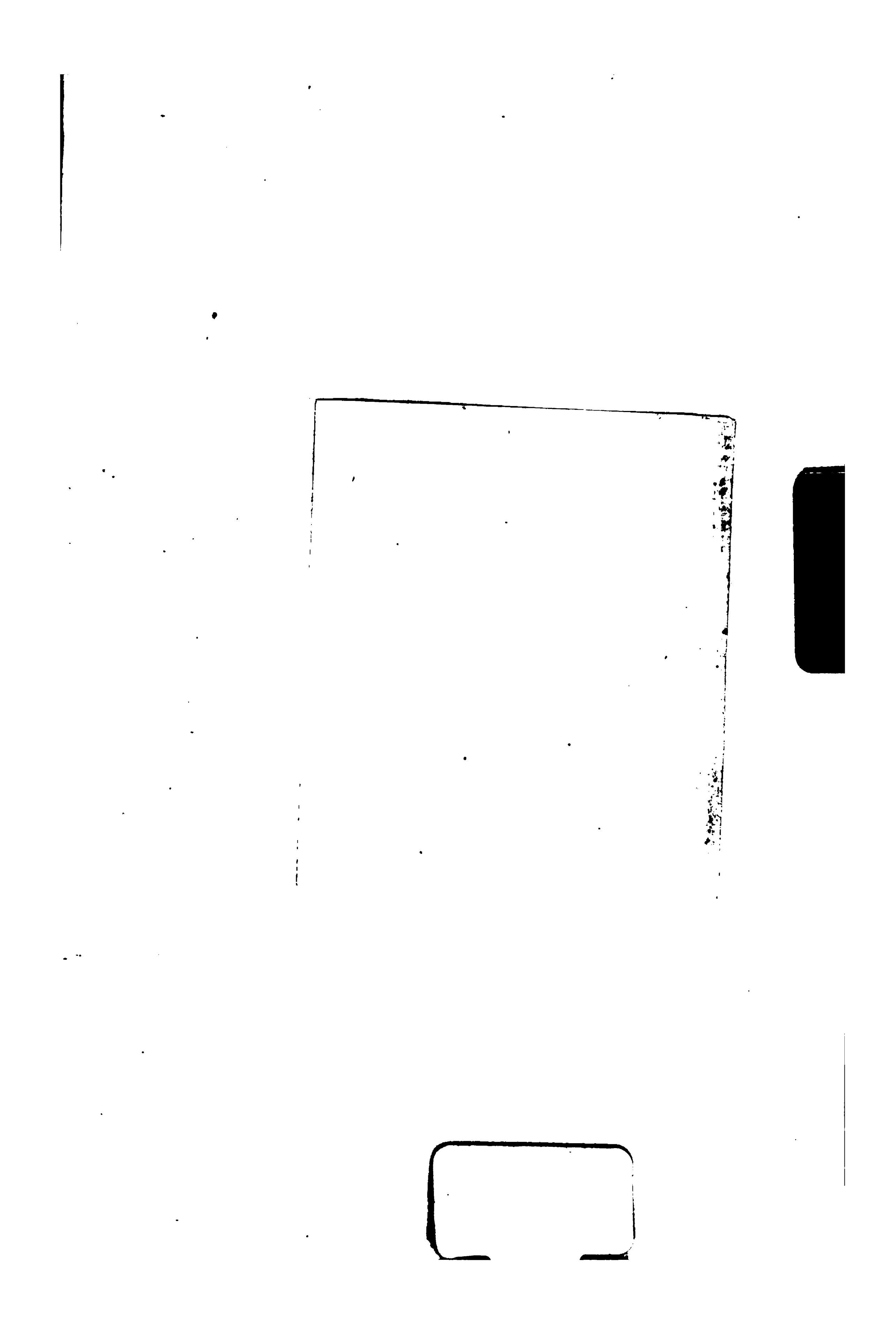
Seite 690. In Aufgabe 980 soll es unter der Wurzel in der Relation heissen: s^2_{2n} statt: s_{2n}

Seite 815. Die Anmerkung 64 soll die No. 64a statt: die No. 64 haben.

Seite 925. In der Anmerkung zu den Formeln 191 bis 193 soll es heissen: **ein**beschriebenen statt: umbeschriebenen.

Seite 938. In der Ueberschrift des Abschnitts l) soll es heissen: **den Winkeln und den Höhen**, statt: den Winkeln und der Höhe.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.




Math 8018.88
Lehrbuch der ebenen Trigonometrie :
Cabot Science 003345049
3 2044 091 917 542